INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO

ANALISIS DE ALGORITMOS

PROFESOR TITULAR: FRANCO MARTINEZ EDGARDO ADRIAN

1° PARCIAL

EJERCICIOS #8: RECURRENCIAS LINEALES

LEMUS RUIZ MARIANA ELIZABETH
2020630211

GRUPO: 3CM12

LEMUS RUIZ MARIANA ELIZABETH
3CM12

EJERCICIOS 08: RECURRENCIAS LINEALES

INSTRUCCIONES:
Para los siguientes 4 modelos recurrentes determine su modelo equivalente sin recurrencia mediante el método de sustitución.

EJERCICIO 01

① $T(n) = 4T(n-2) - T(n-1) + T(n-3) - 3T(n-4)$

Con $T(n) = 1$ para todo $n \leq 4$

Reordenamos la ec. de recurrencia:

$T(n) - 4T(n-2) + T(n-1) - T(n-3) + 3T(n-4) = 0$

$T(n) + T(n-1) - 4T(n-2) - T(n-3) + 3T(n-4) = 0$

Hacemos el cambio $x^4 = T(n)$

$x^4 + x^3 - 4x^2 - x + 3 = 0$ Factorizamos

$(x+1)(x-1)(x^2+x-3) = 0$ Temos entonces

$x+1=0 \rightarrow x=-1$

$x-1=0 \rightarrow x=1$

$x^2+x-3=0 \longrightarrow x_1 = 1.3 \quad , x_2 = -2.3$

Entonces tenemos

$x_1 = -1 \quad , x_2 = 1 \quad , x_3 = 1.3 \quad x_4 = -2.3$

Así

De $T(0) = C_1(-1)^0 + C_2(1)^0 + C_3(1.3)^0 + C_4(-2.3)^0$

$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 1 \longrightarrow C_1 + C_2 = 1 - C_3 - C_4$

De $T(1) = C_1(-1)^1 + C_2(1)^1 + C_3(1.3)^1 + C_4(-2.3)^1$

$C_2 - C_1 + C_3 r_3 - C_4 r_4 = 1 \longrightarrow C_2 - C_1 = 1 - C_3 r_3 - C_4 r_4$

De $T(2) = C_1(-1)^2 + C_2(1)^2 + C_3(1.3)^2 + C_4(-2.3)^2 = 1$

$C_1 + C_2 = 1 - C_3 r_3^2 - C_4 r^4$

Así de:

$C_1 + C_2 = 1 - C_3 r_3 - C_4 r_4$ y $C_1 + C_2 = 1 - C_3 r_3^3 - C_4 r_4^2$

Usamos $C_3 = 0$ y $C_4 = 0$

$C_1 + 2 = 1 \quad , \quad C_2 = 1 - C_1 \rightarrow C_2 = 1 \, , \, C_2 = 0$

Finalmente: $\quad T(n) = 1^n = \underline{\underline{1}}$

LEMUS RUIZ MARIANA ELIZABETH
3CM12

EJERCICIO 02

(2) $T(n) = T(n-1) + 3$

Con $T(0) = 4$

$k = 1 \longrightarrow T(n) = x^{k} = x^{(1)} = x$

Reordinamos

$T(n) - T(n-1) = 3 \longrightarrow$ No homogenea

Vemos $d = 0$ y $b = 1$

$(x-1)(x-1) = 0 \begin{cases} x_1 = 1 \longrightarrow r_1 = 1 \\ x_2 = 1 \longrightarrow r_2 = 1 \end{cases}$

Tendriamos entonces

$T(n) = c_1 (1)^n + c_2 n (1)^n$

$T(0) = c_1 + \cancel{c_2 (0)} \overset{0}{=} 4 \longrightarrow c_1 = 4$

$T(1) = 4 + c_2 = 7 \longrightarrow C_2 = 7 - 4 = 3$

Así:

$T(n) = 4 + 3n$

LEMUS RUIZ MARIANA ELIZABETH
3CM12

EJERCICIO 03

(3) $T(n) = -5T(n-1) - 6T(n-2) + (42)(4^n)$

Con $T(0) = 18$ y $T(1) = 61$

Reordenamos:

$T(n) + 5T(n-1) + 6T(n-2) = 42(4^n) \rightarrow$ No Homogenea

Con $d=0$ y $b=4$

$(x^2+5x+6)(x-4)=0 \longrightarrow r_3 = 4$

x^2+5x+6

$(x+3)(x+2) \longrightarrow r_1 = 3$
$r_2 = 4$

Usando

$T(n) = c_1(-3)^n + c_2(-2)^n + c_3(4)^n$

De ambos casos iniciales:

$T(0) = c_1 + c_2 + c_3 = 18 \longrightarrow c_3 = 18 - c_2 - c_1$

$T(1) = -3c_1 - 2c_2 + 4c_3 = 61$

$= -3c_1 - 2c_2 + 4(18 - c_2 - c_1) = 61$

$= -3c_1 - 2c_2 + 72 - 4c_2 - 4c_1 = 61$

$= 7c_1 - c_2 + 72 = 61$

$= -7c_1 - 6c_2 = -11 \longrightarrow c_2 = \frac{11}{6} - \frac{7c_1}{6}$

$T(2) = 9c_1 + 4c_2 + 16c_3 = -5(61) - 6(18) + 42(16)$

$9c_1 + 4c_2 + 16(18 - c_2 - c_1) = -305 - 108 + 672$

$-7c_1 - 12c_2 = 259 - 288$

$-7c_1 - 12\left(\frac{11}{6} - \frac{7c_1}{6}\right) = -29$

$-7c_1 - 22 + 14c_1 = -29$

$7c_1 = -7 \longrightarrow c_1 = -1$ Sustituimos

(c2) $c_2 = \frac{11}{6} - \frac{7(-1)}{6} = \frac{11}{6} + \frac{7}{6} = 3$ (c3) $c_3 = 18 - (3) - (-1) = 16$

$\therefore T(n) = (-1)(-3)^n + 3(-2)^n + 16(4)^n$

LEMUS RUIZ MARIANA ELIZABETH
3CM12

EJERCICIO 04

4) $T(n) = 5T(n-2) + 3T(n-1)$
Con $T(1) = 2$ y $T(2) = -3$

$T(n) = 5T(n-2) + 3T(n-1)$ Recursión lineal homogénea
$T(n) - 3T(n-1) - 5T(n-2) = 0$
Donde
$T(n) = x^2 \longrightarrow x^2 - 3x - 5 = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{3+\sqrt{29}}{2} \rightarrow r_1 = 4.19 \\ x_2 = \frac{3-\sqrt{29}}{2} \rightarrow r_2 = -1.19 \end{array} \right.$

Del caso Base:
$T(1) = c_1 r_1 + c_2 r_2 = 2 \longrightarrow c_2 r_2 = 2 - c_1 - r_1 \longrightarrow c_2 = \frac{2 - c_1 r_1}{r_2}$

$c_2 = \frac{2 - c_1(4.19)}{4.19}$

$T(1) = c_1 r_1^2 + c_2 r_2^2 = c_1(4.19)^2 + c_2(-1.19)^2 = c_1(17.55) + c_2(1.14)$
Usando el anterior c_2
$c_1(17.55) + c_2(1.14) = c_1(17.55) + \left[\frac{2 - c_1(4.19)}{4.19}\right](1.14)$
$= 16.41c_1 + 0.544 \longrightarrow c_1 = \frac{0.544}{16.41}, \ c_2 = \frac{1.8617}{4.19}$
Tomando entonces:
$T(n) = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$
$T(n) = \left(\frac{0.544}{16.41}\right)(4.19)^n + \left(\frac{1.8617}{4.19}\right)(-1.19)^n$