

你真的懂级数吗?

计算与证明题 (每小题 10 分, 共 100 分)

1. 计算级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{n(2n+1)}{(n+1)(2n-1)} \right).$$

2. 判断以下级数的敛散性

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+1}).$$

3. 求以下幂级数的收敛域

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

4. 计算级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3n+1}.$$

5. 计算级数

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2-1}.$$

6. 我们称形如 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的正项级数为递减正项级数, 如果满足 $a_{n+1} \leq a_n$ 对任意正整数 n 成立.

(1) 叙述并证明正项级数的比值判别法.

(2) 对于一个递减正项级数, 证明以下的判别法: 如果极限 $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n}}{a_n}$ 存在, 则当 $\rho < 1/2$ 时级数收敛, 当 $\rho > 1/2$ 时级数发散, 当 $\rho = 1/2$ 时无法判定.

(3) 证明: 对于一个递减正项级数, 如果能用比值判别法判定其收敛, 则也能用第 (2) 问中的方法判定其收敛; 如果能用比值判别法判定其发散, 则也能用第 (2) 问中的方法判定其发散.

(4) 试构造一个递减正项级数, 满足能用第 (2) 问中的方法判定其发散, 但不能用比值判别法判定其发散.

7. 本题的目标是证明著名的 $\sin x$ 无穷级数展开式.

- (1) 设 $\alpha \notin \mathbb{Z}$, 定义 $f(x) = \cos \alpha x$, $x \in [-\pi, \pi]$ 并周期延拓到 \mathbb{R} 上. 计算 $f(x)$ 的 Fourier 级数.
- (2) 证明: 对 $|x| < 1$, 有

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right).$$

8. 本题中, 我们将讨论牛顿广义二项式定理.

- (1) 对任意实数 α , 定义广义二项式系数

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} \quad (k \in \mathbb{N}), \quad \binom{\alpha}{0} = 1.$$

试讨论幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$ 的收敛域, 并求出其和函数.

- (2) 证明: 对 $x \in [-1, 1]$, 有

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

9. 本题中, 我们将追随 Terry Tao 的脚步, 证明级数

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|^n}{n}$$

收敛. 以下结果将用到: 存在 $\mu > 0$, 满足对任意 $\varepsilon > 0$, $\left|\pi - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^{\mu+\varepsilon}}$ 对充分大的 q 成立 (这里 p, q 都是整数). 不妨假设 $\mu > 3$. 固定 $0 < \varepsilon < 1$.

- (1) 证明: 对充分大的 p , 有 $\text{dist}(p/\pi, \mathbb{Z}) > \frac{1}{p^{\mu-1+\varepsilon}}$.
- (2) 证明: 存在 $C_1 > 0$, 满足对任意非负整数 k 和长为 2^{-k} 的区间 $J \subset [0, 1]$, 区间 $[2^k, 2^{k+1}]$ 中至多有 $C_1 \cdot 2^{k(1-\frac{1}{2(\mu-1+\varepsilon)})}$ 个正整数 n , 满足 $|\sin n| \in J$.
- (3) 证明: 存在 $C_2 > 0$, 使得 $\sum_{2^k \leq n < 2^{k+1}} |\sin n|^n \leq C_2 \cdot 2^{k(1-\frac{1}{2(\mu-1+\varepsilon)})}$ 对任意非负整数 k 成立.
- (4) 证明: I 收敛.

10. 设 A, B 是正奇数集合 $\{1, 3, 5, \dots\}$ 的任意一个划分. 证明: 存在一个实数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$, 使得级数

$$a_1^\ell + a_2^\ell + \cdots + a_n^\ell + \cdots$$

在 $\ell \in A$ 时是发散的并且当 $\ell \in B$ 时是收敛的.

附加题 (每小题 10 分, 共 50 分)

11. 记

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}, \quad v = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{(3n+1)!}, \quad w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+2}}{(3n+2)!}.$$

证明: $u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw = 1$.

12. 求以下函数的 Fourier 级数:

$$(1) \ u(x) = e^{\cos x} \cos(\sin x); \quad (2) \ v(x) = e^{\cos x} \sin(\sin x).$$

13. 将 10 进制下不含数码 0 的所有正整数从小到大排列为 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} < 90$.

14. 设 a_1, a_2, a_3, \dots 是一列正实数满足 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1$, 试求下式的最大值

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} (a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}.$$

15. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散. 证明: 存在一个收敛的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, 满足 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{x_n y_n} = +\infty$.

