PRÁCTICA 9: Distribuciones estadísticas continuas.

DESARROLLO DE LA PRÁCTICA

En esta práctica aprenderemos a trabajar con las principales distribuciones continuas mediante el software estadístico R. Si en RStudio, en la pestaña de ayuda (Help) escribimos "**Distributions**". Podemos ver las distribuciones usuales con que trabaja el software R, tanto discretas como continuas. Si disponemos de una distribución continua xxx, entonces podemos calcular:

- **a) dxxx** (density functions) la función de densidad de la variable xxxx
- **b) pxxx** (probability distribution functions) la función de distribución de la variable xxxx
- **c) qxxx** (quantile functions) los cuantiles de la distribución de la variable xxxx
- **d) rxxx** (random number generation) la generación de valores aleatorios de la variable xxxx

solo nos resta observar el nombre xxx que R asigna a cada distribución en particular.

EJEMPLO 1: DISTRIBUCIÓN UNIFORME $X \sim U(a,b)$

Si la variable aleatoria X tiene una distribución uniforme $X \sim U(a,b)$ entonces su función de densidad viene dada por

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a \le x \le b$$

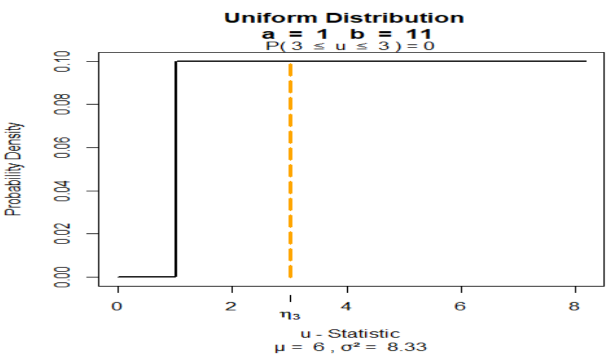
con los siguientes valores de media y varianza, $E(X) = \frac{a+b}{2}$ y $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$; y su nombre en R es **"unif"**.

Por ejemplo, tomando una variable Uniforme en el intervalo [1,11] tenemos:

a) dunif(3, min=1,max=11) **# valor de la función de densidad en 3**

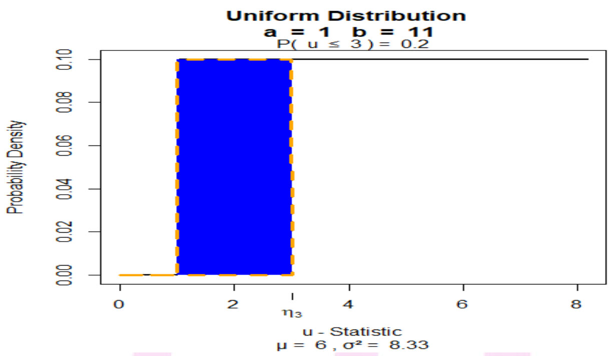
Para una distribución Uniforme en el intervalo [1,11] evalúa la función de densidad en x=3

$$f(3) = \frac{1}{10} = 0.1$$



b) punif(3, min=1, max=11) **# función de distribución en 3#**

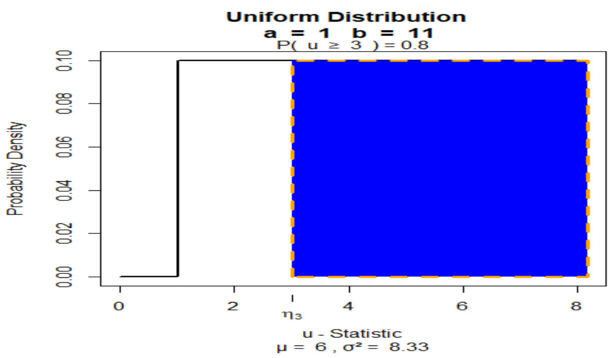
$$F(3) = P(X \leq 3) = \int_{1}^{3} f(x)dx = 0.2$$



CUIDADO CON LA GRAFICA

b1) punif(3, min=1,max=11, lower.tail=FALSE)) **# 1 - función de distribución en 3**

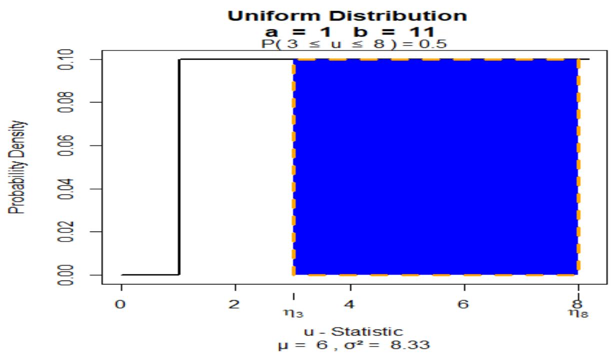
$$1 - F(3) = 1 - P(X \leq 3) = \int_{3}^{11} f(x)dx = 0.8$$



CUIDADO CON LA GRAFICA

b2) punif(8, min=1,max=11)-punif(3, min=1,max=11) **#combinando dos expresiones**

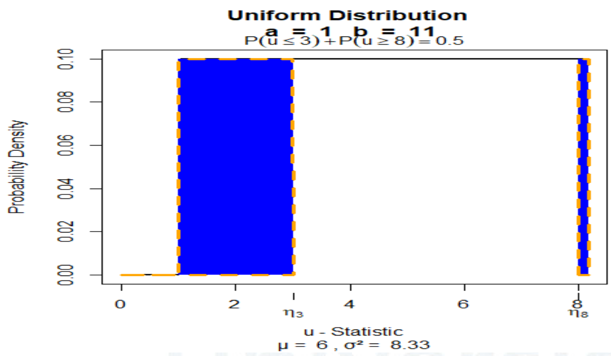
$$P(3 < X \leq 8) = \int_{3}^{8} f(x)dx = 0.5$$



CUIDADO CON LA GRAFICA

b3) 1-(punif(8, min=1,max=11)-punif(3, min=1,max=11)) **#combinando expresiones**

$$1 - P(3 < X \leq 8) = \int_{1}^{3} f(x)dx + \int_{8}^{11} f(x)dx = 0.5$$



CUIDADO CON LA GRAFICA

c) qunif(0.65, min=1,max=11) **# cuantil 0.65 de la uniforme indicada**

7.5

c1) qunif(0.65, min=1,max=11, lower.tail=FALSE) **# cuantil 0.35 de la uniforme indicada**

4.5

EJEMPLO 2: DISTRIBUCIÓN NORMAL $X \sim N(\mu,\sigma)$

Si la variable aleatoria X tiene una distribución normal $X \sim N(\mu,\sigma)$ entonces su función de densidad viene dada por

