Fourier 分析笔记

CloudySoul

目录

1 准备工作 (1): 反常积分

反常积分通常分为无穷积分和瑕积分两类. 这一章主要讨论如何判断反常积分的收敛性, 具体数值的计算通常比较复杂, 放在下一章讨论.

1.1 定义

定义 1.1.1 (无穷积分) *形如 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ (a 是有限数) 的积分称为无穷积分, 其中要求 f 在任意有限区间 $[a, A]$ 上 Riemann 可积. 类似地, 上下限形如 $\int_{-\infty}^{b}$, $\int_{-\infty}^{+\infty}$ 的积分也可定义无穷积分.*

一个无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 指的是极限 $\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在, 并把这个极限定义为该积分的值, 对积分 $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ 同理. 但需要注意的是, 积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 指的是存在某个实数 x_0, 无穷积分 $\int_{x_0}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 与 $\int_{-\infty}^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x$ 都收敛, 并把二者的和定义为积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 的值. 容易证明这是良好定义的, 即与 x_0 的选取无关.

为了定义瑕积分, 首先要引入瑕点的概念. 对于定义在有界区间 $(a, b]$ 上的函数, 当 $x \to a^+$ 时, f 无界, 则称 a 为 f 的瑕点. 类似地, 对形如 $[a, b), (a, b)$ 的区间也可定义瑕点. 不过要注意, f 也可以定义在 $[a, b]$ 上, 即在 a 处允许有定义. 如函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ $(0 < x \le 1), f(0) = 0$, 它在 $[0, 1]$ 上是 Riemann 不可积的, 0 也可以称为是个瑕点. 也就是说, 我们并不关心 f 在瑕点处的具体取值. 下面定义的瑕积分也是允许 f 在瑕点处有定义.

定义 1.1.2 (瑕积分) *若定义在区间 $(a, b]$ 上的函数 f 满足 a 是瑕点, 且对任意 $\varepsilon > 0$, f 在 $[a + \varepsilon, b]$ 上 Riemann 可积, 且极限 $\lim_{\varepsilon\to0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在, 则称瑕积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 并把该极限定义为该瑕积分的值. 瑕点不止一个时也可以类似地定义.*

在形式上无穷积分和瑕积分可以统一表述为:

定义 1.1.3 *设 a 是有限数, $b > a$ 可能为 $+\infty$, f 是定义在 $[a, b)$ 上的函数, 我们称 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 是个以 b 为奇点的反常积分, 如果对任意 $c < b$, f 在有限区间 $[a, c]$ 上 Riemann 可积, 且下面两种情况之一成立: $b = +\infty$, 或 b 是有限数但 f 在 b 的邻域内无界.*

学习 Fourier 分析, 反常积分是必备的知识. 一方面是因为 Fourier 积分和 Fourier 变换都涉及到了无穷积分, 另一方面是因为对于某些定义在有限区间上的无界函数也可以定义 Fourier 级数, 比如下面这个例子:

例 1.1.4 首先我们指出:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}=-\ln(2\sin\frac{x}{2}),\quad x\in(0,2\pi)$$

这个式子的证明要用到如下复变函数中的结论:

$$\ln(1-z)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n},\quad |z|<1$$

由此可得, 对 $|a|<1$ 有

$$-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n\cos nx}{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^n+(a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})^n}{n}=\ln(1-a\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})+\ln(1-a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})=\ln(a^2+1-2a\cos x)$$

左边看成关于 a 的幂级数, 由 *Abel* 第二定理知

$$-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}=\lim_{a\to1^-}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n\cos nx}{n}=\lim_{a\to1^-}\ln(a^2+1-2a\cos x)=2\ln(2\sin\frac{x}{2})$$

基于这个等式, 我们考察函数

$$f(x)=\begin{cases}\ln(2\sin\frac{x}{2}) & ,0<x<2\pi\\ 0 & ,x=0,\ 2\pi\end{cases}$$

显然其在 $[0,2\pi]$ 上无界, 但是反常可积, 即对应的瑕积分收敛. 具体来说, 可以证明

$$\int_0^{2\pi}\ln(2\sin\frac{x}{2})\,\mathrm{d}x=0$$

而 f_+ 有界, 所以 f_+ 这部分积分有限, 从而 f_- 这部分积分也有限, 由此知 $|f|$ 积分有限. 至于这个积分的计算, 利用一个熟知的积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\,\mathrm{d}x=-\frac{\pi\ln2}{2}$$

可得

$$\int_0^{2\pi}\ln(2\sin\frac{x}{2})\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\ln(2\sin y)\,\mathrm{d}y=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(2\sin y)\,\mathrm{d}y=0$$

以上分析表明 f 可积且绝对可积, 利用后面的推论 *3.3.12* 可知 $f(x)$ 的 *Fourier* 级数就是 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$.

最后我们指出, 本节中定义的一元反常积分, 和对于多元函数定义的反常重积分 (见 Zorich § 11.6), 是完全不同的. 事实上, 在 $\mathbb{R}^1$ 中, 反常可积的函数未必 Lebesgue 可积, 但是在 $\mathbb{R}^n$ $(n\geq2)$ 中, 反常可积的函数一定 Lebesgue 可积, 即反常重积分就是 Lebesgue 积分. 具体原因可以在 Zorich § 11.6 中找到.

1.2 收敛性的判别法

由于反常积分可以看成无穷级数的连续化, 大多数关于级数收敛性的判别法在反常积分中也有相应的版本.

a) 无穷积分

依然是经典的 **非负→ 一般** 的研究模式.

定理 1.2.1 若 f 是定义在 $[a,+\infty)$ 上的非负函数, 则积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛的充要条件是 $F(A)=\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界.

定理 1.2.2 (比较判别法) 设对充分大的 x, 函数 f 和 g 满足不等关系 $0\le f(x)\le g(x)$, 则有

(1) 若 $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛;

(2) 若 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散, 则 $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 发散;

定理 1.2.3 (比较判别法的极限形式) 设 f,g 都是 $[a,+\infty)$ 上的非负函数, 且 $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l$, 则

(1) 若 $0<l<+\infty$, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 和 $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 同敛散;

(2) 若 $l=0$, 则如果有 $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 那么 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 也收敛.

(3) 若 $l=+\infty$, 则如果有 $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 发散, 那么 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 也发散.

推论 1.2.4 设 f 是 $[a,+\infty)$ 上的非负函数, 且 $x\to+\infty$ 时, $f(x)\sim g(x)$, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 和 $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 同敛散.

定理 1.2.5 设 f 是 $[a,+\infty)$ 上的非负函数, 如果存在一个递增且趋于 $+\infty$ 的数列 $\{A_n\}$ $(A_1=a)$, 使得级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 且二者相等.

如果不加 f 是非负的条件, 则有反例, 如 $f(x)=\cos x, A_n=n\pi$. 但是如下结论成立:

定理 1.2.6 f 是定义在 $[a,+\infty)$ 上的函数 (不一定非负), 则 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛于 I 的充分必要条件是, 对任一递增且趋于 $+\infty$ 的数列 $\{A_n\}$ $(A_1=a)$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛于 I.

下面研究一般的无穷积分. 设 f 是定义在 $[a,+\infty)$ 上的函数.

定理 1.2.7 (Cauchy 收敛原理) 积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛的充分必要条件是, 对任意 $\varepsilon>0,\exists A_0>a$, 使得只要 $u,v>A_0$, 就有 $|\int_u^v f(x)\,\mathrm{d}x|<\varepsilon$.

定义 1.2.8 若积分 $\int_a^{+\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则称积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 绝对收敛; 若 $\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 而 $\int_a^{+\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x$ 发散, 则称积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 条件收敛.

定理 1.2.9 绝对收敛的积分一定条件收敛.

定理 1.2.10 (Dirichlet 判别法) 设 f,g 满足: (a) g 在 $[a,+\infty)$ 上单调, 且 $\lim_{x\to+\infty}g(x)=0$; (b) $F(A)=\int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界. 则积分 $\int_a^{+\infty}f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

定理 1.2.11 (Abel 判别法) 设 f,g 满足: (a) g 在 $[a,+\infty)$ 上单调有界; (b) 积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛. 则积分 $\int_a^{+\infty}f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

下面简单讲述 A-D 判别法的证明过程. 首先, A 不难由 D 推出. 为了证 D, 我们需要一个类似 Abel 引理的结果:

引理 1.2.12 设 f 在 $[a,b]$ 上可积, g 在 $[a,b]$ 上单调. 若对任意的 $A\in[a,b]$, 有 $|\int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x|\le M$, 则 $|\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x|\le M(|g(a)|+2|g(b)|)$.

由此引理和 Cauchy 收敛原理可证 D. 为证引理, 我们需要第二积分平均值定理及推广形式 (此引理由推广形式可得, 推广形式不难由原定理得到.)

定理 1.2.13 (第二积分平均值定理) 设 f 在 $[a,b]$ 上可积, g 在 $[a,b]$ 上非负, 则

(1) 若 g 在 $[a,b]$ 上递减, 则必存在 $\xi\in[a,b]$, 使得 $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=g(a)\int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x$;

(2) 若 g 在 $[a,b]$ 上递增, 则必存在 $\eta\in[a,b]$, 使得 $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=g(b)\int_\eta^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

定理 1.2.14 (推广形式) 设 f 在 $[a,b]$ 上可积, g 在 $[a,b]$ 上单调, 则必存在 $\xi\in[a,b]$, 使得 $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=g(a)\int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x+g(b)\int_\xi^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

注记: 感觉上去, Dirichlet 判别法判别的级数, 用分部积分也可以做:

$$\int_a^A f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=g(x)F(x)\big|_a^A-\int_a^A g'(x)F(x)\,\mathrm{d}x, \tag{1}$$

利用条件容易证明 $\int_a^A f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 在 $A\to+\infty$ 是有极限的. 例如:

$$\int_1^A\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=-\frac{\cos x}{x}\Big|_1^A-\int_1^A\frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x,$$

$A\to+\infty$ 时确实可以证明收敛. 但是 (1) 成立要加条件: f 连续, g 连续可微, 而 D 判别法完全不需要. 所以 D 判别法是更强的结论.

b) 瑕积分

瑕积分可以转化为无穷积分. 事实上, 令 $x=a+\frac{1}{y}$, 则

$$\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{b-a}} f(a+\frac{1}{y})\frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y = \int_{\frac{1}{b-a}}^{\frac{1}{\varepsilon}} f(a+\frac{1}{y})\frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y,$$

故瑕积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛于 I, 等价于无穷积分 $\int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f(a+\frac{1}{y})\frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y$ 收敛于 I. 所以在考察一个瑕积分时, 把它转化成相应的无穷积分即可. 无穷积分的定理, 我们可以平行地对瑕积分写出:

定理 1.2.15 *设对充分靠近 a 的 x $(x>a)$, 函数 f 和 g 满足不等关系 $0\le f(x)\le g(x)$, 则有*

(1) 若 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛;

(2) 若 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散, 则 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 发散;

定理 1.2.16 *设 f,g 都是 $(a,b]$ 上的非负函数, 且 $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=l$, 则*

(1) 若 $0<l<+\infty$, 则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 和 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 同敛散;

(2) 若 $l=0$, 则如果有 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 那么 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 也收敛.

(3) 若 $l=+\infty$, 则如果有 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 发散, 那么 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 也发散.

定理 1.2.17 *积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛的充分必要条件是, 对任意 $\varepsilon>0, \exists\delta>0$, 使得只要 $0<u,v<\delta$, 就有 $|\int_{a+u}^{a+v} f(x)\,\mathrm{d}x|<\varepsilon$.*

定理 1.2.18 *若积分 $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 也收敛.*

注记 1: 注意定理 1.2.18 容易产生一个误解, 就是 $f(x)=2\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x)-1$ 是个反例. 事实上, 我们已经默认了积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 是个瑕积分, 也就是说对任意 $\varepsilon>0$, f 在 $[a+\varepsilon,b]$ 上 Riemann 可积.

注记 2: 之所以再强调一遍定理 1.2.15-1.2.18 是有原因的. 虽然说瑕积分可以转化为无穷积分, 但是转化为无穷积分不一定好做, 比如研究 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{1-x^4}}$ 的敛散性, 由 $x\to 1$ 时, $\frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}}\sim\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt[4]{1-x}}$ 及定理 1.2.16 即知收敛. 但是如果转化为无穷积分呢? 令 $x=1-\frac{1}{y}$, 转化为 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{y\sqrt[4]{y^4-(y-1)^4}}$, 不是不能做, 只是这样多此一举, 甚至可能更麻烦. 事实上, 只有在使用 A-D 判别法时, 才有转化的意义, 下一节中可以看到一些例子.

1.3 例子

先看一些无穷积分 (不含瑕点) 的例子, 相对比较简单.

例 1.3.1 $\int_0^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^6\sin^2 x}$ 收敛.

证明 非负, 用定理 1.2.5, 注意技巧:

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^6\sin^2 x} \leq (n+1)\pi \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+n^6\sin^2 x} \leq 2(n+1)\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x + n^6 \sin^2 x},$$

最后一个定积分可算, 对 n 求和即可 □

例 1.3.2 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 条件收敛.

证明 收敛性由 D 判别法显然. 注意到

$$\frac{|\sin x|}{x} \geq \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x}$$

由 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ 发散, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛即得 $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x$ 发散. □

例 1.3.3 $\max\{p,q\}>1$, $\int_1^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^p+x^q}\,\mathrm{d}x$ 收敛.

证明 不妨 $p \geq q, p > 1$, 原积分写为

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{p-1}(1+x^{q-p})}\,\mathrm{d}x$$

由 D 判别法积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{p-1}}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 又 $\frac{1}{1+x^{q-p}}$ 单调有界, 由 A 判别法即证. □

例 1.3.4 $x>0$, $\int_0^{+\infty} \frac{[t]-t+a}{t+x}\,\mathrm{d}t$ 当 $a=\frac{1}{2}$ 时收敛, 取其他值时发散.

证明 $a=\frac{1}{2}$ 时由 D 判别法显然. $a\neq\frac{1}{2}$ 时, 原积分写为

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{[t]-t+\frac{1}{2}}{t+x} + \frac{a-\frac{1}{2}}{t+x} \right) \mathrm{d}t,$$

前一项的无穷积分收敛而后一项的发散, 故原积分发散. □

下面是一些瑕积分 (或含瑕积分) 的例子.

例 1.3.5 $\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛.

证明 由比较判别法只需证 $-\frac{\ln(1-x)}{x} \le \frac{1}{\sqrt{1-x}}$, 作换元 $1-x=t$, 即证 $f(t)=\frac{1-t}{\sqrt{t}}+\ln t \ge 0$, 而 $f'(t)=-\frac{(\sqrt{t}-1)^2}{2t\sqrt{t}} \le 0$, 故 $f(t) \ge f(1)=0$. □

例 1.3.6 (Beta 函数) 讨论积分 $\displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解 0 和 1 有可能是瑕点, 拆分为两部分:

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x,$$

原积分收敛当且仅当两部分都收敛. $x\to 0^+$ 时, $x^{p-1}(1-x)^{q-1}\sim x^{p-1}$, 因此第一项收敛当且仅当 $p>0$; $x\to 1^-$ 时, $x^{p-1}(1-x)^{q-1}\sim(1-x)^{q-1}$, 因此第二项收敛当且仅当 $q>0$. 故原积分收敛当且仅当 $p>0$ 且 $q>0$. 这个积分定义了一个 $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\mapsto\mathbb{R}_+$ 的二元函数, 记为 $\mathrm{B}(p,q)$. □

例 1.3.7 (Gamma 函数) 讨论积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解 0 可能是瑕点, 原积分是无穷积分, 与上例一样拆分为两部分:

$$\int_0^1 x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty} x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x,$$

$x\to 0^+$ 时, $x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\sim x^{s-1}$, 故第一项收敛当且仅当 $s>0$; 第二项对任意 s 显然都收敛, 故原积分收敛当且仅当 $s>0$. 这个积分定义了一个 $\mathbb{R}_+\mapsto\mathbb{R}_+$ 的函数, 记为 $\Gamma(s)$. □

例 1.3.8 $p>0$, 讨论积分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解 0 一定是瑕点. 作变换 $t=\frac{1}{x}$, 化为

$$\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^p}\,\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^{2-p}}\,\mathrm{d}t,$$

$p-2\ge 0$ 即 $p\ge 2$ 时, 由于

$$\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} t^{p-2}\sin t\,\mathrm{d}t \ge (2k\pi)^{p-2}\int_0^{\pi}\sin t\,\mathrm{d}t \ge 2,$$

积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^{2-p}}\,\mathrm{d}t$ 不收敛. 当 $2-p>0$ 即 $0<p<2$ 时, 由 D 判别法知 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^{2-p}}\,\mathrm{d}t$ 收敛. 进一步地, $2-p>1$ 即 $0<p<1$ 时, 显然该积分绝对收敛. 当 $0<2-p\le 1$ 即 $1\le p<2$ 时, 由例 1.3.2 的方法知条件收敛. □

例 1.3.9 $\alpha>0$, 讨论积分 $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)^{-\alpha}-1\right)\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解 0 一定是瑕点, I 又是个无穷积分, 拆为两部分

$$I=\int_0^1\left(\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)^{-\alpha}-1\right)\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\left(\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)^{-\alpha}-1\right)\mathrm{d}x=I_1+I_2,$$

显然, I_1 收敛性和 $\int_0^1\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)^{-\alpha}\mathrm{d}x$ 一致. 写出被积函数的等价无穷小

$$\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)^{-\alpha}\sim\left(\frac{1}{6}\right)^{-\alpha}x^{-2\alpha},\ x\to 0^+,$$

故 I_1 收敛当且仅当 $\int_0^1\left(\frac{1}{6}\right)^{-\alpha}x^{-2\alpha}\mathrm{d}x$ 收敛, 即 $\alpha<\frac{1}{2}$, 此时易证 I_1 是绝对收敛的. 对于 I_2, 有

$$\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)^{-\alpha}=1+\alpha\frac{\sin x}{x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right),\ x\to+\infty,$$

而积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 条件收敛, $\int_1^{+\infty}O\left(\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$ 绝对收敛, 故 I_2 条件收敛, 无论 α 取何值. □

例 1.3.10 $q\neq 0$, 讨论积分 $I=\displaystyle\int_0^{\infty}x^p\sin x^q\,\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解 0 可能是瑕点, 拆为两部分

$$I=\int_0^1 x^p\sin x^q\,\mathrm{d}x+\int_1^{\infty}x^p\sin x^q\,\mathrm{d}x=I_1+I_2,$$

令 $x=\frac{1}{y}$ 知 (p,q) 和 $(-p-2,-q)$ 对应积分是一样的, 故不妨设 $q>0$. 先看 I_2, 换元 $y=x^q$ 得

$$I_2=\frac{1}{q}\int_1^{\infty}y^{\frac{p+1}{q}-1}\sin y\,\mathrm{d}y,$$

由例 1.3.8 知收敛当且仅当 $\frac{p+1}{q}-1<0$, 绝对收敛当且仅当 $\frac{p+1}{q}-1<-1$. 再看 I_1, 写出等价无穷小 $x^p\sin x^q\sim x^{p+q}$, 故 I_1 收敛当且仅当 $p+q>-1$, 此时一定绝对收敛.

整理结果得: $-1<\frac{p+1}{q}<0$ 时 I 绝对收敛, $0\leq\frac{p+1}{q}<1$ 时条件收敛, 其他情况发散. □

例 1.3.11 讨论积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^{\alpha}}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解 0 可能是瑕点, 拆为两部分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^{\alpha}}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^{\alpha}}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^{\alpha}}\mathrm{d}x=I_1+I_2,$$

先看 I_1, 令 $y=x+\frac{1}{x}$, 有 $x=\frac{y-\sqrt{y^2-4}}{2}$, 故

$$I_1=C\cdot\int_2^{+\infty}\frac{\left(y+\sqrt{y^2-4}\right)^{\alpha-1}}{\sqrt{y^2-4}}\sin y\,\mathrm{d}y,$$

其中 C 为与收敛性无关的常数. 若 $\alpha \geq 2$, 类似例 1.3.8 可证 I_1 发散; 若 $\alpha < 2$, 易证 $\frac{\left(y+\sqrt{y^2-4}\right)^{\alpha-1}}{\sqrt{y^2-4}}$ 单调递减且趋于 0, 由 D 判别法知 I_1 收敛. 再看 I_2, 令 $y = x + \frac{1}{x}$ 得

$$I_2 = C' \cdot \int_2^{+\infty} \frac{1}{\left(y+\sqrt{y^2-4}\right)^{\alpha-1}\sqrt{y^2-4}} \sin y \, \mathrm{d}y$$

同理, I_2 收敛当且仅当 $1-\alpha < 1$ 即 $\alpha > 0$. 故原积分收敛当且仅当 $0 < \alpha < 2$. 类似例 1.3.2 易证是条件收敛. □

例 1.3.12 (Frullani 积分) *设 $a, b > 0$, f 在 $(0, +\infty)$ 上连续, 记 $f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$ (若存在), $f(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} f(x)$ (若存在), 考虑积分 $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x} \mathrm{d}x$, 有*

(1) *若 $f(0), f(+\infty)$ 都存在, 则 $I = (f(0) - f(+\infty)) \ln \frac{b}{a}$;*

(2) *若 $f(0)$ 存在, 且 $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x} \mathrm{d}x$ 收敛, 则 $I = f(0) \ln \frac{b}{a}$;*

(3) *若 $f(+\infty)$ 存在, 且 $\int_0^1 \frac{f(x)}{x} \mathrm{d}x$ 收敛, 则 $I = -f(+\infty) \ln \frac{b}{a}$.*

证明 (1) 不妨 $b > a$, 考虑 $\int_\delta^R \frac{f(ax)-f(bx)}{x} \mathrm{d}x$ 在 $\delta \to 0^+, R \to +\infty$ 的行为, 变形

$$\begin{aligned}\int_\delta^R \frac{f(ax)-f(bx)}{x} \mathrm{d}x &= \int_\delta^R \frac{f(ax)}{x} \mathrm{d}x - \int_\delta^R \frac{f(bx)}{x} \mathrm{d}x = \int_{a\delta}^{aR} \frac{f(t)}{t} \mathrm{d}t - \int_{b\delta}^{bR} \frac{f(t)}{t} \mathrm{d}t \\ &= \int_{a\delta}^{b\delta} \frac{f(t)}{t} \mathrm{d}t - \int_{aR}^{bR} \frac{f(t)}{t} \mathrm{d}t = f(\xi) \int_{a\delta}^{b\delta} \frac{1}{t} \mathrm{d}t - f(\eta) \int_{aR}^{bR} \frac{1}{t} \mathrm{d}t,\end{aligned}$$

其中由第一积分中值定理知, 存在 $\xi \in [a\delta, b\delta], \eta \in [aR, bR]$, 使得最后一个等号成立. 最后的值就是 $(f(\xi) - f(\eta)) \ln \frac{b}{a}$, 取极限后就是 $(f(0) - f(+\infty)) \ln \frac{b}{a}$.

(2) 只需把 (1) 证明中的 $\int_{aR}^{bR} \frac{f(t)}{t} \mathrm{d}t$ 用 Cauchy 收敛原理写为 $o(1)$ 即可, (3) 同理. □

例 1.3.13 用例 1.3.12 计算: (1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin ax \sin bx}{x} \mathrm{d}x$ $(a > b)$; (2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{b \sin ax - a \sin bx}{x^2} \mathrm{d}x$.

解 (1) 令 $f(x) = \frac{1}{2} \cos x$, 由例 1.3.12(2) 得

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax \sin bx}{x} \mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{f((a-b)x) - f((a+b)x)}{x} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \ln \frac{a+b}{a-b},$$

(2) 换元积分 (合理性易证) 得

$$\int_0^\infty \frac{b \sin ax - a \sin bx}{x^2} \mathrm{d}x = \frac{a \sin bx - b \sin ax}{x}\bigg|_0^{+\infty} - \int_0^\infty \frac{ab \cos bx - ab \cos ax}{x} \mathrm{d}x,$$

剩下部分类似 (1), 最终结果为 $ab \ln \frac{b}{a}$. □

2 准备工作 (2): 含参变量积分

Fourier 变换本质上就是一种含参积分, 在 Fourier 分析中我们需要含参积分的一些性质.

定义 2.0.1 *含参变量的积分是形如*

$$F(t) = \int_{E_t} f(x,t)\,\mathrm{d}x$$

的积分, 其中 t 是参变量, 取值范围是集合 T, 每个 $t \in T$ 对应一个积分区域 E_t, 并且关于 x 的函数 $f(x,t)$ 在 E_t 上是可积的 (常义可积或反常可积).

