



Mestrado Integrado em Engenharia Biomédica

25 de Junho de 2017

Biomecânica dos Tecidos

Professor: Fernando Simões

ELEMENTOS FINITOS UNIDIMENSIONAIS APLICADOS A UM TECIDO MOLE HIPERELÁSTICO

Manuel Rosado Comenda, 78642

e-mail: manuel.comenda@tecnico.ulisboa.pt

Maria Catarina Botelho, 78741

e-mail: catarina.t.botelho@gmail.com

João Mocho Ferreira, 78750

e-mail: j12mocho@gmail.com

Conteúdo

Questão 1	2
Questão 2:	3
Questão 3	5
Questão 4	6
Questão 5	14
Questão 6	15
Anexos	22
Anexo 1. Dados experimentais obtidos num ensaio de tração uniaxial (dados fornecidos pelo professor para o grupo 6).....	22
Anexo 2. Script de MATLAB para encontrar os parâmetros da lei exponencial hiperelástica de Fung, a partir dos dados do anexo 1.	22
Anexo 3. Rotina Fortran UMAT	23
Anexo 4. Ficheiro INP para 1 elemento finito	24
Anexo 5. Ficheiro INP para 2 elementos finitos	25

Questão 1

Identificação da relação constitutiva $T = T(\lambda)$ correspondente ao ensaio de tração uniaxial cujos resultados se encontram no Anexo 1, como uma relação hiperelástica de *Fung*.

Pretende-se, nesta questão, determinar os parâmetros B e C da lei exponencial hiperelástica de *Fung* (1) de forma a traduzir a melhor relação possível entre os dados de tensão nominal e de *stretch ratio* (razão de extensão) resultantes de um ensaio de tração uniaxial (Anexo 1).

$$T(\lambda) = \frac{B}{C} \times (e^{B(\lambda-1)} - 1) \quad (1)$$

Utilizando o software MatLab, cujo script se encontra no Anexo 2, chegou-se aos parâmetros B e C apresentados na tabela 1.

Tabela 1. Valores dos parâmetros B e C da lei exponencial hiperelástica de *Fung*, e respetivos intervalos de confiança a 95%.

	Valor do Coeficiente	Intervalo de confiança a 95%
B	25,89 (adimensional)	[24,59 ; 27,20]
C	$5,675 \times 10^5 \text{ Pa}^{-1}$	$[5,009 \times 10^5 ; 6,341 \times 10^5] \text{ Pa}^{-1}$

O ajuste da lei exponencial hiperelástica de *Fung* aos dados experimentais apresenta-se na Figura 1, e os resíduos associados na Figura 2.

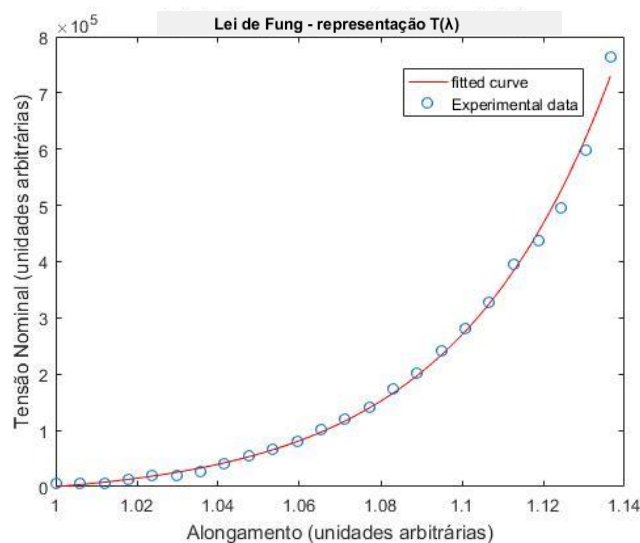


Figura 1. Ajuste dos dados à lei exponencial hiperelástica de *Fung*

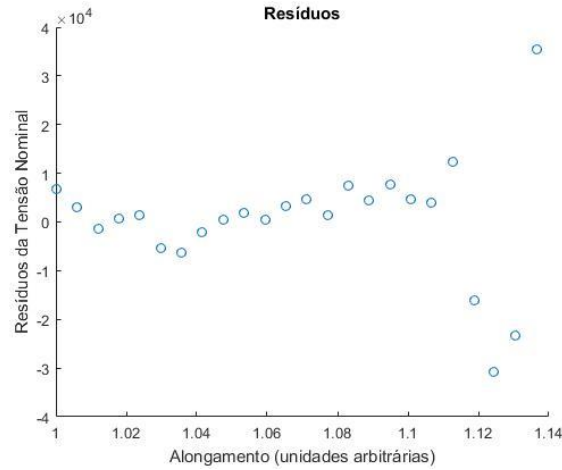


Figura 2. Resíduos da Tensão Nominal resultantes da aproximação dos dados à lei de Fung.

Analisando os gráficos das Figuras 1 e 2, conclui-se que, com os parâmetros encontrados, a lei exponencial de Fung descreve bem os dados do Anexo 1.

Questão 2:

Determinação da evolução (expressões exatas) do deslocamento da extremidade livre, da deformação logarítmica e da tensão de Cauchy, do espécimen da Figura 3, em função da força de tração.

A relação entre a Tensão, T , e a força, F , é dada pela equação 2, em que A_0 corresponde à área da secção transversal do espécimen na conformação indeformada.

$$T = \frac{F}{A_0} \quad (2)$$

A partir de (1) e de (2), pode escrever-se:

$$\lambda(F) = \frac{\ln\left(\frac{F B}{A_0 C} + 1\right)}{B} + 1 \quad (3)$$

O **deslocamento da extremidade livre** u , é dado por:

$$u = L - L_0 = \lambda L_0 - L_0 \quad (4)$$

Substituindo (3) em (4), tem-se:

$$u(F) = L_0 \frac{\ln\left(\frac{F B}{A_0 C} + 1\right)}{B} \quad (5)$$

O **logaritmo da deformação** é, então, dado por:

$$\ln(\lambda(F)) = \ln\left(\frac{\ln\left(\frac{F B}{A_0 C} + 1\right)}{B} + 1\right) \quad (6)$$

Considerando as equações (7) e (8), tem-se que a **tensão de Cauchy**, Σ , é dada por (9):

$$A = A_0 \times \frac{L_0}{L} = \frac{A_0}{\lambda} \quad (7)$$

$$\Sigma = \frac{F}{A} \quad (8)$$

$$\Sigma(F) = \frac{F \times \left(\frac{\ln\left(\frac{F B}{A_0 C} + 1\right)}{B} + 1 \right)}{A_0} \quad (9)$$

As equações (4), (6) e (9), aplicadas ao espécimen da Figura 3, estão representadas graficamente nas Figuras 4 e 5. A força máxima F_{max} considerada foi calculada pela equação (10), em que T_{max} corresponde à tensão nominal máxima apresentada nos dados do Anexo 1. Os parâmetros B e C são os calculados na alínea anterior.

$$F_{max} = T_{max} \times A_0 = 7,65 \times 10^5 \times 0,15 \times 10^{-2} = 11,475 \text{ N} \quad (10)$$

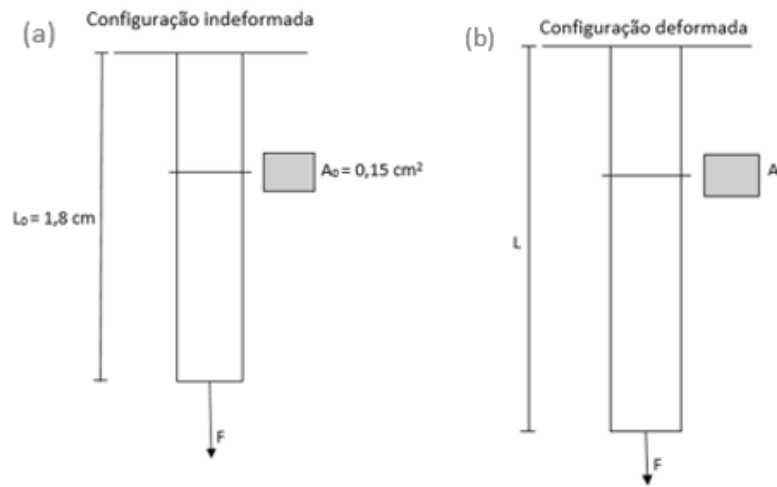


Figura 3. Configuração indeformada (a) e deformada (b) do espécimen em estudo.