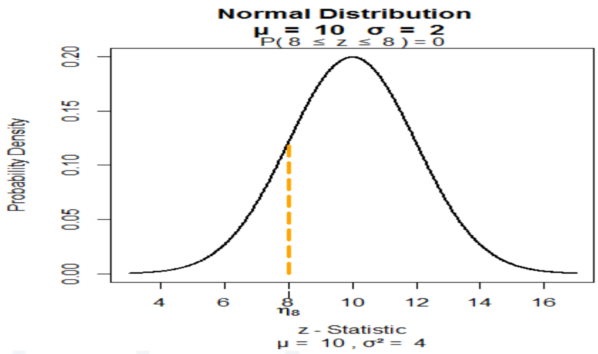
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

con los siguientes valores de media y varianza, $E(X) = \mu$ y $V(X) = \sigma^2$; y su nombre en R es **"norm".**
Por ejemplo, tomando una variable Normal de parámetros $N(10,2)$ tenemos:

a) dnorm(8, mean=10, sd=2) **# valor de la función de densidad en x=8**

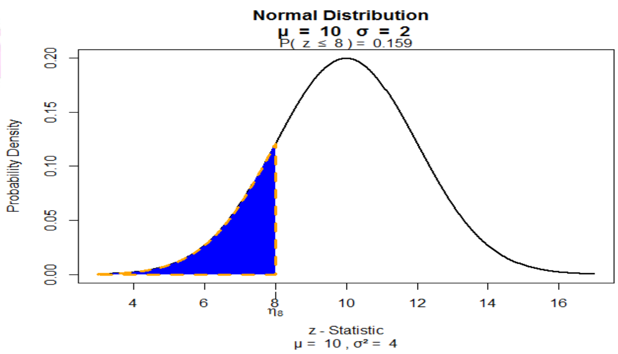
Para una distribución Normal de parámetros $N(10,2)$ evalúa la función de densidad en x=8

$$f(8) = \frac{1}{\sqrt{8}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{8-10}{2}\right)^2} = 0.1209854$$



b) pnorm(8, mean=10, sd=2) **# función de distribución en 8**

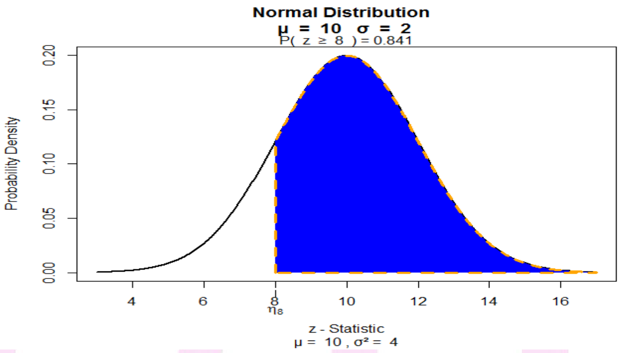
$$F(8) = P(X \le 8) = \int_{-\infty}^{8} f(x)dx = 0.1586553$$



---

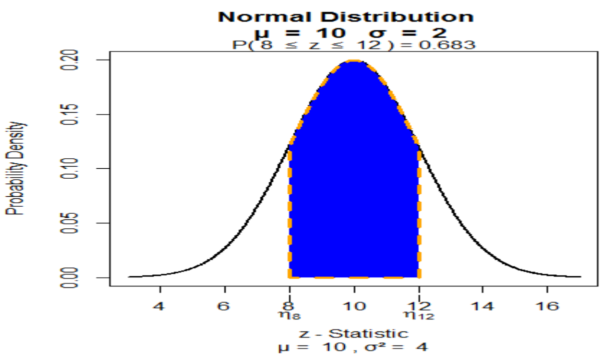
b1) pnorm(8, mean=10, sd=2, lower.tail=FALSE) # 1 - función de distribución en 8

$$1 - F(8) = 1 - P(X \le 8) = \int_{8}^{\infty} f(x)dx = 0.8413447$$



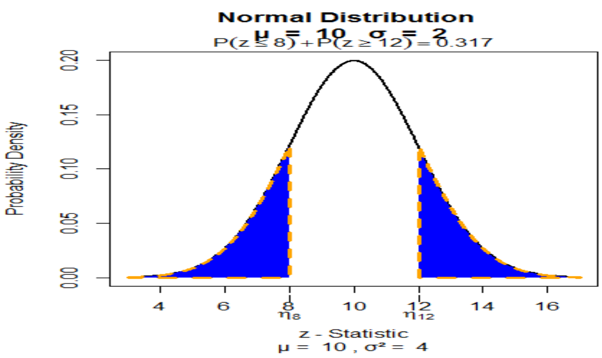
b2) pnorm(12, mean=10, sd=2)-pnorm(8, mean=10, sd=2) #combinando dos expresiones

$$P(8 < X \le 12) = \int_{8}^{12} f(x)dx = 0.6826895$$



b3) 1-(pnorm(12, mean=10, sd=2)-pnorm(8, mean=10, sd= 2)) #combinando expresiones

$$1 - P(8 < X \le 12) = \int_{-\infty}^{8} f(x)dx + \int_{12}^{\infty} f(x)dx = 0.3173105$$



c) qnorm(0.65, mean=10, sd=2) **# cuantil 0.65 de la normal indicada**

10.77064

c1) qnorm(0.65, mean=10, sd= 2, lower.tail=FALSE) **# cuantil 0.35 de la normal indicada**

9.229359

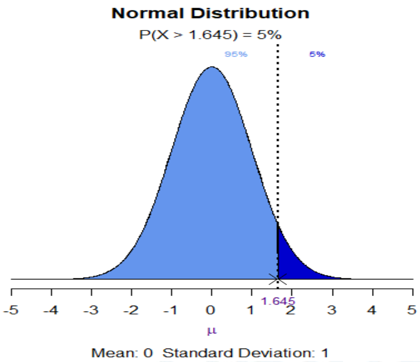
De lo que hemos tratado para la distribución Normal, tiene especial interés la obtención de los **puntos críticos** $P(Z \geq z_\alpha) = \alpha$ cuando se tiene una $Z \sim N(0,1)$. Debemos determinar el valor de z_α para un valor dado de α , muy pequeño o para la expresión bilateral $P(|Z| \geq z_{\alpha/2}) = \alpha$. Para el caso de $\alpha = 0.05$, tenemos

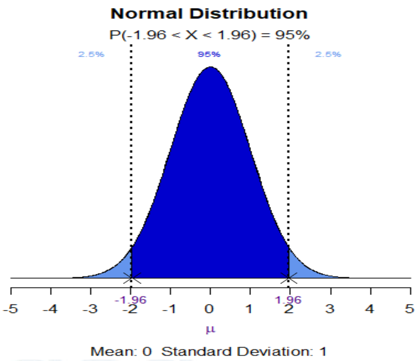
qnorm(0.95, mean=0, sd=1)

$P(Z \geq z_{0.05} = 1.645) = 0.05 \Rightarrow z_{0.05} = 1.645$

qnorm(0.975, mean=0, sd=1)

$P(Z \geq z_{0.025} = 1.96) = 0.025 \Leftrightarrow P(|Z| \geq z_{0.025} = 1.96) = 0.05 \Leftrightarrow P(|Z| \leq z_{0.025} = 1.96) = 0.95 \Rightarrow z_{0.025} = 1.96$