定义 2.0.2 *若对于每个参数 t, 关于 x 的函数 $f(x,t)$ 在 E_t 上是常义可积的, 则称 $F(t)$ 是个含参常义积分. 如果对于至少一个参数 t, $F(t)$ 只在反常积分意义下存在, 则称为一个含参反常积分.*

2.1 含参常义积分

本节中, 我们假设 T 是 $\mathbb{R}$ 上闭区间, E_t 也是 $\mathbb{R}$ 上闭区间, 且 f 有连续性. 先考虑 E_t 是个与参变量 t 无关的区间的情形, 记 $E_t = [a,b]$, 连续性即为: f 在闭矩形 $I = [a,b] \times [\alpha,\beta]$ 上连续.

定理 2.1.1 (积分与极限交换) *$F(t) = \int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续.*

证明 由 f 的一致连续性显然. □

定理 2.1.2 (积分与积分交换) $\int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t = \int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(x,t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x.$

证明 由 Fubini 定理显然. □

定理 2.1.3 (积分与微分交换) *若 $\frac{\partial f}{\partial t}$ 存在且连续, 则 $F'(t) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\,\mathrm{d}x$.*

证明 对于 $t_0 \in [\alpha,\beta]$, 取充分小的 h, 使 $t_0 + h$ 在 $[\alpha,\beta]$ 中, 则

$$\frac{F(t_0+h) - F(t_0)}{h} = \frac{1}{h}\int_a^b (f(x,t_0+h) - f(x,t_0))\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} f(x,t_0+\theta(x)\cdot h)\,\mathrm{d}x,$$

其中 $0 < \theta(x) < 1$, 由 $\frac{\partial}{\partial t} f(x,t)$ 一致连续知上式最右边在 $h \to 0$ 极限是 $\int_a^b \frac{\partial}{\partial t} f(x,t_0)\,\mathrm{d}x$. □

接下来考虑 E_t 是与参变量 t 相关的区间的情形, 设 $E_t = [p(t), q(t)] \subset [a,b]$, 其中 $p(t)$ 和 $q(t)$ 连续 (并不默认一定有 $p(t) \le q(t)$), 连续性即为: f 在闭矩形 $I = [a,b] \times [\alpha,\beta]$ 上连续.

定理 2.1.4 $F(t)=\int_{p(t)}^{q(t)} f(x,t)\,\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续.

证明 把积分区间分三部分分别估计即可. $\square$

定理 2.1.5 若 $\frac{\partial f}{\partial t}$ 存在且连续, p,q 是可微函数, 则 $F(t)$ 可微且

$$F'(t)=\int_{p(t)}^{q(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\,\mathrm{d}x+f(q(t),t)q'(t)-f(p(t),t)p'(t)$$

证明 定义一个三元函数 $g(t,\xi,\eta)=\int_\xi^\eta f(x,t)\,\mathrm{d}x$, 则 $F(t)=g(t,p(t),q(t))$, 由定理 2.1.3 得

$$\frac{\partial g}{\partial t}=\int_\xi^\eta \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\,\mathrm{d}x$$

显然 $\frac{\partial g}{\partial \xi}=-f(\xi,t), \frac{\partial g}{\partial \eta}=f(\eta,t)$, 由复合函数微分法则

$$F'(t)=\frac{\partial g}{\partial t}+\frac{\partial g}{\partial \xi}\frac{\partial p(t)}{\partial t}+\frac{\partial g}{\partial \eta}\frac{\partial q(t)}{\partial t}$$

即得. $\square$

下面看几个例子.

例 2.1.6 计算积分 $I=\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}\,\mathrm{d}x\ (b>a>0)$.

解 注意到被积函数可写为 $\frac{x^b-x^a}{\ln x}=\int_a^b x^u\,\mathrm{d}u$, 故

$$I=\int_0^1\left(\int_a^b x^u\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x=\int_a^b\left(\int_0^1 x^u\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u=\int_a^b \frac{\mathrm{d}u}{u+1}=\ln\frac{b+1}{a+1},$$

另一种方法更自然. 把 a 看成常数, b 看成参变量, 这是个含参积分, 计算 0, 1 处的极限知这是个常义积分. 对 b 求导得

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}b}=\int_0^1 x^b\,\mathrm{d}x=\frac{1}{b+1}$$

故 $I=\ln(b+1)+C$. 再考虑 $b=a$ 时的 “初值” 可知 $I=\ln\frac{b+1}{a+1}$. $\square$

例 2.1.7 计算 $I(a)=\left(\int_0^a \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2+\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-a^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

解 对 a 求导可得

$$I'(a)=2\mathrm{e}^{-a^2}\cdot\int_0^a \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x+\int_0^1 -2a\cdot \mathrm{e}^{-a^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t=0,$$

该式对任意 $a\in\mathbb{R}$ 成立, 故 $I(a)=I(0)=\frac{\pi}{4}$. $\square$

注记: 在本例中令 $a\to+\infty$, 立即得到 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, 这是计算 Gauss 积分最快的方法.

例 2.1.8 计算积分 $I(r)=\int_0^\pi \ln(1-2r\cos x+r^2)\,\mathrm{d}x.$

解 先考虑 $|r|<1$ 的情形, 求导得

$$I'(r)=\int_0^\pi \frac{2r-2\cos x}{1-2r\cos x+r^2}\,\mathrm{d}x$$

故 $I'(0)=0$, 对 $r\neq 0$, 有

$$I'(r)=\frac{1}{r}\int_0^\pi\left(1-\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{r}\left(\pi-(1-r^2)\int_0^\pi\frac{1}{1-2r\cos x+r^2}\,\mathrm{d}x\right).$$

换元 $t=\tan\frac{x}{2}$ 可得

$$\begin{aligned}\int_0^\pi\frac{1}{1-2r\cos x+r^2}\,\mathrm{d}x&=\int_0^\pi\frac{1}{(1+r)^2\sin^2\frac{x}{2}+(1-r)^2\cos^2\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^{+\infty}\frac{2}{(1+r)^2t^2+(1-r)^2}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{2}{(1-r)^2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+\frac{(1+r)^2}{(1-r)^2}t^2}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{2}{(1-r)^2}\cdot\frac{1-r}{1+r}\cdot\arctan\left(\frac{1+r}{1-r}t\right)\Big|_0^{+\infty}\\&=\frac{\pi}{1-r^2}\ \text{(注意最后两步用到了 } |r|<1\text{)}\end{aligned}$$

故当 $r\neq 0$ 时也有 $I'(r)=0$. 这表明 $I(r)=I(0)=0$ ($|r|<1$).

现在考虑 $|r|>1$, 令 $\rho=\frac{1}{r}$, 有

$$I(r)=\int_0^\pi\ln\left(\frac{\rho^2-2\rho\cos x+1}{\rho^2}\right)\mathrm{d}x=I(\rho)-2\pi\ln|\rho|=2\pi\ln|r|.$$

最后, 当 $|r|=1$ 时利用熟知的积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\,\mathrm{d}x=-\frac{\pi\ln 2}{2}$$

容易直接算得 $I(1)=I(-1)=0$. □

注记: 中间一步我们得到了

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}\,\mathrm{d}x=2\pi$$

在后面 §4.5 中会用到这个结论.

2.2 含参反常积分的一致收敛性

本节考虑的含参反常积分默认形如 $\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$, 其中 b 是唯一的奇点, t 取值范围是集合 T.

先来说明以下为什么要考虑一致收敛性. 回顾含参积分的定义 (定义 2.1):

$$F(t)=\int_{E_t} f(x,t)\,\mathrm{d}x$$

如果把在 E_t 上的积分看成求和, 也就是

$$F_1(t)=\sum_{n=1}^{M} f(x_n,t):=\sum_{n=1}^{M} g_n(t)$$

那么, 一个含参变量的积分就是一个函数项级数. 其中, 上一节中讨论的常义积分就是一个有限求和, "即" $M<+\infty$, 定理 2.1-2.3 是显然的; 如果讨论的是反常积分, "即" $M=+\infty$, $F_1(t)$ 就是一个无穷项函数项级数. 而我们知道, 函数项级数的连续性质通常由一致收敛性保证[1]. 由此可以自然地联想, 如果我们希望 $F(t)$ 对 t 连续 (从而才能有更多的微分、积分等性质), 就需要类似的一致收敛性 (逐点收敛性在定义 2.1 和 2.2 中已经默认了).

定义 2.2.1 *对于含参反常积分 $\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$, 称其为在集合 T 上一致收敛的, 如果对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists A_0=A_0(\varepsilon)$, 使得只要 $A>A_0$, 就有 $|\int_A^b f(x,t)\,\mathrm{d}x|<\varepsilon$, $\forall t\in T$.*

注记: 这个定义本质上就是把函数项级数一致收敛定义中的 $f(x)-f_n(x)$ 写成 $\int_a^b-\int_a^A=\int_A^b$.

定理 2.2.2 (Cauchy 收敛原理) *含参反常积分 $\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$ 在集合 T 上一致收敛的充分必要条件是, 对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists A_0=A_0(\varepsilon)$, 使得只要 $A_0<u,v<b$, 就有 $|\int_u^v f(x,t)\,\mathrm{d}x|<\varepsilon$, $\forall t\in T$.*

推论 2.2.3 *如果函数 $f(x,t)$ 在 $[a,b)\times[\alpha,\beta)$ 上连续 (α 是有限数而 β 可能为无穷), 且对于 $t\in(\alpha,\beta)$ 反常积分 $\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$ 都收敛, 但对于 $t=\alpha$ 不收敛. 则 $\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$ 在 (α,β) 上不一致收敛.*

证明 $t=\alpha$ 处不收敛知, 对任意给定 $\varepsilon>0$ 和任意 A_0, 存在 $A_0<u,v<b$, 使得 $|\int_u^v f(x,\alpha)\,\mathrm{d}x|>\varepsilon$. 由定理 2.1 知 $\int_u^v f(x,t)\,\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta)$ 连续 ($\beta=+\infty$ 也能用定理 2.1), 故存在 $t_0>\alpha$ 使 $\int_u^v f(x,t_0)\,\mathrm{d}x>\varepsilon$, 与 Cauchy 收敛原理矛盾. □

看几个简单的例子.

[1]一致收敛只是充分条件, 并非充分必要条件.

例 2.2.4 $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}x$ 在 $(0,+\infty)$ 不一致收敛, 但在 $[\delta,+\infty)$ 上一致收敛, 其中 δ 为任意正数.

证明 积分可以直接算出. $\square$

例 2.2.5 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx^2}\,\mathrm{d}x$ 在 $(0,+\infty)$ 不一致收敛, 但在 $[\delta,+\infty)$ 上一致收敛, 其中 δ 为任意正数.

证明 积分 (目前) 不好算出, 但是可知 $t=0$ 时积分发散, 由推论 2.7 即得. $\square$

由 Cauchy 收敛原理可以立即推出:

定理 2.2.6 (Weierstrass 判别法) 如果存在一个在 $[a,b)$ 上反常可积的函数 $F(x)$, 且 $|f(x,t)|\le F(x)$ 对任意 $x\in[a,b), t\in T$ 成立, 则 $\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$ 在集合 T 上一致收敛.

例 2.2.7 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\alpha+t^2)x}\sin x\,\mathrm{d}x$ $(\alpha>0)$ 关于 t 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

证明 由 $|\mathrm{e}^{-(\alpha+t^2)x}\sin x|\le \mathrm{e}^{-\alpha x}$ 及 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 由 W 判别法即证. $\square$

例 2.2.8 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\alpha+x^2)t}\sin t\,\mathrm{d}x$ $(\alpha>0)$ 关于 t 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

证明 考虑积分 $\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-(\alpha+x^2)t}\sin t\,\mathrm{d}x$ 即可. 由

$$\mathrm{e}^{-(\alpha+x^2)t}\sin t\le t\mathrm{e}^{-x^2t}\le\frac{t}{1+x^2t}\le\frac{1}{x^2}$$

及 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 由 W 判别法即证. $\square$

定理 2.2.9 (Dirichlet 判别法) 设 f,g 满足: (a) 存在常数 M 使得 $|\int_a^A f(x,t)\,\mathrm{d}x|<M$ 对任意 $A\in[a,b), t\in T$ 成立; (b) 对每个固定的 t 有 $g(x,t)$ 关于 x 单调, 且当 $x\to b$ 时 $g(x,t)$ 关于 t 一致地趋于 0. 则 $\int_a^b f(x,t)g(x,t)\,\mathrm{d}x$ 关于 t 在 T 上一致收敛.

注记: 这个定理默认 f,g 在闭区间 $[a,A]\subset[a,b)$ 上可积, 但不要求反常积分 $\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$ 存在.

证明 对某个固定的 t, 运用定理 1.12(推广的第二积分平均值定理), 得

$$\int_u^v f(x,t)g(x,t)\,\mathrm{d}x=g(u,t)\int_u^{\xi}f(x,t)\,\mathrm{d}x+g(v,t)\int_{\xi}^v f(x,t)\,\mathrm{d}x$$

由条件 (a), 得 $|\int_u^{\xi}f(x,t)\,\mathrm{d}x|<2M, |\int_{\xi}^v f(x,t)\,\mathrm{d}x|<2M$, 由条件 b, 当 u 充分接近 b 时 (默认 $v>u$), 无论 t 取何值, 总有 $|g(u,t)|<\frac{\varepsilon}{4M}, |g(v,t)|<\frac{\varepsilon}{4M}$, 故 $|\int_u^v f(x,t)g(x,t)\,\mathrm{d}x|<\varepsilon$, 由柯西收敛原理即证. $\square$

注记: 由证明过程, 条件 (a) 可加强为:

(a′) 存在常数 M, A_0 使得 $|\int_a^A f(x,t)\,\mathrm{d}x|<M$ 对任意 $A\in[A_0,b), t\in T$ 成立.

定理 2.2.10 (Abel 判别法) 设 f,g 满足: (a) 积分 $\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$ 关于 t 一致收敛; (b) 对每个固定的 t 有 $g(x,t)$ 关于 x 单调, 且 $g(x,t)$ 关于 t 一致有界. 则 $\int_a^b f(x,t)g(x,t)\,\mathrm{d}x$ 关于 t 在 T 上一致收敛.

证明 与 D 判别法证明类似, 用推广的第二积分平均值定理, 只是估计方法有所不同. $\square$

例 2.2.11 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

例 2.2.12 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin tx}{x}\,\mathrm{d}x$ 在 $[\delta,+\infty)$ $(\delta>0)$ 上一致收敛, 但在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛.

例 2.2.13 a 是常数, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\sin tx}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x$ 在 $[\delta,+\infty)$ $(\delta>0)$ 上一致收敛, 但在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛.

证明 由 D 判别法, 前半部分结论显然, 下证后半部分. 对任意的 A, 有

$$\int_A^{+\infty} \frac{x\sin tx}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{tA}^{+\infty} \frac{x\sin x}{t^2a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{tA}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x - t^2a^2\int_{tA}^{+\infty} \frac{\sin x}{x(t^2a^2+x^2)}\,\mathrm{d}x$$

$t\to 0$ 时, 最右边第一项趋于 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$, 第二项趋于 0. 之后我们会 (不存在循环论证的问题) 证明 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$, 从而得到最右边在 $t\to 0$ 时趋于 $\frac{\pi}{2}$, 故不在 $(0,+\infty)$ 上一致收敛. $\square$

例 2.2.14 例 1.8 表明, 瑕积分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^p}\,\mathrm{d}x$ $(p>0)$, 当且仅当 $p\in(0,2)$ 收敛. 进一步的结论是, 该

积分在 $(0,2-\delta]$ 一致收敛, 但在 $(0,2)$ 不一致收敛.

证明 作变换 $t=\frac{1}{x}$, 化为

$$\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^p}\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{2-p}}\,\mathrm{d}t,$$

对 $t\geq 1$, 有 $\frac{1}{t^{2-p}}\leq\frac{1}{t^\delta}$, 由 D 判别法可得在 $(0,2-\delta]$ 一致收敛. 如果在 $(0,2)$ 一致收敛, 那么由柯西收敛准则, 存在 $A_0>1$, 满足只要 $A_0<u<v$, 就有 $|\int_u^v\frac{\sin t}{t^{2-p}}\,\mathrm{d}t|<1$ 对任意 $p\in(0,2)$ 成立. 取定 $u=2k\pi, v=(2k+1)\pi, k$ 足够大, 则

$$1>\left|\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}\frac{\sin t}{t^{2-p}}\,\mathrm{d}t\right| \geq \frac{1}{((2k+1)\pi)^{2-p}}\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}\sin t\,\mathrm{d}t = \frac{2}{((2k+1)\pi)^{2-p}}$$

对任意 $p\in(0,2)$ 成立, 显然不正确. $\square$

2.3 反常积分与极限交换

作为反常积分一致收敛性的应用, 我们首先讨论反常积分与极限的交换性, 这是讨论含参反常积分微分、积分等性质的基础.

例 2.3.1 考虑函数列

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & 0 \le x \le n^2 \\ 0, & x > n^2 \end{cases}$$

其中 $n = 1, 2, \cdots$. 有 $f_n(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛于 0. 但是

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_0^{n^2} \frac{1}{n}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} n = +\infty \ne 0,$$

这说明如果仅要求函数列 $f_n(x)$ 一致收敛于 $g(x)$, 虽然常义积分和极限可以交换, 即

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$

但此结论不可以推广到反常积分中 (如此例就是把 $[a, b]$ 换成了 $[a, +\infty)$).

定理 2.3.2 设函数列 f_n 在 $[a, b)$ 上逐点收敛于 g, 且满足: (a) 对任意 $A > a$, f_n 在 $[a, A]$ 上一致收敛; (b) 积分 $\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$ 关于参数 n 一致收敛. 则积分 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 且

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

可以将离散参数 n 推广为连续参数 $t \in T$:

定理 2.3.3 设 t_0 是 $T \subset \mathbb{R}$ 的一个极限点 (可以为 ∞), 函数 $f(x, t)$ 满足: (a) 对任意 $A > a$, 等式 $\lim_{t\to t_0} f(x, t) = g(x)$ 对 $x \in [a, A]$ 一致地成立; (b) 积分 $\int_a^b f(x, t)\,\mathrm{d}x$ 关于 $t \in T$ 一致收敛. 则积分 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 且

$$\lim_{t\to t_0} \int_a^b f(x, t)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明 由条件 (b) 与 Cauchy 收敛原理知, 对 $\forall\varepsilon > 0, \exists\, a < A_0 < b$, 使得对任意 $a < u < v < b$, 有 $|\int_u^v f(x, t)\,\mathrm{d}x| < \varepsilon$ 对任意 t 成立. 令 $t \to t_0$, 由条件 (a) 可得 $|\int_u^v g(x)\,\mathrm{d}x| < 2\varepsilon$, 故积分 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛. 于是存在 $a < A_1 < b$, 使得 $|\int_{A_1}^b g(x)\,\mathrm{d}x| < \frac{\varepsilon}{3}$, 且 $\int_{A_1}^b f(x, t)\,\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{3}$ 对任意 t 成立. 再由条件 (a) 知, 对充分接近 t_0 的 t, 有 $|f(x, t) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{3(A_1 - a)}$ 对任意 $x \in [a, A_1]$ 成立, 故

$$\left|\int_a^b f(x, t)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^{A_1} |f(x, t) - g(x)|\,\mathrm{d}x + \left|\int_{A_1}^b f(x, t)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{A_1}^b g(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$$

$\square$

如果考虑的是瑕积分, 即 $[a,b)$ 是个有限区间, 上面的证明过程当然无所谓 $g(x)$ 或是 $f_n(x)$ 在 b 处是否真的无界. 换句话说, 对于常义积分定理 2.11 当然也成立:

定理 2.3.4 设函数列 f_n 在 $[a,b]$ 上逐点收敛于 g 且 g 常义可积, 满足: (a) 对任意 $a<A<b$, f_n 在 $[a,A]$ 上一致收敛; (b) 积分 $\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$ 关于参数 n 一致收敛. 则

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

注记: 在这里有必要解释下"积分 $\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$ 关于参数 n 一致收敛"在瑕积分意义下的含义. 我们假设是 b 为奇点, 这并不是说每个 $f_n(x)$ 都会在 b 处无界, 只要有某个 $f_n(x)$ 或 $g(x)$ 无界就行. 对于常义积分 $\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$, 一致收敛性的定义完全一样: 对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists A_0=A_0(\varepsilon)<b$, 使得只要 $A_0<A<b$, 就有 $|\int_A^b f(x,t)\,\mathrm{d}x|<\varepsilon$, $\forall t\in T$. 各种判别法也同样适用.

定理 2.11 并不要求 $f_n(x)$ 在 $[a,b)$ 上一致收敛于 $g(x)$, 下面的例子表明, 定理 2.11 的条件不能推出这个一致收敛性, 也就是说不需要一致收敛这么强的条件.

例 2.3.5 考虑如下在 $(0,1)$ 逐点收敛但不一致收敛的级数

$$1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\frac{x^3}{4}+\cdots=-\frac{\ln(1-x)}{x},$$

显然左边的级数在任意闭区间 $[0,A]\subset[0,1)$ 一致收敛. 记其前 n 项和为 $f_n(x)$, 显然 $-\frac{\ln(1-x)}{x}$ 是其优函数, 而例 1.6 表明瑕积分 $\int_0^1 -\frac{\ln(1-x)}{x}$ 收敛, 故 $\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$ 关于参数 n 一致收敛, 这就给出了想要的例子. 进一步, 由定理 2.11 可以计算出

$$\int_0^1\frac{\ln(1-x)}{x}=-\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\frac{x^{n-1}}{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=-\frac{\pi^2}{6}.$$

由这个例子启发可以得到定理 2.11 的一个推论:

推论 2.3.6 设定义在 $[a,b)$ 上的连续函数 $g(x)$ 反常可积, 且有级数展开 $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}g_n(x)$ 对任意 $x\in[a,b)$ 成立, 其中 $g_n(x)$ 是恒非负的连续函数, 则有

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b g_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明　由 Weierstrass 判别法知定理 2.11 的条件 (b) 成立, 由 Dini 定理知条件 (a) 成立. $\square$

下面这个例子值得注意[2].

[2]这个例子是中科大教材 §18.2 的例 7, 该书上的叙述有漏洞.

例 2.3.7 对 $0<p<1$, 考虑在 $(0,1)$ 逐点收敛但不一致收敛的级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{n+p-1}=\frac{x^{p-1}}{1+x},$$

这个级数在任意闭区间 $[\varepsilon,1-\varepsilon']\subset(0,1)$ 一致收敛, 若记前 n 项和为 $f_n(x)$, 直接求和知 $f_n(x)$ 有优函数 x^{p-1}, 故满足条件 (b). 但是条件 (a) 并不满足, 因为积分 $\int_0^1\frac{x^{p-1}}{1+x}$ 的瑕点是 0 而不是 1.

正确的做法是分别考虑 $[0,\frac{1}{2}]$ 与 $[\frac{1}{2},1]$ 上的积分, 前半部分满足定理 2.11 的假设, 后半部分满足定理 2.13 的假设, 相加即可得到

$$\int_0^1\frac{x^{p-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^1 x^{n+p-1}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+p}.$$

例 2.3.8 证明: $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\sin p\pi}$ $(0<p<1)$.

证明 拆成两部分, 分别用例 2.14 的结论得:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x&=\int_0^1\frac{x^{p-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{x^{p-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x+\int_0^1\frac{t^{-p}}{1+t}\,\mathrm{d}t\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+p}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1-p}=\frac{1}{p}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2p}{p^2-n^2}.\end{aligned}$$

例 4.3 中会用 Fourier 级数的方法证明

$$\frac{1}{p}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2p}{p^2-n^2}=\frac{\pi}{\sin p\pi},$$

现在我们用其他方法证明. 在笔记 "Bernoulli 数 (1)" 的 2.2 节中得到了一个等式

$$\cot x-\frac{1}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2x}{n^2\pi^2-x^2},\quad x\in(0,\pi),$$

由 $\tan x=-\cot x-\frac{\pi}{2}$ 可得

$$\tan x=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x-\frac{2n-1}{2}\pi}+\frac{1}{x+\frac{2n-1}{2}\pi}\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x}{x^2-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4}},$$

再利用 $\frac{1}{\sin x}=\frac{1}{2}(\tan\frac{x}{2}+\cot\frac{x}{2})$ 即得. □

例 2.3.9 利用例 2.15 可得 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^\alpha}=\frac{\pi}{\alpha\sin\frac{\pi}{\alpha}}$ $(\alpha>1)$

2.4 含参反常积分的性质

本节中, 我们假设 T 是 $\mathbb{R}$ 上闭区间 $[\alpha,\beta]$, f 有连续性, 即 $f(x,t)$ 是定义在 $[a,b)\times[\alpha,\beta]$ 上的连续函数.

a) 连续性

定理 2.4.1 若 $\displaystyle\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛, 则 $F(t)=\displaystyle\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续.