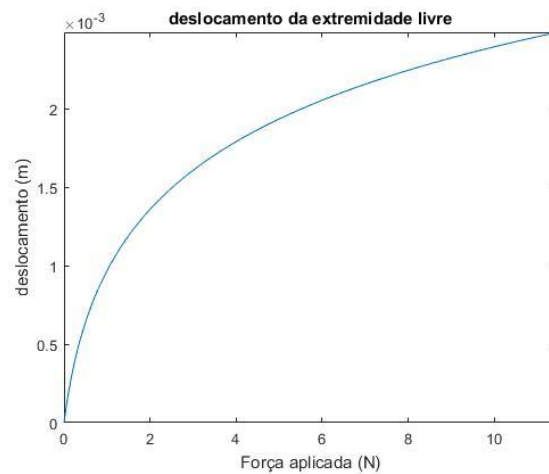


Figura 4. Deslocamento da extremidade livre do espécimen representado na Figura 3, em função da força aplicada F.

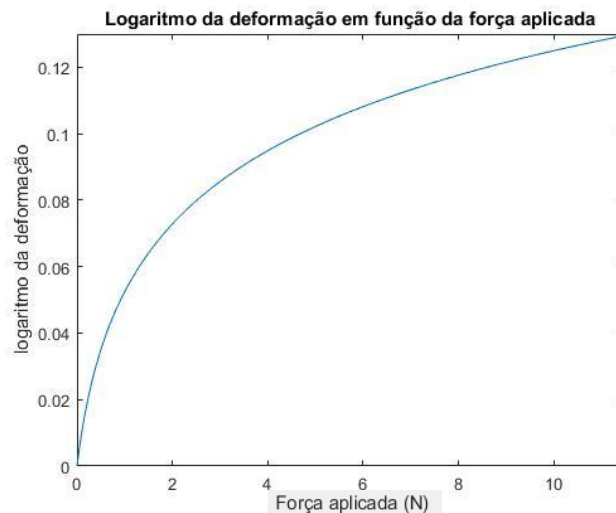


Figura 5. Logaritmo da deformação do espécimen representado na Figura 3 em função da força aplicada F .

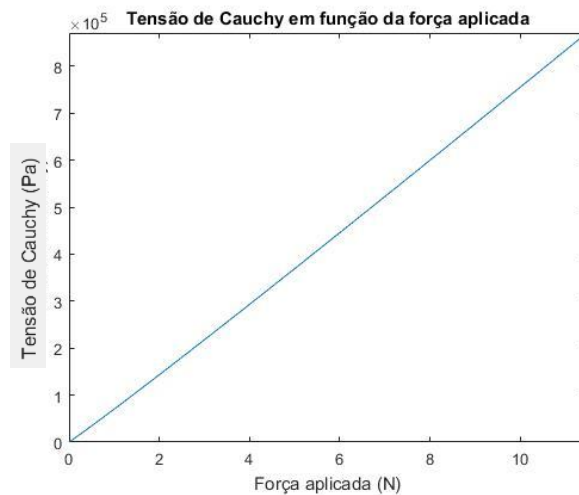


Figura 6. Tensão de Cauchy do espécimen representado na Figura 3 em função da força aplicada F .

Questão 3

Nesta questão, foi cedido pelo docente uma rotina Fortran para um comportamento material definido pelo utilizador no Programa comercial Abaqus. Este ficheiro foi alterado de modo a que a relação constitutiva fosse a mesma obtida na questão 1.

A rotina pode ser consultada no Anexo 3. Foram efetuadas alterações nas secções “Input of materials properties” de modo a poder ter os parâmetros B e C da lei exponencial hiperelástica de *Fung* (1). Também se alterou a relação constitutiva, assim obteve-se, na secção “Nominal Stress at end of increment”, $T = C/B * (EXP(B * (ALAM2 - 1.)) - 1.)$. Por último alterou-se a secção “Jacobiano f the model in Langrangean form” de forma a ter a expressão: $DTDlam = C * DEXP(B / (ALAM2 - 1.))$.

Questão 4

Esta questão tem como objetivo determinar o deslocamento da extremidade livre, a deformação logarítmica e a tensão de Cauchy do espécimen da Figura 3, em função da força aplicada F , utilizando o programa *Abaqus*.

Neste caso foi recebido um ficheiro *ficheiroABAQUS.inp* que foi alterado de modo a ter as características indicadas para o nosso espécimen para 1 elemento finito. Foi criado um outro ficheiro INP e alterado de modo a que a simulação fosse feita com 2 elementos finitos. Estes ficheiros encontram-se nos anexos 4 e 5, respetivamente.

Em seguida, para efectuar as simulações em *Abaqus*, foi utilizado o software "ssh" para aceder a uma máquina cedida pelo docente. Todos os ficheiros introduzidos e obtidos, respetivamente antes e após as simulações, encontram-se na área de trabalho correspondente ao grupo 6.

Malha com 1 elemento finito

Acedendo ao ficheiro DAT obtido, retiraram-se para cada incremento de carga os valores necessários para análise. Saliente-se que foram utilizados 10 incrementos de carga, número este suficiente para verificar a não linearidade da resposta.

Tabela 2. Dados retirados do ficheiro DAT, obtidos através de uma simulação no programa Abaqus, utilizando os ficheiros rotinaUMAT.f e 1elemento.inp.

Incremento	Carga aplicada [N]	U1, Deslocamento da extremidade livre [$\times 10^{-3}$ m]	E11, Deformação logarítmica	S11, Tensão de cauchy [$\times 10^5$ Pa]
1	1,1475	1,0441	0,0564	0,8094
2	2,2950	1,4448	0,0772	1,6553
3	3,4425	1,6963	0,0901	2,5121
4	4,5900	1,8808	0,0994	3,3798
5	5,7375	2,0279	0,1068	4,2648
6	6,8850	2,1477	0,1127	5,1434
7	8,0325	2,2499	0,1178	6,0273
8	9,1800	2,3392	0,1222	6,9172
9	10,3275	2,4183	0,1261	7,8114
10	11,4750	2,4894	0,1295	8,7090

Apresentam-se em seguida os gráficos correspondentes aos dados obtidos tais como tabelas com análise de erro.

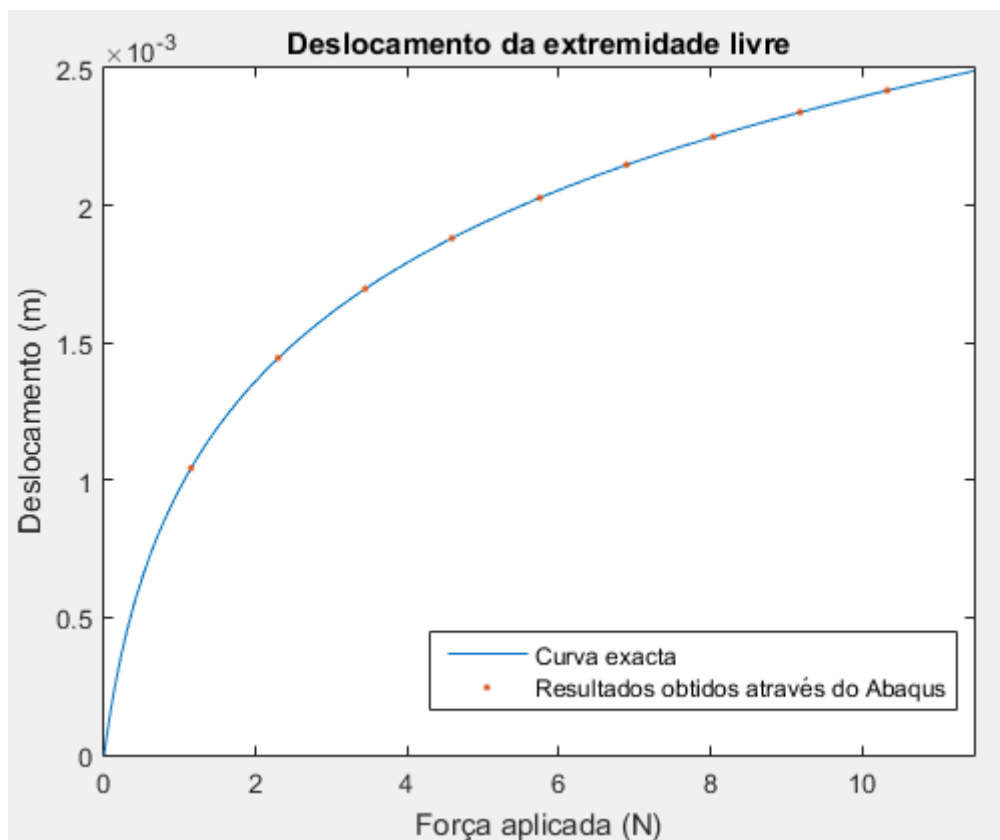


Figura 7. Deslocamento da extremidade livre, em função da força aplicada, do espécimen da Figura 3.