参考答案

1. 计算级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{n(2n+1)}{(n+1)(2n-1)} \right).$$

解答 $\ln 2$. 直接计算部分和即可: 通项 $\ln \left(\frac{n(2n+1)}{(n+1)(2n-1)} \right) = \ln n - \ln(n+1) + \ln(2n+1) - \ln(2n-1)$, 故所求级数的前 N 项和是 $\ln 1 - \ln(N+1) + \ln(2N+1) - \ln 1$, 极限是 $\ln 2$. \square

2. 判断以下级数的敛散性

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+1}).$$

解答 条件收敛. 一方面

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |\sin(\pi\sqrt{n^2+1})| &= \sum_{n=1}^{\infty} |\sin(\pi\sqrt{n^2+1} - n\pi)| = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} \cdot \pi\right) \\ &\geq \sum_{n=1}^{\infty} 2\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} \cdot \pi\right) = +\infty. \end{aligned}$$

其中的不等号用到了 $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$). 另一方面

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} \cdot \pi\right)$$

是一个交错级数, 由 Leibniz 判别法即知收敛. \square

3. 求以下幂级数的收敛域

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

解答 收敛域是 $[-1, 1]$. 由柯西-阿达马公式知收敛半径是 1, 再单独讨论端点即可. \square

4. 计算级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3n+1}.$$

解答 $\frac{1}{3} \left(\ln 2 + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \right)$. 考虑幂级数

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{3n+1}}{3n+1}.$$

收敛半径是 1, 且在 $x = 1$ 处收敛. 由 Abel 第二定理知

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3n+1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} S(x).$$

至于 $S(x)$ 的计算, 首先 $S(0) = 0$ 求导知 $S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n} = \frac{1}{1+x^3}$. 故

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \int_0^x S'(t) dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^3} dt = \frac{1}{3} \left(\ln 2 + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \right).$$

□

5. 计算级数

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2 - 1}.$$

解答 令 $y = \pi - x$, 则

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2 - 1} &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos ny}{n^2 - 1} = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\cos ny}{n-1} - \frac{\cos ny}{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\cos((n-1)y) \cos y - \sin((n-1)y) \sin y}{n-1} - \frac{\cos((n+1)y) \cos y + \sin((n+1)y) \sin y}{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\cos^2 y + \frac{\cos 2y \cos y}{2} - 2 \sin y \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin ny}{n} + \sin^2 y + \frac{\sin 2y \sin y}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \cos y - (\pi - y) \sin y \right) \end{aligned}$$

最后一步要求 $0 < y < 2\pi$, 用到了经典结论

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin ny}{n} = \frac{\pi - y}{2}, \quad 0 < y < 2\pi$$

因此, 对 $x \in (-\pi, \pi)$, 有

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2 - 1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cos x - \frac{1}{2} x \sin x.$$

此外, 易知级数在 $x = \pi$ 处取 $3/4$, 也符合上式. □

评注 基础题. 只需要对那个非常经典的 Fourier 级数 $(\sin nx/n)$ 的和函数有所了解, 想要往那个形式去凑是自然的. 此题也可以用复数计算.

6. 我们称形如 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的正项级数为递减正项级数, 如果满足 $a_{n+1} \leq a_n$ 对任意正整数 n 成立.

(1) 叙述并证明正项级数的比值判别法.

(2) 对于一个递减正项级数, 证明以下的判别法: 如果极限 $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n}}{a_n}$ 存在, 则当 $\rho < 1/2$ 时级数收敛, 当 $\rho > 1/2$ 时级数发散, 当 $\rho = 1/2$ 时无法判定.

(3) 证明: 对于一个递减正项级数, 如果能用比值判别法判定其收敛, 则也能用第 (2) 问中的方法判定其收敛.

(4) 试构造一个递减正项级数, 满足能用第 (2) 问中的方法判定其发散, 但不能用比值判别法判定其发散.

解答

(1) 正项级数的比值判别法是: 对于一个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 如果极限 $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ 存在, 则当 $\rho < 1$ 时级数收敛, 当 $\rho > 1$ 时级数发散, 当 $\rho = 1$ 时无法判定.

(2) 我们将用到递减正项级数的凝聚检验法: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛当且仅当 $\sum_{k=0}^{\infty} b^k a_{b^k}$ 收敛, 其中 $b \geq 2$.

事实上, 当 $\rho < 1/2$ 时, 用比值判别法即知 $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ 收敛, 从而原级数收敛, $\rho > 1/2$ 同理. 至于 $\rho = 1/2$ 时失效, 举例说明即可: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$ 收敛 (用 $b = e$ 时的凝聚检验法知后者收敛).

(3) 不难证明, 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = p < 1$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n}}{a_n} = 0$. 由此即证.

(4) 考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 即可. □

评注 基础题, 考察正项级数的基础知识. 本题改编自汪林《数学分析中的反例》第五章问题 6.