证明 由 $f(x,t)$ 的一致连续性和定理 2.12 即得. □

我们知道, 含参反常积分是函数项级数的离散版本, 回忆级数版本的 Dini 定理:

定理 2.4.2 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$ 的每一项在有限闭区间 $[\alpha,\beta]$ 上连续且非负. 如果其和函数也连续, 那么该级数在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛.

这个定理就是在说, 在函数非负的假设下, 和函数连续与一致收敛是等价的 (否则一致收敛只是保证连续的充分条件). 对于含参反常积分, 也有类似的 Dini 定理:

定理 2.4.3 设 $f(x,t)$ 在 $[a,b)\times[\alpha,\beta]$ 上连续且非负. 如果 $F(t)=\displaystyle\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续, 那么积分 $\displaystyle\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛.

证明 对某个严格单调递增趋于 b 的数列 $\{c_n\}_{n\geq 1}$ $(c_1=a)$, 把 $F(t)$ 改写为

$$F(t)=\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{c_n}^{c_{n+1}} f(x,t)\,\mathrm{d}x:=\sum_{n=1}^{\infty} g_n(t),$$

根据 f 连续且非负, 再由定理 2.1 可知, $g_n(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续, 故由定理 2.16 可知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛, 故存在正整数 N, 满足 $\sum_{n=N+1}^{\infty} g_n(t)<\varepsilon$, 故对于 $A>c_{N+1}$ 有

$$\int_A^b f(x,t)\,\mathrm{d}x\leq\int_{c_{N+1}}^b f(x,t)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=N+1}^{\infty} g_n(t)<\varepsilon$$

即积分 $\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛. □

注记: 与级数情形一样, 定理 2.17 中必须假设 $[\alpha,\beta]$ 是有限闭区间, 否则定理不再成立. 反例如:

$$F_1(t)=\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}x\quad t\in(0,1],$$

$$F_2(t)=\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{t(t-x)}\,\mathrm{d}x\quad t\in[1,+\infty].$$

b) 与积分交换

定理 2.4.4 假设同定理 2.15, 进一步有 $\int_\alpha^\beta F(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(x,t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x.$

证明 由定理 2.15 知 $F(t)$ 连续, 故可积. 下面记 $F(A,t)=\int_a^A f(x,t)\,\mathrm{d}x$, 对于任意一个以 b 为极限的数列 A_n, 根据一致收敛的条件可知, 函数列 $\varphi_n(t)=F(A_n,t)$ 一致收敛到 $F(t)$, 故

$$\lim_{n\to\infty}\int_\alpha^\beta \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta F(t)\,\mathrm{d}t,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\int_\alpha^\beta \left(\int_a^{A_n} f(x,t)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t,$$

再由定理 2.2 可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_\alpha^\beta \left(\int_a^{A_n} f(x,t)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}\int_a^{A_n} \left(\int_\alpha^\beta f(x,t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(x,t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x,$$

最后一个等号用到的是反常积分的定义 (注意到 A_n 是任取的). □

这个定理中我们假设了 t 的取值范围是有限区间 $[\alpha,\beta]$, 但很多时候我们遇到的 t 取值范围是无限区间 $[\alpha,+\infty]$, 此时我们不妨假设 $b=+\infty$, 也就是我们希望在某些条件下, 证明

$$\int_\alpha^\infty \left(\int_a^\infty f(x,t)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t = \int_a^\infty \left(\int_\alpha^\infty f(x,t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x,$$

首先我们肯定要延续定理 2.15 的假设, 那么由定理 2.18 可得, 对有限的 $C>\alpha$ 有

$$\int_\alpha^C \left(\int_a^\infty f(x,t)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t = \int_a^\infty \left(\int_\alpha^C f(x,t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x,$$

我们当然要假定左边的积分在 $C\to\infty$ 时极限是存在的, 所以应该要有

$$\lim_{C\to\infty}\int_a^\infty \left(\int_\alpha^C f(x,t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x = \int_a^\infty \lim_{C\to\infty}\left(\int_\alpha^C f(x,t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x,$$

令 $g(x,C)=\int_\alpha^C f(x,t)\,\mathrm{d}t$, 则上式转化为

$$\lim_{C\to\infty}\int_a^\infty g(x,C)\,\mathrm{d}x = \int_a^\infty \lim_{C\to\infty} g(x,C)\,\mathrm{d}x$$

这就是定理 2.12 的形式, 因此我们希望可以满足定理 2.12 的条件, 即

(i) $g(x,C)$ 在 $C\to\infty$ 时在任意有限区间 $[a,A]$ 上一致收敛到 $g(x,\infty)=\int_\alpha^\infty f(x,t)\,\mathrm{d}t$;

(ii) $\int_a^\infty g(x,C)\,\mathrm{d}x$ 关于 C 一致收敛,

条件 (i) 就是说 $\int_\alpha^\infty f(x,t)\,\mathrm{d}t$ 关于 x 在任意有限区间 $[a,A]$ 上一致收敛, 为了满足条件 (ii), 一个比较自然的充分条件是, 积分

$$\int_a^\infty \left(\int_\alpha^\infty |f(x,t)|\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$$

存在 (由 W 判别法). 由此我们可以总结出如下定理:

定理 2.4.5 设 $f(x,t)$ 在 $[a,+\infty)\times[\alpha,+\infty)$ 上连续, 积分 $\int_a^\infty f(x,t)\,\mathrm{d}x$ 关于 t 在任意有限区间 $[\alpha,C]$ 上一致收敛, 积分 $\int_\alpha^\infty f(x,t)\,\mathrm{d}t$ 关于 x 在任意有限区间 $[a,A]$ 上一致收敛, 且积分

$$\int_a^\infty \left(\int_\alpha^\infty |f(x,t)|\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x,\quad \int_\alpha^\infty \left(\int_a^\infty |f(x,t)|\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t$$

至少有一个存在, 那么积分

$$\int_\alpha^\infty \left(\int_a^\infty f(x,t)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t,\quad \int_a^\infty \left(\int_\alpha^\infty f(x,t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$$

都存在, 且相等, 即

$$\int_\alpha^\infty \left(\int_a^\infty f(x,t)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t = \int_a^\infty \left(\int_\alpha^\infty f(x,t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x.$$

运用 Dini 定理 (定理 2.17), 可以在 f 非负的时候得到如下更简洁的版本:

推论 2.4.6 设 $f(x,t)$ 在 $[a,+\infty)\times[\alpha,+\infty)$ 上连续且非负, 积分 $\int_a^\infty f(x,t)\,\mathrm{d}x$ 关于 t 在 $[\alpha,+\infty)$ 连续, 积分 $\int_\alpha^\infty f(x,t)\,\mathrm{d}t$ 关于 x 在 $[a,+\infty)$ 连续, 且积分

$$\int_a^\infty \left(\int_\alpha^\infty f(x,t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x,\quad \int_\alpha^\infty \left(\int_a^\infty f(x,t)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t$$

至少有一个收敛, 那么另一个也收敛, 且二者相等.

例 2.4.7 例 2.2 及注记中给出了 *Gauss* 积分最快的一种算法. 现在利用含参反常积分的工具可以给出另外一种方法, 但是这种方法明显复杂得多, 仅有理论价值. 我们把 *Gauss* 积分改写为

$$I^2 := \left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2 = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty u\mathrm{e}^{-u^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u,$$

如果能换序, 那么 I 立刻就可以算出来. 但是此时推论 2.20 不能直接应用, 这是因为 $\varphi(u) := \int_0^\infty u\mathrm{e}^{-u^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = I\cdot \mathrm{e}^{-u^2}$ $(u>0)$ 但 $\varphi(0)=0$, 所以只能得到 $\varphi(u)$ 在 $[\delta,+\infty]$ 上是连续函数. 另一方面 $\psi(t) := \int_0^\infty u\mathrm{e}^{-u^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2(1+t^2)}$ 在 $[0,+\infty]$ 上是连续函数, 由推论 2.20 可以得到

$$\int_\delta^\infty \left(\int_0^\infty u\mathrm{e}^{-u^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u = \int_0^\infty \left(\int_\delta^\infty u\mathrm{e}^{-u^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\delta^2(1+t^2)}}{2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t,$$

令 $g(\delta,t) = \frac{\mathrm{e}^{-\delta^2(1+t^2)}}{2(1+t^2)}$, 则 $g(\delta,t)$ 以 $\frac{1}{1+t^2}$ 为优函数, 所以积分 $\int_0^\infty g(\delta,t)\,\mathrm{d}t$ 关于 δ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛, 自然在 0 处连续, 在上式两端令 $\delta\to 0+$ 即可.

c) 与微分交换

定理 2.4.8 如果函数 f 和 $\frac{\partial f}{\partial t}$ 都在 $[a,b)\times[\alpha,\beta]$ 上连续, 且积分 $\displaystyle\int_a^b \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\,\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛, 那么 $F(t)=\displaystyle\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可微, 且 $F'(t)=\displaystyle\int_a^b \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\,\mathrm{d}x$.

证明 对某个严格单调递增趋于 b 的数列 $\{c_n\}_{n\geq 1}$ $(c_1=a)$, 令

$$F_n(t)=\int_a^{c_n} f(x,t)\,\mathrm{d}x,$$

则由定理 2.3 可知

$$F_n'(t)=\int_a^{c_n} \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\,\mathrm{d}x,$$

再由定理 2.1 可知 $F_n'(t)$ 是连续的. 再根据条件 $\int_a^b \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\,\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛, 可知函数列 $\{F_n'(t)\}$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛到函数 $\int_a^b \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\,\mathrm{d}x$. 此外, 函数列 $\{F_n(t)\}$ 显然逐点收敛到函数 $F(t)$, 根据逐项求导定理可知 $F(t)$ 连续可微, 且导数就是所要证的. □

注记: 这个定理默认了 $F(t)$ 在每一点处都存在 (即反常积分收敛), 事实上由逐项求导定理的条件, 也可以减弱为 $F(t)$ 在某一点处存在.

例 2.4.9 积分 $I(b)=\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax^2}\cos bx\,\mathrm{d}x\ (a>0)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{b^2}{4a}}$.

证明 我们希望可以对 b 求导, 也就是要证

$$I'(b)=-\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-ax^2}\sin bx\,\mathrm{d}x,$$

事实上, 由于 $x\mathrm{e}^{-ax^2}\sin bx$ 有优函数 $x\mathrm{e}^{-ax^2}$, 而积分 $\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{d}x$ 显然是收敛的, 由 W 判别法即可证上式右边的积分关于 b 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛, 再由定理 2.21 即知上式成立. 而利用分部积分法易证

$$I'(b)=-\frac{b}{2a}\cdot I(b),$$

这个常微分方程的通解为

$$I(b)=c\cdot\mathrm{e}^{-\frac{b^2}{4a}},$$

而利用 Gauss 积分, 容易得到 $I(0)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$, 代入即证. □

3 三角级数

3.1 Fourier 三角级数

我们希望把一个周期为 2π 的函数写成

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{1}$$

的形式. 如果 (1) 确实是等式, 且右边的级数在 $[-\pi,\pi]$ 上一致收敛, 则诸 a_n,b_n 是可以求出来的.

定义函数空间 $C[-\pi,\pi]$ 上的内积:

$$\langle f,g\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)\,\mathrm{d}x,$$

那么 $\langle 1,1\rangle=2\pi$, $\langle 1,\cos nx\rangle=0,\langle 1,\sin nx\rangle=0$ 对 $n\geq 1$ 成立. 对正整数 m,n, 有

$$\langle\cos mx,\cos nx\rangle=\pi\delta_{mn},\langle\cos mx,\sin nx\rangle=0,\langle\sin mx,\sin nx\rangle=\pi\delta_{mn},$$

即三角函数系

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \cdots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ \cdots$$

构成一个正交系. 由 (1) 的一致收敛性可得, 对非负整数 n, 有

$$a_n=\frac{1}{\pi}\langle f(x),\cos nx\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x, \tag{2}$$

上式也能看出为什么需要把首项写成 $\frac{a_0}{2}$ 而不是 a_0, 对正整数 n, 有

$$b_n=\frac{1}{\pi}\langle f(x),\sin nx\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x, \tag{3}$$

注意到, a_n,b_n 的表达式与 (1) 是否成立无关. 换句话说, 只要 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积且绝对可积, a_n,b_n 就可以定义出来, 我们自然想问: 由 (2)(3) 定义出来的级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

是否收敛 (在哪些点收敛), 若收敛是否等于 $f(x)$, 于是我们定义:

定义 3.1.1 *设 f 以 2π 为周期, 且在 $[-\pi,\pi]$ 上可积且绝对可积. 由 (2)(3) 定义出来的 a_n,b_n 称为 f 的 Fourier 系数, 级数*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

称为 f 的 *Fourier* 三角级数, 记为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

如果记 $A_0 = a_0, A_n = \frac{a_n - b_n \mathrm{i}}{2}, A_{-n} = \frac{a_n + b_n \mathrm{i}}{2}$ $(n \geq 1)$, 也即

$$A_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

那么会有

$$\frac{a_0}{2} = A_0,$$
$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = A_{-n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx} + A_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}, \quad (n \geq 1)$$

因此 Fourier 级数也可以表示为

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$$

我们也称 A_n 为 f 的第 n 个 Fourier 系数, 通常用 $\widehat{f}(n)$ 表示.

注记: 这样定义的 Fourier 级数看上去并不是一个正统定义下的 "级数", 应该用部分和理解. 因为级数本质上和数列是一一对应的, 所以我们只需要理解其部分和: 我们记 f 的 Fourier 级数的第 N 个部分和为

$$S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^{N} A_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$$

由上面的分析, 这也即

$$S_N(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

所以说, 级数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$ 其实就是个形式上的记号, 严格来说应

$$\widehat{f}(0) + \sum_{n=1}^{\infty}(\widehat{f}(n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} + \widehat{f}(-n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx})$$

.

补充: (可积且绝对可积)

绝对可积函数指的就是绝对值可积的函数, 对于常义可积函数, 可积一定绝对可积, 绝对可积不一定可积; 对于反常可积函数, 反常可积不一定绝对可积, 绝对可积一定反常可积. 所以当 f 在 $[-\pi, \pi]$ 上有界时, 就是要求其常义可积; 当其无界时, 要求提高为 $|f(x)|$ 反常可积.

为什么要做这样的一个要求呢? 注意到如下结论是成立的:

若 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积 (可能是反常意义下), 则 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$ 一定是有意义的, 对 $\sin nx$ 也是如此.

证明 常义可积情形显然. 对于反常可积的情形, 按 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$ 的瑕点分段处理, 可以只考虑其中一段区间 $[a,b)$, 其中只有 b 处 $f(x)$ 无界. 则 $\int_a^b f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$ 最多以 b 为瑕点. 考虑换元成无穷积分, 令 $x=b-\frac{1}{t}$, 则

$$\int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty}\frac{f(b-\frac{1}{t})}{t^2}$$

收敛. 由 Abel 判别法

$$\int_a^b f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty}\frac{f(b-\frac{1}{t})\cos\left(n(b-\frac{1}{t})\right)}{t^2}$$

收敛 (在 t 充分大时 $\cos\left(n(b-\frac{1}{t})\right)$ 单调有界). □

所以说, 只需要限定 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积, 就能保证 Fourier 系数都存在. 那为什么还要要求绝对可积? 这是因为只有保证了绝对可积, Riemann-Lebesgue 引理这一最关键的结论才得以成立, 在后面的 §4.1 中会给出一个反例.

3.2 三角级数与 Riemann 方法

定义 3.2.1 一个三角级数 S 指的是形如 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 的级数，无论收敛性如何，记做 $S\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$.

对于任意一个三角级数, 其性质可能很差, 如不一致收敛, 甚至在某些点处不收敛. Riemann 在论文《论函数的三角级数表示》[3]中构造了一个非常有用的级数: 设 S 为某个三角级数, 令

$$F_S(x)=\frac{a_0x^2}{4}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\cos nx+b_n\sin nx}{n^2}$$

这正是 S 在形式上做两次积分的结果. 很明显, 如果 a_n,b_n 有界, 那么由 W 判别法可知这个级数一致收敛, 因此函数 $F_S(x)$ 是研究一般三角级数很重要的工具. 下面的 Riemann 第一定理和第二定理就是关于 $F_S(x)$ 的两个性质. 在此之前, 需要引入一个记号: 对任意函数 g, 记

$$\Delta_h^2 g(x)=g(x+h)+g(x-h)-2g(x)$$

若 $\lim_{h\to0}\frac{\Delta_h^2 g(x)}{h^2}$ 存在, 则记为 $g^{[\prime\prime]}(x)$, 称为 g 在 x 点的二阶广义导数. 容易验证, C^2 的函数的二阶广义导数就是二阶导数.

定理 3.2.2 (Riemann 第一定理) 若三角级数 S 系数有界, 在某点 x 处收敛于 s, 则 $F_S^{[\prime\prime]}(x)=s$.

证明 由于 S 系数有界, 故 $F_S(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上处处收敛, 故可得

$$\frac{\Delta_h^2F(x)}{h^2}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\cos nx+b_n\sin nx}{n^2}\left(\frac{2\sin\frac{nh}{2}}{h}\right)^2$$

只需证如下更一般的引理

引理 3.2.3 设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}c_n=A$, 则 $\lim\limits_{h\to0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2=A$.

引理的证明 不妨 $A=0$, 否则用 c_1-A 替代 c_1. 记 $S_n=c_1+\cdots+c_n$, $(S_0=0)$. 由 Abel 变换

$$\sum_{n=1}^{N}c_n\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2==\sum_{n=1}^{N}S_n\left[\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2-\left(\frac{\sin(n+1)h}{(n+1)h}\right)^2\right]+S_N\left(\frac{\sin(N+1)h}{(N+1)h}\right)^2$$

令 $N\to+\infty$ 得

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2=\sum_{n=1}^{+\infty}S_n\left[\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2-\left(\frac{\sin(n+1)h}{(n+1)h}\right)^2\right]$$

[3]Riemann-Lebesgue 引理和 Riemann 局部化引理均出自于这篇论文.

下面对上式右端用经典的“两段估计法”. 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $m > 0$, 任意 $n > m$, $|S_n| < \varepsilon$, 故

$$\begin{aligned}
\sum_{n>m} &\leq \varepsilon \cdot \sum_{n>m} \left| \left(\frac{\sin nh}{nh} \right)^2 - \left(\frac{\sin (n+1)h}{(n+1)h} \right)^2 \right| \\
&\leq \varepsilon \cdot \sum_{n>m} \left| \int_{nh}^{(n+1)h} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\sin^2 t}{t^2} \right) \mathrm{d}t \right| \\
&\leq \varepsilon \cdot \int_0^{+\infty} \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\sin^2 t}{t^2} \right) \right| \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

于是只需证最后这个反常积分收敛. 这是容易的 (注意 0 不是瑕点). □

定理 3.2.4 (Riemann 第二定理) 若 S 的系数满足 $a_n \to 0, b_n \to 0$, 则在任意一点 x 处, 无论 S 是否收敛, 都有 $\lim_{h\to 0} \frac{\Delta_h^2 F_S(x)}{h} = 0$.

证明 系数趋于 0 当然有界, 故

$$\frac{\Delta_h^2 F(x)}{h} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2} \cdot \frac{4 \sin^2 \frac{nh}{2}}{h}$$

只需证如下更一般的引理

引理 3.2.5 设 $c_n \to 0$, 则 $\displaystyle\lim_{h\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n \sin^2 nh}{n^2 h} = 0$.

引理的证明 设 M 为 $|c_n|$ 的一个上界. 任取 $\varepsilon > 0$, 对任意的 h, 记 $N = N(h)$ 为 $\frac{\varepsilon}{|h|}$ 的整数部分, 则有

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n \sin^2 nh}{n^2 h} \right| &\leq \sum_{n=1}^{N} \left| \frac{c_n \sin^2 nh}{n^2 h} \right| + \sum_{n=N+1}^{\infty} \left| \frac{c_n \sin^2 nh}{n^2 h} \right| \\
&\leq MN|h| + \sup_{k>N} \{|c_n|\} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2 |h|} \\
&\leq M\varepsilon + \frac{\sup_{k>N}\{|c_n|\}}{N|h|} \\
&\leq M\varepsilon + \frac{2\sup_{k>N}\{|c_n|\}}{(N+1)|h|} \\
&\leq M\varepsilon + \frac{2\sup_{k>N}\{|c_n|\}}{\varepsilon}
\end{aligned}$$

再令 $h \to 0$, 则 $N(h) \to +\infty$, 可让上面最后一个式子 $\leq (M+1)\varepsilon$, 即证. □

最后我们指出, 对于一个三角级数, 其系数趋于 0 是非常常见的事情, 因此 Riemann 第一定理和第二定理适用的范围非常广.

定理 3.2.6 (Cantor-Lebesgue 引理) 若在某个区间 $[a,b]$ 上 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 逐点收敛, 则 $n\to+\infty$ 时, 有 $a_n\to 0, b_n\to 0$.

证明 由辅助角公式, 级数可表示为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\rho_n\sin(nx+\theta_n),\ \rho_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$$

只需证 $\rho_n\to 0$. 反设存在无穷多个 n, $\rho_n\geq 2\delta>0$. 下归纳构造闭区间套 $[a,b]\supset[A_1,B_1]\supset[A_2,B_2]\supset\cdots$ 与递增正整数列 n_k $(k=1,2,\cdots)$, 使得在区间 $[A_k,B_k]$ 上, $\rho_{n_k}\sin(n_kx+\theta_{n_k})\geq\delta$. 首先, 任取一个 n_1 满足 $\rho_{n_1}\geq 2\delta$ 且 $n_1(b-a)>2\pi$, 那么存在区间 $[A_1,B_1]\subset[a,b]$ 使得在 $[A_1,B_1]$ 上 $\sin(n_1x+\theta_{n_1})\geq\frac{1}{2}$. 后面也类似, 只需 $\rho_{n_{k+1}}\geq 2\delta$ 且 $n_{k+1}(B_{n_k}-A_{n_k})>2\pi$ 即可. 这样, 任取这些闭区间交集中的一个点, 级数在该点发散. □

注记: 最一般情形的 Cantor-Lebesgue 引理需要测度论的概念.

3.3 三角级数展开的唯一性

§3.1 中证明了, 若一个三角级数一致收敛, 或者干脆就是一个有限项级数 (三角多项式), 则它的 Fourier 级数就是自身. 一个自然的问题是, 如果一个三角级数只满足逐点收敛性而不满足一致收敛性, 它的 Fourier 级数还是自身吗? 为使 Fourier 系数有定义, 我们当然要假设这个三角级数有可积性 (但要注意, 证明一个三角级数有可积性并不容易), 问题就是:

命题 3.3.1 *$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积且绝对可积, (2)(3) 成立吗?*

如果命题 3.1 成立, 考虑函数 $f(x)\equiv 0$, 可得以下两个命题成立:

命题 3.3.2 *如果对 $\forall x\in[-\pi,\pi]$, 同时成立*

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx),$$

则有 $a_n=\alpha_n, b_n=\beta_n$.

命题 3.3.3 (等价版本) *如果对 $\forall x\in[-\pi,\pi]$, 成立*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=0,$$

则有 $a_n=0, b_n=0$.

这两个较弱的命题也被称为三角级数展开的唯一性, 与幂级数展开的唯一性类似, 命题是正确的. Cantor 对此进行了深入的研究, 他正是在研究这个问题时发现了处理无穷集的重要性, 并因此建立了集合论. 一个更强的版本是:

定理 3.3.4 (Cantor,Lebesgue) *设 $E\subset[-\pi,\pi]$ 是个闭的可列集, 若对 $\forall x\in[-\pi,\pi]\setminus E$ 有*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=0,$$

则有 $a_n=0, b_n=0$.

注记: E 是闭的可列集的条件不可减弱为零测集, D. E. Menšov 构造了一个不恒为 0 但几乎处处为 0 的三角级数.

本节只给出命题 3.1 的证明 (从而也证明了命题 3.2 和 3.3), 我们有如下定理

定理 3.3.5 (du Bois-Reymond 定理) 若函数 $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上 *Riemann* 可积, 则 (2)(3) 成立.