Tabela 3. Erros absoluto e relativo dos resultados obtidos através do Abaqus para o deslocamento da extremidade livre.

Carga Aplicada [N]	Deslocamento extremidade livre teórico [$\times 10^{-3}$ m]	Deslocamento extremidade livre simulados [$\times 10^{-3}$ m]	Erro absoluto	Erro relativo [%]
1,1475	1,0441	1,0441	1,7613E-08	0,002
2,2950	1,4439	1,4448	-8,9021E-07	0,062
3,4425	1,6961	1,6963	-1,8092E-07	0,011
4,5900	1,8808	1,8808	-1,0222E-08	0,001
5,7375	2,0266	2,0279	-1,3425E-06	0,066
6,8850	2,1470	2,1477	-7,0527E-07	0,033
8,0325	2,2496	2,2499	-2,8480E-07	0,013
9,1800	2,3390	2,3392	-1,8268E-07	0,008
10,3275	2,4182	2,4183	-7,8955E-08	0,003
11,4750	2,4893	2,4894	-8,3316E-08	0,003

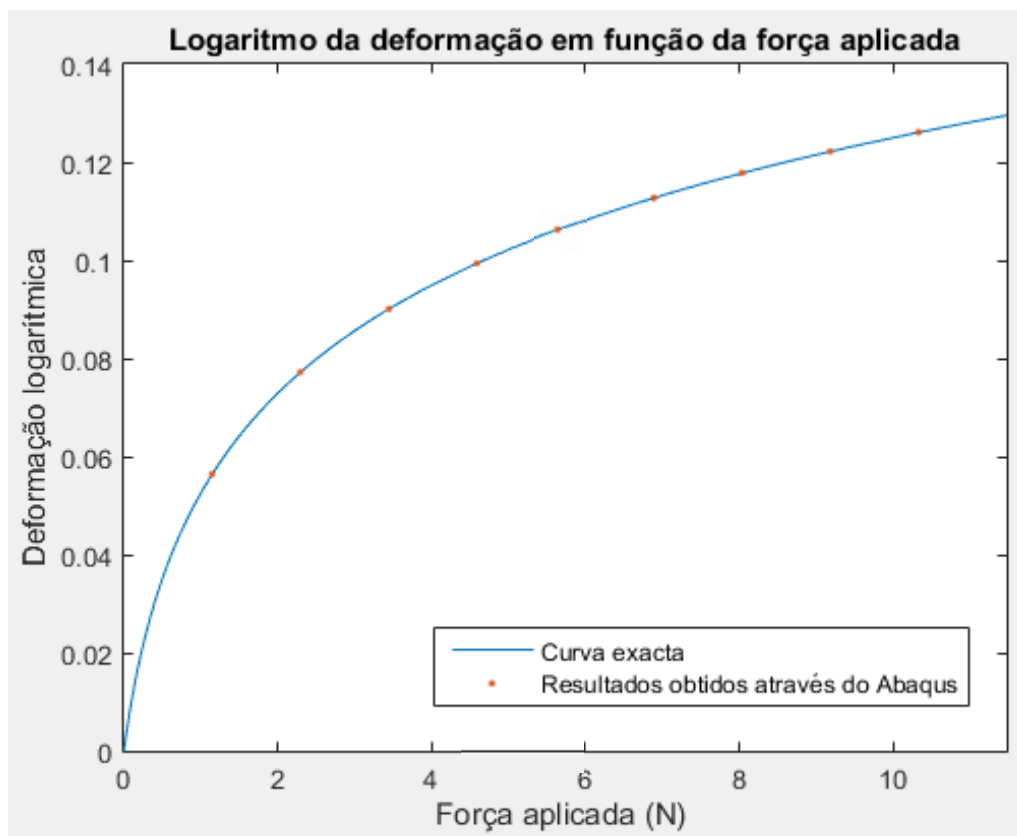


Figura 8. Logaritmo da deformação, em função da força aplicada, do espécimen da Figura 3.

Tabela 4. Erros absoluto e relativo dos valores obtidos pelo Abaqus para a deformação logarítmica.

Carga [N]	Deformação logarítmica teórico	Deformação logarítmica simulados [$\times 10^{-1}$]	Erro absoluto	Erro relativo [%]
1,1475	0,0564	0,5639	-4,9075E-07	0,001
2,2950	0,0772	0,7721	-4,6858E-05	0,061
3,4425	0,0900	0,9006	-1,0143E-05	0,011
4,5900	0,0994	0,9938	-8,3018E-07	0,001
5,7375	0,1067	1,0680	-1,1249E-04	0,105
6,8850	0,1127	1,1270	-1,6625E-05	0,015
8,0325	0,1178	1,1780	-3,5967E-05	0,031
9,1800	0,1222	1,2220	-3,0681E-05	0,025
10,3275	0,1261	1,2610	-4,4067E-05	0,035
11,4750	0,1295	1,2950	3,1855E-05	0,025

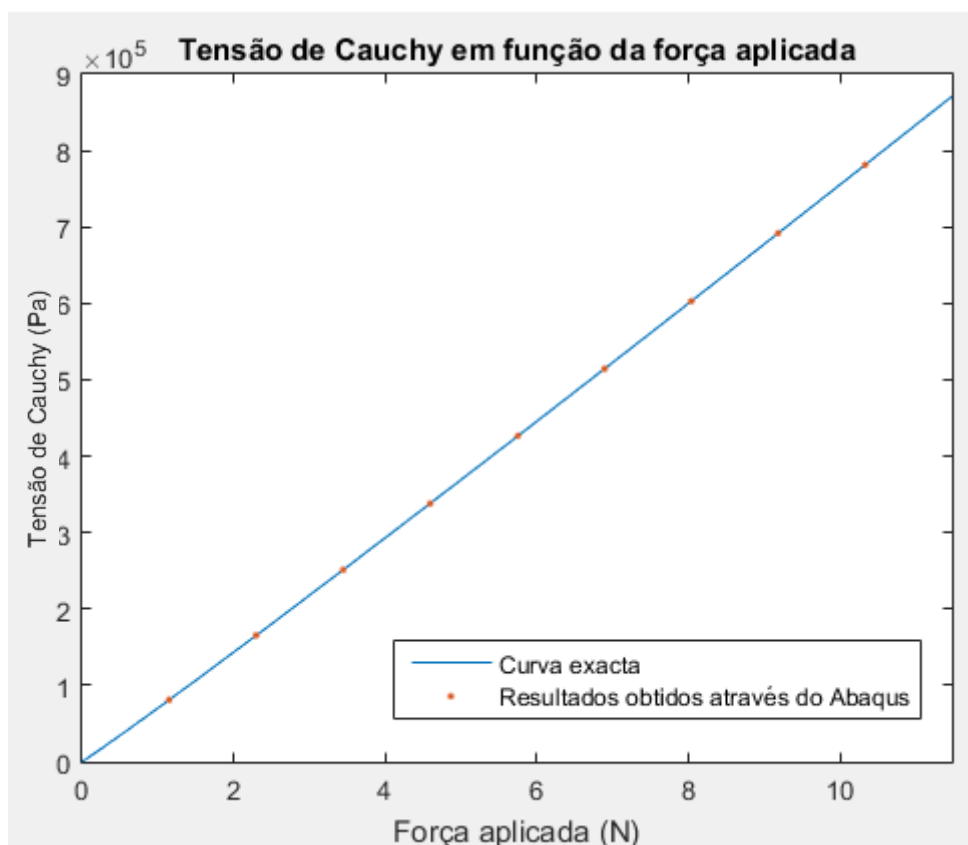


Figura 9. Tensão de Cauchy, em função da força aplicada, do espécimen da Figura 3.

Tabela 5. Erros absolutos e relativos para os valores obtidos pelo Abaqus para a Tensão de Cauchy.

Carga [N]	Tensão de Cauchy teórico $[\times 10^5 \text{ Pa}]$	Tensão de Cauchy simulados $[\times 10^5 \text{ Pa}]$	Erro absoluto	Erro relativo [%]
1,1475	0,8094	0,8094	-5,0015E-01	0,001
2,2950	1,6527	1,6553	-2,5677E+02	0,155
3,4425	2,5113	2,5121	-8,4482E+01	0,034
4,5900	3,3797	3,3798	-6,5738E+00	0,002
5,7375	4,2556	4,2648	-9,1565E+02	0,215
6,8850	5,1375	5,1434	-5,9163E+02	0,115
8,0325	6,0243	6,0273	-3,0395E+02	0,050
9,1800	6,9153	6,9172	-1,9341E+02	0,028
10,3275	7,8100	7,8114	-1,4305E+02	0,018
11,4750	8,7080	8,7090	-1,0404E+02	0,012

Malha com 2 elementos finitos

Acedendo ao ficheiro DAT obtido, retiraram-se para cada incremento de carga os valores necessários para análise. Saliente-se que foram utilizados 10 incrementos de carga, número este suficiente para verificar a não linearidade da resposta.