EJEMPLO 3: DISTRIBUCIÓN CHI-CUADRADO $X \sim \chi^2_n$

Si la variable aleatoria X tiene una distribución Chi cuadrado χ^2_n con n grados de libertad, entonces su función de densidad viene dada por

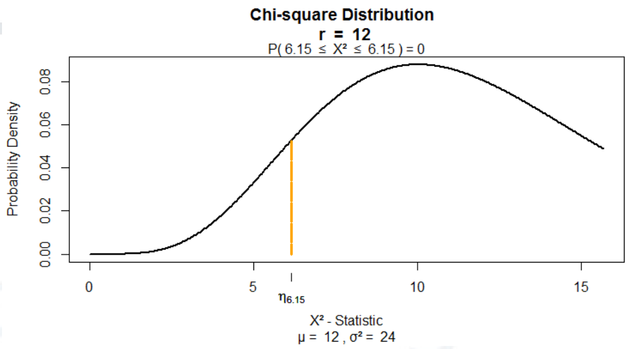
$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \quad x \geq 0$$

con los siguientes valores de media $E(X) = n$ y varianza $V(X) = 2n$; y su nombre en R es **"chisq".**
Por ejemplo, tomando una variable Chi cuadrado con 12 grados de libertad tenemos:

a) dchisq(6.15, df=12) **# valor de la función de densidad en 6.15**

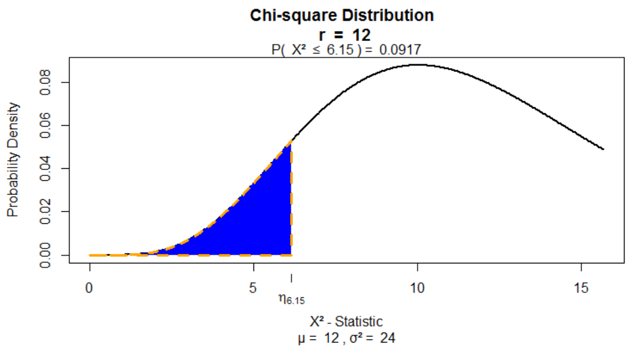
Para una distribución Chi cuadrado con 12 g.l. (χ^2_{12}), evalúa la función de densidad en x=6.15

$$f(6.15) = \frac{1}{2^{\frac{12}{2}}\Gamma\left(\frac{12}{2}\right)} 6.15^{\frac{12}{2}-1} e^{-\frac{6.15}{2}} = 0.05291257$$



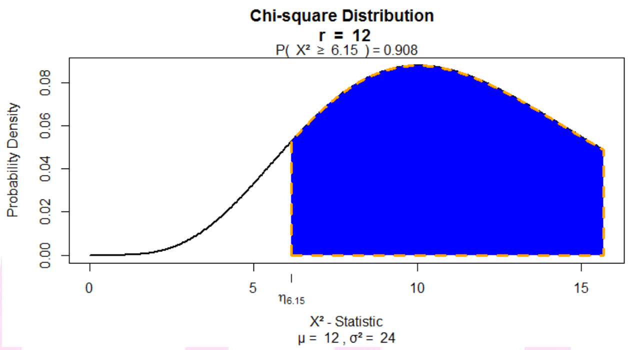
b) pchisq(6.15, df=12) **# función de distribución en 6.15**

$$F(6.15) = P(X \leq 6.15) = \int_0^{6.15} f(x)dx = 0.09166754$$



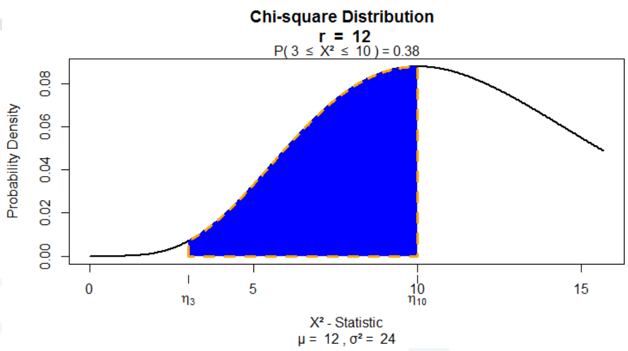
b1) pchisq(6.15, df=12,lower.tail=FALSE) **# 1 - función de distribución en 6.15**

$$1 - F(6.15) = 1 - P(X \le 6.15) = \int_{6.15}^{\infty} f(x)dx = 0.9083325$$



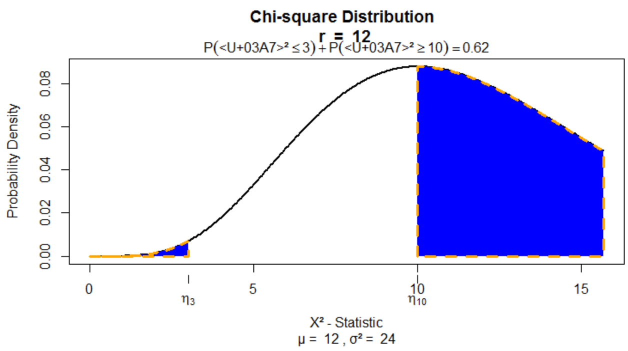
b2) pchisq(10, df=12)-pchisq(3, df=12) **#combinando dos expresiones**

$$P(3 < X \le 10) = \int_{3}^{10} f(x)dx = 0.3795834$$



b3) 1-(pchisq(10, df=12)-pchisq(3, df=12)) **#combinando expresiones**

$$1 - P(3 < X \le 10) = \int_{0}^{3} f(x)dx + \int_{10}^{\infty} f(x)dx = 0.6204166$$



c) qchisq(0.65, df=12,) **# cuantil 0.65 de la chi cuadrado indicada**

13.2661

c1) qchisq(0.65,df=12, lower.tail=FALSE) # **# cuantil 0.35 de la chi cuadrado indicada**

9.611517

De lo que hemos tratado para la distribución Chi-cuadrado, tiene especial interés la obtención de los **puntos críticos** $P(\chi^2_n \geq \chi^2_{n,\alpha}) = \alpha$ cuando se tiene una χ^2_n. Debemos determinar el valor de $\chi^2_{n,\alpha}$ para un valor dado de α , muy pequeño o la expresión contraria $P(\chi^2_n \geq \chi^2_{n,1-\alpha}) = 1-\alpha$. Para el caso de $\alpha = 0.05$ y tener15 grados de libertad

qchisq(0.95, df=15)

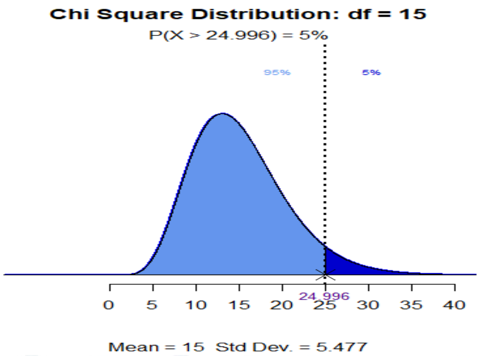
$$P(\chi^2_{15} \geq \chi^2_{15,0.05} = 24.99579) = 0.05$$

