Algorytmy równoległe 2015 (zad. 1)

Michał Liszcz

2015-10-09

Contents

1 Wstęp

Zaproponować algorytm równoległy wyliczający kolejne położenia drgającej membrany rozpiętej na kwadracie o ustalonym boku. Boki membrany są sztywno zamocowane (warunki brzegowe). Należy ustalić położenie początkowe i prędkość $\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_{t=0}$ (warunki początkowe).

Zastosować metodę różnicową do równania:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \tag{1}$$

gdzie $p(x, y)$ - położenie punktu membrany, ρ - gęstość powierzchniowa, T - napięcie membrany.

2 Analiza problemu

Równanie (1) to klasyczne równanie falowe. Podstawiając $\frac{\rho}{T} \coloneqq \left(c^2\right)^{-1}$, można zapisać je w standardowej postaci:

$$\left[\partial_{tt} - c^2\nabla^2\right] p(t, x, y) = 0 \tag{2}$$

Rozwiązania poszukujemy w obszarze Ω:

$$\begin{aligned} \Omega &= [t_{\min}, t_{\max}] \times [x_{\min}, x_{\max}] \times [y_{\min}, y_{\max}] \\ W &= [x_{\min}, x_{\max}] \times [y_{\min}, y_{\max}] \end{aligned} \tag{3}$$

Zadane są następujące warunki brzegowe:

$$p(t,x,y) = 0 \qquad \forall t \in [t_{\min}, t_{\max}], \forall (x,y) \in \partial W \tag{4}$$

Oraz warunki początkowe (membrana jest w pozycji $P(x,y)$ i porusza się z prędkością $S(x,y)$):

$$\left.\begin{aligned} p(0,x,y) &= P(x,y) \\ p_t(0,x,y) &= S(x,y) \end{aligned}\right\} \qquad \forall (x,y) \in W \tag{5}$$

3 Metoda różnic skończonych

Poszukujemy rozwiązania numerycznego metodą różnic skończonych.

3.1 Dyskretyzacja dziedziny

W obszarze Ω wprowadzamy siatkę dyskretnych punktów:

$$\left.\begin{aligned} \Delta t &= \frac{t_{\max} - t_{\min}}{K} \\ \Delta x &= \frac{x_{\max} - x_{\min}}{N} \\ \Delta y &= \frac{y_{\max} - y_{\min}}{M} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned} t_k &= x_{\min} + k\Delta t, & k &= 0,1,...,K \\ x_n &= x_{\min} + n\Delta x, & n &= 0,1,...,N \\ y_m &= y_{\min} + m\Delta y, & m &= 0,1,...,M \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Oznaczamy wartość p w punktach siatki:

$$p(t_k, x_n, y_m) = p^k_{n,m} \tag{8}$$

3.2 Dyskretyzacja równania

TODO: dopisac wyprowadzenia

$$\begin{aligned} \partial_{tt} p(t_k, x_n, y_m) &\approx \frac{p^{k-1}_{n,m} - 2p^k_{n,m} + p^{k+1}_{n,m}}{(\Delta t)^2} & &:= D_{tt} p^k_{n,m} \\ \partial_{xx} p(t_k, x_n, y_m) &\approx \frac{p^k_{n-1,m} - 2p^k_{n,m} + p^k_{n+1,m}}{(\Delta x)^2} & &:= D_{xx} p^k_{n,m} \\ \partial_{yy} p(t_k, x_n, y_m) &\approx \frac{p^k_{n,m-1} - 2p^k_{n,m} + p^k_{n,m+1}}{(\Delta y)^2} & &:= D_{yy} p^k_{n,m} \\ \partial_t p(t_k, x_n, y_m) &\approx \frac{p^{k-1}_{n,m} - p^{k+1}_{n,m}}{2\Delta t} & &:= D_t p^k_{n,m} \end{aligned} \tag{9}$$

Równanie (1) przyjmuje postać równania różnicowego:

$$\frac{p^{k-1}_{n,m} - 2p^k_{n,m} + p^{k+1}_{n,m}}{(\Delta t)^2} = c^2 \left(\frac{p^k_{n-1,m} - 2p^k_{n,m} + p^k_{n+1,m}}{(\Delta x)^2} + \frac{p^k_{n,m-1} - 2p^k_{n,m} + p^k_{n,m+1}}{(\Delta y)^2} \right) \tag{10}$$

Poszukujemy wartośći p w chwili $k+1$, zakładając że znane jest całe rozwiązanie w chwilach poprzednich:

$$p^{k+1}_{n,m} = 2p^k_{n,m} - p^{k-1}_{n,m} + (\Delta t)^2 c^2 (D_{xx} + D_{yy}) p^k_{n,m} \tag{11}$$

3.3 Warunki brzegowe

Równanie (4) prowadzi do następujących warunków brzegowych:

$$p^k_{0,m} = p^k_{N,m} = p^k_{n,0} = p^k_{n,M} = 0 \qquad \forall k, n, m \tag{12}$$

Warunki początkowe (5) są zadane przez odwzorowania P i S:

$$\begin{aligned} p^0_{n,m} &= P_{n,m} \\ D_t p^0_{n,m} &= S_{n.m} \end{aligned} \tag{13}$$

Drugie z powyższych równań rozpisujemy korzystając z definicji operatora D_t, kładziemy $k = 0$ w (11), a następnie eliminujemy ujemny czas, łącząc ze sobą te dwa równania:

$$\begin{aligned} p^{-1}_{n,m} - p^1_{n,m} &= 2\Delta t S_{n,m} \\ p^1_{n,m} &= 2p^0_{n,m} - p^{-1}_{n,m} + (\Delta t)^2 c^2 (D_{xx} + D_{yy}) p^0_{n,m} \\ p^1_{n,m} &= p^0_{n,m} - \Delta t S_{n,m} + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 c^2 (D_{xx} + D_{yy}) p^0_{n,m} \end{aligned} \tag{14}$$

4 Algorytm sekwencyjny

References

[1] Hans Petter Langtangen, *Finite difference methods for wave motion*, http://hplgit.github.io/INF5620/doc/pub/main_wave.pdf, p.56, 2013.

http://w3.pppl.gov/m3d/1dwave/ln_fdtd_1d.pdf

membrana http://www.uio.no/studier/emner/matnat/ifi/INF2340/v05/foiler/sim04.pdf