Tabela 6. Dados retirados do ficheiro DAT, obtidos através de uma simulação no programa Abaqus, utilizando os ficheiros rotinaUMAT.f e 1elemento.inp.

Incremento	Carga aplicada [N]	U1, Deslocamento da extremidade livre [$\times 10^{-3}$ m]	E11, Deformação logarítmica	S11, Tensão de cauchy [$\times 10^5$ Pa]
1	1,1475	1,0441	0,0564	0,8094
2	2,2950	1,4448	0,0772	1,6553
3	3,4425	1,6963	0,0901	2,5121
4	4,5900	1,8808	0,0994	3,3798
5	5,7375	2,0279	0,1068	4,2648
6	6,8850	2,1477	0,1127	5,1434
7	8,0325	2,2499	0,1178	6,0273
8	9,1800	2,3392	0,1222	6,9172
9	10,3275	2,4183	0,1261	7,8114
10	11,4750	2,4894	0,1295	8,7090

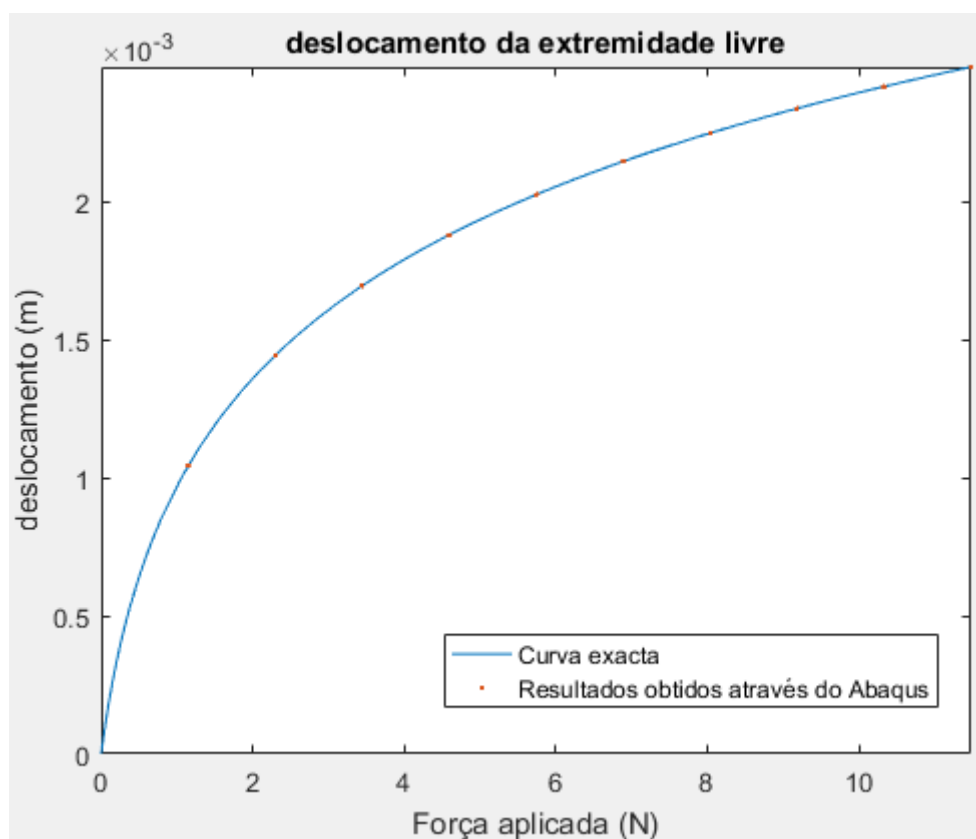


Figura 10. Deslocamento da extremidade livre, em função da força aplicada, do espécimen da Figura 3

Tabela 7. Erros absoluto e relativo para o deslocamento extremidade livre.

Carga [N]	Deslocamento extremidade livre teórico [$\times 10^{-3}$ m]	Deslocamento extremidade livre simulados [$\times 10^{-3}$ m]	Erro absoluto	Erro relativo [%]
1,1475	1,0441	1,0441	1,7613E-08	0,002
2,2950	1,4439	1,4448	-8,9021E-07	0,062
3,4425	1,6961	1,6963	-1,8092E-07	0,011
4,5900	1,8808	1,8808	-1,0222E-08	0,001
5,7375	2,0266	2,0279	-1,3425E-06	0,066
6,8850	2,1470	2,1477	-7,0527E-07	0,033
8,0325	2,2496	2,2499	-2,8480E-07	0,013
9,1800	2,3390	2,3392	-1,8268E-07	0,008
10,3275	2,4182	2,4183	-7,8955E-08	0,003
11,4750	2,4893	2,4894	-8,3316E-08	0,003

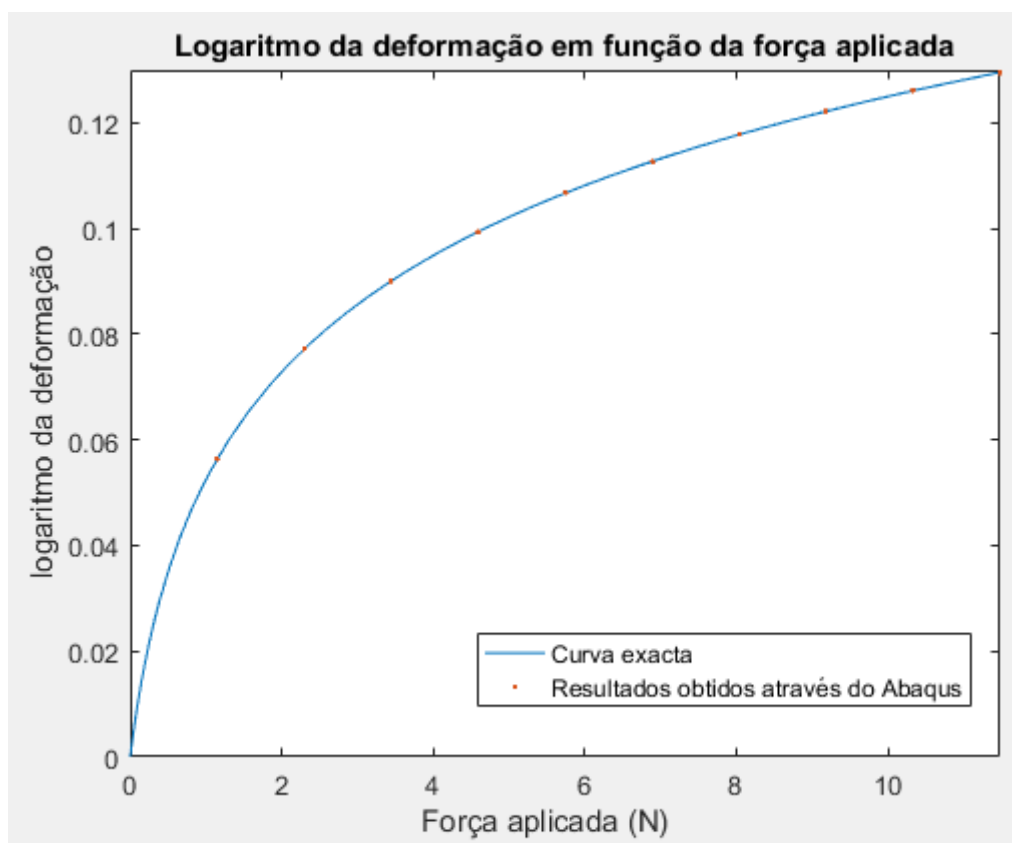


Figura 11. Logaritmo da deformação, em função da força aplicada, do espécimen da Figura 3.

Tabela 8. Erros absoluto e relativo dos valores obtidos pelo Abaqus para a deformação logarítmica.