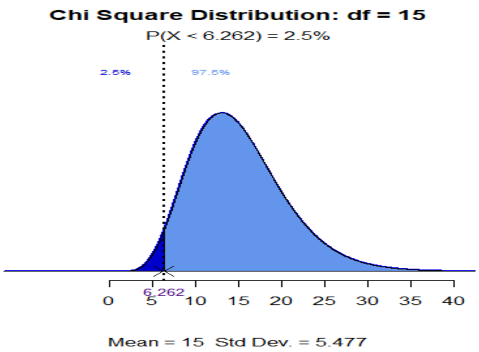
qchisq(0.025, df=15)

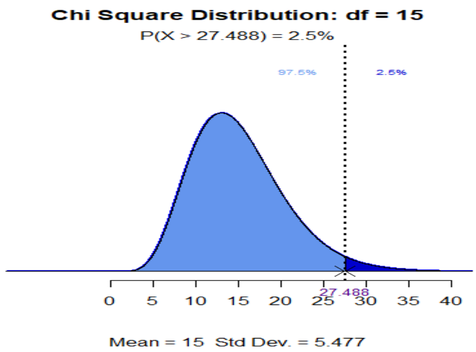
$$P(\chi^2_{15} \leq \chi^2_{15,0.025} = 6.262138) = 0.025$$

qchisq(0.975, df=15)

$$P(\chi^2_{15} \geq \chi^2_{15,0.025} = 27.48839) = 0.025$$







EJEMPLO 4: DISTRIBUCIÓN T-STUDENT $X \sim t_n$

Si la variable aleatoria X tiene una distribución t-Student con n grados de libertad t_n, entonces su función de densidad viene dada por

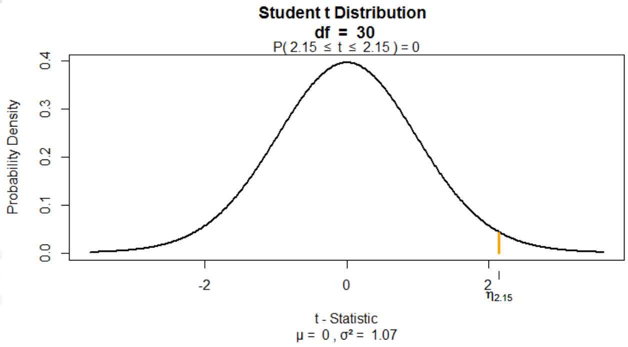
$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\;\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{(n+1)}{2}}, \quad -\infty < x < \infty$$

con los siguientes valores de media $E(X)=0$ y varianza $V(X)=\frac{n}{n-2}$; y su nombre en R es **"t".**

Por ejemplo, tomando una variable T Student con 30 grados de libertad, tenemos:

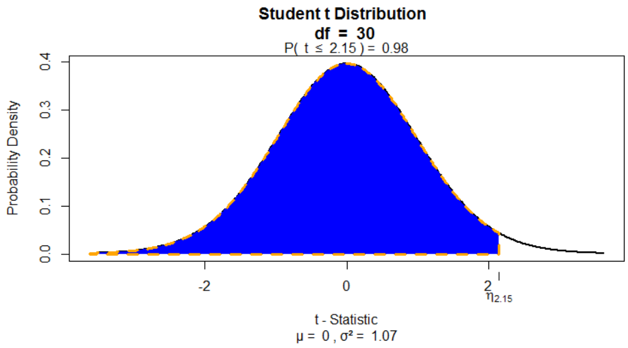
a) dt(2.15, df=30) **# valor de la función de densidad en 2.15**

$$f(2.15) = \frac{\Gamma\left(\frac{30+1}{2}\right)}{\sqrt{30\pi}\;\Gamma\left(\frac{30}{2}\right)}\left(1+\frac{2.15^2}{30}\right)^{-\frac{(30+1)}{2}} = 0.04291563$$



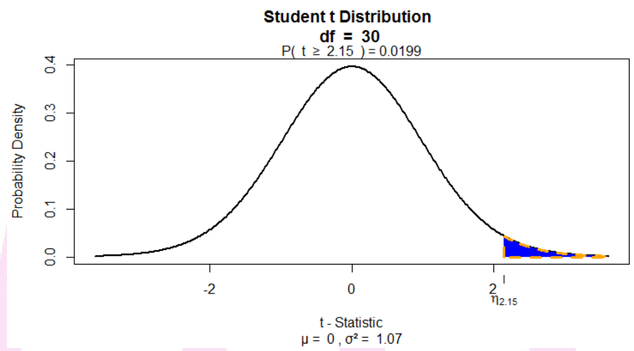
b) pt(2.15, df=30) **# función de distribución en 2.15**

$$F(2.15) = P(X \le 2.15) = \int_{-\infty}^{2.15} f(x)dx = 0.9801306$$



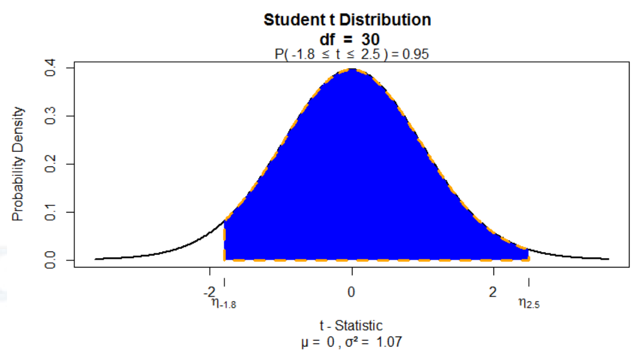
b1) pt(2.15, df=30, lower.tail=FALSE) **# 1 - función de distribución en 2.15**

$$1-F(2.15)=1-P(X\le 2.15)=\int_{2.15}^{\infty} f(x)dx = 0.01986943$$



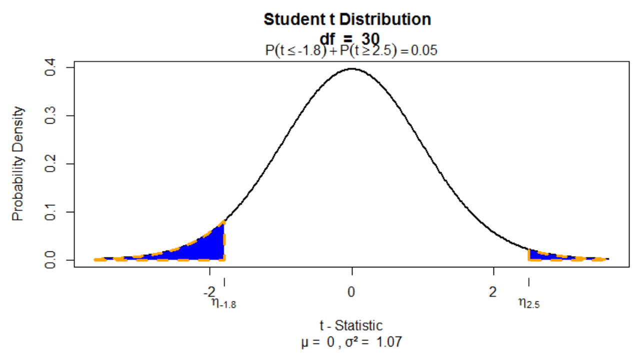
b2) pt(2.5, df=30)-pt(-1.8, df=30) **#combinando dos expresiones**

$$P(-1.8 < X \le 2.5)=\int_{-1.8}^{2.5} f(x)dx = 0.9499796$$



b3) 1-(pt(2.5, df=30)-pt(-1.8, df=30)) **#combinando expresiones**

$$1-P(-1.8 < X \le 2.5)=\int_{-\infty}^{-1.8} f(x)dx + \int_{2.5}^{\infty} f(x)dx = 0.05002036$$



c) qt(0.65, df=30) **# cuantil 0.65 de la t - Student indicada**

0.3890322

c1) qt(0.65, df=30, lower.tail=FALSE) **# cuantil 0.35 de la t - Sstudent indicada**