7. 本题的目标是证明著名的 $\sin x$ 无穷级数展开式.

(1) 设 $\alpha \notin \mathbb{Z}$, 定义 $f(x) = \cos \alpha x$, $x \in [-\pi, \pi]$ 并周期延拓到 \mathbb{R} 上. 计算 $f(x)$ 的 Fourier 级数.

(2) 证明: 对 $|x| < 1$, 有

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right).$$

解答

(1) 直接积分可得

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \alpha x \cos nx dx = \frac{(-1)^n}{\pi} \frac{2\alpha \sin \alpha \pi}{\alpha^2 - n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin nx dx = 0$$

这表明

$$f \sim \frac{\sin \alpha \pi}{\alpha \pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi} \frac{2\alpha \sin \alpha \pi}{\alpha^2 - n^2} \cos nx.$$

(2) f 以 2π 为周期, 且在 $[-\pi, \pi]$ 上分段可微, 且在 \mathbb{R} 上连续. 故

$$\cos \alpha x = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2} \cos nx \right), \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

令 $x = \pi$ 得

$$\cot \alpha \pi = \frac{1}{\alpha \pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 - n^2} \frac{2\alpha}{\pi},$$

右边是个关于 α 的函数项级数, 由 Weierstrass 判别法易证其在 $\alpha \in (-1, 1)$ 内一致收敛, 所以对任意的 $|x| < 1$, 可以在 $[0, x]$ 上逐项积分, 即有

$$\int_0^x \left(\cot \alpha \pi - \frac{1}{\alpha \pi} \right) d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{1}{\alpha^2 - n^2} \frac{2\alpha}{\pi} d\alpha,$$

即

$$\frac{1}{\pi} \ln \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x} \right) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right),$$

这正是 $\sin x$ 的无穷乘积展开式. □

评注 基础题. 考察 Fourier 级数及其收敛准则.

8. 本题中, 我们将讨论牛顿广义二项式定理.

(1) 对任意实数 α , 定义广义二项式系数

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} \quad (k \in \mathbb{N}), \quad \binom{\alpha}{0} = 1.$$

讨论幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$ 的收敛域, 并求出其和函数.

(2) 证明: 对 $x \in [-1, 1]$, 有

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

解答

(1) 记 $f_{\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$, 关于其收敛域我们有结论:

- 当 $\alpha \leq -1$ 时, 收敛域为 $(-1, 1)$;
- 当 $-1 < \alpha < 0$ 时, 收敛域为 $(-1, 1]$;
- 当 $\alpha > 0$ 且 $\alpha \notin \mathbb{Z}_+$ 时, 收敛域为 $[-1, 1]$;
- 当 $\alpha \in \mathbb{N}$ 时, 收敛域为 \mathbb{R} .

记 $\beta = \alpha + 1$. 我们只需依次证明如下结论:

A: 当 $\alpha \in \mathbb{N}$ 时, f_{α} 是个有限求和.

B: 对任意 $\alpha \in \mathbb{R}$ 时, f_{α} 都在 $(-1, 1)$ 上绝对收敛.

证: 由比较判别法立即可得.

C: 只要 $\alpha \notin \mathbb{N}$, f_{α} 都在 $|x| > 1$ 上发散.

证: 只需注意到

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\binom{\alpha}{k+1}|}{|\binom{\alpha}{k}|} = 1,$$

取 $0 < \varepsilon < |x| - 1$, k 充分大时, 有 $|\binom{\alpha}{k+1}| < (1 + \varepsilon)|\binom{\alpha}{k}|$, 从而 $|\binom{\alpha}{k+1}x^{k+1}| / |\binom{\alpha}{k}x^k| > |x|/(1 + \varepsilon)$,

由此知 f_{α} 的通项不趋于 0, 当然发散.

D: 当 $\alpha \leq -1$ 时, $\binom{\alpha}{k}$ 不趋于 0.

证: 只需注意到, 当 k 充分大时,

$$\frac{|\binom{\alpha}{k+1}|}{|\binom{\alpha}{k}|} = \frac{k+1-\beta}{k+1} \geq 1.$$

D+: 当 $\alpha \leq -1$ 时, f_{α} 在 $x = \pm 1$ 均不收敛.

证: 由 (D) 知 $f_{\alpha}(\pm 1)$ 的通项不趋于 0, 当然不收敛.

E: 当 $\alpha > -1$ 且 $\alpha \notin \mathbb{N}$ 时, 对充分大的 k , 有 $\binom{\alpha}{k}$ 交错递减, 且可被 $O(k^{-\beta})$ 控制.