Carga [N]	Deformação logarítmica teórico	Deformação logarítmica simulados [$\times 10^{-1}$]	Erro absoluto	Erro relativo [%]
1,1475	0,0564	0,5639	-4,9075E-07	0,001
2,2950	0,0772	0,7721	-4,6858E-05	0,061
3,4425	0,0900	0,9006	-1,0143E-05	0,011
4,5900	0,0994	0,9938	-8,3018E-07	0,001
5,7375	0,1067	1,0680	-1,1249E-04	0,105
6,8850	0,1127	1,1270	-1,6625E-05	0,015
8,0325	0,1178	1,1780	-3,5967E-05	0,031
9,1800	0,1222	1,2220	-3,0681E-05	0,025
10,3275	0,1261	1,2610	-4,4067E-05	0,035
11,4750	0,1295	1,2950	3,1855E-05	0,025

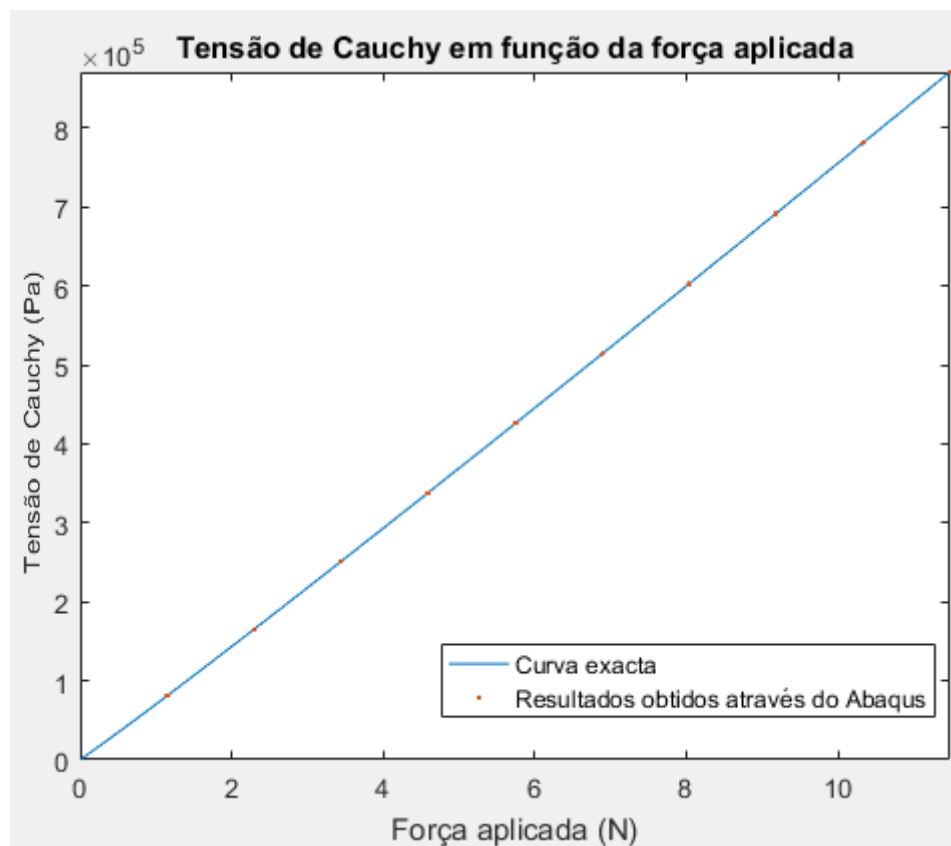


Figura 12. Tensão de Cauchy, em função da força aplicada, do espécimen da Figura 3.

Tabela 9. Erros absolutos e relativos para os valores obtidos pelo Abaqus para a Tensão de Cauchy.

Carga [N]	Tensão de Cauchy teórico [$\times 10^5$ Pa]	Tensão de Cauchy simulados [$\times 10^5$ Pa]	Erro absoluto	Erro relativo [%]
1,1475	0,8937	0,8094	-5,0015E-01	0,001
2,2950	1,6527	1,6553	-2,5677E+02	0,155
3,4425	2,5113	2,5121	-8,4482E+01	0,034
4,5900	3,3797	3,3798	-6,5738E+00	0,002
5,7375	4,2556	4,2648	-9,1565E+02	0,215
6,8850	5,1375	5,1434	-5,9163E+02	0,115
8,0325	6,0243	6,0273	-3,0395E+02	0,050
9,1800	6,9153	6,9172	-1,9341E+02	0,028
10,3275	7,8100	7,8114	-1,4305E+02	0,018
11,4750	8,7080	8,7090	-1,0404E+02	0,012

Observando os valores de erro relativo pode concluir-se que todos estes valores são baixos, sendo que o valor máximo foi obtido para os valores da Tensão de Cauchy, 0,215%. As diferenças obtidas entre os valores teóricos e simulados podem ser justificadas com base em erros de arredondamento, mas estas diferenças são consideradas irrelevantes.

Comparando os resultados obtidos, dos vários parâmetros, para os casos de 1 e 2 elementos finitos pode-se concluir que são bastante semelhantes, sendo a baixa complexidade do problema uma justificação para este facto.

Analisando globalmente os resultados obtidos, é possível confirmar, tal como previsto, que o deslocamento da extremidade livre apresenta uma relação logarítmica em função da carga aplicada, tal também acontece para a deformação logarítmica em função da carga aplicada. No entanto a Tensão de Cauchy parece relacionar-se linearmente com a força aplicada, isto não era previsto uma vez que a partir da equação 9 se pode concluir que esta relação não é linear, sendo por isso a relação linear apresentada pelos dados uma linearidade aparente.

Questão 5

Nesta questão tem-se como objetivo estudar o efeito do tamanho dos incrementos no número de iterações necessárias para obter convergência em cada um dos incrementos.

Foram feitos testes com os seguintes tamanhos de incrementos: 0,01; 0,02; 0,05; 0,1 e 0,2. Para isso, no ficheiro INP (secção Static), foram alterados os parâmetros “Incremento de tempo inicial (proposto)”, “incremento mínimo” e “incremento máximo”. Ao alterar este tamanho de incremento estamos a alterar a percentagem de força aplicada em cada incremento.

Na tabela 10 apenas foram registados os valores do número de iterações até ao 4º incremento pois a partir desse incremento apenas era necessária 1 iteração para obter convergência em todos os casos analisados. Foi consultado o ficheiro STA obtido para retirar estes dados.

Na questão 4 foram utilizados 10 incrementos, neste caso foi testado um caso com 5 incrementos apenas para se poder verificar melhor o efeito do tamanho no número de iterações necessárias para obter convergência.

Tabela 10. Tamanho dos incrementos e respetivo número de iterações necessárias para se atingir a convergência para os testes feitos.

Tamanho do incremento	Número de Incrementos	Número de iterações até convergência			
		1º Incremento	2º Incremento	3º Incremento	4º Incremento
0,01	100	3	2	1	1
0,02	50	3	2	2	1
0,05	20	4	3	2	2
0,1	10	6	3	2	2
0,2	5	9	4	2	2

É possível observar que onde ocorre a maior diferença é no 1º incremento de cada caso, isto pode ser explicado devido ao facto de os valores obtidos para o 1º incremento serem os mais afastados do valor a obter, a solução. Desta forma é então possível observar, de um modo geral, que o número de iterações necessárias para obter convergência dentro de cada incremento diminui com o tamanho do respetivo incremento. Esta relação é mais evidente para os primeiros incrementos como se pode ver na tabela 10.

Questão 6

O objetivo da questão 6 é construir as matrizes de rigidez tangente e os vetores de forças residuais, necessárias para a resolução iterativa do problema no 4º incremento de carga, na solução calculada no software Abaqus para 10 incrementos e no caso com dois elementos finitos, e obter iterativamente a solução para esse incremento. Para tal, recorreremos ao método iterativo de Newton-Raphson. Nesta questão, utilizou-se a solução para 10 incrementos pois a não-linearidade da resposta só é observada com um número de incrementos suficiente, daí não ter sido utilizada a solução de 5 incrementos, menor número da questão anterior.

A matriz de rigidez é dada por:

$$[K^{(e)}] = \int_{-\frac{1}{2}L_0}^{\frac{1}{2}L_0} \frac{1}{L_0^2} \begin{bmatrix} \frac{d\psi_1(\xi)}{d\xi} \\ \frac{d\psi_2(\xi)}{d\xi} \end{bmatrix} \frac{dT}{d\lambda} \begin{bmatrix} \frac{d\psi_1(\xi)}{d\xi} & \frac{d\psi_2(\xi)}{d\xi} \end{bmatrix} A_0 L_0 d\xi$$

que, no caso do problema, como os elementos são lineares, então $\frac{d\psi_1(\xi)}{d\xi} = -1$ e $\frac{d\psi_2(\xi)}{d\xi} = 1$, logo a matriz de rigidez simplifica-se em:

$$[K^{(e)}] = \frac{A_0}{L_0} \frac{dT}{d\lambda} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

O vetor de forças residuais é dado por:

$$\{R^{(e)}\} = \{F_{ext}\} + \{F_{int}\} = (\Lambda + \Delta\Lambda)\{L\} - T A_0 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

sendo $\{L\}$ o carregamento máximo e Λ um parâmetro de carga.