-0.3890322

De lo que hemos tratado para la distribución T de Student, tiene especial interés la obtención de los **puntos críticos** $P(t_{n,\alpha} \geq t_{n,\alpha}) = \alpha$ cuando se tiene una t_n. Debemos determinar el valor de $t_{n,\alpha}$ para un valor dado de α, muy pequeño o la expresión bilateral $P(|t_{n,\alpha}| \geq t_{n,\alpha/2}) = \alpha$. Para el caso de $\alpha = 0.05$ y tener 20 grados de libertad

qt(0.95, df=20)

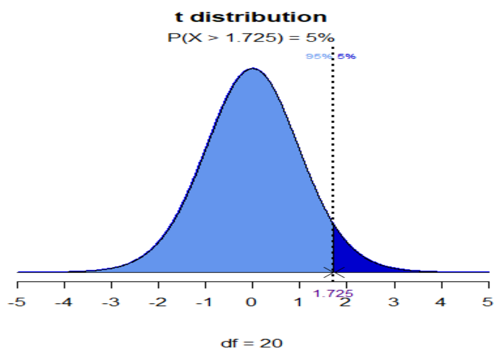
$P(t_{20} \geq t_{20,0.05} = 1.724718) = 0.05$

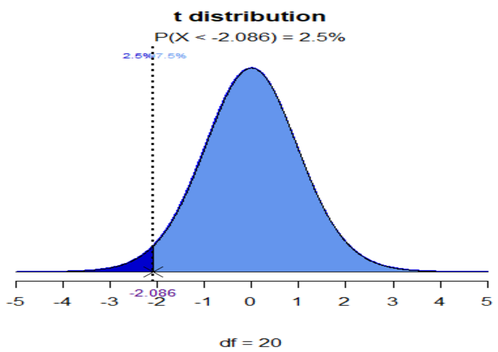
qt(0.975, df=20)

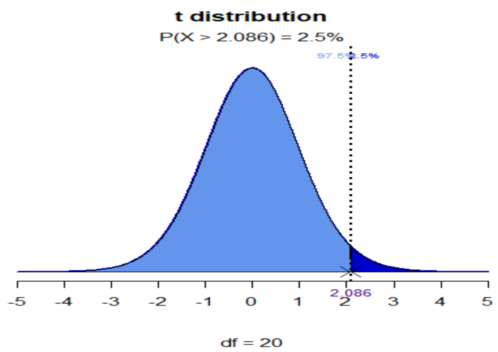
$P(t_{20} \geq t_{20,0.025} = 2.085963) = 0.025$

qt(0.025, df=20)

$P(t_{20} \leq t_{20,0.975} = -2.085963) = 0.025$







EJEMPLO 5: DISTRIBUCIÓN F-SNEDECOR $X \sim F_{n_1,n_2}$

Si la variable aleatoria X tiene una distribución F de Snedecor con n1 y n2 grados de libertad, respectivamente, F_{n_1,n_2} , entonces su función de densidad viene dada por

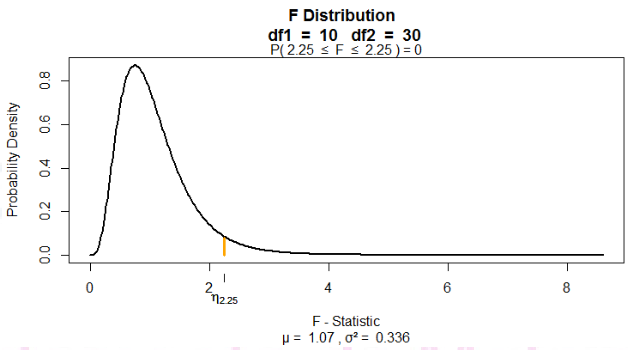
$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right) n_1^{\frac{n_1}{2}} n_2^{\frac{n_2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} x^{\frac{n_1}{2}-1}\left(n_2+n_1x\right)^{-\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}, \quad x>0$$

con los siguientes valores de media $E(X) = \frac{n_2}{(n_2-2)}$ y varianza $V(X) = \frac{2n_2^2(n_1+n_2-2)}{n_1(n_2-2)^2(n_2-4)}$; y su nombre en R es **"f".**

Por ejemplo, tomando una variable F con 10 y 30 grados de libertad, tenemos

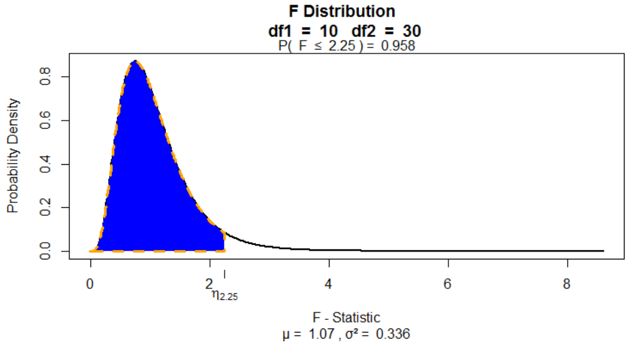
a) df(2.25, df1=10, df2=30) **# valor de la función de densidad en 2.25**

$$f(2.25) = \frac{\Gamma\left(\frac{10+30}{2}\right) 10^{\frac{10}{2}} 30^{\frac{30}{2}}}{\Gamma\left(\frac{10}{2}\right)\Gamma\left(\frac{30}{2}\right)} 2.25^{\frac{10}{2}-1}\left(30+10*2.25\right)^{-\left(\frac{10+30}{2}\right)} = 0.08449633$$