证: 交错性 (即正负交替) 是显然的. 此时 $\beta > 0$, 因此

$$\frac{|\binom{\alpha}{k+1}|}{|\binom{\alpha}{k}|} = \frac{k+1-\beta}{k+1} < 1.$$

即 $|\binom{\alpha}{k}|$ 是递减的. 最后, 考虑 $m = [\beta]$ 是不超过 β 的最大整数, 则

$$\frac{|\binom{\alpha}{k}|}{|\binom{\alpha}{m}|} = \frac{k-\beta}{k} \cdot \frac{k-1-\beta}{k-1} \cdots \frac{m+1-\beta}{m+1} = \left(1 - \frac{\beta}{k}\right) \left(1 - \frac{\beta}{k-1}\right) \cdots \left(1 - \frac{\beta}{m+1}\right),$$

取对数, 再用 $\ln(1-x) \leq -x$ 得

$$\frac{|\binom{\alpha}{k}|}{|\binom{\alpha}{m}|} \leq \exp\left(-\frac{\beta}{k} - \frac{\beta}{k-1} - \cdots - \frac{\beta}{m+1}\right),$$

由调和级数的性质知, 存在 C , 使得对任意 $k > m$ 有 $\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + \cdots + \frac{1}{m+1} > \ln k - C$, 故 $\exp\left(-\frac{\beta}{k} - \frac{\beta}{k-1} - \cdots - \frac{\beta}{m+1}\right) < \exp(\beta(C - \ln k)) = e^{C\beta} k^{-\beta}$.

E+: 当 $\alpha > -1$ 时, f_α 在 $x = 1$ 处收敛.

证: 由 (E) 和交错级数的 Leibniz 判别法即得.

E++: 当 $\alpha > 0$ 且 $\alpha \notin \mathbb{Z}_+$ 时, f_α 在 $x = -1$ 处收敛.

证: 此时 $\beta > 1$, 由 (E) 和 $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\beta}$ 收敛即得.

F: 当 $-1 < \alpha < 0$ 时, 对任意 k 有 $\binom{\alpha}{k}(-1)^k > (-\alpha)/k$.

证: 事实上, 因为

$$\binom{\alpha}{k}(-1)^k = \frac{(1-\beta)(2-\beta)\cdots(n-\beta)}{n!}$$

分子每项都大于 0, 且 $2-\beta > 1, 3-\beta > 2, \dots, n-\beta > n-1$, 即得.

F+: 当 $-1 < \alpha < 0$ 时, f_α 在 $x = -1$ 处不收敛.

证: 由 (F) 和调和级数发散即得.

接下来的部分, 我们证明无论是哪种情况, 在收敛域内总有

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = (1+x)^\alpha.$$

事实上只需证明在 $x \in (-1, 1)$ 时上式成立, 因为端点处均可用 Abel 第二定理处理.

这里我们用复变函数的方法. 对于复函数 $(1+z)^\alpha = e^{\alpha \log(1+z)}$, 选定满足 $\log 1 = 0$ 的分支, 那么函数 $(1+z)^\alpha$ 在开圆盘 $|z| < 1$ 内单值且解析, 由 Taylor 定理知

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k = (1+z)^\alpha, \quad \forall |z| < 1.$$

特别地, 取 z 是实数即证.

(2) 取 $\alpha = -1/2$, 得

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n, \quad \forall x \in (-1, 1].$$

所以

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}, \quad \forall x \in (-1, 1).$$

根据幂级数的性质, 在两边同时积分, 得

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad \forall x \in (-1, 1).$$

我们还需要证明对 $x = \pm 1$ 上式成立. 由于两边都是奇函数, 只需验证 $x = 1$ 的情形即可. 记

$$a_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{2n+1}.$$

这里最大的问题是不好验证级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 是否收敛, 因此使用 Tauber 定理是自然的. 容易得到 $a_n \geq \frac{1}{2n(2n+1)}$, 故 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径是 1. 另一个条件 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 存在已经在上面得到了, 所以只需要证明 $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$. 我们用 Wallis 公式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2},$$

变形可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n (2n+1)^{3/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} (na_n) \cdot \sqrt{n} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} (na_n) = 0$. 最后, 由 Tauber 定理

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\arcsin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \arcsin 1.$$

这就是要证的. □

评注 中档题, 全面考察了幂级数的相关知识, 包括收敛域、端点处收敛性、Taylor 定理、Abel 第二定理、Tauber 定理等. 从应试的角度出发, 本题的结论并不要求记忆, 但至少需要对第 (1) 问中讨论收敛域时对 α 的分类标准有所印象, 在考试时才不容易遗漏. 此外, 第 (2) 问中一定不能想当然忽略对 $x = \pm 1$ 情形的证明. 最后补充一点, 第 (2) 问的最后一步, 也可以用 $a_n \geq 0$ 版本的 Tauber 定理 (即不需要验证 $a_n = o(1/n)$).