Como neste problema temos dois elementos e três nós, tem de ser feita uma montagem à matriz e vetor apresentados acima. Além disso, como a resolução é do 4º incremento, o carregamento é de $4 \times 0,1 \times F_{máx}$, sendo $F_{máx}$ o valor máximo da carga, 11,475 N. Assim:

$$[K^{(T)}] = \frac{A_0}{L_0} \frac{dT}{d\lambda} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \{R^{(T)}\} = \begin{Bmatrix} R_x \\ 0 \\ 4 \times 0,1 \times F_{máx} \end{Bmatrix} - T A_0 \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Como o nó 1 está constrangido por encastramento, não apresenta deslocamento, e assim podemos simplificar os cálculos retirando a primeira linha e coluna à matriz $[K^T]$ e a primeira linha ao vetor $\{R^T\}$, limitando-se estas a:

$$[K^{(T)}] = \frac{A_0}{L_0} \frac{dT}{d\lambda} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \{R^{(T)}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 4 \times 0,2 \times F_{máx} \end{Bmatrix} - T A_0 \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Para calcular estas matrizes, é necessário obter o valor da tensão nominal T e da sua derivada em ordem à razão de extensão, λ . O valor da tensão e respetiva derivada são dados por:

$$T = \frac{C}{B} (e^{B(\lambda-1)} - 1) \text{ e } \frac{dT}{d\lambda} = BT + C$$

onde $\lambda = \frac{L}{L_0}$ e L_0 é o comprimento de cada elemento, $L_0 = 0,9 \times 10^{-2}$ m.

A constante A_0 corresponde à secção transversal do espécimen e tem valor de $0,15 \times 10^{-2} \text{ m}^2$.

Finalmente, para obter a variação do deslocamento dos nós, Δq , recorre-se à seguinte relação:

$$[K^T]\{\Delta q\} = \{R^T\} \leftrightarrow \{\Delta q\} = [K^T]^{-1}\{R^T\}$$

sendo:

$$\{q_{i+1}\} = \{\Delta q_{i+1}\} + \{q_i\}$$

Como é procurada a solução para o 4º incremento, partiu-se dos valores de deslocamento dos nós 2 e 3, resultados da convergência para o 3º incremento, vetor q_0 , obtidos a partir do ficheiro .DAT calculado pelo software *Abaqus*.

$$\{q_0\} = \begin{Bmatrix} 8,4816 \times 10^{-4} \\ 1,6963 \times 10^{-3} \end{Bmatrix} (m)$$

Em seguida, procederam-se às várias iterações, até que o módulo do valor do segundo elemento do vetor de forças residuais, $\{R^T\}$ convergissem para um valor menor que 10^{-8} .

Os índices apresentados em cada grandeza fazem a correspondência à iteração em que foram calculadas.

Iteração 1

Começou por calcular-se os valores de λ , para os dois elementos, que para o problema em causa são iguais.

$$\lambda_1^{(1)} = \frac{0,009 + 8,4816 \times 10^{-4}}{0,009} = 1,0942$$

$$\lambda_1^{(2)} = \frac{0,009 + 1,6963 \times 10^{-3} - 8,4816 \times 10^{-4}}{0,009} = 1,0942$$

Em seguida, determinou-se o valor da tensão nominal e da sua derivada.

$$T_1 = \frac{567500}{25,89} (e^{25,89(1,0942-1)} - 1) = 229533,708 \text{ Pa}$$

$$\frac{dT_1}{d\lambda_1} = 25,89 \times 229533,708 + 567500 = 6510127,689 \text{ Pa}$$

São calculadas a matriz de rigidez e o vetor de forças residuais,

$$[K_1^{(T)}] = \frac{0,15 \times 10^{-4}}{0,009} \times 6510127,689 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21700,43 & -10850,21 \\ -10850,21 & 10850,21 \end{bmatrix} (Nm^{-1})$$

$$\{R_1^{(T)}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 4,59 \end{Bmatrix} - 229533,708 \times 0,15 \times 10^{-4} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1,1470 \end{Bmatrix} (N)$$

E finalmente é obtida a variação do deslocamento dos nós 2 e 3, e o novo vetor dos deslocamentos q .

$$\{\Delta q_1\} = \begin{bmatrix} 0,0922 \times 10^{-3} & 0,0922 \times 10^{-3} \\ 0,0922 \times 10^{-3} & 0,1843 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1,1470 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,1057 \times 10^{-3} \\ 0,2114 \times 10^{-3} \end{Bmatrix} (m)$$

$$\{q_1\} = \{\Delta q_1\} + \{q_0\} = \begin{Bmatrix} 0,9539 \times 10^{-3} \\ 1,9077 \times 10^{-3} \end{Bmatrix} (m)$$

Iteração 2

$$\lambda_2^1 = \frac{0,009 + 0,9539 \times 10^{-3}}{0,009} = 1,1060$$

$$\lambda_2^2 = \frac{0,009 + 1,9077 \times 10^{-3} - 0,9539 \times 10^{-3}}{0,009} = 1,1060$$

$$T_2 = \frac{567500}{25,89} (e^{25,89(1,1060-1)} - 1) = 318900,471 Pa$$

$$\frac{dT_2}{d\lambda_2} = 25,89 \times 318900,471 + 567500 = 8823833,204 Pa$$

$$[K_2^{(T)}] = \frac{0,15 \times 10^{-4}}{0,009} \times 8823833,204 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29412,78 & -14706,39 \\ -14706,39 & 14706,39 \end{bmatrix} (Nm^{-1})$$

$$\{R_2^{(T)}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 4,59 \end{Bmatrix} - 318900,471 \times 0,15 \times 10^{-4} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0,1935 \end{Bmatrix} (N)$$

$$\{\Delta q_2\} = \begin{bmatrix} 0,0680 \times 10^{-3} & 0,0680 \times 10^{-3} \\ 0,0680 \times 10^{-3} & 0,1360 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,1935 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,1316 \times 10^{-4} \\ -0,2632 \times 10^{-4} \end{Bmatrix} (m)$$

$$\{q_2\} = \{\Delta q_2\} + \{q_1\} = \begin{Bmatrix} 0,9407 \times 10^{-3} \\ 1,8814 \times 10^{-3} \end{Bmatrix} (m)$$

Iteração 3

$$\lambda_3^1 = \frac{0,009 + 0,9407 \times 10^{-3}}{0,009} = 1,1045$$

$$\lambda_3^2 = \frac{0,009 + 1,8814 \times 10^{-3} - 0,9407 \times 10^{-3}}{0,009} = 1,1045$$

$$T_3 = \frac{567500}{25,89} (e^{25,89(1,1045-1)} - 1) = 306241,098 Pa$$

$$\frac{dT_3}{d\lambda_3} = 25,89 \times 306241,098 + 567500 = 8496082,028 Pa$$

$$[K_3^{(T)}] = \frac{0,15 \times 10^{-4}}{0,009} \times 8496082,028 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28320,27 & -14160,14 \\ -14160,14 & 14160,14 \end{bmatrix} (Nm^{-1})$$

$$\{R_3^{(T)}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 4,59 \end{Bmatrix} - 306241,098 \times 0,15 \times 10^{-4} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0,3616 \times 10^{-2} \end{Bmatrix} (N)$$

$$\{\Delta q_3\} = \begin{bmatrix} 0,0706 \times 10^{-3} & 0,0706 \times 10^{-3} \\ 0,0706 \times 10^{-3} & 0,1412 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,3616 \times 10^{-2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,2554 \times 10^{-6} \\ -0,5108 \times 10^{-6} \end{Bmatrix} (m)$$

$$\{q_3\} = \{\Delta q_3\} + \{q_2\} = \begin{Bmatrix} 0,9405 \times 10^{-3} \\ 1,8809 \times 10^{-3} \end{Bmatrix} (m)$$

Iteração 4

$$\lambda_4^1 = \frac{0,009 + 0,9405 \times 10^{-3}}{0,009} = 1,1045$$

$$\lambda_4^2 = \frac{0,009 + 1,8809 \times 10^{-3} - 0,9405 \times 10^{-3}}{0,009} = 1,1045$$

$$T_4 = \frac{567500}{25,89} (e^{25,89(1,1045-1)} - 1) = 306000,089 \text{ Pa}$$

$$\frac{dT}{d\lambda} = 25,89 \times 306000,089 + 567500 = 8489842,292 \text{ Pa}$$

$$[K_4^{(T)}] = \frac{0,15 \times 10^{-4}}{0,009} \times 8489842,292 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28299,47 & -14149,73 \\ -14149,73 & 14149,73 \end{bmatrix} (Nm^{-1})$$

$$\{R_4^{(T)}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 4,59 \end{Bmatrix} - 306000,089 \times 0,15 \times 10^{-4} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0,1328 \times 10^{-5} \end{Bmatrix} (N)$$

$$\{\Delta q_4\} = \begin{bmatrix} 0,0707 \times 10^{-3} & 0,0707 \times 10^{-3} \\ 0,0707 \times 10^{-3} & 0,1413 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,1328 \times 10^{-5} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,0939 \times 10^{-9} \\ -0,1877 \times 10^{-9} \end{Bmatrix} (m)$$

$$\{q_4\} = \{\Delta q_4\} + \{q_3\} = \begin{Bmatrix} 0,9405 \times 10^{-3} \\ 1,8809 \times 10^{-3} \end{Bmatrix} (m)$$

