Bernoulli 数—从 Basel 问题谈起

CloudySoul

1 Euler 对 Basel 问题的解答

Euler 由 $\sin x$ 的零点为 $n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$, 认为有

$$\sin x = C \prod_{n \in \mathbb{Z}} (x - n\pi),$$

考虑到右边的无穷乘积应当收敛, 写成下面的形式更合理

$$\sin x = Cx \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right),$$

令 $x \to 0$, 得 $C = 1$, 即

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

这个等式确实成立, 称为 $\sin x$ 的无穷乘积展开式. Euler 由此**不严格地**解决了 Basel 问题

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

他认为, 若将无穷乘积

$$x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

类似有限乘积的方法写成幂级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 则这个幂级数应当与 $\sin x$ 的 Maclaurin 级数

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

相等, 由此比较 x^3 的系数就可以得到 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

严格来说, Euler 需要证明以下三个命题:

命题 1 对 $\forall x\in\mathbb{R}, \sin x$ 可展开为如下无穷乘积:

$$\sin x = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

证明 由和差化积公式及 $\cos(n\theta)=P(\theta)$ (其中 P 为 n 次 Legendre 多项式), 可得

$$\sin((2n+1)\theta)-\sin((2n-1)\theta)=2\cos(2n\theta)\sin\theta=2\sin\theta\cdot P(1-2\sin^2\theta),$$

归纳易证, 存在 $2n+1$ 次多项式 Q, 使得 $\sin((2n+1)\theta)=Q(\sin\theta)$. 代入 $\theta_k=\dfrac{k\pi}{2n+1}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm n)$, 都有 $Q(\sin\theta_k)=0$, 故诸 $\sin\theta_k$ 都是 Q 的实根. 而它们互不相同, 故

$$Q(x)=Cx\prod_{k=1}^{n}\left(x-\sin\frac{k\pi}{2n+1}\right)\left(x-\sin\frac{-k\pi}{2n+1}\right)=Cx\prod_{k=1}^{n}\left(x^2-\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}\right),$$

其中 C 为某个常数. 令 $x=\sin\theta$, 得

$$\frac{\sin((2n+1)\theta)}{\sin\theta}=C\prod_{k=1}^{n}\left(\sin^2\theta-\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}\right),$$

即存在常数 C', 使得

$$\frac{\sin((2n+1)\theta)}{\sin\theta}=C'\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}}\right),$$

上式对 $\forall\theta\neq0$ 成立. 令 $\theta\to0$, 得 $C'=2n+1$, 即有

$$\sin((2n+1)\theta)=(2n+1)\sin\theta\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}}\right)\ (\forall\theta\in\mathbb{R}),$$

即

$$\sin x=(2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}}\right)\ (\forall x\in\mathbb{R}),$$

对于某个 $x, x\neq l\pi$ $(l\in\mathbb{Z})$. 先取定正整数 m, 再取正整数 $n>m$. 我们把上式右端分解成两个部分 $\sin x=U_{m,n}\cdot V_{m,n}$, 其中

$$U_{m,n}=(2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}}\right),\quad V_{m,n}=\prod_{k=m+1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}}\right),$$

注意到 $U_{m,n}$ 是个有限乘积, 由极限的乘法法则可得

$$\lim_{n\to+\infty}U_{m,n}=x\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right),$$

由于 $\sin x=U_{m,n}\cdot V_{m,n}$, 左端与 n 无关, 故 $\lim_{n\to+\infty}V_{m,n}$ 存在且

$$\lim_{n\to+\infty}V_{m,n}=\frac{\sin x}{\lim_{n\to+\infty}U_{m,n}}=\frac{\sin x}{x\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)},$$

由 $\dfrac{2}{\pi}x \le \sin x \le x$ $(0 \le x \le \dfrac{\pi}{2})$, 可得一个局部估计式

$$1-\frac{x^2}{4k^2} \le 1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}} < 1 \ (k \le n),$$

故

$$\prod_{k=m+1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{4k^2}\right) \le \prod_{k=m+1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}}\right) = V_{m,n} < 1,$$

根据上式左端与 $V_{m,n}$ 在 $n \to +\infty$ 时极限都存在, 可得

$$\prod_{k=m+1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{4k^2}\right) \le \lim_{n\to+\infty} V_{m,n} \le 1,$$

即

$$\prod_{k=m+1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{4k^2}\right) \le \frac{\sin x}{x\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)} \le 1,$$

对任意正整数 m 成立. 考察 $m \to +\infty$ 的极限, 由于最左边的式子, 是一个收敛的无穷级数

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{4k^2}\right)$$

的余项, 所以极限为 1. 故中间的式子极限存在, 且有

$$\lim_{m\to+\infty}\frac{\sin x}{x\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)} = 1,$$

即当 $x \ne l\pi$ $(l \in \mathbb{Z})$ 时, 有

$$\sin x = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right),$$

而当 $x = l\pi$ $(l \in \mathbb{Z})$ 时, 上式显然也成立, 由此即证. $\square$

命题 2 记 $b_n = \dfrac{1}{n^2\pi^2}$, 则 $a_k = \displaystyle\sum_{n_1<n_2<\cdots<n_k} b_{n_1}b_{n_2}\cdots b_{n_k}$ 收敛, 且存在正实数 R 满足: 对任意 $x \in (-R, R)$, 级数 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k x^{2k+1}$ 收敛且等于 $x\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}(1-b_n x^2)$.

证明　首先证明 a_k 的收敛性. 考虑其前 m 项和 S_m, 设这 m 项中所有下标 n_i 的最大值为 N, 则

$$\begin{aligned} S_m &\le \underbrace{(b_1+b_2+\cdots+b_N)(b_1+b_2+\cdots+b_N)\cdots(b_1+b_2+\cdots+b_N)}_{k\text{个}} \\ &= (b_1+b_2+\cdots+b_N)^k < \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)^k < +\infty. \end{aligned}$$

故这是个有界的正项级数, 从而收敛. 由其绝对收敛可以知道 a_k 的值与每个单项的求和顺序无关, 所以是良好定义的.