9. 本题中, 我们将追随 Terry Tao 的脚步, 证明级数

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|^n}{n}$$

收敛. 以下结果将用到: 存在 $\mu > 0$, 满足对任意 $\varepsilon > 0$, $\left| \pi - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{q^{\mu+\varepsilon}}$ 对充分大的 q 成立 (这里 p, q 都是整数). 不妨假设 $\mu > 3$. 固定 $0 < \varepsilon < 1$.

(1) 证明: 对充分大的 p , 有 $\text{dist}(p/\pi, \mathbb{Z}) > \frac{1}{p^{\mu-1+\varepsilon}}$.

(2) 证明: 存在 $C_1 > 0$, 满足对任意非负整数 k 和长为 2^{-k} 的区间 $J \subset [0, 1]$, 区间 $[2^k, 2^{k+1}]$ 中至多有 $C_1 \cdot 2^{k(1-\frac{1}{2(\mu-1+\varepsilon)})}$ 个正整数 n , 满足 $|\sin n| \in J$.

(3) 证明: 存在 $C_2 > 0$, 使得 $\sum_{2^k \leq n < 2^{k+1}} |\sin n|^n \leq C_2 \cdot 2^{k(1-\frac{1}{2(\mu-1+\varepsilon)})}$ 对任意非负整数 k 成立.

(4) 证明: I 收敛.

证明

(1) 要证的等价于: 对最接近 p/π 的整数 q , 有 $\left| \frac{p}{\pi} - q \right| > \frac{1}{p^{\mu-1+\varepsilon}}$.

先令 $p > 100$, 则必有 $p/3 > q > p/4$. 因此 p 充分大也保证了 q 充分大, 从而 $\left| \pi - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{q^{\mu+\varepsilon}}$ 成立. 这表明 $\left| \frac{p}{\pi} - q \right| > \frac{1}{\pi \cdot q^{\mu-1+\varepsilon}} > \frac{3^{\mu-1+\varepsilon}}{\pi \cdot p^{\mu-1+\varepsilon}} > \frac{1}{p^{\mu-1+\varepsilon}}$. 最后一个不等号用到了 $\mu > 3$.

(2) 先证明一个引理

引理: 设 $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1/2$, 则 $\sin(\pi x_2) - \sin(\pi x_1) \geq 2(x_2 - x_1)^2$.

引理的证明: 固定 $x_2 - x_1 = a$, 则 x_1 的取值范围是 $0 \leq x_1 \leq 1/2 - a$. 求导即知 $\sin(\pi x_2) - \sin(\pi x_1) = \sin(\pi(x_1 + a)) - \sin(\pi x_1)$ 是关于 x_1 的减函数, 故

$$\sin(\pi x_2) - \sin(\pi x_1) \geq \sin(\pi/2) - \sin(\pi/2 - \pi a) = 1 - \cos(\pi a) = 2 \sin^2(\pi a/2) \geq 2a^2.$$

最后一步用到了 $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$).

回到这一问. 记 $\delta = 2^{-k}$. 用 $\{x\}$ 表示实数 x 的小数部分. 则 $|\sin n| = \sin(\{\frac{n}{\pi}\}\pi)$. 记区间 $[0, 1)$ 内满足 $\sin \pi x \in J$ 的全体实数 x 构成集合 J^* . 设 $J = [a, b] \subset [0, 1]$ (这里不必区分 J 在端点处是开或闭).

那么由图象可知, J^* 是两个关于 $1/2$ 对称的区间. 设位于 $1/2$ 左侧的区间是 $[x_1, x_2]$, 则 $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1/2$ 且 $\sin(\pi x_2) - \sin(\pi x_1) = b - a = \delta$. 由引理知 $x_2 - x_1 \leq \sqrt{\delta/2}$.

因为 $|\sin n| \in J$ 等价于 $\{\frac{n}{\pi}\} \in J^*$, 我们要分析的就是后者的数量. 注意到, 如果 $n_2 > n_1$ 满足 $\{\frac{n_1}{\pi}\}, \{\frac{n_2}{\pi}\} \in [x_1, x_2]$, 那么 $\text{dist}(\frac{n_2-n_1}{\pi}, \mathbb{Z}) \leq x_2 - x_1$. 我们把 (1) 的结论等价地写为: 存在 $M_1 > 0$, 使得对任意正整数 p , 都有 $\text{dist}(p/\pi, \mathbb{Z}) > \frac{M_1}{p^{\mu-1+\varepsilon}}$, 那么

$$\sqrt{\delta/2} > \frac{M_1}{(n_2 - n_1)^{\mu-1+\varepsilon}},$$

从而

$$n_2 - n_1 > (\sqrt{2}M_1)^{\frac{1}{\mu-1+\varepsilon}} \cdot 2^{\frac{k}{2(\mu-1+\varepsilon)}} := M_2 \cdot 2^{\frac{k}{2(\mu-1+\varepsilon)}}.$$