Iteração 5

$$\lambda_5^1 = \frac{0,009 + 0,9405 \times 10^{-3}}{0,009} = 1,1045$$

$$\lambda_5^2 = \frac{0,009 + 1,8809 \times 10^{-3} - 0,9405 \times 10^{-3}}{0,009} = 1,1045$$

$$T_5 = \frac{567500}{25,89} (e^{25,89(1,1045-1)} - 1) = 306000,000 \text{ Pa}$$

$$\frac{dT}{d\lambda} = 25,89 \times 306000,000 + 567500 = 8489840,000 \text{ Pa}$$

$$[K_5^{(T)}] = \frac{0,15 \times 10^{-4}}{0,009} \times 8489840,000 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28299,47 & -14149,73 \\ -14149,73 & 14149,73 \end{bmatrix} (Nm^{-1})$$

$$\{R_5^{(T)}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 4,59 \end{Bmatrix} - 306000,000 \times 0,15 \times 10^{-4} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0,1643 \times 10^{-12} \end{Bmatrix} (N)$$

$$\{\Delta q_5\} = \begin{bmatrix} 0,0707 \times 10^{-3} & 0,0707 \times 10^{-3} \\ 0,0707 \times 10^{-3} & 0,1413 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,1643 \times 10^{-12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,1161 \times 10^{-16} \\ -0,2322 \times 10^{-16} \end{Bmatrix} (m)$$

$$\{q_5\} = \{\Delta q_5\} + \{q_4\} = \begin{Bmatrix} 0,9405 \times 10^{-3} \\ 1,8809 \times 10^{-3} \end{Bmatrix} (m)$$

Como nesta iteração, o módulo do valor do segundo elemento do vetor das forças residuais, $\{R_5^{(T)}\}$, é inferior a 10^{-8} , considera-se que há convergência e obtém-se assim a solução para o

4º incremento de carga do valor do deslocamento dos nós, $\{q_5\} = \begin{Bmatrix} 0,9405 \times 10^{-3} \\ 1,8809 \times 10^{-3} \end{Bmatrix} (m)$.

Em seguida apresenta-se os gráficos da evolução do deslocamento de extremidade livre, segundo elemento do vetor q , assim como do vetor de forças residuais, $\{R^{(e)}\}$ utilizado para verificar a convergência.

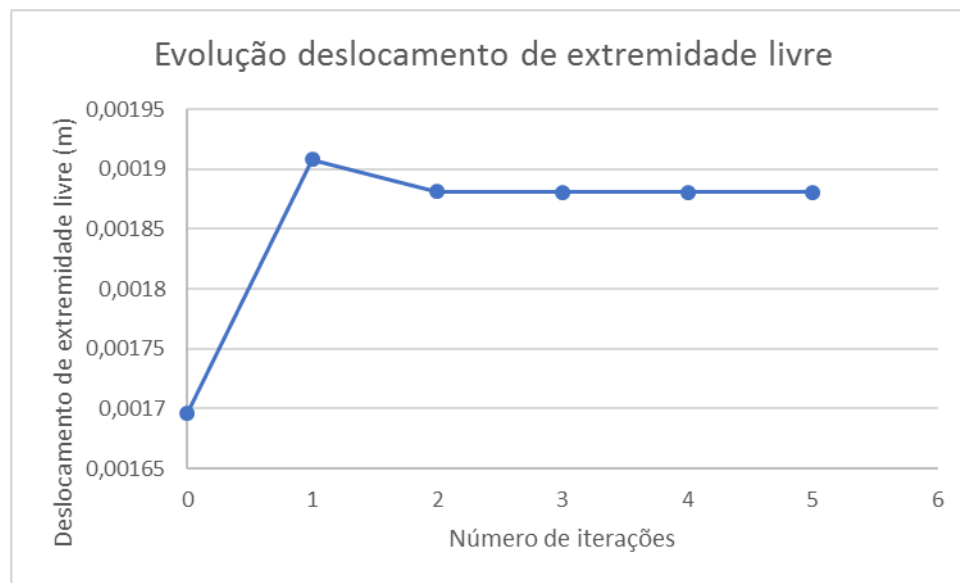


Figura 13- Evolução deslocamento de extremidade livre em função do número de iterações necessárias para convergência da solução do quarto incremento.

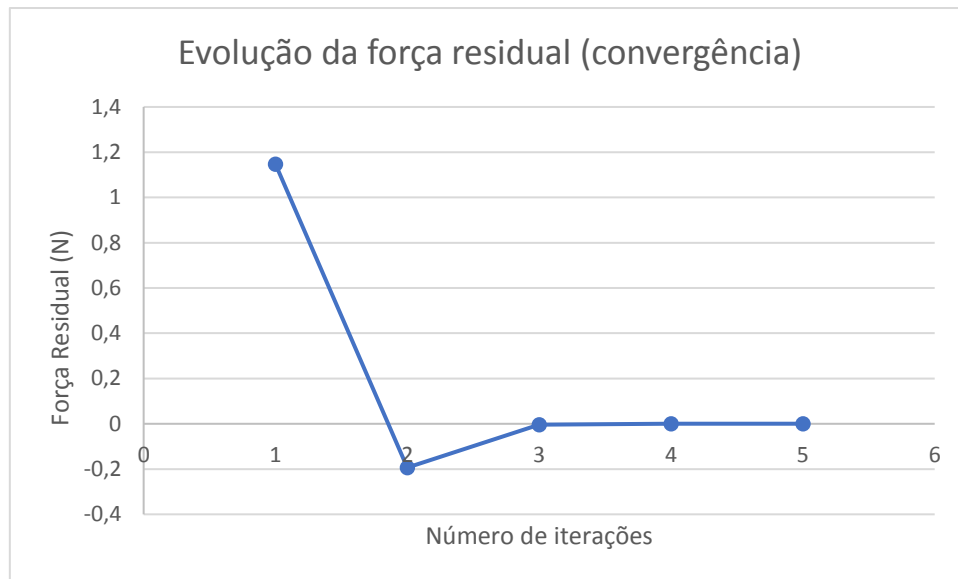


Figura 14 -Evolução da força residual, utilizada como critério de convergência.

Para se poder comparar o método utilizado com o do software *Abaqus*, foram utilizadas três grandezas, o deslocamento de extremidade livre, obtida diretamente pelas iterações, a Tensão de Cauchy e a deformação logarítmica, calculadas a partir do valor de λ obtido nas iterações utilizando a equação 9 e 6, respetivamente. O logaritmo da deformação é, então, dado por:

$$\ln(\lambda) = \ln(1,1045) = 0,09939$$

e a tensão de Cauchy, é dada por:

$$\Sigma(\lambda) = \frac{4,59 \cdot 1,1045}{0,15^{-4}} = 3,3798 \times 10^5 \text{ Pa}$$

Tabela 11 - Comparação dos resultados obtidos a partir do método de Newton-Raphson com os obtidos pelo Abaqus (ficheiro DAT, 4º elemento)

	Método de Newton-Raphson	Abaqus
Deslocamento da extremidade livre (m)	$1,8809 \times 10^{-3}$	$1,8808 \times 10^{-3}$
Tensão de Cauchy (Pa)	$3,3798 \times 10^5$	$3,3798 \times 10^5$
Deformação logarítmica	0,09939	$9,9383 \times 10^{-2}$

É possível observar que os valores obtidos pelo método de Newton-Raphson e pelo Abaqus são muito semelhantes.

A partir deste método observou-se que foi necessário efectuar 5 iterações para obter convergência no incremento considerado. A condição de convergência utilizada foi o módulo do vector das forças residuais $\{R^T\}$ ser inferior a 10^{-8} .

O Abaqus para este incremento apenas efectuou 2 iterações com valores para Forças residuais de $-2,709 \times 10^{-2}$ e $-7,408 \times 10^{-5}$ respetivamente; estes valores têm a mesma ordem de grandeza das iterações 3 e 4 do método de Newton-Raphson. Consultou-se o ficheiro MSG para retirar estes valores, foi possível consultar que o critério de convergência utilizado pelo Abaqus foi o mesmo utilizado nesta pergunta: "CRITERION FOR RESIDUAL FORCE FOR A LINEAR INCREMENT 1.000E-08".