记 $L = b_1+b_2+\cdots$, 则 $a_k \le L^k, \forall k \ge 0$. 由 Weierstrass 判别法知, 函数项级数 $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k x^{2k}$ 在 $(-\frac{1}{\sqrt{2L}}, \frac{1}{\sqrt{2L}})$ 上一致收敛, 设收敛到函数 f. 取 $R = \min\{\frac{1}{\sqrt{2L}}, \frac{1}{2}\}$, 我们证明更强的结论: 在区间 $(-R, R)$ 中, 函数序列 $f_m = \prod_{n=1}^{m}(1-b_n x^2)$ 一致收敛到函数 f.

由于 f_m 都是关于 x 的多项式, 我们自然可以将 f_m 写成有限项级数的形式

$$f_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k c_{m,k} x^{2k}, c_{m,k} > 0, 0 \le k \le m;\ c_{m,k} = 0, \forall k > m.$$

根据定义我们可以得到, 对固定的 $k \ge 0$, 关于 m 的序列 $c_{m,k}$ 单调递增且趋于 a_k. 现在任意给定一个 $\varepsilon > 0$, 我们需要找到正整数 M, 使得对任意 $m > M, x \in (-R, R)$, 有 $|f(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

先待定一个 N, 对于 $k \le N$ 我们有 $c_{m,k} \to a_k$, 故存在正整数 $M(k)$, 当 $m > M(k)$ 时, $|a_k - c_{m,k}| < \frac{1}{2}\varepsilon$. 令 $M = \max\{M(1), M(2), \cdots, M(N)\}$, 则当 $m > M$ 时, $\forall k \le N, |a_k - c_{m,k}| < \frac{1}{2}\varepsilon$. 而对于 $k > N$, 我们有最简单的估计 $|a_k - c_{m,k}| \le |a_k| \le L^k$. 则对任意 $x \in (-R, R)$, 有

$$\begin{aligned}
|f(x) - f_m(x)| &= |\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k x^{2k} - \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k c_{m,k} x^{2k}| \\
&= |\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k (a_k - c_{m,k}) x^{2k}| \\
&\le \sum_{k=0}^{\infty}|a_k - c_{m,k}| x^{2k} \\
&\le \sum_{k=0}^{N}\frac{\varepsilon}{2} x^{2k} + \sum_{k=N+1}^{\infty} L^k x^{2k} \\
&\le \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{1-R^2} + \frac{1}{2^N}
\end{aligned}$$

而 $R \le \frac{1}{2}$, 故 $\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{1-R^2} \le \frac{2}{3}\varepsilon$. 只需让 $\frac{1}{2^N}$ 小于 $\frac{1}{3}\varepsilon$, 令 $N = \lfloor log_2\frac{3}{\varepsilon}\rfloor + 1$ 即可. □

注: 命题中的 b_n 可一般化, 只需满足正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛即可.

命题 3 若对任意 $x \in (-R, R)$, 有 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, 则对任意 $n \ge 0$, 有 $a_n = b_n$.

证明 记 $c_n = a_n - b_n$, 则对任意 $x \in (-R, R)$, 有 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$. 特别地, 有 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{R}{2}\right)^n = 0$. 故存在正整数 N, 使得对 $\forall n > N, c_n \left(\frac{R}{2}\right)^n < 1$, 即 $c_n < \left(\frac{2}{R}\right)^n$.

对 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$ 变形得 $|c_0| = |x|| \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{n-1}|$. 取 $x = \varepsilon R$, $\varepsilon < \frac{1}{4}$ 待定. 则

$$\sum_{n=N}^{\infty} |c_n||x|^{n-1} \le \sum_{n=N}^{\infty} \left(\frac{2}{R}\right)^n |\varepsilon R|^{n-1} = \frac{2}{R} \sum_{n=N}^{\infty} (2\varepsilon)^{n-1} \le \frac{2}{R} \sum_{n=N}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \le \frac{2}{R},$$

从而

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n||x|^{n-1} = \sum_{n=1}^{N-1} |c_n||x|^{n-1} + \sum_{n=N}^{\infty} |c_n||x|^{n-1} \le \sum_{n=1}^{N-1} |c_n| \left(\frac{R}{4}\right)^{n-1} + \frac{2}{R}.$$

是个定值 M, 与 ε 无关. 故

$$|c_0| = |x|| \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{n-1}| \le |\varepsilon R| \sum_{n=1}^{\infty} |c_n||x|^{n-1} \le \varepsilon M R$$

对任意 ε 成立, 故 $c_0 = 0$. 则 $\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} x^n = 0$, 同理 $c_1 = 0$. 由此可证, 对任意 $n \ge 0$, 有 $c_n = 0, a_n = b_n$. □

证完以上三个命题后, 我们就可以 "修补"Euler 的 "漏洞" 了. 根据命题 2, 我们可以得到存在正实数 R, 对任意 $x \in (-R, R)$, 有

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k x^{2k+1} = x \prod_{n=1}^{\infty} (1 - b_n x^2) = \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

再根据命题 3, 得 $a_k = \frac{1}{(2k+1)!}$. 特别地, 取 $k = 1$, 就**严格地**解决了 Basel 问题.