证明 由 Cantor-Lebesgue 引理知 a_n, b_n 有界, 考虑

$$F(x)=\frac{a_0x^2}{4}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\cos nx+b_n\sin nx}{n^2}$$

Riemann 第一定理表明 $F^{[\prime\prime]}(x)=f(x)$. 回顾我们有

$$\frac{\Delta_h^2F(x)}{h^2}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\cos nx+b_n\sin nx}{n^2}\left(\frac{2\sin\frac{nh}{2}}{h}\right)^2$$

注意我们的最终目标是计算 a_n 和 b_n, 而对于任意固定的 h, 上式右边关于 x 一致收敛, 故有

$$a_n\left(\frac{2\sin\frac{nh}{2}}{nh}\right)^2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\Delta_h^2F(x)}{h^2}\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$b_n\left(\frac{2\sin\frac{nh}{2}}{nh}\right)^2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\Delta_h^2F(x)}{h^2}\sin nx\,\mathrm{d}x$$

令 $h\to 0$, 如果右边的积分和极限可换序就证完了. 我们用如下的阿尔泽拉定理[4]证明可以换序

引理 3.3.6 (阿尔泽拉定理) 函数序列 $f_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上常义可积且一致有界, 在 $[a,b]$ 上逐点收敛到函数 $\varphi(x)$. 若 $\varphi(x)$ 也在 $[a,b]$ 上常义可积, 则

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

此外, 离散指标 n 可推广到连续参数.

为了运用这个定理, 我们只需要证明 $\frac{\Delta_h^2F(x)}{h^2}$ 关于参数 h (不妨 $h>0$) 一致有界 (常义可积性由一致收敛保证):

引理 3.3.7 (Lebesgue) 设定义在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数 $F(x)$ 处处有二阶广义导数 $F^{[\prime\prime]}(x)$, 且满足 $m\le F^{[\prime\prime]}(x)\le M$, 则 $m\le\frac{\Delta_h^2F(x_0)}{h^2}\le M$ 对任意 x_0,h 成立.

引理的证明 考虑函数

$$\varphi(x)=F(x)-F(x_0)-\frac{F(x_0+h)-F(x_0-h)}{2h}(x-x_0)-\frac{\Delta_h^2F(x_0)}{h^2}\frac{(x-x_0)^2}{2},$$

[4] 这个定理实际上就是 Lebesgue 控制收敛定理的推论, 即 Riemann 积分的版本. 不依赖于 Lebesgue 积分理论的证明见菲砖第二卷 P617-P621.

有 φ 在 x_0+h, x_0, x_0-h 三点处都取 0. 而 φ 是连续函数, 它在区间 $[x_0-h, x_0+h]$ 上的最大值和最小值可以在区间内部取到, 设分别在 ξ 与 η 处取得最大值和最小值. 由于 φ 与 F 就差一个二次多项式, 而可微函数的二阶广义导数就是二阶导数, 故 $\varphi^{[\prime\prime]}(x) = F^{[\prime\prime]}(x) - \frac{\Delta_h^2 F(x_0)}{h^2}$. 另一方面由二阶广义导数的定义, 显然有 $\varphi^{[\prime\prime]}(\xi) \le 0, \varphi^{[\prime\prime]}(\eta) \ge 0$, 由此易证.

综合以上原定理得证. □

比利时数学家瓦雷 · 布散 (Ch.J.de la Vallée Poussin) 于 1912 年对 du Bois-Reymond 定理进行了推广: 取消对 f 有界的设定, 还允许挖掉一些点.

定理 3.3.8 (广义 du Bois-Reymond 定理) *若三角级数* $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ *在* $[-\pi, \pi]$ *上除去有限个点外都收敛到函数* $f(x)$, *且* $f(x)$ *可积且绝对可积, 则* (2)(3) *成立.*

注记: 我们先来看为什么定理 3.5 的证明失效了. 关键之处在于其中的那个 Lebesgue 引理不再成立, 即 $F^{[\prime\prime]}$ 未必有界. 但需注意的是, 如果 f 仍然 Riemann 可积, 仅仅只是挖了一些点, 证明是几乎可以照搬的.

证明 同样, 我们考虑

$$F(x) = \frac{a_0 x^2}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2}$$

设 $E \subset [-\pi, \pi]$ 是所有原级数不收敛到 $f(x)$ 的点 (当然也包括 f 的瑕点)

第一步, 我们先建立如下引理:

引理 3.3.9 *对于与* E *不相交的区间* $[a, b]$, *对任意* $x \in [a, b]$ *有*

$$F(x) - F(a) - \frac{x-a}{b-a} \cdot (F(b) - F(a)) = \int_a^x (x-s) f(s) \,\mathrm{d}s - \frac{x-a}{b-a} \cdot \int_a^b (b-s) f(s) \,\mathrm{d}s$$

引理的证明 根据 $[a, b]$ 的取法知, 存在 $h_0 > 0$, 使得 $[a-h_0, b+h_0]$ 与 E 不相交. 那么在区间 $[a-h_0, b+h_0]$ 中, F 处处存在二阶广义导数且这个二阶广义导数 (即 f 有界), 将定理 3.5 证明过程中那个 Lebesgue 引理略作修改即可证, 存在 $m < M$, 使得

$$m \le \frac{\Delta_h^2 F(s)}{h^2} \le M, \quad \forall s \in [a, b],\ h \in (0, h_0)$$

下面我们用两种方法计算极限

$$I = \lim_{h \to 0+} \left[\int_a^x (x-s) \frac{\Delta_h^2 F(s)}{h^2} \,\mathrm{d}s - \frac{x-a}{b-a} \int_a^b (b-s) \frac{\Delta_h^2 F(s)}{h^2} \,\mathrm{d}s \right]$$

一方面, 由于积分号中的函数都是一致有界的, 由阿尔泽拉定理可得

$$I=\int_a^x (x-s)f(s)\,\mathrm{d}s-\frac{x-a}{b-a}\int_a^b (b-s)f(s)\,\mathrm{d}s$$

另一方面, 可以用洛必达法则计算:

$$\begin{aligned}
I=&\lim_{h\to0+}\frac{1}{h^2}\bigg[\int_a^x (x-s)(F(s+h)+F(s-h)-2F(s))\,\mathrm{d}s\\
&-\frac{x-a}{b-a}\int_a^b (b-s)(F(s+h)+F(s-h)-2F(s))\,\mathrm{d}s\bigg]\\
=&\lim_{h\to0+}\frac{1}{h^2}\bigg[\int_{a+h}^{x+h}(x-s+h)F(s)\,\mathrm{d}s+\int_{a-h}^{x-h}(x-s-h)F(s)\,\mathrm{d}s-2\int_a^x (x-s)F(s)\,\mathrm{d}s\\
&-\int_{a+h}^{b+h}(b-s+h)F(s)\,\mathrm{d}s+\int_{a-h}^{b-h}(b-s-h)F(s)\,\mathrm{d}s-2\int_a^b (b-s)F(s)\,\mathrm{d}s\bigg]\\
(L)=&\lim_{h\to0+}\frac{1}{2h}\bigg[\bigg(-hF(x+h)-(x-a-h)F(a+h)+h(F(x+h)-F(a-h))+\int_{a+h}^{x+h}F(s)\,\mathrm{d}s\bigg)\\
&+\bigg(-hF(x-h)+(x-a+h)F(a-h)+h(F(x-h)-F(a-h))-\int_{a-h}^{x-h}F(s)\,\mathrm{d}s\bigg)\\
&-\frac{x-a}{b-a}\bigg(-hF(b+h)-(b-a-h)F(a+h)+h(F(b+h)-F(a-h))+\int_{a+h}^{b+h}F(s)\,\mathrm{d}s\bigg)\\
&-\frac{x-a}{b-a}\bigg(-hF(b-h)+(b-a+h)F(a-h)+h(F(b-h)-F(a-h))-\int_{a-h}^{b-h}F(s)\,\mathrm{d}s\bigg)\bigg]\\
=&\lim_{h\to0+}\frac{1}{2h}\bigg[\bigg(-(x-a)F(a+h)+\int_{a+h}^{x+h}F(s)\,\mathrm{d}s+(x-a)F(a-h)-\int_{a-h}^{x-h}F(s)\,\mathrm{d}s\bigg)\\
&-\frac{x-a}{b-a}\bigg(-(b-a)F(a+h)+\int_{a+h}^{b+h}F(s)\,\mathrm{d}s+(b-a)F(a-h)-\int_{a-h}^{b-h}F(s)\,\mathrm{d}s\bigg)\bigg]\\
=&\lim_{h\to0+}\frac{1}{2h}\bigg[\bigg(\int_{a+h}^{x+h}F(s)\,\mathrm{d}s-\int_{a-h}^{x-h}F(s)\,\mathrm{d}s\bigg)-\frac{x-a}{b-a}\bigg(\int_{a+h}^{b+h}F(s)\,\mathrm{d}s-\int_{a-h}^{b-h}F(s)\,\mathrm{d}s\bigg)\bigg]\\
(L)=&\lim_{h\to0+}\frac{1}{2}\bigg[(F(x+h)-F(a+h)+F(x-h)-F(a-h))\\
&-\frac{x-a}{b-a}\cdot(F(b+h)-F(a+h)+F(b-h)-F(a-h))\bigg]\\
=&F(x)-F(a)-\frac{x-a}{b-a}\cdot(F(b)-F(a))
\end{aligned}$$

综合两方面引理得证. 其中反复用到了如下熟知的事实: 给定实数 $a<b$, 若函数 g 在点 $b+h_0$ (或 $b-h_0$) 处连续, 则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\left(\int_a^{b+h}g(t)\,\mathrm{d}t\right)\bigg|_{h=h_0}=g(b+h_0),\quad 或\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\left(\int_a^{b-h}g(t)\,\mathrm{d}t\right)\bigg|_{h=h_0}=-g(b+h_0)$$

第二步, 我们证明一个关键的中间结论:

$$F'(x) - F'(a) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad \forall x \in [a,b]$$

事实上, 由引理变形可得

$$F(x) = F(a) + \frac{x-a}{b-a}\cdot(F(b)-F(a)) + \boxed{x\cdot\int_a^x f(s)\,\mathrm{d}s - \int_a^x sf(s)\,\mathrm{d}s} - \frac{x-a}{b-a}\cdot\int_a^b (b-s)f(s)\,\mathrm{d}s$$

我们想要对两边关于 x 求导, 关键在于框住的这一项导数为 $\int_a^x f(s)\,\mathrm{d}s$. 注意, 这一点当 f 在 x 处连续时是显然的, 但此时我们只知道 f 有界. 好在这已经够用了, 我们将其写成下面的引理:

引理 3.3.10 *若 f 在 x_0 附近有界, 则*

$$x\int_a^x f(s)\,\mathrm{d}s - \int_a^x sf(s)\,\mathrm{d}s - \left(x_0\int_a^{x_0} f(s)\,\mathrm{d}s - \int_a^{x_0} sf(s)\,\mathrm{d}s\right) - (x-x_0)\int_a^{x_0} f(s)\,\mathrm{d}s = o(x-x_0)$$

引理的证明 整理得

$$\begin{aligned}
LHS &= x\int_{x_0}^x f(s)\,\mathrm{d}s - \int_a^x sf(s)\,\mathrm{d}s + \int_a^{x_0} sf(s)\,\mathrm{d}s \\
&= \int_{x_0}^x (x-s)f(s)\,\mathrm{d}s \\
&= \int_{x_0}^x (x_0-s)f(s)\,\mathrm{d}s + (x-x_0)\int_{x_0}^x f(s)\,\mathrm{d}s \\
&= o(x-x_0) + o(x-x_0) = o(x-x_0)
\end{aligned}$$

其中最后一个等号用定义即可证明.

现在可得

$$F'(x) = \frac{F(b)-F(a)}{b-a} + \int_a^x f(s)\,\mathrm{d}s - \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b (b-s)f(s)\,\mathrm{d}s$$

注意该式对于 $x \in (a,b)$ 成立, 对于 $x = a, b$ 左边应改为单边导数. 但回顾 Riemann 第二定理, 说的是

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h} = 0$$

所以只要在某点处 F 一边的导数存在, 那么另一边的导数也存在且二者相等, 于是有

$$F'(x) = \frac{F(b)-F(a)}{b-a} + \int_a^x f(s)\,\mathrm{d}s - \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b (b-s)f(s)\,\mathrm{d}s, \quad x \in [a,b]$$

令 $x=a$ 立得

$$F'(x)-F'(a)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad \forall x\in[a,b]$$

第三步, 进一步地我们证明, F 在 $[-\pi,\pi]$ 上处处连续可微.

由于 E 是有限集, 任取 E 中两个相邻的点 $\alpha<\beta$, 那么 f 在 $[\alpha,\beta]$ 上可积, 故关于 x 的函数 $\int_\alpha^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续 (在 β 处右连续). 注意 $[a,b]$ 选取时只要满足 $\alpha<a<b<\beta$ 就可以用第二步的结论, 故可得 F' 在 (α,β) 上连续, 且 $\lim_{x\to\beta-}F'(x)$ 存在. 从而

$$F(x)=F\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^x F'(s)\,\mathrm{d}s, \quad \frac{\alpha+\beta}{2}\le x<\beta$$

由于 F 连续 (一致收敛性), 且 F' 在 β 附近 (不含 β) 有界, 故

$$F(\beta)=F\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^\beta F'(s)\,\mathrm{d}s$$

现在就可以计算 F 在 β 处的左导数:

$$\lim_{x\to\beta-}\frac{F(\beta)-F(x)}{\beta-x}=\frac{1}{\beta-x}\cdot\int_x^\beta F'(s)\,\mathrm{d}s=\lim_{x\to\beta-}F'(x)$$

最后一个等号由定义即可证. 故 F 在 β 处左导数存在, 由前面的分析可知, F 在 β 处可微, 即

$$F'(\beta)=\lim_{x\to\beta-}F'(x)$$

同理有

$$F'(\beta)=\lim_{x\to\beta+}F'(x)$$

由此可得 F 在整个 $[-\pi,\pi]$(其实就是整个 $\mathbb{R}$) 上连续可微.

第四步, 我们完成剩下的证明. 由 F 连续可微易得, 对任意 $x\in[-\pi,\pi]$, 有

$$F'(x)-F'(-\pi)=\int_{-\pi}^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

回顾

$$b_n=\lim_{h\to0}b_n\left(\frac{2\sin\frac{nh}{2}}{nh}\right)^2=\lim_{h\to0}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi\frac{\Delta_h^2F(x)}{h^2}\sin nx\,\mathrm{d}x$$

现在虽然不能用阿尔泽拉定理, 但我们可以先对最右边的积分变形:

$$\int_{-\pi}^\pi\frac{\Delta_h^2F(x)}{h^2}\sin nx\,\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^\pi\frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h^2}\sin nx\,\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{F(x+h)-F(x)}{h^2} \sin nx \,\mathrm{d}x - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{F(x)-F(x-h)}{h^2} \sin nx \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{F(x+h)-F(x)}{h^2} \sin nx \,\mathrm{d}x - \int_{-\pi-h}^{\pi-h} \frac{F(y+h)-F(y)}{h^2} \sin\left(n(y+h)\right) \mathrm{d}y \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \cdot \frac{\sin nx - \sin\left(n(x+h)\right)}{h} \,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

由 Lagrange 中值定理, 被积函数一致有界 (因为 F 连续可微), 现在可以用阿尔泽拉定理, 得

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin nx - \sin\left(n(x+h)\right)}{h} \,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} nF'(x) \cos nx \,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} n \left(F'(-\pi) + \int_{-\pi}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \right) \cos nx \,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

最后, 用 Fubini 定理[5]可得

$$
\begin{aligned}
b_n &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} n \left(\int_{-\pi}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \right) \cos nx \,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t \left(\int_{t}^{\pi} n \cos nx \,\mathrm{d}x \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \,\mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

对 a_n 同理, 至此便完成了证明. □

注记: 此定理看上去证明过程非常长, 实际上大多数为计算细节, 证明的核心就在于第四步开始提及的式子.

推论 3.3.11 *设 f 是个可积且绝对可积的函数, 若 f 的 Fourier 级数不逐点收敛到 f, 则不存在某个三角级数逐点收敛到 f.*

推论 3.3.12 *若三角级数 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ 逐点收敛到函数 $f(x)$, 且 $f(x)$ 可积且绝对可积, 则 $f(x)$ 的 Fourier 级数就是该三角级数.*

[5]由于 $\int_{-\pi}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ 未必可微, 仅是几乎处处可微, 不能用分部积分公式. 当然可以用实变函数中的分部积分公式.

4 Fourier 级数的收敛理论

4.1 Riemann-Lebesgue 引理

a) 叙述与证明

观察一些简单例子可以看出, 每个 Fourier 级数都满足 $a_n \to 0, b_n \to 0,\ n \to +\infty$, 这就是 Riemann-Lebesgue 引理, 这是对后面非常重要的准备工作.

定理 4.1.1 (Riemann-Lebesgue 引理) *设 f 在 $[a,b]$(a,b 可以为无穷) 上可积且绝对可积, 则*

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x = 0,\ \lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x = 0.$$

证明 对于 Riemann 可积的函数 f, 设 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 是 $n+1$ 个等分点, 其中 $n = [\sqrt{\lambda}]$, 有

$$\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}(f(x)-f(x_{i-1}))\cos\lambda x\,\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i}\cos\lambda x\,\mathrm{d}x$$

前一项用振幅估计, 后一项用 $\cos\lambda x$ 的振荡性质估计即可. 对于绝对可积的 f, 不妨设只有 b 一个瑕点 (这里 $b=+\infty$ 也看做瑕点)[6], 取充分接近 b 的一个数 $b-\eta$, 有

$$\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x = \int_a^{b-\eta} f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x + \int_{b-\eta}^b f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x$$

前一项用 Riemann 可积时的情形估计, 后一项用绝对可积性估计即可. $\sin\lambda x$ 的版本同理. □

推论 4.1.2 *设 $\{a_n\},\{b_n\}$ 是某个可积且绝对可积函数的 Fourier 系数, 则*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = 0.$$

b) 应用: 局部化引理

下面讨论 Fourier 三角级数在一点的收敛性. 在固定的点 x_0 处, f 对应的 Fourier 级数是

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^\infty (a_k\cos kx_0 + b_k\sin kx_0),$$

我们想讨论它是否收敛, 收敛到什么值, 自然要先考虑部分和

$$S_n(f)(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k\cos kx_0 + b_k\sin kx_0),$$

[6] 由定义 1.6 我们 (一般) 假设瑕点有限多个, 若有多个瑕点, 把区间 $[a,b]$ 以瑕点为间隔点拆开, 分别算极限即可.

带入 a_k, b_k 的表达式得

$$\begin{aligned}
S_n(f)(x_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{n}\left(\cos kx_0 \cdot \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,\mathrm{d}t + \sin kx_0 \cdot \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,\mathrm{d}t\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x_0)\right)\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin{(n+\frac{1}{2})(t-x_0)}}{2\sin\frac{1}{2}(t-x_0)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi+x_0}^{\pi+x_0} f(t)\frac{\sin{(n+\frac{1}{2})(t-x_0)}}{2\sin\frac{1}{2}(t-x_0)}\,\mathrm{d}t\\
(t-x_0=\tilde{t}) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tilde{t}+x_0)\frac{\sin{(n+\frac{1}{2})\tilde{t}}}{2\sin\frac{\tilde{t}}{2}}\,\mathrm{d}\tilde{t}\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t+x_0)\frac{\sin{(n+\frac{1}{2})t}}{2\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(t+x_0)\frac{\sin{(n+\frac{1}{2})t}}{2\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(f(x_0+t)+f(x_0-t)\right)\frac{\sin{(n+\frac{1}{2})t}}{2\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

最终得到的结果

$$S_n(f)(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(f(x_0+t)+f(x_0-t)\right)\frac{\sin{(n+\frac{1}{2})t}}{2\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t$$

称为 Dirichlet 积分, 这个等式将在下一节 (§4.2) 中反复用到. 函数 $\frac{\sin{(n+\frac{1}{2})t}}{\sin\frac{t}{2}}$ 称为 (n 次)Dirichlet 核, 记作 $D_n(t)$. 进一步地, 把积分区间写成两部分

$$\int_0^\pi = \int_0^\delta + \int_\delta^\pi,$$

其中 $\delta > 0$ 是个小量. 易证函数 $\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2\sin\frac{t}{2}}$ 在 $[\delta, \pi]$ 上可积且绝对可积, 由 RL 引理知第二项积分在 $n\to\infty$ 时趋于 0. 因此, 当 $n\to\infty$ 时, $S_n(x_0)$ 的极限存在与否, 以及收敛到什么数值, 都完全取决于第一项积分, 即

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta}\left(f(x_0+t)+f(x_0-t)\right)\frac{\sin{(n+\frac{1}{2})t}}{2\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t,$$

这个积分的值只与 f 在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 上的取值有关. 这样我们就得到了如下定理:

定理 4.1.3 (局部化引理) *设 f 周期为 2π, 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积且绝对可积. 则 f 的 Fourier 级数在点 x_0 处是否收敛, 以及收敛到什么数值, 只与 f 在 x_0 附近的行为有关.*

c*) RL 引理 "可积但不绝对可积" 的反例

在 §3.1 中我们提到过, 只要 f(常义或反常) 可积, Fourier 系数都是良好定义的. 但是下面的两个例子表明, 此时 RL 引理不一定成立, 因此后面我们不考虑这类函数.

例 4.1.4 我们考虑无穷区间上的反例. 对于 $a=-\infty, b=\infty$, 函数 $f(x)=\sin x^2$ 可积但不绝对可积 *(例 1.3.10)*, 但根据

$$\begin{aligned}2\sin x^2\cos 2\lambda x &= \sin\left(x^2+2\lambda x\right)+\sin\left(x^2-2\lambda x\right)\\&=\sin\Big((x+\lambda)^2-\lambda^2\Big)+\sin\Big((x-\lambda)^2-\lambda^2\Big)\\&=\cos\lambda^2\left(\sin\Big((x+\lambda)^2\Big)+\sin\Big((x-\lambda)^2\Big)\right)\\&\quad-\sin\lambda^2\left(\cos\Big((x+\lambda)^2\Big)+\cos\Big((x-\lambda)^2\Big)\right)\end{aligned}$$

可得

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\sin x^2\cos 2\lambda x\,\mathrm{d}x&=\cos\lambda^2\int_{-\infty}^{\infty}\sin x^2\,\mathrm{d}x-\sin\lambda^2\int_{-\infty}^{\infty}\cos x^2\,\mathrm{d}x\\&=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\cos\lambda^2-\sin\lambda^2\right)\end{aligned}$$

并不随 $\lambda\to\infty$ 而收敛. 最后一步用到了 *Fresnel* 积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sin x^2\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}\cos x^2\,\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

对于 $a=0, b=\infty$, 函数 $f(x)=\sin x^2$ 同样是个反例, 因为被积函数 $\sin x^2\cos 2\lambda x$ 是偶函数.

注记: 我们可以用下面的方法对任意的无限区间构造反例. 不妨区间为 (a,∞), 我们考虑函数 $\sin((x-a)^2)$, 其对应的 *Fourier* 系数

$$\int_a^{\infty}\sin\left((x-a)^2\right)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\sin\left(u^2\right)\cos\left(\lambda u+\lambda a\right)\mathrm{d}u$$

因此, $a=\pm 2\pi$ 时已作出反例. 而如果对 (a,∞) 已作出反例 f, 对 $(\mu a,\infty)$ $(\mu>0)$, $f(\frac{x}{\mu})$ 就是反例. 这足以给出所有的情形.

例 4.1.5 我们考虑有限区间上的反例. 假设 $a=0, b=\pi$.

构造: 先定义这样的一个函数 f: 令

$$a_k=3^{k^4},\quad b_k=\frac{\pi}{a_k},\quad k=0,1,\cdots$$

那么区间 $(0,\pi]$ 可写成不交并

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}(b_k,b_{k-1}]$$

定义

$$f(x) = \frac{1}{k^2}\sin(a_k x), \quad x \in (b_k, b_{k-1}], \quad k = 1, 2, \cdots$$

再补充定义 $f(0) = 0$, 容易验证 f 是 $[0, \pi]$ 上的连续函数.

我们指出, 如果把 f 延拓为 $[-\pi, \pi]$ 上的偶函数, 那么其 *Fourier* 级数在 *0* 处发散. 这是类似于 *P.du Bois-Reymond* 反例 *(§4.6)* 的另一个例子, 我们将在证明 *§4.6* 中证明这一点.

现在定义

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}, \quad x \in (0, \pi]$$

并且 $g(0) = 0$ *(*事实上 $g(0)$ 的值并不重要*)*. 下面将说明这是个反例.