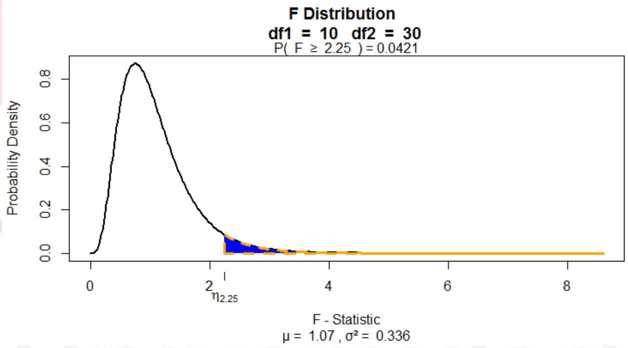
b) pf(2.25, df1=10, df2=30) **# función de distribución en 2.15**

$$F(2.25) = P(X \leq 2.25) = \int_0^{2.25} f(x)dx = 0.9578811$$



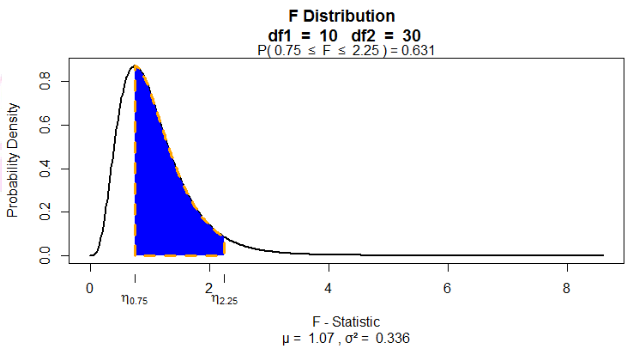
b1) pt(2.15, df=30, lower.tail=FALSE) # 1 - función de distribución en 2.15

$$1-F(2.25)=1-P(X\leq 2.25)=\int_{0}^{2.25} f(x)dx=0.04211887$$



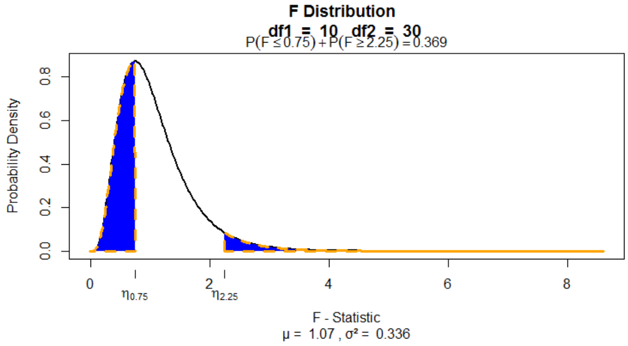
b2) pf(2.25, df1=10, df2=30)-pf(0.75, df1=10, df2=30) #combinando dos expresiones

$$P(0.75<X\leq 2.25)=\int_{0.75}^{2.25} f(x)dx=0.6311693$$



b3) 1-(pf(2.25, df1=10, df2=30)-pf(0.75, df1=10, df2=30)) #combinando expresiones

$$1-P(0.75<X\leq 2.25)=\int_{0}^{0.75} f(x)dx+\int_{2.25}^{\infty} f(x)dx=0.3688307$$



c) qf(0.65, df1=10, df2=30) **# cuantil 0.65 de la F - Snedecor indicada**

1.167005

c1) qf(0.65, df1=10, df2=30, lower.tail=FALSE) **# cuantil 0.35 de la F_Snedecor indicada**

0.7766998

De lo que hemos tratado para la distribución F de Snedecor, tiene especial interés la obtención de los **puntos críticos** $P(F_{n_1,n_2} \geq F_{n_1,n_2,\alpha}) = \alpha$ cuando se tiene una F_{n_1,n_2}. Debemos determinar el valor de $F_{n_1,n_2,\alpha}$ para un valor dado de α, muy pequeño o la expresión alternativa $P(F_{n_1,n_2} \geq F_{n_1,n_2,1-\alpha}) = 1-\alpha$. Para el caso de $\alpha = 0.05$ y tener 12 y 15 grados de libertad, respectivamente:

qf(0.95, df1=12, df2=15)

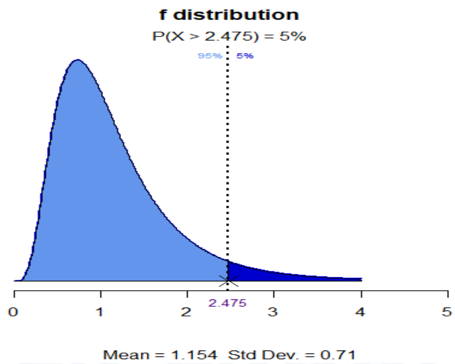
$$P(F_{12,15} \geq F_{12,15,0.05} = 2.475313) = 0.05$$

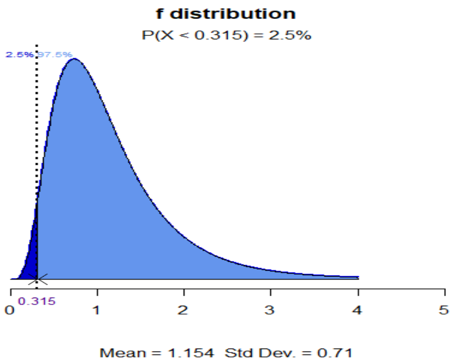
qf(0.975, df1=10, df2=15)

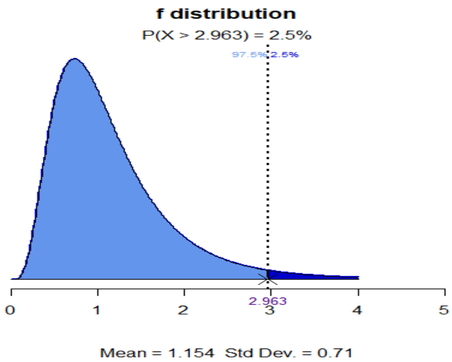
$$P(F_{12,15} \geq F_{12,15,0.025} = 2.963282) = 0.025$$

qf(0.025, df1=10, df2=15)

$$P(F_{12,15} \geq F_{12,15,0.975} = 0.3147424) = 0.975 \Leftrightarrow P(F_{12,15} < F_{12,15,0.975} = 0.3147424) = 0.025$$







EJEMPLO 6: DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$

Si la variable aleatoria X tiene una distribución Exponencial con parámetro λ, entonces su función de densidad viene dada por

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

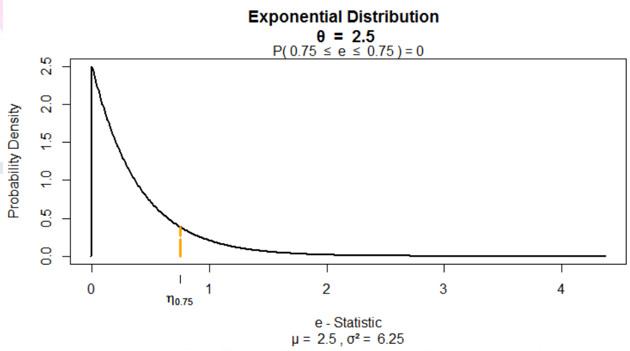
con los siguientes valores de media $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ y varianza $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$; y su nombre en R es **"exp".**

Por ejemplo, tomando una variable exponencial con $\mathrm{rate} = \lambda = 2.5$, tenemos

a) dexp(0.75, rate=2.5) **# valor de la función de densidad en 0.75**

Valor de la función de densidad en 0.75

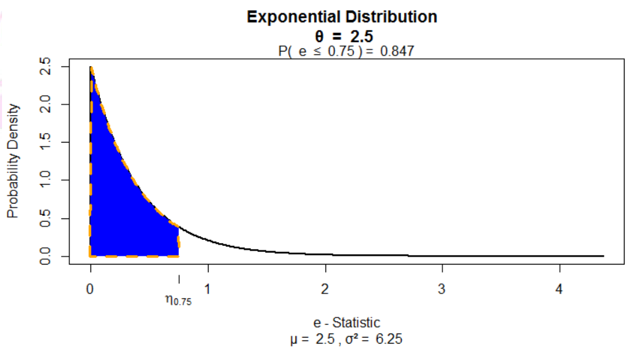
$$f(0.75) = 2.5e^{-2.5*0.75} = 0.3833874$$