2 计算自然数偶数次幂倒数和

Euler 解决了 Basel 问题后, 想进一步计算 $\zeta(2m)(m \in \mathbb{Z}_+)$. 其中 $\zeta(s)$ 是黎曼 ζ 函数, 定义为

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \ (s > 1).$$

2.1 $\zeta(2m)$ 与牛顿恒等式

上一节中, 我们最终**严格地**证明了

$$\sum_{n_1 < n_2 < \cdots < n_k} \frac{1}{n_1^2 n_2^2 \cdots n_k^2} = \frac{\pi^{2k}}{(2k+1)!}.$$

先试试用这些结果能不能得到想要的 $\zeta(2m)$. 计算 $\zeta(4)$ 还算容易:

$$\frac{\pi^4}{36} = \sum_{n_1=1}^{\infty} \frac{1}{n_1^2} \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{1}{n_2^2} = \sum_{n_1=n_2} \frac{1}{n_1^2 n_2^2} + 2 \sum_{n_1 < n_2} \frac{1}{n_1^2 n_2^2}, \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{36} - \frac{2\pi^4}{5!} = \frac{\pi^4}{90}.$$

计算 $\zeta(6)$ 就比较复杂:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\pi^2}{6}\right)^3 &= \sum_{n_1=1}^{\infty}\frac{1}{n_1^2}\sum_{n_2=1}^{\infty}\frac{1}{n_2^2}\sum_{n_3=1}^{\infty}\frac{1}{n_3^2} = \sum_{n_1=n_2=n_3}\frac{1}{n_1^2n_2^2n_3^2}+3\sum_{n_1=n_2\neq n_3}\frac{1}{n_1^2n_2^2n_3^2}+6\sum_{n_1<n_2<n_3}\frac{1}{n_1^2n_2^2n_3^2}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}+6\sum_{n_1<n_2<n_3}\frac{1}{n_1^2n_2^2n_3^2}+3\left(\sum_{n_1=1}^{\infty}\frac{1}{n_1^4}\sum_{n_3=1}^{\infty}\frac{1}{n_3^2}-\sum_{n_1=1}^{\infty}\frac{1}{n_1^6}\right)\\ &= 6\sum_{n_1<n_2<n_3}\frac{1}{n_1^2n_2^2n_3^2}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}+3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},\\ &\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{\pi^6}{2}\left(\frac{1}{840}-\frac{1}{216}+\frac{1}{180}\right)=\frac{\pi^6}{945}.\end{aligned}$$

记 $x_n=\dfrac{1}{n^2}$. 如果想要继续计算更大的 $\zeta(2m)$, 就需要得到 $\zeta(2m)$ 关于已知量 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_m$ 的 “统一” 表达式 $f(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_m)$, 其中 σ_k 是 $x_1,x_2,\cdots$ 的第 k 个 “初等对称多项式”(注意这不是真正的初等对称多项式). 显然有 $\zeta(2m)$ 是 $x_1,x_2,\cdots$ 的 m 次幂和 s_m. 我们已经证明了诸 σ_k 和 s_m 收敛. 下面先看看 m 较小的情形, 也就是刚才得到的结果:

$$s_2=s_1\sigma_1-2\sigma_2,$$

$$2s_3=6\sigma_3+3s_2\sigma_1-s_1^3,$$

后面一式可变形为

$$s_3=s_2\sigma_1-s_1\sigma_2+3\sigma_3.$$

回顾有限的情形, 我们有关于 n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的牛顿恒等式 (其中 $s_0=n$)

$$s_k-s_{k-1}\sigma_1+s_{k-2}\sigma_2-\cdots+(-1)^{k-1}s_1\sigma_{k-1}+(-1)^kk\sigma_k=0\ (k\le n-1),$$

$$s_k-s_{k-1}\sigma_1+s_{k-2}\sigma_2-\cdots+(-1)^ns_{k-n}\sigma_n=0\ (k\ge n).$$

对无限的情形 ($n=+\infty$), 当然有 $k\le n-1$, 我们自然会猜测有如下命题:

命题 4 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛, 则类似定义出的诸 σ_k 和 s_m 也收敛, 且对任意正整数 $k\ge 1$ 有

$$s_k-s_{k-1}\sigma_1+s_{k-2}\sigma_2-\cdots+(-1)^{k-1}s_1\sigma_{k-1}+(-1)^kk\sigma_k=0.$$

证明 收敛性在命题 2 中已经证明了. 对于有限情形 $x_1,x_2,\cdots,x_m(m>k)$, 记 $s_{m,k}$ 为对应的 s_k, $\sigma_{m,k}$ 为对应的 σ_k, T_m 为对应的和式, 即

$$s_{m,k}-s_{m,k-1}\sigma_{m,1}+s_{k-2}\sigma_{m,2}-\cdots+(-1)^{k-1}s_{m,1}\sigma_{k-1}+(-1)^kk\sigma_{m,k}=T_m.$$

则 $T_m=0$. 令 $m\to\infty$, 则 $s_{m,i}\to s_i,\sigma_{m,i}\to\sigma_i$(后者其实就是命题 2 中的 $c_{m,k}\to a_k$), 再由极限的加法和乘法即证. □

遗憾的是, 我们只能得到关于 m 的数列 $\zeta(2m)$ 的一个递推式, 并没有得到通项公式. 下一节我们会知道, $\zeta(2m)$ 的值与 Bernoulli 数密切相关, 所以引入 Bernoulli 数之前, 很难得到"好看"的通项公式. 这条路再往前就走不通了, 我们必须寻找别的方法.