Pode-se observar que a solução do Abaqus converge muito mais rapidamente, nomeadamente converge em duas iterações ao invés de convergir em 5. Isto pode ser explicado pelo facto de o programa Abaqus atualizar em cada *step* o sistema de equações, utilizado sendo diminuído o número de aproximações necessárias.

Anexos

Anexo 1. Dados experimentais obtidos num ensaio de tração uniaxial (dados fornecidos pelo professor para o grupo 6)

LAMBDA	TENSÃO NOMINAL (MPa)
1,136509065	0,765
1,130465695	0,59725
1,124422325	0,49675
1,118734447	0,43625
1,112691077	0,396
1,106647707	0,32875
1,100959829	0,282
1,094916459	0,2416
1,088873089	0,20135
1,083185212	0,1745
1,077141841	0,14095
1,071098471	0,1208
1,065410594	0,100675
1,059367224	0,080525
1,053323854	0,067125
1,047635976	0,0537
1,041592606	0,040275
1,035549236	0,02685
1,029861358	0,0201325
1,023817988	0,0201325
1,017774618	0,0134225
1,01208674	0,00671
1,00604337	0,00671
1	0,00671

Anexo 2. Script de MATLAB para encontrar os parâmetros da lei exponencial hiperelástica de Fung, a partir dos dados do anexo 1.

```
%Importar dados do EXCEL
dados=xlsread('Dados.xls','M6:N29');

lambda=dados(:,1);
tensao_nominal=dados(:,2)*10^6; %em Pa

%Lei de Fung
FUNG= fitttype( 'C/B*(exp(B*(x-1))-1)' );

%Encontrar parâmetros B e C
```

```

[FO,goodness_of_fit,output]= fit(lambda, tensao_nominal, FUNG)

figure;
plot (FO);
hold on;
scatter(lambda,tensao_nominal);
title ('Lei de Fung - representação T(lambda)'),
xlabel('Alongamento (unidades arbitrárias)');
ylabel('Tensão Nominal (unidades arbitrárias)');

figure;
scatter(lambda,output.residuals);
title ('Resíduos');
xlabel ('Alongamento (unidades arbitrárias)');
ylabel ('Resíduos da Tensão Nominal');

```

Anexo 3. Rotina Fortran UMAT

```

      SUBROUTINE UMAT(STRESS,STATEV,DDSDDE,SSE,SPD,SCD,RPL,DDSDDT,
1  DRPLDE,DRPLDT,STRAN,DSTRAN,TIME,DTIME,TEMP,DTEMP,PREDEF,DPRED,
2  CMNAME,NDI,NSHR,NTENS,NSTATV,PROPS,NPROPS,COORDS,DROT,PNEWDT,
3  CELENT,DFGRAD0,DFGRAD1,NOEL,NPT,LAYER,KSPT,KSTEP,KINC)
C
C  *****
C  *    1D Non-Linear Elastic model                                *
C  *****
C  *    List of variables                                          *
C  *                                                                *
C  *    STRESS()          - Cauchy stress                          *
C  *    STRAN()           - Logarithmic Strain at beginning of increment *
C  *                      = Log (stretch)                          *
C  *    DSTRAN()          - Logarithmic Strain increment           *
C  *    PROPS()           - Material constants                     *
C  *    NPROPS            - Number of material constants           *
C  *    DTIME             - Time increment                         *
C  *    E                 - Elastic response constant              *
C  *    ALAM2             - Stretch at the end of the increment    *
C  *    T                 - Nominal stress                         *
C  *    DTDlam            - Jacobian of constitut. model in Lagrangean form *
C  *                      = d(T)/d(stretch)                        *
C  *    DDSDDDE()         - Jacobian of constitut. model in current config. *
C  *                      = d(Cauchy stress) / d(log stretch)     *
C  *****
C
C      INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
C      CHARACTER*80 CMNAME
C      DIMENSION STRESS(NTENS),STATEV(NSTATV),
1  DDSDDE(NTENS,NTENS),DDSDDT(NTENS),DRPLDE(NTENS),
2  STRAN(NTENS),DSTRAN(NTENS),TIME(2),PREDEF(1),DPRED(1),
3  PROPS(NPROPS),COORDS(3),DROT(3,3),DFGRD0(3,3),DFGRD1(3,3)
C
C      Input of material properties
C
C          B = props(1)
C          C = props(2)
C
C      Stretch ratio at end of increment
C

```



```

        ALAM2=DEXP (STRAN (1) +DSTRAN (1) )
C
C      Nominal Stress at end of increment
C
        T = C/B * (DEXP (B* (ALAM2-1.)) - 1.)
C
C      *****
C      * Resultado requerido pelo ABAQUS: *
C      * Cauchy stress at end of increment *
C      * *
        STRESS (1)= T*ALAM2
C      * *
C      *****
C
C      Jacobian of the model in Lagrangean form
C
        DTDlam = C * DEXP (B* (ALAM2-1.))
C
C      *****
C      * Resultado requerido pelo ABAQUS: *
C      * Jacobian of the constitutive model in current configuration *
C      * *
        DDSdde (1,1) =ALAM2* (T+ALAM2*DTDlam)
C      * *
C      *****
C
        RETURN
        END

```

Anexo 4. Ficheiro INP para 1 elemento finito

```

*HEADING
1D-Non-Linear Elastic
*PREPRINT,ECHO=YES,HISTORY=NO,MODEL=NO
*NODE , NSET=NOS
**Numero do No,x1,x2
1,0.,0.
2,0.018,0.
*ELEMENT,TYPE=T2D2,ELSET=VIGA
**Numero do Elemento,numero global do no 1 do elemento,numero global do no 2 do elemento
1,1,2
*SOLID SECTION,MAT=USER,ELSET=VIGA
**Area da Seccao transversal de referencia
0.000015
*MATERIAL,NAME=USER
*USER MATERIAL,CONSTANTS=2
**CONSTANTS=Numero de constantes materiais
**valores das constantes materiais, separados por virgulas (se forem mais do que um)
25.8929,765000.0
**
*BOUNDARY
**Numero do no,todos os deslocamentos impedidos
1,ENCASTRE
*STEP,NLGEOM,INC=1000
**INC=Numero de incrementos
**
*STATIC

```

```

**Incremento de tempo inicial (proposto),incremento total do STEP,incremento minimo,incremento maximo
.1,1,.,1,1
*CLOAD
**Cargas concentradas em nos
**No,Direccao,valor da carga
2,1,11.4750
**
*OUTPUT, HISTORY, OP=ADD
*ELEMENT OUTPUT, ELSET=VIGA
S11,
*ELEMENT OUTPUT, ELSET=VIGA
E11,
**
*OUTPUT,HISTORY, OP=ADD
*NODE OUTPUT, NSET=NOS
U1,
*NODE OUTPUT, NSET=NOS
RF,
**
*EL PRINT,SUMMARY=YES
S
E
*NODE PRINT,SUMMARY=YES
U
RF
*END STEP

```

Anexo 5. Ficheiro INP para 2 elementos finitos

```

*HEADING
1D-Non-Linear Elastic
*PREPRINT,ECHO=YES,HISTORY=NO,MODEL=NO
*NODE , NSET=NOS
**Numero do No,x1,x2,x3
1,0.,0.
2,0.009,0.
3,0.018,0.
*ELEMENT,TYPE=T2D2,ELSET=VIGA
**Numero do Elemento,numero global do no 1 do elemento,numero global do no 2 do elemento
1,1,2
2,2,3
*SOLID SECTION,MAT=USER,ELSET=VIGA
**Area da Seccao transversal de referencia
0.000015
*MATERIAL,NAME=USER
*USER MATERIAL,CONSTANTS=2
**CONSTANTS=Numero de constantes materiais
**valores das constantes materiais, separados por virgulas (se forem mais do que um)
25.8929,765000.0
**
*BOUNDARY
**Numero do no,todos os deslocamentos impedidos
1,ENCASTRE
*STEP,NLGEOM,INC=1000
**INC=Mumero de incrementos
**
*STATIC

```

```

**Incremento de tempo inicial (proposto),incremento total do STEP,incremento minimo,incremento maximo
.1,1,,.1,.1
*CLOAD
**Cargas concentradas em nos
**No,Direccao,valor da carga
3,1,11.4750
**
*OUTPUT, HISTORY, OP=ADD
*ELEMENT OUTPUT, ELSET=VIGA
S11,
*ELEMENT OUTPUT, ELSET=VIGA
E11,
**
*OUTPUT,HISTORY, OP=ADD
*NODE OUTPUT, NSET=NOS
U1,
*NODE OUTPUT, NSET=NOS
RF,
**
*EL PRINT,SUMMARY=YES
S
E
*NODE PRINT,SUMMARY=YES
U
RF
*END STEP

```