这表明 $[2^k, 2^{k+1}]$ 中, 至多有

$$2^k \cdot \left(M_2 \cdot 2^{\frac{k}{2(\mu-1+\varepsilon)}} \right)^{-1} + 1 = \frac{1}{M_2} \cdot 2^{k(1-\frac{1}{2(\mu-1+\varepsilon)})} + 1 < \left(\frac{1}{M_2} + 1 \right) 2^{k(1-\frac{1}{2(\mu-1+\varepsilon)})}$$

个 n , 满足 $\{\frac{n}{\pi}\} \in [x_1, x_2]$. 对另半部分的 J^* 同理, n 的数量也不超过上式. 这就完成了证明.

(3) 对任意正整数 k , 考虑 $[0, 1]$ 的划分 $\bigcup_{0 \leq j \leq 2^k-1} [1 - \frac{j+1}{2^k}, 1 - \frac{j}{2^k}]$. 对每个 j , 如果 $|\sin n| \in [1 - \frac{j+1}{2^k}, 1 - \frac{j}{2^k}]$, 则 $|\sin n|^n \leq (1 - \frac{j}{2^k})^{2^k} \leq e^{-j}$. 对所有 j 求和, 并且由 (2) 知

$$\sum_{2^k \leq n < 2^{k+1}} |\sin n|^n \leq \sum_{0 \leq j \leq 2^k-1} \#\{n : |\sin n| \in [1 - \frac{j+1}{2^k}, 1 - \frac{j}{2^k}]\} \cdot e^{-j} \leq 2C_1 \cdot 2^{k(1-\frac{1}{2(\mu-1+\varepsilon)})}.$$

(4) 由 (3) 得

$$I = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{2^k \leq n < 2^{k+1}} \frac{|\sin n|^n}{n} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_2 \cdot 2^{k(1-\frac{1}{2(\mu-1+\varepsilon)})}}{2^k} = C_2 \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-\frac{k}{2(\mu-1+\varepsilon)}},$$

最右边是一个几何级数, 当然收敛. \square

评注 题目中的级数也算是“小有名气”. 本题忠实地复现了陶哲轩的证明过程, 原证明可参考 <https://mathoverflow.net/questions/282259/is-the-series-sum-n-sin-nn-n-convergent>.

10. 设 A, B 是正奇数集合 $\{1, 3, 5, \dots\}$ 的任意一个划分, 证明: 存在一个实数序列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$, 使得级数

$$a_1^\ell + a_2^\ell + \dots + a_n^\ell + \dots$$

在 $\ell \in A$ 时是发散的并且当 $\ell \in B$ 时是收敛的.

解答 首先证明一个引理

引理: 当 $A = \{2k+1\}$ 即只包含一个正奇数时, 结论是正确的.

引理的证明: 我们待定 $s_1, s_2, \dots, s_{2k+1}$, 令 $\{a_n\}$ 是如下的形式

$$a_{(2k+1)m+j} = \frac{s_j}{m^{\frac{1}{2k+1}}}, \quad j = 1, 2, \dots, 2k+1$$

也就是把每 $2k+1$ 项 a_n 分成一组, m 是组的序号 (不妨从 $m=1$ 开始), 第一个要求是

$$|s_j| \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, 2k+1$$

这就可以使得 $\ell > 2k+1$ 时级数都是收敛的. 还要求

$$s_1 + s_2 + \dots + s_{2k+1} = 0$$

$$s_1^3 + s_2^3 + \dots + s_{2k+1}^3 = 0$$

...

$$s_1^{2k-1} + s_2^{2k-1} + \dots + s_{2k+1}^{2k-1} = 0$$

$$s_1^{2k+1} + s_2^{2k+1} + \dots + s_{2k+1}^{2k+1} \neq 0.$$

这样就可以使得 $\ell < 2k+1$ 时收敛且 $\ell = 2k+1$ 时发散. 具体地, 我们取

$$s_j = \operatorname{Re}(\omega^j)$$

其中 $\omega = e^{2\pi i/(2k+1)}$ 是 $2k+1$ 次单位根. 则

$$\begin{aligned} 2^\ell \sum_{j=1}^{2k+1} s_j^\ell &= \sum_{j=1}^{2k} (\omega^j + \omega^{-j})^\ell \\ &= \sum_{j=1}^{2k+1} \sum_{p=0}^{\ell} \binom{\ell}{p} \omega^{pj} \cdot \omega^{-(\ell-p)j} \\ &= \sum_{j=1}^{2k+1} \sum_{p=0}^{\ell} \binom{\ell}{p} \omega^{(2p-\ell)j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{p=0}^{\ell} \binom{\ell}{p} \sum_{j=1}^{2k+1} \omega^{(2p-\ell)j} \\
&= \sum_{p=0}^{\ell} \binom{\ell}{p} S(2p - \ell)
\end{aligned}$$