2.2 $\zeta(2m)$ 与 Bernoulli 数

回到等式

$$\sin x=x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

先变形为

$$|\sin x|=|x|\prod_{n=1}^{\infty}\left|1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right|,$$

再取对数

$$\ln\ |\sin x|-\ln\ |x|=\sum_{n=1}^{\infty}\ln\ \left|1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right|,$$

这里的 x 取值范围是 $\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$. 我们就在区间 $I=[\delta,\pi-\delta]$ 上考虑这个等式, 其中 δ 是个小量. 此时, 由于 $\ln\ \left|1-\dfrac{x^2}{n^2\pi^2}\right|$ 的导函数 $\dfrac{-2x}{n^2\pi^2-x^2}$ 在 I 上连续, 且由 Weierstrass 判别法知级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2x}{n^2\pi^2-x^2}$ 在 I 上一致收敛. 由逐项求导定理有

$$\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2x}{n^2\pi^2-x^2},$$

故

$$\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n^2\pi^2}\frac{1}{1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}}=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n^2\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)^m,$$

我们希望可以换序求和, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n^2\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)^m=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{2m+1}}{\pi^{2m+2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2m+2}},$$

由此即得

$$\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}=-2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{2m+1}}{\pi^{2m+2}}\zeta(2m+2)=-2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{2m-1}}{\pi^{2m}}\zeta(2m).$$

这样, 如果再得到了 $\dfrac{\cos x}{\sin x}-\dfrac{1}{x}$ 的幂级数展开式, "比较系数" 就可以算出 $\zeta(2m)$.

下面我们证明换序求和的合理性. 事实上, 我们有更强的结论 (以下命题及证明参考自 Stein 的《Complex Analysis》一书):

命题 5 指标定义在 $\mathbb{Z}_+\times\mathbb{Z}_+$ 上的复数列 $\{a_{kl}\}_{1\le k,l<\infty}$ 若满足 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{\infty}|a_{kl}|\right)<+\infty$ 则:

(i) 二重和 $A=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{\infty}a_{kl}\right)$ 收敛, 且可以换序求和, 即 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}a_{kl}=\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{kl}$.

(ii) 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在正整数 N, 满足对任意 $K,L>N$, 有 $\left|A-\displaystyle\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L}a_{kl}\right|<\varepsilon$.

(iii) 若 $m\mapsto(k(m),l(m))$ 是 $\mathbb{Z}_+\mapsto\mathbb{Z}_+\times\mathbb{Z}_+$ 的双射, 令 $c_m=a_{k(m)l(m)}$, 则 $A=\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}c_m$.

证明　先证明 (i). 记 $M_k=\displaystyle\sum_{l=1}^{\infty}|a_{kl}|$, 则 $M_k<+\infty$ 且 $M=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}M_k<+\infty$. 再记 $b_k=\displaystyle\sum_{l=1}^{\infty}a_{kl}$, 则 b_k 绝对收敛, 故 b_k 收敛. 显然 b_k 任一部分和模长不超过 M_k, 故 $|b_k|\le M_k$, 从而有 $\displaystyle\sum_{k=1}^{K}|b_k|\le\sum_{k=1}^{K}M_k\le M$, 从而知级数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}a_{kl}$ 绝对收敛, 从而收敛. 下面先证明: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{n}a_{kl}=A$.

对 $\varepsilon>0$, 可取正整数 K_0, 使得对 $\forall K\ge K_0$, $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{K}M_k-M\right|<\dfrac{\varepsilon}{3}$, 即 $\displaystyle\sum_{k=K_0+1}^{\infty}M_k<\frac{\varepsilon}{3}$. 现在对 $1\le k\le K_0$, 取正整数 N_k 满足, 对 $\forall n>N_k$, 有 $\left|\displaystyle\sum_{l=1}^{n}a_{kl}-\sum_{l=1}^{\infty}a_{kl}\right|<\dfrac{\varepsilon}{3K_0}$, 则对 $n>\displaystyle\max_{1\le k\le K_0}N_k$ 有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{n}a_{kl}-A\right|&\le\left|\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{n}a_{kl}-\sum_{k=1}^{K_0}\sum_{l=1}^{n}a_{kl}\right|+\left|\sum_{k=1}^{K_0}\sum_{l=1}^{n}a_{kl}-\sum_{k=1}^{K_0}\sum_{l=1}^{\infty}a_{kl}\right|+\left|\sum_{k=1}^{K_0}\sum_{l=1}^{\infty}a_{kl}-A\right|\\&\le\sum_{k=K_0+1}^{\infty}\sum_{l=1}^{n}|a_{kl}|+\sum_{k=1}^{K_0}\left|\sum_{l=1}^{n}a_{kl}-\sum_{l=1}^{\infty}a_{kl}\right|+\sum_{k=K_0+1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}|a_{kl}|\\&\le\sum_{k=K_0+1}^{\infty}M_k+K_0\cdot\frac{\varepsilon}{3K_0}+\sum_{k=K_0+1}^{\infty}M_k<\varepsilon.\end{aligned}$$

故 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{n}a_{kl}=A$. 而对任意正整数 n, 有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{n}a_{kl}=\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}a_{kl}=\lim_{m\to\infty}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}a_{kl}=\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty}a_{kl},$$

最后一个等号是极限加法的性质, 由此可得

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}a_{kl}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{n}a_{kl}=\lim_{n\to\infty}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty}a_{kl}=\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{kl}.$$

对于 (ii), 首先我们有

$$\left|A-\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L}a_{kl}\right|=\left|\sum_{k\le K}\sum_{l>L}a_{kl}+\sum_{k>K}\sum_{l=1}^{\infty}a_{kl}\right|\le\sum_{k\le K}\sum_{l>L}|a_{kl}|+\sum_{k>K}\sum_{l=1}^{\infty}|a_{kl}|,$$

最右边第二项即 $\sum\limits_{k>K}M_k$, 由 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}M_k<+\infty$ 知存在 K_0, 使得当 $K>K_0$ 时有

$$\sum_{k>K}\sum_{l=1}^{\infty}|a_{kl}|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

对于最右边第一项, 我们有

$$\sum_{k\le K}\sum_{l>L}|a_{kl}|\le\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l>L}|a_{kl}|=\sum_{l>L}\sum_{k=1}^{\infty}|a_{kl}|,$$

其中最后一步换序求和的合理性由 (i) 保证, 再使用 (i) 得

$$\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|a_{kl}|=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}|a_{kl}|=M,$$

故存在正整数 L_0, 使得当 $L>L_0$ 时有

$$\sum_{l>L}\sum_{k=1}^{\infty}|a_{kl}|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $N=\max\{L_0,K_0\}$ 即可.