第一步, 我们要说明 g 是反常可积的. 令 $K > 0$ 满足

$$\int_0^T \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x < K, \quad \forall\ T \geq 0$$

那么有

$$\left|\int_{b_k}^{b_{k-1}} g(x)\,\mathrm{d}x\right| = \frac{1}{k^2}\left|\int_{b_k}^{b_{k-1}} \frac{\sin(a_k x)}{x}\,\mathrm{d}x\right| = \frac{1}{k^2}\left|\int_{a_k b_k}^{a_k b_{k-1}} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right| < \frac{2K}{k^2}$$

故级数

$$I = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{b_k}^{b_{k-1}} g(x)\,\mathrm{d}x$$

绝对收敛. 对于 $\delta \in (b_{N+1}, b_N]$, 把 g 在 $[\delta, \pi]$ 上的积分拆为两部分

$$\int_\delta^\pi g(x)\,\mathrm{d}x = \int_\delta^{b_N} g(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{N} \int_{b_k}^{b_{k-1}} g(x)\,\mathrm{d}x$$

后一部分收敛到 I, 故我们只需证前一部分收敛到 *0*. 事实上有

$$\left|\int_\delta^{b_N} g(x)\,\mathrm{d}x\right| = \frac{1}{(N+1)^2}\left|\int_\delta^{b_N} \frac{\sin(a_{N+1}x)}{x}\,\mathrm{d}x\right| = \frac{1}{(N+1)^2}\left|\int_{a_{N+1}\delta}^{a_{N+1}b_N} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right| < \frac{2K}{(N+1)^2}$$

而随着 $\delta \to 0$, 会有 $N \to \infty$, 这就证明了结论.

第二步, 我们要说明 g 不是绝对可积的. 我们有

$$\int_{b_k}^{b_{k-1}} |g(x)|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k^2}\int_{b_k}^{b_{k-1}} \frac{|\sin(a_k x)|}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k^2}\int_{\pi}^{\pi\frac{a_k}{a_{k-1}}} \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x$$

又由

$$\pi\frac{a_k}{a_{k-1}} = 3^{k^4-(k-1)^4}\pi \geq 3^{k^3}\pi$$

可得

$$\begin{aligned}
\int_{\pi}^{\pi\frac{a_k}{a_{k-1}}} \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x &\geq \sum_{n=1}^{3^{k^3}-1} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x \\
&\geq \sum_{n=1}^{3^{k^3}-1} \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{3^{k^3}} \frac{1}{n} \\
&\geq \frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{3^{k^3}} (\ln(n+1) - \ln(n)) \\
&> \frac{2}{\pi}\left(\ln\left(3^{k^3}\right) - \ln 2\right) := C_1 k^3 - C_2
\end{aligned}$$

从而

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{b_k}^{b_{k-1}} |g(x)|\,\mathrm{d}x \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_1 k^3 - C_2}{k^2} \to \infty$$

由此显然可得 g 不绝对可积.

第三步, 我们说明 $\int_0^{\pi} g(x)\sin(\lambda x)\,\mathrm{d}x$ 是发散的. 具体来说, 下面要证

$$J_k := \int_0^{\pi} g(x)\sin(a_k x)\,\mathrm{d}x \to \infty, \quad k \to \infty$$

为了方便, 在不引起歧义的情况下就用 J 指代 J_k. 很自然地, 将 J 按积分区间拆为

$$J = \int_0^{b_k} f(x)\frac{\sin(a_k x)}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{b_k}^{b_{k-1}} f(x)\frac{\sin(a_k x)}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{b_{k-1}}^{\pi} f(x)\frac{\sin(a_k x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

分别记为 J_1, J_2, J_3. 首先有

$$|J_1| \leq \int_0^{b_k} |f(x)|\frac{|\sin(a_k x)|}{x}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^{b_k} |f(x)|\cdot a_k\,\mathrm{d}x \leq \pi\cdot \sup_{x\in[0,b_k]} |f(x)| = \frac{\pi}{(k+1)^2} < 1$$

对于 J_2, 有

$$\begin{aligned}
J_2 &= \frac{1}{k^2}\int_{b_k}^{b_{k-1}} \frac{\sin^2(a_k x)}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2k^2}\left(\int_{b_k}^{b_{k-1}} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x - \int_{b_k}^{b_{k-1}} \frac{\cos(2a_k x)}{x}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{2k^2}\left(\ln\left(3^{k^4-(k-1)^4}\right) - \int_{b_k}^{b_{k-1}} \frac{\cos(2a_k x)}{x}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{\ln 3}{2}\cdot\frac{k^4-(k-1)^4}{k^2} - \frac{1}{2k^2}\int_{b_k}^{b_{k-1}} \frac{\cos(2a_k x)}{x}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

由第二积分平均值定理 *(定理 1.2.13(1))*, 有

$$\int_{b_k}^{b_{k-1}} \frac{\cos(2a_kx)}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b_k}\int_{b_k}^{\xi} \cos(2a_kx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}^{2a_k\xi} \cos(2x)\,\mathrm{d}x$$

故

$$\left|\frac{1}{2k^2}\int_{b_k}^{b_{k-1}} \frac{\cos(2a_kx)}{x}\,\mathrm{d}x\right| = \frac{1}{4\pi k^2}\left|\int_{2\pi}^{2a_k\xi} \cos(2x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{1}{2\pi k^2}$$

从而

$$J_2 \to \infty, \quad k \to \infty$$

对于 J_3，有

$$\begin{aligned} J_3 &= \sum_{n=1}^{k-1} \int_{b_n}^{b_{n-1}} f(x)\frac{\sin(a_kx)}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n^2}\int_{b_n}^{b_{n-1}} \frac{\sin(a_nx)\sin(a_kx)}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{2n^2}\int_{b_n}^{b_{n-1}} \frac{\cos\Big((a_k-a_n)x\Big) - \cos\Big((a_n+a_k)x\Big)}{x}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

令 $M > 0$ 满足

$$\int_1^T \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x < M, \quad \forall\ T \geq 1$$

(注意这里和第一步开始时的估计的区别), 则有

$$\left|\int_{b_n}^{b_{n-1}} \frac{\cos\Big((a_k-a_n)x\Big)}{x}\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_{(a_k-a_n)b_n}^{(a_k-a_n)b_{n-1}} \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x\right| < 2M$$

最后一个不等号成立是因为

$$(a_k-a_n)b_n = \pi\cdot\frac{a_k-a_n}{a_n} > 3\cdot\frac{3a_n-a_n}{a_n} > 1$$

同理有

$$\left|\int_{b_n}^{b_{n-1}} \frac{\cos\Big((a_k+a_n)x\Big)}{x}\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_{(a_k+a_n)b_n}^{(a_k+a_n)b_{n-1}} \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x\right| < 2M$$

故

$$|J_3| \leq \sum_{n=1}^{k-1}\frac{4M}{2n^2} < M_1$$

总结以上结果得, 当 $k \to \infty$ 时, 对应的 J_1, J_2, J_3 满足

$$|J_1| < 1, \quad J_2 \to \infty, \quad |J_3| < M_1$$

其中 M_1 是与 k 无关的常数. 因此

$$J_k = J \to \infty$$

至此我们说明了 g 确实是个反例.

注记: 我们可以用下面的方法对任意的有限区间构造反例: 首先把 g 延拓为 $[-\pi,\pi]$ 上的奇函数, 就得到了 $[-\pi,\pi]$ 上的反例; 然后, $g(\frac{\pi x}{a})$ 给出了 $[-a,a]$ 上的反例; 最后, $g(\frac{\pi(x-b)}{a})$ 给出了 $[-a+b,a+b]$ 上的反例, 这是因为 (注意到 g 是奇函数)

$$\int_{-a+b}^{a+b} g\left(\frac{\pi(x-b)}{a}\right)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} g(u)\sin\left(\frac{\lambda a}{\pi}u+\lambda b\right)\mathrm{d}u = \cos\lambda b\int_{-\pi}^{\pi} g(u)\sin\left(\frac{\lambda a}{\pi}u\right)\mathrm{d}u$$

回顾第三步的证明, 要让

$$\frac{\lambda a}{\pi} = a_k$$

现在

$$\cos\lambda b = \cos\left(a_k\cdot\frac{b}{a}\pi\right)$$

为了让其趋于固定的数, 我们只需要在一开始重新选取 a_k, 比如

$$a_k' = 3^{k^4}\cdot\frac{a}{b}\cdot(2q),\quad k\geq 1$$

其中 q 是正整数, 满足 $\frac{a}{b}\cdot(2q)>1$ 即可. 这样的选取是合理的, 因为之前的证明过程表明, 选取 a_k 时我们只需要让其比值足够大, 而并不关心具体的取值.

4.2 几个收敛定理

历史上有很多定理给出了**充分条件**保证 Fourier 级数在一点处的收敛.

作为准备工作, 我们先证明 Dirichlet 核的一个性质:

$$\int_0^\pi \frac{\sin{(n+\frac{1}{2})t}}{2\sin\frac{t}{2}} = \frac{\pi}{2},$$

证明是显然的, 我们取 $f \equiv 1$, 利用上一节得到的等式

$$S_n(f)(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (f(x_0+t)+f(x_0-t))\frac{\sin{(n+\frac{1}{2})t}}{2\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t,$$

即可得 (1 的 fourier 级数显然就是 1).

a) Dini 判别法及其推论

定理 4.2.1 (Dini 判别法) 设 f 周期为 2π, 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积且绝对可积. 假设对某个实数 s 有,

$$\int_0^\pi \frac{|f(x_0-t)+f(x_0+t)-2s|}{t}\,\mathrm{d}t < +\infty.$$

那么, $\{S_N(f)(x)\}_{N\geqslant 0}$ 在 $x=x_0$ 处收敛并且

$$\lim_{N\to\infty} S_N(f)(x_0) = s.$$

证明 我们有

$$\begin{aligned}
&S_N(f)(x_0)-s\\
=&\int_0^\pi \frac{\sin{(N+\frac{1}{2})t}}{2\sin\frac{t}{2}}\big(f(x_0-t)+f(x_0+t)-2s\big)\frac{\mathrm{d}t}{\pi}\\
=&\int_0^\pi \sin\big((N+\frac{1}{2})t\big)\cdot \underbrace{\frac{t}{\sin\frac{t}{2}}\cdot\frac{\big(f(x_0-t)+f(x_0+t)-2s\big)}{t}}_{\text{可积且绝对可积}}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

由 Riemann-Lebesgue 引理即证. □

根据 Dini 判别法, 我们可以判断满足一定条件的某些函数的 Fourier 级数的收敛性.

定理 4.2.2 若 f 在某点 x_0 处满足 *α-Hölder 条件 (也称为 α-阶的 Lipschitz 条件)*, 即存在 $\delta>0, M>0$ 以及 $\alpha>0$ 满足当 $t\in(0,\delta]$ 时成立有

$$|f(x_0+t)-f(x_0+)| \le Mt^\alpha,\quad |f(x_0-t)-f(x_0-)| \le Mt^\alpha$$

那么,$\{S_N(f)(x_0)\}_{N\geqslant 0}$ 收敛并且

$$\lim_{N\to\infty} S_N(f)(x_0) = \frac{f(x_0+)+f(x_0-)}{2}.$$

证明 由条件可得

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi \frac{|f(x_0-t)+f(x_0+t)-f(x_0+)-f(x_0-)|}{t}\,\mathrm{d}t\\
\leq &\int_0^\pi \frac{|f(x_0-t)-f(x_0-)|+|f(x_0+t)-f(x_0+)|}{t}\,\mathrm{d}t\\
\leq &\int_0^\pi 2Mt^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

由于 $\alpha>0$, 所以上面的积分是有限的. 利用 Dini 判别法即证. □

定理 4.2.3 假设函数 f 周期为 2π 且是 $[-\pi,\pi]$ 上的分段可微函数, 即存在 $-\pi=x_1<x_2<\cdots<x_{\ell-1}<x_\ell=\pi$, 使得 f 限制在每个区间 $[x_k,x_{k+1}]$ 上都是可微的 *(*即 f 在区间内部每一点可微, 在区间端点处单侧可微*)*. 那么, 对任意的 $x_0\in[-\pi,\pi]$, $\{S_N(f)(x)\}_{N\geqslant 0}$ 在 $x=x_0$ 处收敛并且

$$\lim_{N\to\infty} S_N(f)(x_0) = \frac{f(x_0-)+f(x_0+)}{2}.$$

证明 由微分的定义即可知 f 在任意点处满足 1-Hölder 条件, 再由定理 4.2.2 即证. □

b) 有界变差函数及 Jordan 判别法

有界变差函数是一个相对比较大的函数类. 先引入一些概念和记号. 给定一个有界闭区间 $[a,b]$ 和它上面所定义的实值函数 f, 对任意一个分划 $\sigma\in\mathcal{S}$ ($\mathcal{S}$ 为全体分划组成的集合), 即任意选取 $a=x_0<x_1<\cdots<x_m=b$, 我们定义这个分划所对应的变差为:

$$V(f,\sigma)=\sum_{k=1}^m |f(x_k)-f(x_{k-1})|.$$

我们称

$$V_a^b(f)=\sup_{\sigma\in\mathcal{S}} V(f,\sigma).$$

为 f 在 $[a,b]$ 上的全变差. 如果 $V_a^b(f)<+\infty$, 我们就称 f 是 $[a,b]$ 上有界变差函数, 我们把有界变差函数全体记为 $BV([a,b])$. 关于有界变差函数有如下事实:

事实 1 如果 f 是 $[a,b]$ 上的单调函数, 那么 $f\in BV([a,b])$ 且 $V_a^b(f)=|f(b)-f(a)|$.

事实 2 $BV([a,b])$ 是一个 $\mathbb{R}$-线性空间, 且在乘法、绝对值运算下封闭.

事实 3 若 $f \in C^1([a,b])$, 则 $f \in BV([a,b])$. 这里 f 在端点处的导数定义为单侧导数.

注记 1: (分段) 可微函数不一定是有界变差函数. 也就是说, 如果只要求函数 f 在 $[a,b]$ 上可微, 那么不一定能保证有界变差. 一个很经典的反例是 Lebesgue 作出的: 在 $[0,1]$ 上定义函数

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right), & 0<x\le 1\\ 0, & x=0 \end{cases}$$

易证

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)-\dfrac{2}{x}\cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right), & 0<x\le 1\\ 0, & x=0, \end{cases}$$

当然 0 处定义的是右导数. 所以 f 的确是在 $[0,1]$ 上处处可微的. 而如果我们取分点

$$0<\frac{1}{\sqrt{n\pi+\frac{\pi}{2}}}<\frac{1}{\sqrt{n\pi}}<\frac{1}{\sqrt{(n-1)\pi+\frac{\pi}{2}}}<\cdots<\frac{1}{\sqrt{\pi+\frac{\pi}{2}}}<\frac{1}{\sqrt{\pi}}<\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}<1$$

可算出此时变差为

$$\left|\sin 1-\frac{2}{\pi}\right|+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k\pi+\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{n\pi+\frac{\pi}{2}}$$

从而知 f 不是有界变差函数.

注记 2: 我们再指出 Hölder 条件和有界变差是没有包含关系的. 注意定理 4.2.2 中定义的 Hölder 条件是在一点处的, 所以我们自然的引入全局 Hölder 条件的概念: 给定 $\alpha>0$, 如果对于 $[a,b]$ 上的连续函数 f, 存在常数 $M>0$, 使得对任意的 $x,y\in[a,b]$, 我们都有

$$|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|^{\alpha},$$

我们就说 f 满足全局 α-Hölder 条件. 如果 $\alpha=1$, 就是熟知的全局 Lipschitz 条件.

显然, 满足全局 Lipschitz 条件或 ≥ 1–Hölder 条件的函数都是有界变差的. 但对任意 $0<\alpha<1$, 都存在满足全局 α-Hölder 条件的函数且不是有界变差函数, 具体例子可见《实分析中的反例》反例 11.4(第 226 页). 此外, 也存在有界变差函数不满足任意阶的全局 Hölder 条件, 具体例子可见《实分析中的反例》反例 11.3(第 225 页).

为了证明 Jordan 判别法, 我们还需要下面这个非常重要的定理:

定理 4.2.4 (Jordan 分解定理) 假设 f 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数, 那么存在 $[a,b]$ 上的单调递增函数 g 和 h 使得 $f=g-h$.

证明 对于 $x\in[a,b]$, $V_a^x(f)$ 给出了一个关于 x 的单调递增函数, 我们就令 $g(x)=V_a^x(f)$, 那么下面只需验证 $h(x)=V_a^x(f)-f(x)$ 是单调递增的就可以了. 任意给定 $a\leq x_1<x_2\leq b$, 有

$$\begin{aligned}
&\big((V_a^{x_2}(f)-f(x_2)\big)-\big((V_a^{x_1}(f)-f(x_1)\big)\\
=&\big(V_a^{x_2}(f)-V_a^{x_1}(f)\big)-(f(x_2)-f(x_1))\\
\geqslant&V_{x_1}^{x_2}(f)-(f(x_2)-f(x_1))\geqslant 0.
\end{aligned}$$

倒数第二个不等号是变差的显然性质, 由此即证. □

推论 4.2.5 *有界变差函数都是 (常义)Riemann 可积函数.*

证明 熟知有界区间上单调函数有界且不连续点可数. □

定理 4.2.6 (Jordan 判别法) f 周期为 2π 且是 $[-\pi,\pi]$ 上的有界变差函数, 那么, 对任意 $x_0\in[-\pi,\pi]$, $\{S_N(f)(x)\}_{N\geqslant 1}$ 在 $x=x_0$ 处收敛并且

$$\lim_{N\to\infty}S_N(f)(x_0)=\frac{f(x_0-)+f(x_0+)}{2}.$$

注记: 由于单调函数在任意点处单侧连续, 所以有界变差函数也在任意点处单侧连续.

证明 根据 Jordan 分解定理, 不妨设 f 是单调递增函数. 延续一贯的证明思路:

$$\begin{aligned}
&S_N(f)(x_0)-\frac{f(x_0-)+f(x_0+)}{2}\\
=&\int_0^\pi\frac{\sin\big((N+\frac12)t\big)}{\sin\frac t2}\Big(f(x_0-t)-f(x_0-)+f(x_0+t)-f(x_0+)\Big)\frac{\mathrm{d}t}{2\pi}\\
=&\underbrace{\int_0^\pi\frac{\sin\big((N+\frac12)t\big)}{\sin\frac t2}\Big(f(x_0-t)-f(x_0-)\Big)\frac{\mathrm{d}t}{2\pi}}_{I_-}+\underbrace{\int_0^\pi\frac{\sin\big((N+\frac12)t\big)}{\sin\frac t2}\Big(f(x_0+t)-f(x_0+)\Big)\frac{\mathrm{d}t}{2\pi}}_{I_+}.
\end{aligned}$$

只要处理 I_+ 即可, 另外一项可类似处理. 将 I_+ 改写为

$$I_+=\underbrace{\int_0^\delta\frac{\sin\big((N+\frac12)t\big)}{\sin\frac t2}\Big(f(x_0+t)-f(x_0+)\Big)\frac{\mathrm{d}t}{2\pi}}_{I_{+,\delta}}+\underbrace{\int_\delta^\pi\sin\big((N+\frac12)t\big)\overbrace{\frac{f(x_0+t)-f(x_0+)}{\sin\frac t2}}^{\in\mathcal{R}([\delta,\pi])}\frac{\mathrm{d}t}{2\pi}}_{I_{+,>\delta}\ \to\ 0}$$

上式的第二项可以用 Riemann-Lebesgue 引理处理. 为了处理第一项, 我们要用如下不等式 (用熟知估计式 $x-\frac{1}{6}x^3\le\sin x\le x$ 结合简单的放缩即可证):

$$\frac{2}{t}\leqslant\frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\leqslant\frac{2}{t}+\frac{t}{6},\quad 0\leqslant t\leqslant\pi,$$

由此可得

$$\begin{aligned}&\Big|I_{+,\delta}-\underbrace{\int_0^\delta\frac{2\sin\left((N+\frac{1}{2})t\right)}{t}\Big(f(x_0+t)-f(x_0+)\Big)\frac{\mathrm{d}t}{2\pi}}_{\widetilde{I_{+,\delta}}}\Big|\\&\leqslant\underbrace{\frac{1}{6}\int_0^\delta\Big|\sin\big((N+\frac{1}{2})t\big)\Big|\cdot t\cdot\Big|f(x_0+t)-f(x_0+)\Big|\frac{\mathrm{d}t}{2\pi}}_{\widetilde{\widetilde{I_{+,\delta}}}}.\end{aligned}$$

综合上面的所有的不等式, 我们有

$$|I_+|\leqslant|\widetilde{I_{+,\delta}}|+\widetilde{\widetilde{I_{+,\delta}}}+|I_{+,>\delta}|.$$

我们的目标是, 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 找一个足够大的 N_0, 使得当 $N\geqslant N_0$ 时, 有

$$|I_+|<\varepsilon.$$

首先，我们有

$$\begin{aligned}\widetilde{\widetilde{I_{+,\delta}}}&\leqslant\int_0^\delta t\cdot|f(x_0+t)-f(x_0+)|\frac{\mathrm{d}t}{12\pi}\\&\leqslant\delta\cdot\int_0^\delta|f(x_0+t)-f(x_0+)|\frac{\mathrm{d}t}{12\pi}.\end{aligned}$$

由于 f 是有界的, 所以存在 $\delta_1>0$, 使得当 $\delta<\delta_1$ 时, 对任意的 N 都有

$$\widetilde{\widetilde{I_{+,\delta}}}\leqslant\frac{1}{3}\varepsilon.$$

其次，我们考虑 $\widetilde{I_{+,\delta}}$. 利用 f 的单调递增及非负 (注意这里是首次运用单调性), 我们可以运用积分第二中值定理 (定理 1.11-(2)). 即存在 $c\in(0,\delta)$ 使得

$$\begin{aligned}\widetilde{I_{+,\delta}}&=\int_0^\delta\frac{\sin\left((N+\frac{1}{2})t\right)}{t}\Big(f(x_0+t)-f(x_0+)\Big)\frac{\mathrm{d}t}{\pi}\\&=\Big(f(x_0+\delta)-f(x_0+)\Big)\int_c^\delta\frac{\sin\left((N+\frac{1}{2})t\right)}{t}\frac{\mathrm{d}t}{\pi}\\&=\Big(f(x_0+\delta)-f(x_0+)\Big)\underbrace{\int_{(N+\frac{1}{2})c}^{(N+\frac{1}{2})\delta}\frac{\sin t}{t}\frac{\mathrm{d}t}{\pi}}_{<+\infty}.\end{aligned}$$

由于 $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t < +\infty$, 所以上面的最后一个积分项是有界的 (无论 N 怎么变化). 而根据右极限定义, 存在 $\delta_2 > 0$, 使得当 $\delta < \delta_2$ 时, 对任意的 N 都有

$$|\widetilde{I_{+,\delta}}| < \frac{1}{3}\varepsilon.$$

现在, 我们选取 $\delta < \min(\delta_1, \delta_2)$, 则对任意 N 都有

$$|I_+| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + I_{+,>\delta}.$$

此时, 我们对 $I_{+,>\delta}$ 用 Riemann-Lebesgue 引理知, 存在 N_0, 使得当 $N \geqslant N_0$ 时有

$$I_{+,>\delta} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

进而得

$$|I_+| < \varepsilon.$$

至此完成了 Jordan 定理的证明. □

我们指出, Jordan 判别法的如下推论形式更常用.

推论 4.2.7 实值函数 f 周期为 2π. 若对某个 $x_0 \in \mathbb{R}$, 存在 x_0 的临域 $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ 使得 f 在 $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ 中有界变差, 则 $\{S_N(f)(x)\}_{N\geqslant 1}$ 在 $x = x_0$ 处收敛并且

$$\lim_{N\to\infty} S_N(f)(x_0) = \frac{f(x_0-) + f(x_0+)}{2}.$$

注记 1: 由之前的注记可知, Jordan 判别法和定理 4.2.2, 4.2.3 互不蕴含. 事实上, Jordan 判别法和 Dini 判别法是互不蕴含的. 为了说明这一点, 我们只需要构造一个在某点的某个临域有界变差, 但在此点 Dini 判别法失效的函数. 考虑定义在 $[-\pi, \pi]$ 上的函数

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln\left(\frac{|x|}{2\pi}\right)}, & x \neq 0 \\[2ex] 0, & x = 0 \end{cases}$$

显然 f 在 0 附近单侧单调, 所以有界变差. 而其在 0 处连续, 由 Jordan 判别法可知其 Fourier 级数部分和收敛于 0. 但是

$$\int_0^\pi \frac{|f(-t) + f(t) - 2f(0)|}{t}\,\mathrm{d}t = -2\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}t}{t\ln\left(\frac{t}{2\pi}\right)}$$

容易证明最右边的瑕积分发散, 故不能使用 Dini 判别法.

注记 2: Jordan 判别法和 Dini 判别法的两个推论 (定理 4.2.2, 4.2.3) 是可以直接通过函数的明显性质应用的, 使用相对方便. 虽然还有 Lebesgue 判别法等更一般的判别法, 但使用起来较麻烦.