其中 $S(p)$ 是所有 $2k+1$ 次单位根的 p 次幂和, 当且仅当 $2k+1 \mid p$ 时不为 0. 对于 $\ell < 2k+1$, 很明显 $2p - \ell$ 介于 $-\ell$ 和 ℓ 之间且都是奇数, 不可能有 $2k+1$ 倍数, 故上式最后一项是 0. 对 $\ell = 2k+1$, 易知 $2p - \ell$ 只有 $p = 0$ 或 ℓ 时才是 $2k+1$ 倍数, 故上式最后一项是 $2(2k+1) \neq 0$. 这就说明构造是符合要求的.

回到原题. 注意到引理中的构造满足一个条件: 对每个给定的正奇数 $2k+1$, 那些 $\ell \neq 2k+1$ 对应的级数一致有界. 换句话说, 存在 $M = M(2k+1) > 1$, 使得

$$|a_1|^{\ell} + |a_2|^{\ell} + \cdots + |a_n|^{\ell} + \cdots < M, \quad \forall \ell \neq k.$$

我们把 $\ell = 2k+1$ 时构造的数列记为 $a_{2k+1,n}$ ($n = 1, 2, \dots$). 设 $A = \{q_1, q_2, \dots\}$ 是升序排列, 考虑数表

$$\begin{aligned}
&\frac{a_{q_1,1}}{2^{q_1} M(q_1)}, \quad \frac{a_{q_1,2}}{2^{q_1} M(q_1)}, \dots \\
&\frac{a_{q_2,1}}{2^{q_2} M(q_2)}, \quad \frac{a_{q_2,2}}{2^{q_2} M(q_2)}, \dots \\
&\dots \\
&\frac{a_{q_N,1}}{2^{q_N} M(q_N)}, \quad \frac{a_{q_N,2}}{2^{q_N} M(q_N)}, \dots \\
&\dots
\end{aligned}$$

然后, 按照对角线法则得到所要的级数. 具体来说, 我们称上表的第 L 条对角线是所有满足 $u+v=L$ 的项 $\frac{a_{qu,v}}{2^{qu} M(q_u)}$ 连成的线, 先取完第 2 条对角线中的项, 再取完第 3 条对角线中的项, 等等. 在每条对角线中, 按所在行的序号从小往大取.

对于 $\ell \in B$, 我们说明该级数绝对收敛. 对任意一行 (设为第 N 行), 一定有 $\ell \neq q_N$, 故该行 ℓ 次幂和小于 2^{-q_N} , 再对所有 N 求和知不超过 1.

对于 $\ell \in A$, 不妨设 $\ell = q_N$, 我们说明该级数发散. 与上面同理, 第 N 行之外的所有项, 其绝对值的 ℓ 次幂和小于 1. 而第 N 行的 ℓ 次幂和发散到无穷. 直接由级数的定义就可以证明整个级数是发散的. \square

评注 困难的问题. 本题摘自汪林《实分析的反例》第五章问题 29, 原始的证明 (属于 Fine) 与此处的证明略有差别, 但最核心的思想 (即先对 $|A|=1$ 构造再用对角线法则) 是相同的.

11. 记

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}, \quad v = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{(3n+1)!}, \quad w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+2}}{(3n+2)!}.$$

证明: $u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw = 1$.

解答 注意到

$$u = \frac{dv}{dx}, \quad v = \frac{dw}{dx}, \quad w = \frac{du}{dx},$$

故

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw) &= 3u^2 \frac{du}{dx} + 3v^2 \frac{dv}{dx} + 3w^2 \frac{dw}{dx} - 3vw \frac{du}{dx} - 3uw \frac{dv}{dx} - 3uv \frac{dw}{dx} \\ &= 3u^2w + 3v^2u + 3w^2v - 3vw^2 - 3u^2w - 3uv^2 = 0. \end{aligned}$$

因此 $u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw$ 恒为常值. 当 $x = 0$ 时有 $u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw = 1$, 即证. \square

评注 经典题, 想到求导确实有一定的难度, 但除此之外基本平凡.