CUIDADO CON LA GRAFICA

b) pexp(0.75, rate=2.5) **# función de distribución en 0.75**

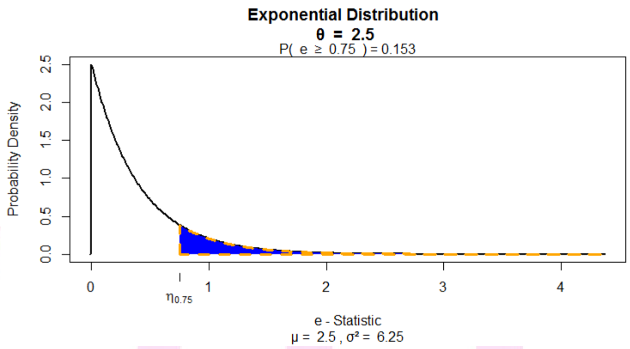
$$F(0.75) = P(X \leq 0.75) = \int_0^{0.75} 2.5e^{-2.5*x} dx = 0.846645$$



CUIDADO CON LA GRAFICA

b1) pexp(0.75, rate=2.5., lower.tail=FALSE) **# 1 - función de distribución en 0.75**

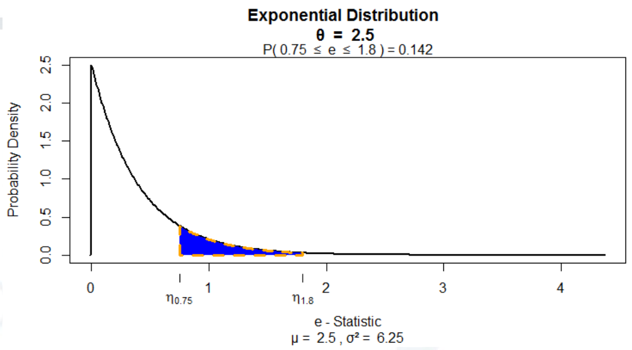
$$1 - F(0.75) = 1 - P(X \le 0.75) = \int_{0.75}^{\infty} f(x)dx = 0.153355$$



CUIDADO CON LA GRAFICA

b2) pexp(1.8, rate=2.5) - pexp(0.75, rate=2.5) **#combinando dos expresiones**

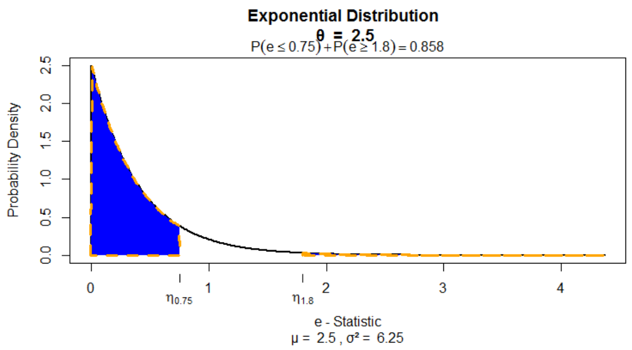
$$P(0.75 < X \le 1.8) = \int_{0.75}^{1.8} f(x)dx = 0.142246$$



CUIDADO CON LA GRAFICA

b3) 1-(pexp(1.8, rate=2.5) - pexp(0.75, rate=2.5)) **#combinando expresiones**

$$1 - P(0.75 < X \le 1.8) = \int_{0}^{0.75} f(x)dx + \int_{1.8}^{\infty} f(x)dx = 0.857754$$



CUIDADO CON LA GRAFICA

c) qexp(0.65, rate=2.5) # cuantil 0.65 de la Exponencial indicada

0.4199288

c1) qexp(0.65, rate=2.5, lower.tail=FALSE) # cuantil 0.35 de la exponencial indicada

0.1723132

EJEMPLO 7: DISTRIBUCIÓN GAMMA $X \sim Ga(p,\lambda)$

Si la variable aleatoria X tiene una distribución Gamma con parámetros p y λ, entonces su función de densidad viene dada por

$$f(x) = \frac{\lambda^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

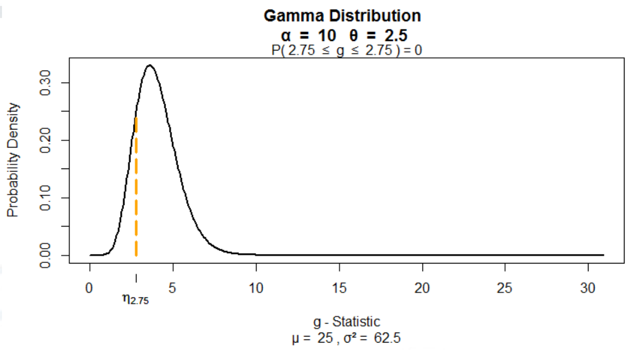
con los siguientes valores de media $E(X) = \frac{p}{\lambda}$ y varianza $V(X) = \frac{p}{\lambda^2}$; y su nombre en R es **"gamma".**

Debemos tener, algo de precaución, pues en R se utilizan los parámetros de shape (p) y scale ($(1/\lambda)$). Además, es posible hablar de rate=1/scale. Por ejemplo, tomando una variable Gamma con parámetros $p = 10$ y $\lambda = 0.4$ o $rate = 2.5$, tenemos

a) dgamma(2.75, shape=10, rate=2.5) **# valor de la función de densidad en 2.75**

Valor de la función de densidad en 2.75

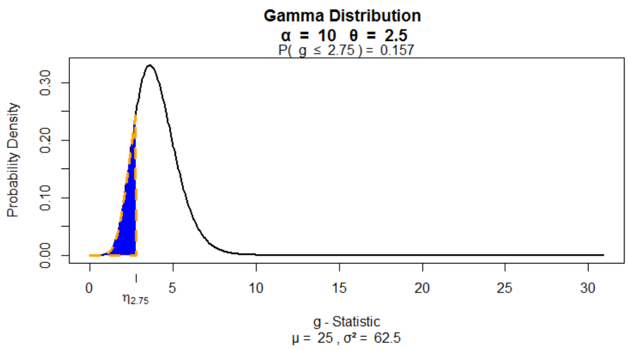
$$f(2.75) = \frac{2.5^{10}}{\Gamma(10)} 2.75^{10-1} e^{-2.5*2.75} = 0.2442625$$



b) pgamma(2.75, shape=10, rate=2.5) **# función de distribución en 2.75**

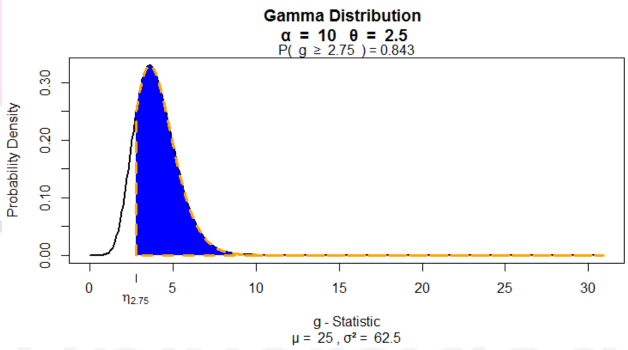
pgamma(2.75, shape=10, scale=0.4) **# función de distribución en 2.75**

$$F(2.75) = P(X \le 2.75) = \int_0^{2.75} \frac{2.5^{10}}{\Gamma(10)} x^{10-1} e^{-2.5*x} dx = 0.1570581$$