4.3 例子

根据 §4.2 中的收敛定理, 我们通过考虑具体函数的 Fourier 级数, 就可以得到很多传统方法难以证明的级数等式. 这是 Fourier 分析最基础的应用之一.

例 4.3.1 设

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\in[-\pi,\pi) \\ \text{周期延拓}, & x\notin[-\pi,\pi) \end{cases}$$

计算其 *Fourier* 级数得

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,\mathrm{d}x = 0 \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,\mathrm{d}x = (-1)^{n-1}\frac{2}{n} \end{aligned}$$

这表明

$$f\sim\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2}{n}\sin nx$$

由定理 *4.2.3* 可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2}{n}\sin nx=\begin{cases} x, & x\in(-\pi,\pi) \\ 0, & x=\pm\pi \end{cases}$$

令 $x=\pi-\theta$, 则对于 $0<\theta<2\pi$ 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n}=\frac{\pi-\theta}{2}$$

特别地, 如果再令 $\theta=\frac{\pi}{2}$, 则得到 *Leibniz* 级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{\pi}{4}.$$

例 4.3.2 设

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\in[-\pi,\pi) \\ \text{周期延拓}, & x\notin[-\pi,\pi) \end{cases}$$

计算其 *Fourier* 级数得

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\pi^2 \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos nx\,\mathrm{d}x = (-1)^n\frac{4}{n^2}\ (n\geq 1) \end{aligned}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\sin nx\,\mathrm{d}x=0$$

这表明

$$f\sim\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

由定理 *4.2.3* 可得

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx,\quad -\pi\le x\le\pi$$

特别地, 令 $x=\pi$ 可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

例 4.3.3 对不是整数的 α, 设

$$f(x)=\begin{cases}\cos\alpha x, & x\in[-\pi,\pi)\\ \text{周期延拓}, & x\notin[-\pi,\pi)\end{cases}$$

计算其 *Fourier* 级数得

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\alpha x\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{(-1)^n}{\pi}\frac{2\alpha\sin\alpha\pi}{\alpha^2-n^2}\\ b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\sin nx\,\mathrm{d}x=0\end{aligned}$$

这表明

$$f\sim\frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\pi}\frac{2\alpha\sin\alpha\pi}{\alpha^2-n^2}\cos nx$$

由定理 *4.2.3* 可得

$$\cos\alpha x=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2}\cos nx\right),\quad -\pi\le x\le\pi$$

令 $x=0$ 可得

$$\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}=\frac{1}{\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2},\quad \forall\alpha\notin\mathbb{Z},$$

这是例 *2.15* 中提到过的结论. 我们还可以令 $x=\pi$ 得到

$$\cot\alpha\pi=\frac{1}{\alpha\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^2-n^2}\frac{2\alpha}{\pi}$$

右边是个关于 α 的函数项级数, 由 *Weierstrass* 判别法易证其在 $\alpha\in(-1,1)$ 内一致收敛, 所以对任意的 $|x|<1$, 可以在 $[0,x]$ 上逐项积分, 即有

$$\int_0^x\left(\cot\alpha\pi-\frac{1}{\alpha\pi}\right)\mathrm{d}\alpha=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{1}{\alpha^2-n^2}\frac{2\alpha}{\pi}\,\mathrm{d}\alpha$$

即

$$\frac{1}{\pi}\ln\left(\frac{\sin\pi x}{\pi x}\right)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)$$

从而我们证明了 $\sin x$ 的无穷乘积展开式 *(复变函数中称为 Weierstrass 因子分解)*

$$\frac{\sin\pi x}{\pi x}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right).$$

总结以上几个例子, 研究方法都如出一辙: 选择一个性质比较好的定义在 $[-\pi,\pi]$ 上的函数, 先将其以 2π 为周期延拓到整个 $\mathbb{R}$ 上, 然后求出其 Fourier 级数, 最后用收敛定理得到一些等式. 有些时候, 要处理的函数只定义在 $(0,\pi)$ 上, 这时就需要对其在 $(-\pi,0)$ 上的值进行 "补充", 常用的方式就是 "奇性延拓" 或 "偶性延拓".

对于奇性延拓, 就是在 $(-\pi,0)$ 上补充定义 $f(x)=-f(-x)$, 在端点 $0,\pm\pi$ 处的取值看情况选取. 这时由于 f 是个奇函数, 计算 f 的 Fourier 级数时不含余弦项和常数项, 我们称得到的是一个正弦级数.

而对于偶性延拓, 就是在 $(-\pi,0)$ 上补充定义 $f(x)=f(-x)$, 在端点 $0,\pm\pi$ 处的取值看情况选取. 这时由于 f 是个偶函数, 计算 f 的 Fourier 级数时不含正弦项, 我们称得到的是一个余弦级数.

例 4.3.4 *考虑定义在 $(0,\pi)$ 上的函数*

$$f(x)=x,\quad 0<x<\pi$$

先看偶性延拓. 此时规定 $0,\pm\pi$ 处取值使得延拓后连续, 得到 $\mathbb{R}$ 上以 2π 为周期的连续函数 f_1, 计算其 Fourier 级数得

$$\begin{aligned}a_0&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,\mathrm{d}x=\pi\\ a_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{n^2\pi}\Big((-1)^n-1\Big)\end{aligned}$$

这表明

$$f_1(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\big((2k-1)x\big)}{(2k-1)^2},\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

特别地, 对 $x\in[0,\pi]$ 有

$$x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\big((2k-1)x\big)}{(2k-1)^2},\quad \forall x\in[0,\pi]$$

奇性延拓的结果就是例 *4.3.1* 中的函数, 在那里我们得到了

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2}{n}\sin nx,\forall x\in(-\pi,\pi)$$

可以看到, 上面这两个式子都是把 x 展开为三角级数, 只不过一个展开为正弦级数, 一个展开为余弦级数. 由于两个等式成立的范围是不一样的, 所以这并不与三角级数展开的唯一性矛盾.

注记: (一般周期函数的 Fourier 级数)

对于任意的周期函数 f, 设其周期为 $2l$, 也可以定义其 Fourier 级数:

$$f\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

其中

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x,\quad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x$$

如果函数 f 只定义在某个有界区间 $[a,b]$ 上, 我们就令 $l=\frac{b-a}{2}$ 并按 $2l$ 为周期延拓, 得到的 Fourier 级数表达式与上面是一样的, 只是积分区间变为 $[a,b]$.

很容易说明之前的收敛理论对这种一般的 Fourier 级数也适用: 令 $g(x)=f(\frac{lx}{\pi})$, 则

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\cos nx\,\mathrm{d}x,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x$$

所以 f 的 Fourier 级数在 x_0 处收敛于 s, 等价于 g 的 Fourier 级数在 $\frac{\pi x_0}{l}$ 处收敛于 s, 由此容易验证定理 4.2.1,4.2.2,4.2.3 也是成立的.

类似地, 我们也可以把只定义在 $[0,l]$ 上的函数展开为正弦级数和余弦级数.

例 4.3.5 考虑定义在 $[0,l]$ 上的函数

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\in[0,\frac{l}{2}]\\ l-x, & x\in[\frac{l}{2},l]\end{cases}$$

将其进行奇性延拓得到 f_1, 计算其 *Fourier* 级数并运用定理 *4.2.3* 得

$$f_1(x)=\frac{4l}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2}\sin\left(\frac{(2k-1)\pi x}{l}\right),\quad\forall x\in\mathbb{R}$$

在 $[0,\frac{l}{2}]$ 上, 又得到了 x 的一个三角级数展开式

$$x=\frac{4l}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2}\sin\left(\frac{(2k-1)\pi x}{l}\right),\quad\forall x\in[0,\frac{l}{2}]$$

4.4 卷积与好核

(本节内容独立于 Fourier 级数的收敛理论, 是下一节的前置)

定义 4.4.1 对于 $\mathbb{R}$ 上两个周期为 2π 的 *(常义)Riemann* 可积的函数 f, g, 则

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}y$$

是定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数, 我们称其为 f, g 的卷积.

之所以要在本章中引入卷积, 是源于如下事实:

$$\begin{aligned}
S_N(f)(x_0) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tilde{t}+x_0)\frac{\sin{(N+\frac{1}{2})\tilde{t}}}{2\sin\frac{\tilde{t}}{2}}\,\mathrm{d}\tilde{t} \quad (\S 4.1) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\frac{\sin{(N+\frac{1}{2})(x_0-y)}}{\sin\frac{x_0-y}{2}}\,\mathrm{d}y \quad (\tilde{t}+x_0=y) \\
&= (f * D_N)(x_0)
\end{aligned}$$

所以理解 $S_N(f)$ 的问题可以转化为对卷积 $f * D_N$ 的理解.

下面是一些卷积的基本性质.

定理 4.4.2 设 f, g, h 是以 2π 为周期的常义可积函数, 则有

(i) $f * (g+h) = f * g + f * h$

(ii) $(cf) * g = f * (cg) = c(f * g),\ \forall c \in \mathbb{R}$

(iii) $f * g = g * f$

(iv) $(f * g) * h = f * (g * h)$

(v) $f * g$ 是连续函数

(vi) $\widehat{f * g}(n) = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n)$

证明 性质 (i) 和 (ii) 由积分的线性性立得. 性质 (iii) 做个换元 $t = x - y$ 并运用 f, g 的周期性即可. 对于性质 (iv), 由 Fubini 定理

$$((f * g) * h)(x) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(t-y)\,\mathrm{d}y\right)h(x-t)\,\mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} h(x-t)g(t-y)\,\mathrm{d}t\right)f(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(h*g)(x-y)\cdot f(y)\,\mathrm{d}y \\
&= f*(h*g) = f*(g*h)
\end{aligned}
$$

对于 (vi), 同样是运用 Fubini 定理:

$$
\begin{aligned}
\widehat{f*g}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f*g)(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ny}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x-y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n(x-y)}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ny}\cdot\widehat{g}(n)\,\mathrm{d}y = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n)
\end{aligned}
$$

对于性质 (v), 我们先假设 f,g 都是连续的. 首先易证 g 是一致连续的 (由周期性), 故对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 只要 $|s-t|<\delta$, 就有 $|g(s)-g(t)|<\varepsilon$, 由此得

$$
\begin{aligned}
\Big|(f*g)(x_1)-(f*g)(x_2)\Big| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\Big(g(x_1-y)-g(x_2-y)\Big)\,\mathrm{d}y\right| \\
&\le \frac{1}{2\pi}\varepsilon\cdot\int_{-\pi}^{\pi}|f(y)|\,\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

对任意 $|x_1-x_2|<\delta$ 成立. 这就证明了连续性.

最后, 为了完成连续函数到可积函数的 “过渡”, 需要一个逼近引理:

引理 4.4.3 若周期为 2π 的函数 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积且有界 B, 那么存在以 2π 为周期的 $\mathbb{R}$ 上的连续函数列 $\{f_k\}_{k\ge 1}$ 满足 $|f_k|\le B$ 且

$$
\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-f_k(x)|\,\mathrm{d}x\to 0,\quad k\to\infty
$$

引理的证明 对任意 $\varepsilon>0$, 我们找一个 g 使得 $\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x<\varepsilon$ 即可. 由 Riemann 积分的定义, 可取一组分割点 $0=x_1<x_2<\cdots<x_n=2\pi$, 使得 f 在每个区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 上的振幅不超过 ε. 现在定义阶梯函数 f^*: 在 $[x_i,x_{i+1})$ 上取 $\sup_{x_i\le t\le x_{i+1}} f(t)$, 最后将 f^* “磨光” 为分段线性函数, 并在两个端点处微调使得取值相等即可.

由此引理, 对 f,g 取函数列 $\{f_k\},\{g_k\}$, 则在 $k\to\infty$ 时有

$$
\left|\Big((f-f_k)*g\Big)(x)\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-y)-f_k(x-y)||g(y)|\,\mathrm{d}y
$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\sup|g(y)|\int_{-\pi}^{\pi}|f(y)-f_k(y)|\,\mathrm{d}y, \quad \forall x$$

故 $(f-f_k)*g$ 关于 x 一致收敛于 0. 同理 $f_k*(g-g_k)$ 也关于 x 一致收敛于 0. 而由性质 (i) 可得

$$f*g-f_k*g_k=(f-f_k)*g+f_k*(g-g_k)$$

故函数列 $f*g-f_k*g_k$ 一致收敛到 0. 由于对任意的 $x,y\in\mathbb{R}$ 有

$$\Big|(f*g)(x)-(f*g)(y)\Big| \leq \Big|(f*g)(x)-(f_k*g_k)(x)\Big|+\Big|(f_k*g_k)(x)-(f_k*g_k)(y)\Big|+\Big|(f_k*g_k)(y)-(f*g)(y)\Big|$$

令 $k\to\infty$, 再结合 f_k*g_k 一致连续即知 $f*g$ 一致连续. □

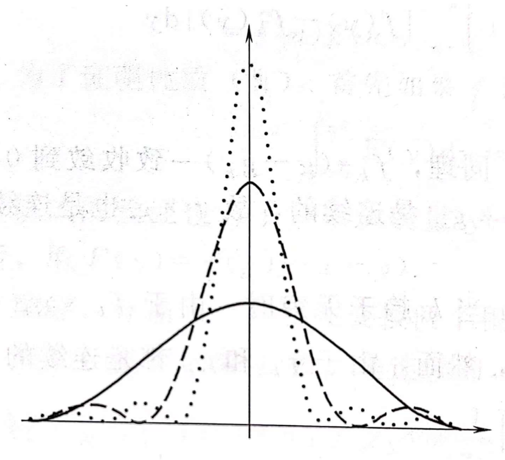
定义 4.4.4 (好核) *我们称一列以 2π 为周期, 在 $[-\pi,\pi]$ 上 (常义) 可积的函数 $\{K_n(x)\}_{n\geq 1}$ 为一簇好核, 如果它们满足以下性质:*

(i) $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}K_n(x)\,\mathrm{d}x=1,\ \forall n\geq 1$

(ii) *存在* $M>0$, *使得* $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|K_n(x)|\,\mathrm{d}x<M,\ \forall n\geq 1$

(iii) *对任意* $\delta>0$ *成立* $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\delta\leq|x|\leq\pi}|K_n(x)|\,\mathrm{d}x=0$

注记: 可以这么理解好核. 如果假设 $K_n(x)\geq 0$, 此时 $K_n(x)$ 可以理解为把单位质量加权分布在 $[-\pi,\pi]$ 上, 条件 (iii) 表明随着 n 的增大, 质量越来越集中于原点附近.



定理 4.4.5 *设函数列 $\{K_n(x)\}_{n\geq 1}$ 为一簇好核, f 周期为 2π 且在 $[-\pi,\pi]$ 上常义可积, 则函数列 $\{(f*K_n)(x)\}_{n\geq 1}$ 在 f 的任一连续点 x 处收敛到 $f(x)$. 若 f 处处连续, 则上述收敛为一致收敛.*

证明 设 f 在点 x 处连续, 那么对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $|t| < \delta$ 时有 $|f(x+y)-f(x)| < \varepsilon$. 由好核的性质 (i) 可得

$$\begin{aligned}\Big|(f * K_n)(x) - f(x)\Big| =& \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(y)\Big(f(x-y) - f(x)\Big)\,\mathrm{d}y\right| \\ \le& \frac{1}{2\pi}\int_{|y|\le\delta} |K_n(y)||f(x-y) - f(x)|\,\mathrm{d}y \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\le|y|\le\pi} |K_n(y)||f(x-y) - f(x)|\,\mathrm{d}y \\ \le& \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |K_n(y)|\,\mathrm{d}y + \frac{2A}{2\pi}\int_{\delta\le|y|\le\pi} |K_n(y)|\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

其中 A 为 f 的界. 由好核的性质 (ii) 和 (iii) 可知, 当 n 充分大时有

$$\Big|(f * K_n)(x) - f(x)\Big| \le \frac{\varepsilon M}{2\pi} + \frac{2A\varepsilon}{2\pi}$$

这就证明了

$$\lim_{n\to\infty} (f * K_n)(x) = f(x)$$

若 f 处处连续, 则由周期性知一致连续, 所以之前取出的 δ 不依赖于 x 的选取, 从而知上式关于 x 一致. □

注记 1: 如果每个 K_n 都是偶函数, 我们还有如下更强的结论: 如果 f 在 x 处左右极限均存在, 即 x 是连续点或第一类间断点, 那么有

$$\lim_{n\to\infty} (f * K_n)(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$

证明是类似的, 只需注意到

$$(f * K_n)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \Big(f(x+y) + f(x-y)\Big) K_n(y)\,\mathrm{d}y$$

剩下的估计基本是一样的.

注记 2: Dirichlet 核不是好核, 所以我们无法断言连续函数的 Fourier 级数收敛到本身 (回顾本节开始证明的 $S_N(f)(x_0) = (f * D_N)(x_0)$), 后面我们会给出例子否定这一点. 事实上 Dirichlet 核只满足好核的性质 (i), 性质 (ii) 和 (iii) 都不满足. 验证性质 (iii) 不满足是容易的, 在此只给出不满足性质 (ii) 的证明:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin\,(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}\right|\mathrm{d}x &\ge \frac{2}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{2\left|\sin\,(n+\frac{1}{2})x\right|}{|x|}\,\mathrm{d}x \ge \frac{2}{\pi}\int_{0}^{(n+\frac{1}{2})\pi}\frac{|\sin\theta|}{\theta}\,\mathrm{d}\theta \\ &\ge \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{|\sin\theta|}{\theta}\,\mathrm{d}\theta \ge \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\pi}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}|\sin\theta| = \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \to +\infty\end{aligned}$$

4.5 Cesàro 和 Abel 求和法在 Fourier 级数上的应用

给定数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 在前面的章节我们考虑它的求和是通过对其部分和求极限来实现的, 然而我们也可以用别的方式赋予无穷级数的和的意义. 虽然在正常的意义下 Fourier 级数未必收敛, 但在这些新的求和意义下, Fourier 级数有着很好的性质. 据此我们还能得到不少有用的推论.

a) Cesàro 求和法及其应用

定义 4.5.1 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是个无穷级数, S_n 为其前 n 项的部分和. 记 $\sigma_n = \frac{S_1+S_2+\cdots+S_n}{n}$, 若数列 σ_n 收敛且 $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 在 *Cesàro* 求和意义下收敛 *(*或均值意义下收敛*)*, 并称 σ 为此级数的 *Cesàro* 和.

Cesàro 意义下的收敛相对于正常意义下的收敛更广泛. 对于级数 $1-1+1-1+\cdots$, 其在 Cesàro 意义下收敛于 $\frac{1}{2}$, 但明显不收敛. 而另一方面, 如果一个级数收敛于 s, 则其在 Cesàro 意义下也收敛于 s, 这是经典的数学分析习题.

下面我们考虑 Fourier 级数在 Cesàro 意义下的行为. 由于 Fourier 级数的部分和 $S_N(f)(x)$ 是从 $N=0$ 开始定义的, 所以

$$\sigma_N(f)(x) = \frac{S_0(f)(x) + S_1(f)(x) + \cdots + S_{N-1}(f)(x)}{N}$$

上一节证明了 $S_N(f)(x) = (f * D_N)(x)$ $(N \geq 0)$, 所以如果我们记

$$F_N(x) = \frac{D_0(x) + D_1(x) + \cdots + D_{N-1}(x)}{N}$$

那么就有

$$\sigma_N(f)(x) = (f * F_N)(x)$$

我们把 $F_N(x)$ 称为 N 次 Fejér 核. 进一步化简可得

$$F_N(x) = \frac{1}{N\sin\frac{x}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} \sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)x = \frac{1}{N\sin\frac{x}{2}} \cdot \frac{\sin^2\frac{Nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{1}{N} \cdot \frac{\sin^2\frac{Nx}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}$$

我们指出: $F_N(x)$ 是好核. 证明容易的, 由

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

及 $F_N(x)$ 的定义即得好核的性质 (i); 由于 $F_N(x)$ 恒正性质 (ii) 自然成立; 至于性质 (iii), 注意到当 $|x| \ge \delta$ 时

$$\frac{\sin^2 \frac{Nx}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}} \le \frac{1}{\sin^2 \frac{\delta}{2}}$$

即可.

再由上一节的定理 4.12 注记 1, 我们就得到了如下定理:

定理 4.5.2 设 f 周期为 2π 且在 $[-\pi,\pi]$ 上**常义可积**, 则在 f 的连续点或第一类间断点 x_0 处, 其 *Fourier* 级数在 *Cesàro* 意义下收敛到 $\frac{f(x_0-)+f(x_0+)}{2}$.

运用和证明 Riemann 局部化引理一样的思想, 我们可以证明对于可积且绝对可积的函数, 定理 4.13 也成立:

定理 4.5.3 设 f 周期为 2π 且在 $[-\pi,\pi]$ 上**可积且绝对可积**, 则在 f 的连续点或第一类间断点 x_0 处, 其 *Fourier* 级数在 *Cesàro* 意义下收敛到 $\frac{f(x_0-)+f(x_0+)}{2}$.

证明　我们有

$$\sigma_N(f)(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\,\frac{\sin^2 \frac{N(x_0-y)}{2}}{N\sin^2 \frac{x_0-y}{2}}\,\mathrm{d}y$$

对任意的小量 $\delta > 0$, 我们把积分区间分为

$$\int_{-\pi}^{\pi} = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} + \int_{-\pi}^{x_0-\delta} + \int_{x_0+\delta}^{\pi}$$

很显然当 $N\to\infty$ 时后面两个积分都趋于 0. 所以 $\sigma_N(f)(x_0)$ 的收敛性只与 f 在 x_0 附近的取值有关. 而我们假设了 f 在 x_0 处左右极限均存在, 所以 f 在 x_0 附近有界, 再用常义可积版本的定理即证 (也就是对 $f\chi_{[x_0-\delta,x_0+\delta]}$ 用定理 4.13). □

如果假设 f 处处连续, 则有更强的结论:

定理 4.5.4 (Fejér) 设 f 是周期为 2π 的连续函数, 则其 *Fourier* 级数在 *Cesàro* 意义下在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛到 f.

证明　由 Fejér 核是好核, 结合定理 4.12 后半部分即证. □

需要注意的是, 我们在研究 Fourier 级数的收敛性时引入 Cesàro 求和法, 并不只是为了得到定理 4.14, 因为这个定理本身没有任何价值, 毕竟正常情况下没人关心 Cesàro 意义下的求和. 下面的几个推论才是真正有价值的.

推论 4.5.5 设 f 周期为 2π 且在 $[-\pi,\pi]$ 上可积且绝对可积. 如果其 *Fourier* 级数为 0, 即所有 *Fourier* 系数都是 0, 那么在 f 的任一连续点处都有 $f(x)=0$.

我们知道 Riemann 可积的函数几乎处处连续, 据此易证反常可积的函数也是几乎处处连续的, 故以下两个推论成立:

推论 4.5.6 设 f 周期为 2π 且在 $[-\pi,\pi]$ 上可积且绝对可积. 如果其 *Fourier* 级数为 0, 即所有 *Fourier* 系数都是 0, 那么 f 几乎处处为 0.

推论 4.5.7 设 f,g 周期为 2π 且在 $[-\pi,\pi]$ 上可积且绝对可积. 如果它们有相同的 *Fourier* 级数, 那么 f 和 g 几乎处处相等.

此外还可以得到

推论 4.5.8 设 f 周期为 2π 且在 $[-\pi,\pi]$ 上可积且绝对可积. 如果 f 在点 x_0 处有左右极限, 且其 *Fourier* 级数收敛, 则必收敛到 $\frac{f(x_0-)+f(x_0+)}{2}$.

Weierstrass 三角多项式逼近定理也可由定理 4.15 直接得到. 于品讲义 P221-223 上介绍了一个更基础的证法, 但不是构造性的. 通过定理 4.15 可以给出一个构造性的证法.

定理 4.5.9 (Weierstrass) 设 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续且 $f(-\pi)=f(\pi)$, 则它在 $[-\pi,\pi]$ 上可用三角多项式一致逼近.

证明 考虑 f 的 Fourier 级数的 Cesàro 部分和 (即 $\sigma_N(f)(x)$) 即可. □

b) Abel 求和法及其应用

定义 4.5.10 对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 如果对任意的 $0<r<1$, 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n$ 收敛到 $A(r)$, 且极限 $\lim_{r\to 1-} A(r)=S$ 存在, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 在 *Abel* 求和意义下收敛, 并称 S 为该级数的 *Abel* 和.

Abel 求和法相对于 Cesàro 求和法又更广泛. 总结为:

$$\text{收敛} \Longrightarrow \text{Cesàro 意义下收敛} \Longrightarrow \text{Abel 意义下收敛}$$

且反向的箭头不成立 (存在反例). 一个 Abel 意义下收敛但在 Cesàro 意义下不收敛的例子是

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)$$

容易验证其发散且在 Cesàro 意义下也不收敛. 但由于

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)r^n = \frac{1}{(1+r)^2}, \quad 0<r<1$$

故其 Abel 和为 $\frac{1}{4}$.