对于 (iii), 首先我们定义一个长方形点集

$$R(K,L)=\{(k,l)\in\mathbb{Z}_+\times\mathbb{Z}_+:1\le k\le K,1\le l\le L\},$$

由于 $m\mapsto(k(m),l(m))$ 是个双射, 故存在正整数 M, 使得 $\{1,2,\cdots,M\}$ 在此映射下的像包含了 $R(K,L)$, 于是有

$$\left|A-\sum_{m=1}^{M}c_m\right|\le\sum_{k\le K}\sum_{l>L}|a_{kl}|+\sum_{k>K}\sum_{l=1}^{\infty}|a_{kl}|$$

剩下的证明完全同 (ii). □

注: 命题中的假设 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{l=1}^{\infty}|a_{kl}|\right)<+\infty$ 是必要的. 如果仅假设 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{l=1}^{\infty}a_{kl}\right)$ 收敛而不要求绝对收敛, 则不一定可以换序求和. 有如下反例:

$$a_{kl}=\begin{cases}0 & ,\ k<l\\ -1 & ,\ k=l\\ 2^{l-k} & ,\ k>l\end{cases}$$

现在剩下的工作, 就是得到 $\dfrac{\cos x}{\sin x}-\dfrac{1}{x}$ 的幂级数展开式. 我们有

$$\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}=\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}-\frac{1}{x}=\frac{2\mathrm{i}}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}-1}+\mathrm{i}-\frac{1}{x},$$

故

$$2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{2m}}{\pi^{2m}}\zeta(2m)=1-\mathrm{i}x-\frac{2\mathrm{i}x}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}-1}.$$

对 $\forall x\in[\delta,\pi-\delta]$ 成立.

此时出现了 Bernoulli 数的生成函数

$$\frac{z}{\mathrm{e}^{z}-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n.$$

事实上, 根据 $\dfrac{z}{\mathrm{e}^{z}-1}$ 在圆盘 $B(0,2\pi)$ 内解析, 所以其可以在 0 的一个邻域内展开成幂级数, 并延拓到整个圆盘 $B(0,2\pi)$ 上, 即以下命题成立.

命题 6 *存在复数 c_n, 使得对 $\forall z\in\mathbb{C},|z|<2\pi$, 有*

$$\frac{z}{\mathrm{e}^{z}-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n!}z^n.$$

所以可以定义 Bernoulli 数 $B_n=c_n$. 从而有

$$2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{2m}}{\pi^{2m}}\zeta(2m)=1-\mathrm{i}x-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}(2\mathrm{i}x)^n,$$

比较两边的实部, 得

$$2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{2m}}{\pi^{2m}}\zeta(2m)=-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{B_{2m}}{(2m)!}(2\mathrm{i}x)^{2m},$$

如果能比较系数, 就有

$$\zeta(2m)=\frac{(-1)^{m-1}2^{2m-1}}{(2m)!}B_{2m}\pi^{2m},$$

事实上比较系数的合理性是容易证明的. 首先, 我们有等式

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\zeta(2m)}{\pi^{2m}}x^{2m}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}2^{2m-1}B_{2m}}{(2m)!}x^{2m},$$

对 $\forall x\in[\delta,\pi-\delta]$ 成立. 注意这个 δ 是任意取的, 故对 $\forall x\in(0,\pi)$, 等式仍成立. 再根据两个幂级数都是偶函数, 且在 0 处取值都是 0, 我们有等式对 $\forall x\in(-\pi,\pi)$ 成立. 再运用命题 3 即可.

3 Bernoulli 数的初步介绍

3.1 基本的代数性质

先证明 Bernoulli 数的一个非常重要的递推关系:

命题 7 $B_0=1,\quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}B_k=0\ (n\geq 1).$

证明 根据定义, 对 $\forall z\in\mathbb{C},|z|<2\pi$, 有

$$z=(\mathrm{e}^z-1)\sum_{i=0}^{\infty}\frac{B_i}{i!}z^i=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j!}z^j\sum_{i=0}^{\infty}\frac{B_i}{i!}z^i=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(j+1)!}z^{j+1}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{B_i}{i!}z^i.$$

根据幂级数的理论, 右边等于这两个幂级数的 Cauchy 乘积, 即

$$z=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{z^{n+1-k}}{(n+1-k)!}\frac{B_kz^k}{k!}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{B_kz^{n+1}}{(n+1-k)!k!}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}B_k\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}.$$

上式对 $\forall z\in\mathbb{C},|z|<2\pi$ 成立, 根据命题 3, 比较系数即证. $\square$

根据这个递推关系, 归纳易证所有的 Bernoulli 数都是有理数. 这个递推关系也是计算某个 Bernoulli 数的具体数值的一个常用方法, 下表给出了一些较小的 Bernoulli 数的数值.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B_n	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$
n	11	12	13	14	15	16	17	18	$\cdots$	49	50
B_n	0	$-\frac{691}{2730}$	0	$\frac{7}{6}$	0	$-\frac{3617}{510}$	0	$\frac{43867}{798}$	$\cdots$	0	$\star$

($\star$ 处的数为 $\frac{495057205241079648212477525}{66}$)

观察表格, 我们不难发现以下性质: $B_{2n+1}=0\ (n\geq 1)$; $B_{4n}<0,B_{4n-2}>0\ (n\geq 1)$; B_{2n} 增长速度很快, 且对 $\forall k\geq 3,|B_{2k+2}|>|B_{2k}|$.

这些性质都是正确的. 后面两条可由 2.2 节中证明的等式

$$\zeta(2m)=\frac{(-1)^{m-1}2^{2m-1}}{(2m)!}B_{2m}\pi^{2m}$$

直接得到. 对于第一条性质, 下面给出两个证明.