12. 求以下函数的 Fourier 级数:

$$(1) u(x) = e^{\cos x} \cos(\sin x); \quad (2) v(x) = e^{\cos x} \sin(\sin x).$$

解答

$$u(x) + iv(x) = e^{\cos x} (\cos(\sin x) + i \sin(\sin x)) = e^{\cos x + i \sin x} = e^{e^{ix}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx + i \sin nx}{n!}$$

故

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!}, \quad v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!},$$

这里 x 可以在 \mathbb{R} 上任意取值. \square

评注 经典的技巧——用复数方法计算三角级数. 本题也可以分别展开 $e^{\cos x}$ 和 $\cos(\sin x)$, 再计算其 Cauchy 乘积.

13. 将 10 进制下不含数码 0 的所有正整数从小到大排列为 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} < 90$.

解答 考虑如下的分段估计

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} = \underbrace{\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} \right)}_{g_1} + \underbrace{\left(\frac{1}{11} + \cdots + \frac{1}{99} \right)}_{g_2} + \underbrace{\left(\frac{1}{111} + \frac{1}{999} \right)}_{g_3} + \cdots$$

每个 g_n 中有 9^n 项, 且每一项至多为 $\frac{1}{10^{n-1}}$, 故 $g_n < 9^n \cdot \frac{1}{10^{n-1}} = 9 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} g_n < 90$.
□

评注 经典题, 但有趣. 一个类似的问题是取掉所有含数码 9 的数, 再证明倒数和小于 80. 具体可见常庚哲、史济怀《数学分析教程(下册)》问题 14.2 第 5 题. 方法是完全一样的.

14. 设 a_1, a_2, a_3, \dots 是一列正实数满足 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1$, 试求下式的最大值

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} (a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}.$$

解答 最大值是 $2/3$. 注意到

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} (a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} &= \left(\frac{a_1}{2^1}\right)^{\frac{1}{1}} + 2 \left(\frac{a_1}{2^3} \cdot \frac{a_2}{2^1}\right)^{\frac{1}{2}} + 3 \left(\frac{a_1}{2^5} \cdot \frac{a_2}{2^3} \cdot \frac{a_3}{2^1}\right)^{\frac{1}{3}} + \cdots \\ &\leq \left(\frac{a_1}{2^1}\right) + \left(\frac{a_1}{2^3} + \frac{a_2}{2^1}\right) + \left(\frac{a_1}{2^5} + \frac{a_2}{2^3} + \frac{a_3}{2^1}\right) + \cdots \\ &= \frac{2}{3} (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots) = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

等号成立当且仅当 $a_1 = 4a_2 = 4^2a_3 = \cdots$, 即 $a_k = \frac{3}{4^k}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$).
□

评注 本题是 Putnam 2021 B2, 难度不大, 但颇有美感.

15. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散. 证明: 存在一个收敛的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, 满足 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{x_n y_n} = +\infty$.

解答

方法一 (构造性证明): 设 $0 = N_0 < N_1 < N_2 \cdots$ 满足 $s_k = \sum_{N_k \leq n < N_{k+1}} x_n \geq 1$ 对 $k = 0, 1, 2, \dots$ 成立. 对 $N_k \leq n < N_{k+1}$, 定义

$$y_n = \frac{1}{k^2 s_k} \cdot x_n$$

则

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{N_k \leq n < N_{k+1}} \frac{1}{k^2 s_k} \cdot x_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty$$

且

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{x_n y_n} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{N_k \leq n < N_{k+1}} \frac{1}{k \sqrt{s_k}} \cdot x_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{s_k}}{k} \geq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$$

方法二 (存在性证明): 考虑 Banach 空间 $\ell^2(\mathbb{R})$, 对每个正整数 k 定义连续算子 $\lambda_k : \ell^2 \rightarrow \mathbb{R}$, 其中

$$\lambda_k(z) = \sum_{n=1}^k \sqrt{x_n} \cdot z_n, \quad z = (z_1, z_2, \dots) \in \ell^2$$

则 λ_k 是线性算子. 且

$$\|\lambda_k\|_{\mathcal{L}(\ell^2; \mathbb{R})} = \left(\sum_{n=1}^k x_n \right)^{\frac{1}{2}}$$

注意到 Banach-Steinhaus 定理的结论不成立, 即此时有

$$\sup_k \|\lambda_k\|_{\mathcal{L}(\ell^2; \mathbb{R})} = +\infty$$

故 Banach-Steinhaus 定理的条件不成立, 即存在 $z = (z_1, z_2, \dots) \in \ell^2$, 满足

$$\sup_k |\lambda_k(z)| = +\infty$$

这说明

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{x_n} \cdot |z_n| = +\infty$$

令 $y_n = z_n^2$, 由上式知满足要求. □

评注 优雅!