定理 4.5.11 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 在 *Cesàro* 意义下收敛到 σ, 则其在 *Abel* 意义下也收敛且收敛到 σ.

证明 由 $\sigma_n \to \sigma$ 知

$$\frac{S_n}{n} = \frac{n\sigma_n - (n-1)\sigma_{n-1}}{n} \to 0, \quad n \to \infty$$

故

$$\frac{a_n}{n} = \frac{S_n - S_{n-1}}{n} = \frac{S_n}{n} - \frac{n-1}{n}\frac{S_{n-1}}{n-1} \to 0, \quad n \to \infty$$

故 n 充分大时有 $|a_n| \le n$, 进而有

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \le \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

这表明幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n$ 的收敛半径不小于 1. 于是可以对 $0<r<1$ 定义 $A(r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n$. 由于级数

$$\frac{1}{1-r} = 1 + r + r^2 + \cdots$$

在 $0<r<1$ 时绝对收敛, 由柯西乘积的 Mertens 定理 (中科大数分教材 p197-198), 有

$$\frac{A(r)}{1-r} = a_1 r + (a_1+a_2)r^2 + \cdots + (a_1+a_2+a_3)r^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} S_n r^n$$

$$\frac{A(r)}{(1-r)^2} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} S_n r^n}{1-r} = \sum_{n=1}^{\infty} n\sigma_n r^n$$

以上都是对 $0<r<1$ 成立. 此外我们还有 (同样可由柯西乘积导出)

$$\frac{r}{(1-r)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n r^n$$

对任意 $\varepsilon>0$, 知存在 m 使得 $n>m$ 时 $|\sigma_n-\sigma|<\varepsilon$. 从而对任意 $0<r<1$ 有

$$\begin{aligned}
|A(r)-\sigma r| &= \left|(1-r)^2\sum_{n=1}^{\infty} n\sigma_n r^n-\sigma\right| \\
&= \left|(1-r)^2\sum_{n=1}^{\infty} n(\sigma_n-\sigma) r^n\right| \\
&\le \left|(1-r)^2\sum_{n=1}^{m} n(\sigma_n-\sigma) r^n\right| + \varepsilon\cdot(1-r)^2\sum_{n=m+1}^{\infty} nr^n \\
&\le \left|(1-r)^2\sum_{n=1}^{m} n(\sigma_n-\sigma) r^n\right| + \varepsilon
\end{aligned}$$

故对任意 $0<r<1$ 都有

$$\begin{aligned}
|A(r)-\sigma| &\le |A(r)-\sigma r|+(1-r)|\sigma| \\
&\le \left|(1-r)^2\sum_{n=1}^{m} n(\sigma_n-\sigma) r^n\right| + (1-r)|\sigma|+\varepsilon
\end{aligned}$$

所以当 r 充分接近 1 时有

$$|A(r)-\sigma|\le 2\varepsilon$$

这便完成了证明. $\square$

下面我们来考虑 Fourier 级数的 Abel 求和. 即考察

$$A_r(f)(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)r^n$$

由于对任意的 x, 由 R-L 引理知 $(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=o(1)$, 故关于 r 的幂级数 $A_r(f)(x)$ 的收敛半径不小于 1. 我们改写为

$$\begin{aligned}
A_r(f)(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\varphi}\,\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} r^{|n|}f(\varphi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n(\varphi-x)}\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n(\varphi-x)}\right)\mathrm{d}\varphi
\end{aligned}$$

其中积分和求和交换是因为每个单项的函数 (关于 φ)

$$f(\varphi)r^{|n|}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n(\varphi-x)}$$

可以被控制: 常义可积就用 $\sup f\cdot r^{|n|}$ 作为优级数用 W 判别法, 反常可积就用定理 2.11. 现在我们记

$$P_r(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}\mathrm{e}^{inx}$$

称为 Poisson 核. 可继续化简

$$\begin{aligned}P_r(x)&=\sum_{n=0}^{\infty} r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}+\sum_{n=0}^{\infty} r^n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}-1\\&=\frac{1}{1-r\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}+\frac{1}{1-r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}-1\\&=\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}\end{aligned}$$

如果 f 常义可积就有

$$A_r(f)(x)=(f*P_r)(x)$$

如果 f 反常可积, 方法和定理 4.14 的证法类似, 在此不再赘述.

我们指出: $P_r(x)$ 在 $r\to 1-$ 时是一簇好核 (此处是好核的连续参数版本, 和离散版本本质上相同).

首先, 例 2.1.8 的注记表明性质 (i) 是满足的; 而 P_r 恒正, 故性质 (ii) 也满足; 对于性质 (iii), 注意到如果 $\delta>0$ 给定时, 若 $\frac{1}{2}\le r\le 1,\delta\le |x|\le\pi$, 则有

$$1-2r\cos x+r^2=(1-r)^2+2r(1-\cos x)\ge 2r(1-\cos\delta)$$

即有个大于 0 的下界 c_δ. 从而

$$\int_{\delta\le|x|\le\pi}|P_r(x)|\,\mathrm{d}x\le\frac{2\pi(1-r^2)}{c_\delta}$$

故性质 (iii) 也满足.

于是我们证明了如下定理:

定理 4.5.12 *设 f 周期为 2π 且在 $[-\pi,\pi]$ 上***可积且绝对可积***, 则在 f 的连续点或第一类间断点 x_0 处, 其 Fourier 级数 Abel 和于 $\frac{f(x_0-)+f(x_0+)}{2}$. 且若 f 是整个 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 则其 Fourier 级数一致 Abel 和于 f.*

注记: 这个定理前半部分当然是定理 4.21 的推论, 但后半部分还是需要用到好核的相关结论.

4.6 连续函数 Fourier 级数在给定集合发散的例子 (1)

观察 4.2 节中给出的收敛性定理可以发现, 我们对函数 f 加上一些条件后, 最终会得到

$$\lim_{N\to\infty} S_N(f)(x_0) = \frac{f(x_0-)+f(x_0+)}{2}.$$

也就是说, 如果再加上连续性的条件, 函数 f 的 Fourier 级数逐点收敛到自身. 自然地, 就产生了一个问题: 连续函数的 Fourier 级数一定逐点收敛到自身吗?

答案是否定的. 甚至于说收敛性都不能保证, 下面将给出几个不同的反例.

a) du Bois-Reymond 反例

首先, 对于正整数 K, 定义如下的波包函数 (就是三角多项式)

$$W_K(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2K)x} \sum_{1\le|k|\le K} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{k}$$

然后待定一列指数增长的指标 $K_1, K_2, \cdots$, 满足 $K_{\ell+1} > 3K_\ell$. 这还需要满足一个条件, 因此在后面会具体给出. 令

$$f(x) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ell^2} W_{k_\ell}(x)$$

就是所要的反例. 首先指出, 存在 $C>0$, 满足

$$\left| \sum_{1\le|k|\le K} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{k} \right| < C, \quad \forall K, x$$

换句话说, 函数列

$$\sum_{k=1}^{K} \frac{\sin kx}{k}$$

是一致有界的. 这个证明是比较初等的, 将在本节最后的附录中给出.

利用这个一致有界性, 知级数

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ell^2} W_{k_\ell}(x)$$

是一致收敛的, 从而 f 确实是以 2π 为周期的连续函数. 由一致收敛性, 直接做内积就能知道 f 的 Fourier 级数的就是自身, 只不过是一个 “拆了括号” 的级数. 也就是说, f 这个级数形如

$$(a_1+a_2)+(a_3+a_4+a_5+a_6)+(\cdots)+\cdots$$

而 f 的 Fourier 级数形如

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+\cdots+\cdots$$

因此, f 是收敛的级数不与 (我们接下来要证的)f 的 Fourier 级数在 0 处发散矛盾. 现在我们特别地考虑 $S_{2K_{\ell_0}}(f)$ 这一项, 形式上就是取到一个括号的中间. 具体来说有

$$S_{2K_{\ell_0}}(f)(x) = \sum_{\ell=1}^{\ell_0-1} \frac{1}{\ell^2} W_{k_\ell}(x) + \frac{1}{\ell_0^2} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2K_{\ell_0})x} \sum_{k=-K_{\ell_0}}^{-1} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{k} \right)$$

特别地

$$S_{2K_{\ell_0}}(f)(0) = \sum_{\ell=1}^{\ell_0-1} \frac{1}{\ell^2} W_{k_\ell}(0) - \frac{1}{\ell_0^2} \left(\sum_{k=1}^{K_{\ell_0}} \frac{1}{k} \right)$$

前面求和号里面是个关于 ℓ_0 有界的量, 而

$$\frac{1}{\ell_0^2} \left(\sum_{k=1}^{K_{\ell_0}} \frac{1}{k} \right) \sim \frac{\ln(K_{\ell_0})}{\ell_0^2}$$

现在取

$$K_\ell = 3^{\ell^3}$$

则 $K_{\ell+1} > 3K_\ell$ 自动满足, 且 $\frac{\ln(K_{\ell_0})}{\ell_0^2}$ 发散, 从而 $S_{2K_{\ell_0}}(f)(0)$ 发散, 当然 f 的 Fourier 级数在 0 处也是发散的.

注记: 这个例子中的 f 是个取值为复数的函数, 要求 f 是实值函数的反例当然也有, 因为 $\mathrm{Re}(f)$ 和 $\mathrm{Im}(f)$ 的 Fourier 级数必有一个发散.

b) 在且只在一点发散的例子

我们希望构造一个 $\mathbb{R}$ 上的以 2π 为周期的连续函数, 在且只在 $(-\pi,\pi]$ 上的一点其 Fourier 级数发散, 且在其他点处 Fourier 级数收敛到自身. 经过简单的尝试后可以发现, 我们很难证明 du Bois-Reymond 反例在其他点处 Fourier 级数的敛散性.

回顾例 4.1.5 中我们构造的连续函数 f, 我们可以将其延拓为 $\mathbb{R}$ 上的以 2π 为周期的连续函数, 仍记作 f. 下面将说明其满足要求.

首先, 由于在任意不是 0 (默认考虑 $(-\pi,\pi]$ 上的点) 的点处, F 在其附近分段可微, 由局部化引理和定理 4.2.3 知 Fourier 级数收敛到自身.

为了证明在 0 处 f 的 Fourier 级数发散, 我们考虑 Dirichlet 积分

$$S_n(f)(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(f(x_0+t) + f(x_0-t)\right) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} \,\mathrm{d}t$$

代入 f 是偶函数且 $x_0 = 0$ 得

$$S_n(f)(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(t) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(f(t)\cos nt + f(t)\sin nt \cot\left(\frac{t}{2}\right)\right) \mathrm{d}t$$

把其拆分为三项

$$S_n(f)(0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos nt+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin nt\left(\cot\left(\frac{t}{2}\right)-\frac{2}{t}\right)\mathrm{d}t+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\frac{\sin nt}{t}\,\mathrm{d}t$$

由 RL 引理, 知第一项

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos nt\to 0$$

而由洛必达法则, 可知

$$\lim_{u\to 0}\left(\cot u-\frac{1}{u}\right)=\lim_{u\to 0}\frac{u\cos u-\sin u}{u\sin u}=\lim_{u\to 0}\frac{-u\sin u}{\sin u+u\cos u}=\lim_{u\to 0}\frac{-\sin u-u\cos u}{2\cos u-u\sin u}=0$$

故函数

$$\varphi(t)=\cot\left(\frac{t}{2}\right)-\frac{2}{t}$$

在 $(0,\pi)$ 上是有界的连续函数, 从而 Riemann 可积, 由 RL 引理, 第二项

$$\int_0^{\pi} f(t)\sin nt\left(\cot\left(\frac{t}{2}\right)-\frac{2}{t}\right)\mathrm{d}t\to 0$$

再回顾例 4.1.5 的第三步, 第三项正是

$$\int_0^{\pi} g(x)\sin nx\,\mathrm{d}x$$

而那里我们证明了

$$\int_0^{\pi} g(x)\sin\left(3^{k^4}x\right)\mathrm{d}x\to\infty$$

故

$$S_{3^{k^4}}(f)(0)\to\infty$$

因此 $S_n(f)(0)$ 发散.

注记: 容易证明 $f_h(x):=f(x-h)$ 的 Fourier 级数在且只在 h 处发散: 这是因为

$$\widehat{f_h}(n)=\int_{-\pi}^{\pi} f(x-h)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nh}\widehat{f}(n)$$

因此

$$S_N(f_h)(x)=\sum_{n=-N}^{N}\widehat{f_h}(n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}=\sum_{n=-N}^{N}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nh}\widehat{f}(n)\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}=\sum_{n=-N}^{N}\widehat{f}(n)\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}n(x-h)}=S_N(f)(x-h)$$

由此显然.

c) 在给定可数集上发散的例子

给定一列 $\{x_k\}_{k\geq 1}$, 我们希望构造一个 $\mathbb{R}$ 上的以 2π 为周期的连续函数, 在 x_k 上其 Fourier 级数发散. 不妨 $x_k \in (-\pi, \pi]$. 下面的构造要用到 b) 中已构造好的 f.

我们的目标是选取足够大的一列 $\{a_k\}_{k\geq 1}$, 使得

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(x - x_k)}{a_1 a_2 \cdots a_k}$$

满足要求. 记

$$f_k = f(x - x_k)$$

由于 f_k 在 x_k 以外的点 Fourier 级数都收敛 (见 b) 中注记), 故对于 $k \geq 2$

$$b_k := \sup_{1\leq j\leq k-1,\ n\geq 1} \Big| S_n(f_k)(x_j) \Big| < \infty$$

现在令

$$a_1 = 1, \quad a_k = 2(b_k + 1)\ (k \geq 2)$$

则 g 是个一致收敛的函数项级数, 故连续, 且以 2π 为周期.

下面说明 $S_n(g)(x_m)$ 当 $n \to \infty$ 时是发散的. 由于 g 一致收敛, 故可以逐项积分, 由此易得

$$S_n(g)(x_m) = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{S_n(f_k)(x_m)}{a_1 a_2 \cdots a_k} + \frac{S_n(f_m)(x_m)}{a_1 a_2 \cdots a_m} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{S_n(f_k)(x_m)}{a_1 a_2 \cdots a_k}$$

第一项显然在 $n \to \infty$ 时收敛. 对于第三项, 由 a_k 取法知

$$\frac{1}{a_k} \Big| S_n(f_k)(x_j) \Big| < \frac{1}{2}, \quad \forall k > j \geq 1, \forall n$$

故

$$\left| \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{S_n(f_k)(x_m)}{a_1 a_2 \cdots a_k} \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_{k-1}} \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} \leq 1$$

而由 b) 我们知道, 当 $n = 3^{\ell^4} \to \infty$ 时, 第二项趋于 ∞, 从而

$$S_{3^{\ell^4}}(g)(x_m) \to \infty$$

这就完成了证明.

4.7 连续函数 Fourier 级数在给定集合发散的例子 (2)

给定零测集 E, 我们希望构造一个 $\mathbb{R}$ 上的以 2π 为周期的连续函数, 在 E 上其 Fourier 级数发散. 基于最初的研究文献, 我们建立一套更一般化的理论. 令 $\mathbb{T}=\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, 空间 $C(\mathbb{T}), L^1(T)$ 分别表示 $\mathbb{R}$ 上的以 2π 为周期的复值连续函数, 和在一个周期上可积的复值函数.

定义 4.7.1 *一个 $\mathbb{T}$ 上的齐性 Banach 空间 B 指的是 $L^1(T)$ 的一个 $\mathbb{C}$-线性子空间, 满足 $||\cdot||_B \geq ||\cdot||_{L^1}$, 且是个 Banach 空间, 并且满足*

(H-1) 对 $f\in B$, $\tau\in\mathbb{T}$, 有 $f_\tau\in B$ 且 $||f_\tau||_B=||f||_B$, 其中 $f_\tau(x)=f(x-\tau)$.

(H-2) 对 $f\in B$, $\tau,\tau_0\in\mathbb{T}$, 有 $\lim_{\tau\to\tau_0}||f_\tau-f_{\tau_0}||_B=0$.

容易证明, $C(\mathbb{T})$ 是 $\mathbb{T}$ 上的齐性 Banach 空间. 下面如无特殊说明, B 均表示 $\mathbb{T}$ 上的齐性 Banach 空间. 下面这两个关于齐性 Banach 空间的性质将要在后面用到:

引理 4.7.2 *设 $g\in C(\mathbb{T})$, $f\in B$, 则 $g*f\in B$, 且 $||g*f||_B\leq||g||_{L_1}||f||_B$.*

引理 4.7.3 *设 K_n 是好核, $f\in B$, 则 $||K_n*f-f||_B\to 0$.*

鉴于我们想要考虑的对象是简单的齐性 Banach 空间 $C(\mathbb{T})$, 我们略去这两个更一般的引理的证明.

定义 4.7.4 *一个集合 $E\in\mathbb{T}$ 称为是 B 的一个发散点集, 若存在 $f\in B$, 其 Fourier 级数在 E 中每个点发散.*

我们引入记号: 对 $f\in L^1(\mathbb{T})$, 记

$$S_n^*(f,x)=\sup_{m\leq n}|S_m(f)(x)|$$

$$S^*(f,x)=\sup_{m\geq 1}|S_m(f)(x)|$$

定理 4.7.5 *E 是 B 的一个发散点集, 当且仅当存在 $f\in B$, 满足*

$$S^*(f,x)=\infty,\quad \forall x\in E$$

证明 这个定理是如下引理的简单推论:

引理 4.7.6 对任意 $g \in B$, 存在 $f \in B$ 及一个双边正实数序列 $\{\Omega_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, 且 $\Omega_j = \Omega_{-j}$, Ω_j 对于正指标单调趋于 ∞, 满足 $\hat{f}(j) = \Omega_j \hat{g}(j), \forall j \in \mathbb{Z}$.

引理的证明 用 $\sigma_N(f)(x)$ 表示 f 的 Fourier 级数的 Cesàro 部分和, 那么存在 $\lambda_n \geq 2^n$ $(n \geq 1)$ 满足

$$||\sigma_{\lambda_n}(g) - g||_B < \frac{1}{2^n}$$

令

$$f = g + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(g - \sigma_{\lambda_n}(g) \Big)$$

这个函数项级数是 Cauchy 列, 故 $f \in B$. 令

$$\Omega_j = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \min\left(1, \frac{|j|}{\lambda_n}\right)$$

由 Cesàro 求和的定义, 易证

$$\widehat{g - \sigma_{\lambda_n}}(g)(j) = \min\left(1, \frac{|j|}{\lambda_n}\right) \cdot \hat{g}(j)$$

由 Lebesgue 控制收敛定理我们知道 f 作内积时可以将右端级数与积分换序, 因此

$$\hat{f}(j) = \hat{g}(j) + \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{g - \sigma_{\lambda_n}}(g)(j) = \Omega_j \hat{g}(j)$$

回到定理的证明. 我们只需证 “⇒” 这个方向. 设 $g \in B$ 满足 g 的 Fourier 级数在 E 中每个点发散, 我们按引理取出对应的 $f \in B$, 下面证明 f 满足要求. 注意到, 对 $n > m$ 有

$$\begin{aligned} S_n(g)(x) - S_m(g)(x) &= \sum_{j=m+1}^{n} \frac{1}{\Omega_j} \Big(S_j(f)(x) - S_{j-1}(f)(x) \Big) \\ &= \frac{1}{\Omega_n} S_n(f)(x) - \frac{1}{\Omega_{m+1}} S_m(f)(x) + \sum_{j=m+1}^{n-1} \left(\frac{1}{\Omega_j} - \frac{1}{\Omega_{j+1}} \right) S_j(f)(x) \qquad (*) \end{aligned}$$

因此

$$\Big| S_n(g)(x) - S_m(g)(x) \Big| \leq \left(\frac{1}{\Omega_n} + \frac{1}{\Omega_{m+1}} + \sum_{j=m+1}^{n-1} \left(\frac{1}{\Omega_j} - \frac{1}{\Omega_{j+1}} \right) \right) S^*(f,x) = \frac{2}{\Omega_{m+1}} S^*(f,x)$$

由此知, 对 $\forall x \in E$, 为了满足 $S_n(g)(x)$ 不是 Cauchy 列, 必须有 $S^*(f,x) = \infty$. □

注记: 事实上由 $(*)$, 我们可以证明构造出来的 f 拥有如下更强的性质:

• 存在正数序列 $\{\omega_n\}_{n\geq 1}$, 单调趋于 ∞, 且对任意 $x\in E$, 存在无穷多个 n 使得 $|S_n(f)(x)|>\omega_n$.

证明 我们让 ω_n 满足

$$\omega_n = o(\Omega_n), \quad \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\Omega_j}-\frac{1}{\Omega_{j+1}}\right)\omega_j < \infty \tag{$**$}$$

这样的例子是存在的. 取递增的下标 N_k 满足

$$\Omega_{N_k}\geq k2^k, \quad k\geq 2$$

补充定义 $N_1=1$. 然后对 $n\in[N_k,N_{k+1})$ 定义 $\omega_n=k$. 容易验证这是满足 $(**)$ 的. 下面假设对于某个 $x\in E$, 存在 N 使得 $n>N$ 时, $|S_n(f)(x)|\leq\omega_n$. 则对于 $n>m>N$, 由 $(*)$ 知

$$\Big|S_n(g)(x)-S_m(g)(x)\Big| \leq \frac{\omega_n}{\Omega_n}+\frac{\omega_m}{\Omega_{m+1}}+\sum_{j=m+1}^{n-1}\left(\frac{1}{\Omega_j}-\frac{1}{\Omega_{j+1}}\right)\omega_j$$

由 $(**)$ 知, m 充分大时, 右边可以任意小. 矛盾. □

在这一节之后的部分, 我们对 B 作一个额外的要求:

(S) 对 $f\in B$, $n\in\mathbb{Z}$, 有 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}f\in B$, 且 $||\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}f||_B=||f||_B$.

很明显 $(C(\mathbb{T}),\sup)$ 满足 (S), 而 $L^1(\mathbb{T})$ 不满足 (S).

在开始后面的部分之前, 我们先引入一个好核: de la Vallée Poussin 核 $\mathbf{V}_n$, 其定义为

$$\mathbf{V}_n(x)=2F_{2n}(x)-F_n(x)$$

其中 F_n 表示 Fejér 核. 显然这是好核. 此外还有如下事实

引理 4.7.7 $\mathbf{V}_n(x)$ 是度数不超过 $2n-1$ 的三角多项式, 且 $\widehat{\mathbf{V}_n}(j)=1$ 对 $|j|\leq n$ 成立.

证明 只需证明 Fejér 核的如下表示形式

$$F_n(x)=\sum_{j=-(n-1)}^{n-1}\left(1-\frac{|j|}{n}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}jx}$$

为此, 由

$$\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)=-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$$

及 (直接比较两边系数)

$$\left(-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)\sum_{j=-(n-1)}^{n-1}\left(1-\frac{|j|}{n}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}jx}=\frac{1}{n}\left(-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\right)$$

可得. □

引理 4.7.8 对任意 $f \in L^1$, $S_N(\mathbf{V}_n * f)(x) = S_N(f)(x)$ 对 $N \le n$ 成立.

证明 由上个引理得

$$S_N(\mathbf{V}_n * f)(x) = \sum_{|j|\le N} \widehat{\mathbf{V}_n * f}(j) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}jx} = \sum_{|j|\le N} \widehat{\mathbf{V}_n}(j)\widehat{f}(j) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}jx} = \sum_{|j|\le N} \widehat{f}(j) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}jx} = S_N(f)(x)$$

□

现在我们证明一个非常关键的引理:

引理 4.7.9 设 B 满足 *(S)*. 则 E 是 B 的发散点集, 当且仅当存在一列三角多项式 $\{P_j\}_{j\ge1} \in B$, 满足

$$\sum_{j=1}^{\infty} ||P_j||_B < \infty \quad 且 \quad \sup_{j\ge1} S^*(P_j, x) = \infty, \forall x \in E$$

证明 "$\Leftarrow$": 设 P_j 的度 (即所含的项 e^{inx} 中最大的 $|n|$) 为 m_j, 取一列正整数 v_j 满足

$$v_j > v_{j-1} + m_{j-1} + m_j$$

令

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}v_j x} P_j(x)$$

则 $f \in B$. 对某个 j 和 $n \le m_j$, 有

$$\begin{aligned} S_{v_j+n}(f)(x) - S_{v_j-n-1}(f)(x) &= \sum_{v_j-n\le|\ell|\le v_j+n} \hat{f}(\ell)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell x} \\ &= \sum_{v_j-n\le\ell\le v_j+n} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}v_j x}P_j(x), \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell x}) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell x} \\ &= \sum_{v_j-n\le\ell\le v_j+n} \widehat{P}_j(\ell - v_j) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell x} \\ &= \sum_{-n\le\tilde{\ell}\le n} \widehat{P}_j(\tilde{\ell}) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\tilde{\ell}+v_j)x} \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}v_j x} \cdot S_n(P_j)(x) \end{aligned}$$

其中对 $\hat{f}(\ell)$ 的计算直接将内积与求和换序即得. 现在对任意 $x \in E$, 若 $S_n(f)(x)$ 收敛, 那么有界 M, 由上可得

$$|S_n(P_j)(x)| \le 2M, \quad \forall j, \forall n \le m_j$$

即

$$S^*_{m_j}(P_j,x)\le 2M,\quad \forall j$$

但 P_j 是一个度为 m_j 的三角多项式, 故

$$S^*_{m_j}(P_j,x)=S^*(P_j,x)$$

从而

$$S^*(P_j,x)\le 2M,\quad \forall j$$

这与 P_j 定义矛盾.