第一个证明是基于之前用到过的 $\cot x$ 的幂级数展开式

$$\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}=\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}=\frac{2\mathrm{i}}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}-1}+\mathrm{i}=\mathrm{i}+\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}(2\mathrm{i}x)^n,$$

这个式子对任意 $|x| < \pi$ 成立. 故由命题 2 知, 右边的虚部各项系数为 0, 故

$$2B_1 + 1 = 0, \quad B_{2n+1} = 0(n \geq 1).$$

第二个证明更为直接. 易证函数 $\dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1} - B_1 x$ 是偶函数, 故其 Maclaurin 级数没有 x 的奇数次幂, 由此即证.

3.2 自然数幂和与 Bernoulli 数

命题 8 对非负整数 m, 记 $S_m(n) = \sum_{k=1}^{n} k^m$, 则有 $S_m(n) = \dfrac{1}{m+1} \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \dbinom{m+1}{i} B_i n^{m+1-i}$.

证明 把 n 看成是固定的, 考虑关于 m 的数列 $S_m(n)$ 的指数生成函数

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} S_m(n) \frac{x^m}{m!},$$

容易证明 f 的收敛半径为 $+\infty$, 则由命题 5 得

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} k^m \frac{x^m}{m!} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(kx)^m}{m!} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{kx} = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{(n+1)x}}{1 - \mathrm{e}^x}.$$

对 $x \in (-2\pi, 2\pi)$, 进一步有

$$\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{(n+1)x}}{1 - \mathrm{e}^x} = \frac{1 - \mathrm{e}^{nx}}{\mathrm{e}^{-x} - 1} = \frac{-x}{\mathrm{e}^{-x} - 1} \frac{\mathrm{e}^{nx} - 1}{x} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i B_i}{i!} x^i \sum_{j=0}^{\infty} \frac{n^{j+1}}{(j+1)!} x^j,$$

在共同的收敛域 $(-2\pi, 2\pi)$ 内等于二者的 Cauchy 乘积

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{m} \frac{(-1)^i B_i}{i!} \frac{n^{m-i+1}}{(m-i+1)!} x^m = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m+1}{i} B_i n^{m+1-i} \frac{x^m}{(m+1)!}.$$

由命题 3, 比较系数即得 $S_m(n) = \dfrac{1}{m+1} \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \dbinom{m+1}{i} B_i n^{m+1-i}$. □

注: 关于这个命题有更一般的结论, 称为 Euler-Maclaurin 求和公式, 有非常重要的应用.

3.3 与 Bernoulli 数相关的幂级数展开式

观察命题 8 的证明过程会发现, 自然数幂和的表达式中含有 Bernoulli 数, 本质上是因为实变函数 $\dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$(或者说是复变函数 $\dfrac{z}{\mathrm{e}^z - 1}$) 的幂级数展开式与 Bernoulli 数有关. 本节我们再讨论一些幂级数展开式与 Bernoulli 数有关的常见函数. 如无说明, 我们默认在 0 处展开.

命题 9 $\cot z$, $\tan z$, $\dfrac{z}{\sin z}$, $\ln \sin z$ 的幂级数展开式都可以由 $\dfrac{z}{\mathrm{e}^z - 1}$ 的展开式导出.

证明 我们已经知道对 $0<|z|<\pi$ 有

$$\cot z=\frac{1}{z}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}2^{2k}B_{2k}z^{2k-1},$$

严格来说, 这个是洛朗展开式, 当然, 如果考虑 $z\cot z$ 的幂级数展开式就会得到 Maclaurin 级数.

由此可得对 $0<|z|<\frac{\pi}{2}$ 有

$$\begin{aligned}\tan z=\cot z-2\cot 2z&=\frac{1}{z}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}2^{2k}B_{2k}z^{2k-1}-2\left(\frac{1}{2z}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}2^{2k}B_{2k}(2z)^{2k-1}\right)\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}2^{2k}(2^{2k}-1)}{(2k)!}B_{2k}z^{2k-1}.\end{aligned}$$

还有, 对 $0<|z|<\pi$ 有

$$\begin{aligned}\frac{z}{\sin z}&=\frac{2\mathrm{i}z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\frac{2\mathrm{i}z}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}-1}=2\mathrm{i}z\left(\frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-1}-\frac{1}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}-1}\right)=2\frac{\mathrm{i}z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-1}-\frac{2\mathrm{i}z}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}-1}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k}{k!}(2(\mathrm{i}z)^k-(2\mathrm{i}z)^k)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^k(2-2^k)}{k!}B_kz^k,\end{aligned}$$

左边是偶函数, 故幂级数展开式只含偶次项, 即

$$\frac{z}{\sin z}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2-2^{2k})}{(2k)!}B_{2k}z^{2k}.$$

以上两个级数的收敛域均可以补充上 $z=0$ 这个点.

对于 $\ln\sin z$, 我们当然是在 $\frac{\pi}{2}$ 处展开, 最近的奇点是 0 和 π, 故我们考虑 $\left|z-\frac{\pi}{2}\right|<\frac{\pi}{2}$ 的情形. 注意到它是 $\cot z$ 的原函数, 故我们考虑在区间 $(\frac{\pi}{2},z)$ 上 $\cot z$ 的积分, 有

$$\begin{aligned}\ln\sin z&=\int_{\frac{\pi}{2}}^{z}\cot t\ \mathrm{d}t=\int_0^{z-\frac{\pi}{2}}\cot\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\ \mathrm{d}(t+\frac{\pi}{2})=\int_0^{z-\frac{\pi}{2}}\tan t\ \mathrm{d}t\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}2^{2k}(2^{2k}-1)}{(2k)!}B_{2k}\int_0^{z-\frac{\pi}{2}}t^{2k-1}\ \mathrm{d}t\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}2^{2k}(2^{2k}-1)}{(2k)!}B_{2k}\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^{2k}.\end{aligned}$$