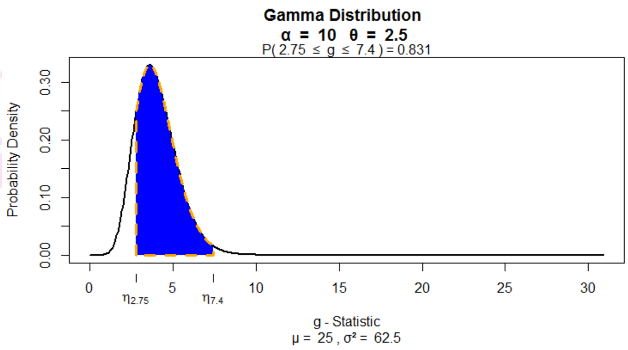
b1) pgamma(2.75, shape=10, rate=2.5, lower.tail=FALSE) # 1 - función de distribución en 2.75

$$1 - F(2.75) = P(X > 2.75) = \int_{2.75}^{\infty} \frac{2.5^{10}}{\Gamma(10)} x^{10-1} e^{-2.5*x} dx = 0.8429419$$



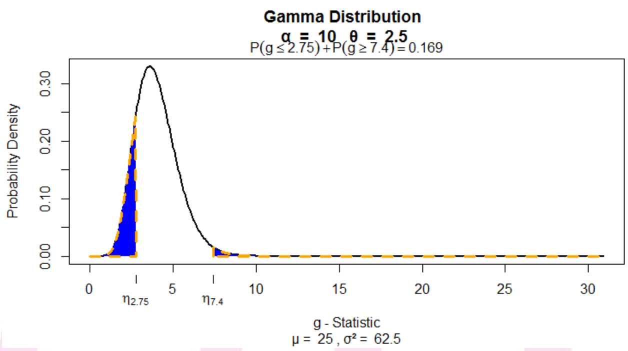
b2) pgamma(7.4, shape=10, scale=0.4)-pgamma(2.75, shape=10, scale=0.4) #combinando expres.

$$P(2.75 < X \leq 7.4 = \int_{2.75}^{7.4} f(x)dx = 0.8312399$$



b3) 1 pgamma(7.4, shape=10, scale=0.4) - pgamma(2.75, shape=10, scale=0.4) #combinando exp.

$$1 - P(2.75 < X \le 7.4) = \int_{0}^{2.75} f(x)dx + \int_{7.4}^{\infty} f(x)dx = 0.1687601$$



c) qgamma(0.38, shape=10, rate=2.5) **# cuantil 0.38 de la Gamma indicada**

3.50094

c1) qgamma(0.38, shape=10, rate=2.5, lower.tail=FALSE) **# cuantil 0.62 de la Gamma indicada**

4.258846

EJERCICIOS:

1. Sea Z una variable aleatoria con distribución normal estándar $[\, Z \sim N(0,1)\,]$.

a) Hallar las probabilidades siguientes:

$P(Z < 2.15)$; $P(0.80 < Z < 1.96)$; $P(-2.45 < Z < 1.65)$; $P(-2.75 < Z < -0.65)$;
$P(Z \geq -1.38)$; $P(-2.57 \leq Z < 0)$ y $P(0 \leq Z < 2.33)$

b) Hallar el valor de z para los casos siguientes:

F(z) = 0.8665 ; F(z) = 0.9222 ; F(z) = 0.9972 ; el área entre –z y z es 0.99 ;
el área a la izquierda de z es 0.05 ; el área a la derecha de z es 0.025

2. Si la variable aleatoria X sigue una distribución $X \sim \chi^2_{25}$, hallar:

a) $P(X < 46.9)$ b) $P(11.5 \leq X \leq 44.3)$ c) $P(X > 37.7)$

d) Hallar a y b tal que $P(X \leq a) = 0.05$ y $P(a \leq X \leq b) = 0.95$.

3.-. Si la variable aleatoria X sigue una distribución $X \sim t_{23}$, hallar:

a) $P(X < -1.714)$ b) $P(-1.319 \leq X \leq 2.5)$ c) $P(X > 1.319)$

d) Hallar a tal que $P(X \leq -a) = 0.05$ y $P(-a \leq X \leq a) = 0.95$.

4.- Si la variable aleatoria X sigue una distribución $X \sim F_{10,12}$, hallar:

a) $P(X < 0.212)$ b) $P(0.276 \leq X \leq 4.3)$ c) $P(X > 3.37)$

d) Hallar a y b tal que $P(X \leq a) = 0.05$ y $P(a \leq X \leq b) = 0.98$.

5.- Un profesor realiza un test de 100 preguntas a un curso de 200 alumnos. Suponiendo que las puntuaciones *X* obtenidas por los alumnos siguen una distribución normal de media 60 puntos y desviación típica 10 puntos, se pide calcular:

a) $P(X \geq 70)$; $P(X \leq 80)$; $P(X > 46)$; $P(39 \leq X \leq 80)$; $P(|X-60| < 20)$ y $P(|X-60| > 30)$

b) Número de alumnos que tuvieron más de 75 puntos.

c) ¿Cuál fue la nota que sobrepasaron el 20% de los alumnos?

6.- El tiempo, en horas, que se tarda en reparar una bomba de calor es una variable aleatoria gamma de parámetros $p = 2$ y $\lambda = \dfrac{1}{2}$. Determinar:

a) La probabilidad de que la reparación requiera, a lo sumo, una hora.

b) La probabilidad de que el tiempo de reparación esté entre dos y tres horas.

7.- En cierta región, el consumo semanal de energía eléctrica, en cientos de miles de megavatios/hora, es una variable aleatoria gamma con media 6 y varianza 12. Hallar:

a) Los valores de p y λ .

b) La probabilidad de que, en una determinada semana, el consumo de energía esté entre cuatrocientos mil y quinientos mil megavatios/hora.

c) ¿Hasta qué cantidad asciende el consumo de energía en el 75% de las semanas?

8.- La duración en años de cierto componente eléctrico sigue una variable aleatoria exponencial de media 2,5. Si 485 de estos componentes se instalan en diferentes sistemas:

a) ¿Cuántos fallarán los dos primeros años?

b) ¿Cuántos durarán entre 2 y 6 años?