"$\Rightarrow$": 由定理 4.7.5 注记, 我们选取 ω_n 和 $f\in B$. 取一列正整数 $\{\lambda_j\}_{j\ge 1}$ 满足

$$||f-\sigma_{\lambda_j}(f)||_B<\frac{1}{2^j}$$

再取下标 μ_j 严格单调递增且满足

$$\omega_{\mu_j}>2\sup_x S^*(\sigma_{\lambda_j}(f),x)$$

这一步成立因为 $\sigma_{\lambda_j}(f)$ 是个三角多项式, 从而有界. 现在令

$$P_j=\mathbf{V}_{\mu_{j+1}}*(f-\sigma_{\lambda_j}(f))$$

其中 $\mathbf{V}_\mu$ 是 de la Vallée Poussin 核. 因为 $\mathbf{V}_\mu$ 是三角多项式, 因此 P_j 是三角多项式. 注意 $\sigma_{\lambda_j}(f)=F_{\lambda_j}*f\in B$, 故 $P_j\in B$. 由取法知

$$\sum_{j=1}^\infty ||P_j||_B\le\sum_{j=1}^\infty ||\mathbf{V}_{\mu_{j+1}}||_{L_1}\cdot||f-\sigma_{\lambda_j}(f)||_B<\sum_{j=1}^\infty M\cdot\frac{1}{2^j}=M<\infty.$$

其中 $M<\infty$ 由 $\mathbf{V}_\mu$ 是好核保证. 此外, 对任意 $x\in E$, 取 n 使得 $|S_n(f)(x)|>\omega_n$, 再取 μ_j 满足 $\mu_j<n\le\mu_{j+1}$, 那么由引理 4.7.8 得

$$S_n(P_j)(x)=S_n\Big((f-\sigma_{\lambda_j}(f))\Big)(x)=S_n(f)(x)-S_n(\sigma_{\lambda_j}(f))(x)$$

由 ω_{μ_j} 取法知

$$\sup_j S^*(P_j,x)\ge|S_n(P_j)(x)|\ge|S_n(f)(x)|-|S_n(\sigma_{\lambda_j}(f))(x)|\ge\omega_n-\frac{1}{2}\omega_{\mu_j}\ge\frac{1}{2}\omega_n$$

而 n 有无穷多种取法, 即证. $\square$

定理 4.7.10 *设 B 满足 (S). 设 E_n $(n=1,2,\cdots)$ 是 B 的发散点集, 则 $E=\cup E_n$ 也是.*

证明 对 E_n, 由引理 4.7.9, 设 $P_{n,j}$ 是具有引理中性质的三角多项式, 且不妨有

$$\sum_{j=1}^{\infty}||P_{n,j}||_B < \frac{1}{2^n}$$

那么, 对于 E, $\{P_{n,j}\}_{n,j}$ 是满足引理 4.7.9 要求的可数个三角多项式, 即证. □

现在我们考虑 $B=C(\mathbb{T})$ 的发散点集.

引理 4.7.11 *设 E 是 $\mathbb{T}$ 中有限个闭区间的并 (即单位圆周上有限个闭圆弧的并), 测度为 δ. 则存在三角多项式 φ 满足*

$$||\varphi||_\infty \le 1 \quad 且 \quad S^*(\varphi,x) > \frac{1}{2\pi}\log\left(\frac{1}{3\delta}\right),\ \forall x\in E$$

证明 先在复平面上考虑问题, 不妨设 $E=\cup_{j=1}^N I_j$ 为单位圆周上有限个闭圆弧的并 (可能有交), 其中

$$I_j := \{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} : |t-t_j|\le\varepsilon\}\ (t_j\in\mathbb{T})$$

且 $N\varepsilon<\delta$. (具体的写法为, 对原始的不交并 $E=\cup_{j'}I_{j'}$, 令 $2\varepsilon=\min m(I_{j'})$, 并且尽可能少的把其他 $I_{j'}$ 表示成测度为 2ε 的圆弧的并). 定义复函数

$$\psi_j(z)=\frac{1}{1+\varepsilon-z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t_j}}$$

容易验证, 在 $\{|z|\le 1+\frac{\varepsilon}{2}\}$ 上 $\mathrm{Re}(\psi_j)>0$. 还有, 在 I_j 上 $\mathrm{Re}(\psi_j)>\frac{1}{3\varepsilon}$, 事实上

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(\psi_j(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})) &= \frac{\mathrm{Re}(1+\varepsilon-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-t_j)})}{|1+\varepsilon-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-t_j)}|^2} = \frac{1+\varepsilon-\cos(t-t_j)}{(1+\varepsilon-\cos(t-t_j))^2+\sin^2(t-t_j)}\\ &= \frac{1+\varepsilon-\cos(t-t_j)}{(2+2\varepsilon)(1+\varepsilon-\cos(t-t_j))-\varepsilon^2-2\varepsilon}\\ &\ge \frac{1}{2+2\varepsilon-\frac{\varepsilon^2+2\varepsilon}{\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon^2}} = \frac{1}{2\varepsilon} > \frac{1}{3\varepsilon}\end{aligned}$$

现在定义

$$\psi(z)=\frac{1+\varepsilon}{N}\sum_{j=1}^{N}\psi_j(z)$$

则 ψ 有如下性质:

$$\psi(0)=1$$

$$\mathrm{Re}(\psi(z)) > 0, \quad \forall |z| < 1 + \frac{\varepsilon}{2}$$
$$|\psi(z)| \geq \mathrm{Re}(\psi(z)) > \frac{1+\varepsilon}{3N\varepsilon} > \frac{1}{3\delta}, \quad \forall z \in E$$

由此知, $\log\psi$ 是 $\{|z| \leq 1 + \frac{\varepsilon}{2}\}$ 上的全纯函数 (取分支 $\log 1 = 0$, 即 $\log\psi(0) = 0$), 且有性质

$$|\operatorname{Im}(\log\psi(z))| < \pi, \quad \forall |z| = 1$$
$$|\log\psi(z)| > \log\left(\frac{1}{3\delta}\right), \quad \forall z \in E$$

设 $\log\psi(z)$ 的 Taylor 级数为 $\sum_{n\geq 1} a_n z^n$, 则该级数收敛半径大于 1, 故在 $\{|z| = 1\}$ 上一致收敛到 $\log\psi(z)$. 注意到 $\{|z| = 1\}$ 和 E 都是紧集, 从而存在级数的部分和 $\Phi(z) = \sum_{n=1}^{M} a_n z^n$, 使得

$$|\operatorname{Im}(\Phi(z))| < \pi, \quad \forall |z| = 1$$
$$|\Phi(z)| > \log\left(\frac{1}{3\delta}\right), \quad \forall z \in E$$

现在, 令

$$\varphi(x) := \frac{1}{\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Mx}\operatorname{Im}(\Phi(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Mx}\left(\sum_{n=1}^{M} a_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} - \sum_{n=1}^{M} \overline{a_n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\right)$$

是一个三角多项式, 满足 $||\varphi||_\infty \leq 1$. 且

$$S_M(\varphi)(x) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Mx}\sum_{n=1}^{M} a_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Mx}\Phi(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})$$

从而对任意 $x \in E$ (也即 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \in E$), 有

$$S^*(\varphi, x) > |S_M(\varphi)(x)| = \frac{1}{2\pi}|\Phi(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})| > \frac{1}{2\pi}\log\left(\frac{1}{3\delta}\right)$$

□

定理 4.7.12 任意的零测集 $E \in \mathbb{T}$, 都是 $C(\mathbb{T})$ 的发散点集.

证明　取可数个区间之并 $\cup I_n$ 包含 E, 满足 $\sum |I_n| < 1$ 且 E 中每个元素在无穷多个 I_n 中出现. (对 $j \geq 1$ 取 $\cup_k I_{j,k}$ 包含 E 且 $\sum_k |I_{j,k}| < \frac{1}{2^j}$, 再将所有 $I_{j,k}$ 并起来即可). 由于去掉有限个 I_n 不改变结果, 故可不妨 $\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-2^n}$.

现在按如下算法依次定义 E_n $(n = 1, 2, \cdots)$, E_n 为有限个闭区间之并, 满足 $m(E_n) \leq 2^{-2^n}$, 且 E 中每个元素在无穷多个 E_n 中出现.

[第 k 步: 定义 E_k.]

设 $\{I_n\}_{n\geq 1}$ 中剩下的区间为 $\{I_n'\}_{n\geq 1}$, 在上一步最后 ($k=1$ 时这就是初始条件) 会得到 $\sum_{n\geq 1}|I_n'| < \sum_{n=k}^{\infty} 2^{-2^n}$. 取最小的 $L\geq 1$ 使得 $\sum_{n>L}|I_n'| < \sum_{n=k+1}^{\infty} 2^{-2^n}$. 先暂时定义 $\widetilde{E_k} = \cup_{n=1}^{L} I_n'$.

如果 $m(\widetilde{E_k}) \leq 2^{-2^k}$, 那就定义 E_k 为 $\widetilde{E_k}$, 转第 $k+1$ 步;

如果 $m(\widetilde{E_k}) > 2^{-2^k}$, 我们逐渐从 $\widetilde{E_k}$ 中挖去 I_L' 的后一部分, 在这个过程中 $m(\widetilde{E_k})$ 不断下降, 并且在完全挖去 I_L' 之后, 会不超过 2^{-2^k}, 否则若有 $\sum_{n<L}|I_n'| > 2^{-2^k}$, 那么 $L>1$, 由 L 最小性可得 $\sum_{n\geq L}|I_n'| \geq \sum_{n=k+1}^{\infty} 2^{-2^n}$, 这会得到 $\sum_{n\geq 1}|I_n'| > \sum_{n=k}^{\infty} 2^{-2^n}$, 与上一步最后得到的结果矛盾.

因此在挖的过程中, 某一刻刚好剩下的 $\widetilde{E_k}$ 测度刚好是 2^{-2^k}, 假设现在的 I_L' 分为了 I_{L1}' 和 I_{L2}', 这就是说, 现在的 $E_k = \cup_{n=1}^{L-1} I_n' \cup I_{L1}'$,

此时, 剩下的区间为 I_{L2}' 和 $\{I_n'\}_{n>L}$, 其测度之和 $|I_{L2}'| + \sum_{n>L}|I_n'|$ 一定小于 $\sum_{n=k+1}^{\infty} 2^{-2^n}$, 否则我们有

$$\sum_{n\geq 1}|I_n'| = \sum_{n=1}^{L-1}|I_n'| + |I_{L1}'| + |I_{L2}'| + \sum_{n>L}|I_n'| \geq m(E_k) + \sum_{n=k+1}^{\infty} 2^{-2^n} = \sum_{n=k}^{\infty} 2^{-2^n}$$

这与上一步最后的结果矛盾. 现在, 剩下的区间测度之和小于 $\sum_{n=k+1}^{\infty} 2^{-2^n}$, 转第 $k+1$ 步.

容易验证, 这样构造的 E_n $(n=1,2,\cdots)$ 满足之前提到的要求. 对某个 E_n, 由引理 4.7.11, 取出相应的三角多项式 φ_n. 最后令

$$P_n(x) = \frac{1}{n^2}\varphi_n(x), \quad n=1,2,\cdots$$

那么

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||P_n||_\infty < \infty$$

且对 $x\in E_n$, 有

$$S^*(P_n,x) = \frac{1}{n^2}S^*(\varphi_n,x) > \frac{1}{2\pi n^2}\log\left(\frac{2^{2^n}}{3}\right) \geq C\cdot\frac{2^n}{n^2} - 1$$

现在对任意 $x\in E$, 有无穷多个 n 满足 $x\in E_n$, 故有无穷多个 n 满足

$$\sup_j S^*(P_j,x) \geq S^*(P_n,x) \geq C\cdot\frac{2^n}{n^2} - 1 \to \infty$$

由引理 4.7.9 即证. □

注记: 至此我们完成了这一节开始提到的目标. 那么进一步的问题是, 如果有一个 Lebesgue 测度大于 0 的集合 E, 能不能构造一个 $\mathbb{R}$ 上的以 2π 为周期的连续函数, 在 E 上其 Fourier 级数发散呢?

答案是否定的, 事实上任意 Lebesgue 测度大于 0 的集合都不是 $C(\mathbb{T})$ 的发散点集. Lennart Carleson 在 1965 年证明了一个著名的定理，这个定理完整地解决了 Lusin 猜想:

- 如果 $f \in L^2([0,2\pi])$, 那么 $\lim\limits_{N\to\infty}(S_N f)(x)$ 几乎处处收敛到 $f(x)$.

至此, 对于 $C(\mathbb{T})$ 的发散点集, 我们已经有了完整的结论:

定理 4.7.13 集合 $E \subset \mathbb{T}$ 是 $C(\mathbb{T})$ 的发散点集, 当且仅当 E 是零测集.

4.8 Fourier 级数的平方平均收敛

在这一节我们要说明, 虽然 $[-\pi,\pi]$ 上的可积且绝对可积的函数 f 的 Fourier 级数一般来说并不逐点收敛到函数本身, 但是从整体上来看 Fourier 级数是 “收敛” 到 f 的. 这里的收敛是在如下的平方平均意义下:

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(f(x)-S_N(f)(x)\Big)^2\,\mathrm{d}x=0$$

a) 内积空间回顾

给定 $\mathbb{R}$ 上线性空间 V, 其上的一个内积是一个双线性映射 $(\ ,\ ) : V\times V\to\mathbb{R}$ 满足如下性质:

(i) (对称性): $(u,v)=(v,u), \quad \forall u,v\in V$;

(ii) (正定性): $(u,u)\geq 0$, 且等号成立当且仅当 $u=0$.

此时我们称 V 为内积空间. 如果只要求半正定性, 即去掉 $(u,u)=0$ 当且仅当 $u=0$ 这一条件, 则称 $(\ ,\ )$ 为半内积, 此时我们称 V 为一个半内积空间.

如果 V 是 $\mathbb{C}$ 上的线性空间, 则我们有 Hermite 内积以及半 Hermite 内积的概念. 一个 Hermite 内积指的是一个映射 $(\ ,\ ) : V\times V\to\mathbb{C}$ 满足如下性质:

(i) (线性性): $(\lambda u+\mu v,w)=\lambda(u,w)+\mu(v,w), \quad \forall u,v,w\in V,\ \lambda,\mu\in\mathbb{C}$

(ii) (Hermite 对称性): $(u,v)=\overline{(v,u)}, \quad \forall u,v\in V$;

(iii) (正定性): $(u,u)\geq 0$, 且等号成立当且仅当 $u=0$.

类似的, 一个半 Hermite 内积就是去掉 $(u,u)=0$ 当且仅当 $u=0$ 这一条件. 对于一个半 (Hermite) 内积空间, 我们依然用

$$||u||=\sqrt{(u,u)}, \quad u\in V$$

定义范数. 可以证明此时依然有如下两条性质:

$$|(u,v)|\leq ||u||\cdot||v||$$

$$||u+v||\leq ||u||+||v||$$

和勾股定理: 若 u,v 正交, 则

$$||u+v||^2=||u||^2+||v||^2$$

由归纳法可得如下 n 元情形的推广: 若 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 两两正交, 则

$$||u_1 + u_2 + \cdots + u_n||^2 = ||u_1||^2 + ||u_2||^2 + \cdots + ||u_n||^2$$

b) Bessel 不等式

现在我们考虑 $[-\pi, \pi]$ 上所有可积且平方可积的复值函数. 一个函数 f 可积且平方可积, 指的是要么 f 常义可积, 要么 $|f|^2$ 反常可积. 这个条件明显强于可积且绝对可积. 加上这个条件的好处在于我们可以定义

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x$$

这是因为由 Cauchy 不等式有

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x\right|^2 \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x \int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2\,\mathrm{d}x$$

所以 $\langle f, g\rangle$ 是有限的.

我们记 $[-\pi, \pi]$ 上所有可积且平方可积的复值函数构成的空间为 $\mathcal{R}^2([-\pi, \pi])$, 容易证明这是个线性空间, 且 $\langle f, g\rangle$ 是个半 Hermite 内积.

$\mathcal{R}^2([-\pi, \pi])$ 上有一簇规范正交向量 $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} : n \in \mathbb{Z}\}$(后面我们会看到它们构成实际上是一组基), 也即它们具有性质

$$\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}\rangle = \delta_{n,m}, \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}$$

于是

$$V_N := \mathrm{span}\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} : n = -N, \cdots, N\}$$

为 $\mathcal{R}^2([-\pi, \pi])$ 的一个 $2N+1$ 维线性子空间. 而我们知道对于实值函数 f 有

$$S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} A_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$$

其中 $A_n = \langle f, \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\rangle$. 由此可得

$$\langle f - S_N(f), \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\rangle = 0, \quad \forall -N \leq n \leq N$$

进一步有

$$\langle f - S_N(f), S_N(f)\rangle = 0$$

由勾股定理可得

$$\begin{aligned}||f||^2 &= ||f-S_N(f)||^2 + ||S_N(f)||^2\\ &= ||f-S_N(f)||^2 + \sum_{n=-N}^{N}|A_n|^2\end{aligned}$$

由于 N 是任取的, 所以我们得到了如下的 Bessel 不等式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|A_n|^2 \le ||f||^2$$

值得注意的是, 上面的推导过程只用了 e^{inx} 的正交性. 也就是说, 对任意一簇规范正交向量 $\{\varphi_n\}_{n\ge 0}$(后面会给出更多的例子), 记 $A_n=\langle f,\varphi_n\rangle$, 都有如上的 Bessel 不等式 (这里由于下标范围是 0 到 ∞, 求和范围也变更为 0 到 ∞).

对于现在所考虑的情形, 由 $A_0=\frac{a_0}{2}$ 以及

$$A_n=\tfrac{1}{2}(a_n-\mathrm{i}b_n)$$

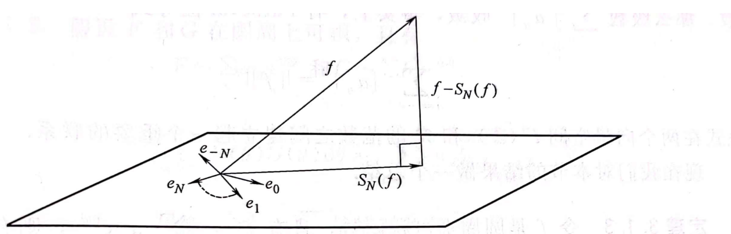
$$A_{-n}=\tfrac{1}{2}(a_n+\mathrm{i}b_n),\quad \forall n\ge 1$$

可得如下版本的 Bessel 不等式

$$\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

注记: (几何意义)

我们证明了, $f-S_N(f)$ 与超平面 V_N 正交, 而 $S_N(f)\in V_N$, 故 $S_N(f)$ 是 f 在 V_N 上的正交投影. 这符合我们对正交这一几何概念的直观理解, 见下图.



从解析几何的角度, 过一点往一个平面引垂线, 就是在平面上找一点使得距离最小, 这启发了如下的引理:

引理 4.8.1 (最佳逼近引理) 对任意的复数 $B_{-N},\cdots,B_N$ 成立如下的不等式

$$||f-S_N(f)||\le||f-\sum_{n=-N}^{N}B_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}||$$

等号成立当且仅当 $B_n=\langle f,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\rangle,\forall n$.

证明 有

$$\langle f-S_N(f), \sum_{n=-N}^{N}(A_n-B_n)\mathrm{e}^{inx}\rangle = 0$$

由勾股定理知

$$\begin{aligned}||f-\sum_{n=-N}^{N}B_n\mathrm{e}^{inx}||^2 &= ||f-S_N(f)||^2+||\sum_{n=-N}^{N}(A_n-B_n)\mathrm{e}^{inx}||^2\\ &= ||f-S_N(f)||^2+\sum_{n=-N}^{N}|A_n-B_n|^2\end{aligned}$$

由此即证. □

下面将用这个引理证明 Parseval 恒等式.

c) Parseval 恒等式

定义 4.8.2 对于 $\mathcal{R}^2([-\pi,\pi])$ 上的一簇规范正交向量 $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$, 若 *Bessel* 不等式取严格等号, 即如下的 *Parseval* 恒等式成立:

$$\sum_{n=0}^{\infty}|A_n|^2 = ||f||^2$$

就称 $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ 是完备正交系[7].

定理 4.8.3 $\{\mathrm{e}^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 是完备正交系. 即有

$$\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

证明 只需要证

$$\lim_{N\to\infty}||f-S_N(f)|| = 0$$

第一步, 我们证明 f 常义可积的情形.

取定 $\varepsilon>0$. 设 M 是 f 的一个上界. 使用定理 4.11 中提及的逼近引理, 知存在一个连续函数 g, 使得 $g(\pi)=g(-\pi)$ 且 $|g|\leq M$, 还满足

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x<\varepsilon^2$$

故

$$||f-g||^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-g(x)|\cdot|f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x \leq \frac{2M}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x \leq \frac{M\varepsilon^2}{\pi}$$

[7]在一般的 Hilbert 空间理论中, 称为是极大规范正交系.

由定理 4.20(Weierstrass 定理) 可知, 存在三角多项式 $P(x)$ 使得 $|g(x)-P(x)| \le \varepsilon, \forall x$. 从而 $||g-P|| \le \varepsilon$, 进而可得 $||f-P|| \le (\sqrt{\frac{M}{\pi}}+1)\varepsilon$. 设 P 的阶为 N, 则由最佳逼近引理得

$$||f-S_N(f)|| \le ||f-P|| \le (\sqrt{\frac{M}{\pi}}+1)\varepsilon$$

此外我们还有

$$||f||^2 = ||f-S_N(f)||^2 + \sum_{n=-N}^{N} |A_n|^2$$

故 $||f-S_N(f)||$ 关于 N 是单调递减的. 由此即得.

第二步, 我们证明 f 反常平方可积的情形.

设 f 有 K 个瑕点. 我们在 f 的每个瑕点 α 附近取一个小区间 $I_\alpha = [\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon]$, 使得

$$\int_{I_\alpha} f^2(x)\,\mathrm{d}x \le \frac{\varepsilon}{K}$$

记 $J = \cup I_\alpha$, 考虑函数 $f_1 = f\chi_{[-\pi,\pi]\setminus J}$ 与 $f_2 = f\chi_J$, 有 $f = f_1 + f_2$, 且 f_1 常义可积. 由第一步的结论知存在一个三角多项式 $T(x)$, 使得 $||f_1 - T|| \le \varepsilon$, 故

$$||f-T|| = ||f_1+f_2-T|| \le ||f_1-T|| + ||f_2|| \le 2\varepsilon$$

后面的证明和第一步类似. □

Parseval 恒等式有如下的推广:

定理 4.8.4 设 $f, g \in \mathcal{R}^2([-\pi,\pi])$, 其 *Fourier* 级数分别为

$$f \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} A_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}, \quad g \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} B_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$$

则有

$$\langle f, g\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} A_n \overline{B_n}$$

也即, 若用 $a_n, b_n, \alpha_n, \beta_n$ 表示 f, g 的 *Fourier* 正余弦系数, 则有

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a_0\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n + b_n\beta_n)$$

证明 用 $4\langle f, g\rangle = ||f+g||^2 - ||f-g||^2$ 即可. □

由此可证得 Fourier 级数的逐项积分定理:

定理 4.8.5 设 $f \in \mathcal{R}^2([-\pi,\pi])$, 则对任意包含于 $[-\pi,\pi]$ 的区间 $[a,b]$, 有

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_a^b A_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b \frac{a_0}{2}\,\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

证明　在上个定理中取 $g = \chi_{[a,b]}$, 得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} A_n \cdot \overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x} \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} A_n \int_a^b \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

由此即证. □