□

3.4 关于 Bernoulli 数的恒等式

回顾 2.1 节, 我们得到了对 $k\geq 1$ 有

$$\zeta(2k)-\zeta(2k-2)a_1+\zeta(2k-4)a_2-\cdots+(-1)^{k-1}\zeta(2)a_{k-1}+(-1)^kka_k=0,$$

即

$$(-1)^k k a_k + \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-i} \zeta(2i) a_{k-i} = 0,$$

第 1 节中了

$$a_i = \frac{\pi^{2i}}{(2i+1)!},$$

2.2 节中给出了

$$\zeta(2m) = \frac{(-1)^{m-1} 2^{2m-1}}{(2m)!} B_{2m} \pi^{2m},$$

代入得

$$(-1)^k k \frac{\pi^{2k}}{(2k+1)!} + \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-i} \frac{(-1)^{i-1} 2^{2i-1}}{(2i)!} B_{2i} \pi^{2i} \frac{\pi^{2(k-i)}}{(2(k-i)+1)!} = 0,$$

即

$$\frac{k}{(2k+1)!} = \sum_{i=1}^{k} \frac{2^{2i-1} B_{2i}}{(2i)!(2k+1-2i)!},$$

由此我们得到了一个恒等式

$$\sum_{i=1}^{k} \binom{2k+1}{2i} 2^{2i-1} B_{2i} = k,$$

在命题 7 的等式中代入 $B_{2n+1} = 0$ $(n \geq 1)$, 可得一个类似的等式

$$\sum_{i=1}^{k} \binom{2k+1}{2i} B_{2i} = k - \frac{1}{2}.$$

此外, 利用 3.3 节中的结论, 再结合幂级数的 Cauchy 乘积, 我们还可以得到一些类似的恒等式. 比如, 对 $0 < |z| < \pi$ 有

$$\begin{aligned}\frac{z}{\sin z} &= \frac{2\mathrm{i}z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}z} \frac{2\mathrm{i}z}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z} - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}z)^k}{k!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{l!} (2\mathrm{i}z)^l = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{(iz)^j}{j!} \frac{B_{n-j}}{(n-j)!} (2\mathrm{i}z)^{n-j} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} 2^{n-j} B_{n-j} \right) \frac{\mathrm{i}^n z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} 2^j B_j \right) \frac{\mathrm{i}^n z^n}{n!}.\end{aligned}$$

比较系数知, 对 $n = 2k+1$ $(k \geq 0)$ 有

$$0 = \sum_{j=0}^{2k+1} \binom{2k+1}{j} 2^j B_j = 1 - (2k+1) + \sum_{j=2}^{2k+1} \binom{2k+1}{j} 2^j B_j,$$

也就是刚才得到过的恒等式

$$\sum_{i=1}^{k} \binom{2k+1}{2i} 2^{2i} B_{2i} = 2k,$$

对 $n = 2k$ $(k \geq 0)$ 则有

$$\sum_{j=0}^{2k} \binom{2k}{j} 2^j B_j = (2 - 2^{2k}) B_{2k}.$$

再比如考虑

$$\begin{aligned} z = \sin z \cdot \frac{z}{\sin z} &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l+1)!} z^{2l+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2 - 2^{2k}) B_{2k}}{(2k)!} z^{2k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^{n-j}}{(2(n-j)+1)!} z^{2(n-j)+1} \frac{(-1)^j (2 - 2^{2j}) B_{2j}}{(2j)!} z^{2j} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{2n+1}{2j} (2 - 2^{2j}) B_{2j} \right) \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \end{aligned}$$

比较系数知, 对 $n \geq 1$ 有

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{2n+1}{2j} (2 - 2^{2j}) B_{2j} = 0,$$

即

$$\sum_{j=1}^{k} \binom{2k+1}{2j} (2 - 2^{2j}) B_{2j} = -1.$$

这正是一开始得到的两个等式的显然推论.

4 小结

本文到这里差不多就结束了, 我们主要讨论了以下内容:

0) 对 Euler 解决 Basel 问题细节的补充.

1) $\zeta(2m)$ $(m \in \mathbb{Z}_+)$ 的计算方法;

2) Bernoulli 数的简单代数性质.

关于 ζ 函数和 Bernoulli 数, 相关的内容还有很多很多:

3) ζ 函数和欧拉常数 γ;

4) ζ 函数的解析延拓及一般性质;

5) Bernoulli 多项式;

6) Euler-Maclaurin 求和公式;

7) Bernoulli 数的数论性质;

……

5 练习

说明 这些练习题大多数都比较简单, 较为困难的问题会标注 $*$ 号. 练习题的提示不一定是最佳做法, 仅供参考.

习题 O 批判性阅读全文, 提出您宝贵的意见.

习题 A (正文内容补充)

A1) 根据定义知, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n$ 是函数 $\frac{x}{\mathrm{e}^x-1}$ 的 Maclaurin 级数 (这里只考虑 x 取实数). 用 Taylor 公式计算 B_n $(n=0,1,2)$ 的值.

A2) 对实数 $m>-1$, 计算 $\lim_{n\to+\infty}\frac{1^m+2^m+\cdots+n^m}{n^{m+1}}$, 并用命题 8 检验 m 是非负整数的情形.

习题 B (Euler 数)

Euler 数 E_n 是与 Bernoulli 数 B_n 类似的常数, 也是用生成函数定义的:

$$\operatorname{sech} z=\frac{2}{\mathrm{e}^z+\mathrm{e}^{-z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}E_n z^{2n}.$$

其中, $\operatorname{sech} x$ 是偶函数保证了其幂级数展开式只有偶数次项. 同样是利用复分析的知识, 我们可以得到右边的级数对 $|z|<\pi$ 收敛.

B1) 证明 Euler 数的递推关系: $E_0=1,\quad \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{2n}{2k}E_k=0\ (n\geq 1)$.

B2) 作为应用, 用 Euler 数表示 $\sec z=\frac{1}{\cos z}$ 的幂级数展开式.

习题 C (计算 $\boldsymbol{I=\sum_{k=2}^{\infty}(\zeta(k)-1)}$)

C1) 证明: I 收敛.

C2) 证明: 对任意实数 x $(0<|x|<1)$, 有 $\sum_{k=1}^{\infty}\zeta(2k)x^{2k}=\frac{1}{2}-\frac{\pi x}{2}\cot \pi x$.

C3) 计算 $I_1=\sum_{k=1}^{\infty}(\zeta(2k)-1)$ 的值.

C4) 计算 $I_2=\sum_{k=1}^{\infty}(\zeta(2k)-\zeta(2k+1))$ 的值.

(提示: 交换求和顺序)

C5) 证明 $I=2I_1-I_2$, 由此算出 I 的值.

习题 D (Basel 问题的另解)

本题的目标是复现 Euler 解决 Basel 问题的另一个方法. (Basel 问题有很多证法, 有兴趣可参考 https://www.cnblogs.com/misaka01034/p/BaselProof.html)

第一部分 计算 $\arcsin x$ 的 Maclaurin 级数

D1) 对任意实数 α, 定义广义二项式系数

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}\ (k\in\mathbb{N}),\quad \binom{\alpha}{0}=1.$$

证明: 对任意实数 x ($|x|<1$), 有 $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k$. 这称为广义牛顿二项式定理.

D2) 特别地, 取 $\alpha=-\frac{1}{2}$, 得到 $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n$. 以此证明:

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\ (-1<x<1).$$

D3*) 证明: 对 $x=\pm1$, 上面的等式也成立.

(提示: 用 Wallis 公式和 Tauber 定理)

第二部分 用两种方法计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\arcsin(\sin t)\ \mathrm{d}t$.

D4) 记 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t)^{2n+1}\ \mathrm{d}t$ 为第 $2n+1$ 项 Wallis 积分, 求 I_n 的值.

D5) 证明: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\arcsin(\sin t)\ \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{I_n}{2n+1}$.

(提示: 用 D3 证明一致收敛性)

D6) 证明: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

习题 E (Euler 乘积公式)

E1) 记 $\mathcal{P}$ 为所有素数构成的集合, 证明 Euler 乘积公式: 对 $s>1$, 有

$$\zeta(s) = \prod_{p\in\mathcal{P}}\frac{1}{1-p^{-s}}.$$

E2) 证明: 级数 $\sum_{p\in\mathcal{P}}\frac{1}{p^s}$ 对于 $s>1$ 是收敛的, 对于 $0<s\le 1$ 是发散的.

E3) 对正整数 N, 从集合 $\{1,2,\cdots,N\}$ 中任取两个正整数 (可以相同), 设它们互素的概率为 $P(N)$. 计算 $P(N)$, 并证明:

$$\lim_{N\to+\infty} P(N)=\frac{6}{\pi^2}\approx 61\%.$$

注: 关于这个结果, 有个“直观”的理解 (当然这个做法并不严谨): 任取两个正整数, 它们都是素数 p 的倍数概率为 $\frac{1}{p^2}$, 所以不以 p 为公因子的概率为 $1-\frac{1}{p^2}$, 由此知它们互素的概率为

$$\prod_{p\in\mathcal{P}}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)=\frac{1}{\zeta(2)}=\frac{6}{\pi^2}.$$

习题 F (Bernoulli 数的直接计算公式)

在前文中, 虽然我们得到了很多关于 Bernoulli 数的等式, 但如果想要计算某个 Bernoulli 数具体的数值, 这些等式都很不方便. 本题的目标是证明一个 Bernoulli 数的直接计算公式.

F1) 证明: 对 $x<\ln 2$, 有

$$x=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1-\mathrm{e}^x)^k}{k}.$$

F2*) 由 F1 及 Bernoulli 数的定义我们可以得到

$$B_n=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{x}{\mathrm{e}^x-1}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1-\mathrm{e}^x)^{k-1}}{k}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-\mathrm{e}^x)^k}{k+1}\right)$$

证明: 上式最右边可以任意次逐项求导, 即存在与 n 无关的小量 ε, 满足在区间 $[-\varepsilon,\varepsilon]$ 中, 对任意正整数 n, 有

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-\mathrm{e}^x)^k}{k+1}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left((1-\mathrm{e}^x)^k\right).$$

F3) 证明:

$$B_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}j^n.$$

习题 G (一个无穷乘积的计算)

本题的目标是计算如下无穷乘积

$$X=\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{2n-1}\right)^2\left(\frac{10n-6}{10n-1}\right)\left(\frac{10n-4}{10n+1}\right)$$

G1) 用 $\sin x$ 的无穷乘积展开式证明 Wallis 公式的推广形式:

$$I(a)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(an)^2}{(an-1)(an+1)}=\frac{\pi}{a\sin\frac{\pi}{a}}\quad\left(a\in\mathbb{R},|a|\neq0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots\right).$$

G2) 证明:

$$X = I(2) \cdot I(10) \cdot \frac{1}{I(\frac{5}{2})} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(10n-6)}{(2n-1)(10n+4)}$$

G3) 计算无穷乘积 $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(10n-6)}{(2n-1)(10n+4)}$.

G4) 已知: $\sin\frac{2}{5}\pi = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$, $\sin\frac{1}{10}\pi = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. 令 $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, 证明 X 的最终表达式:

$$X = \frac{\pi\varphi}{10}\sqrt{\varphi\sqrt{5}}.$$