PRÁCTICAS 13-14: Test de hipótesis.

DESARROLLO DE LA PRÁCTICA

El software R dispone de un programa específico (**t.test**) para realizar test de hipótesis paramétricos, básicamente para la media, en el supuesto de que nuestros datos proceden de distribuciones normales cuando todos los parámetros son desconocidos. Para otros casos donde el estadístico del contraste sigue una distribución normal, usaremos comandos de la librería **BSDA**. Trabajaremos con el fichero "HIPER200.Rdata", sencillo y simple conjunto de datos que utilizamos en la sesión anterior de intervalos de confianza. Concretamente veremos el uso de los contrastes sobre una o dos medias cuando se dispone de una distribución Normal, y los contrastes sobre una o dos proporciones en el caso de la distribución Binomial.

CONTRASTES DE UNA MUESTRA

(a) **Contraste sobre una media de una distribución** $N(\mu,\sigma)$ **cuando la varianza es conocida**.

$\begin{array}{l} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu \neq \mu_0 \end{array}$	$Z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$	$C = \{\lvert Z \rvert > z_{\alpha/2}\}$

Para la variable TAsist0 (TA sistólica inicial en mm Hg) planteamos el test bilateral que la media poblacional vale 150.4 mmHg, mediante la siguiente línea de comando

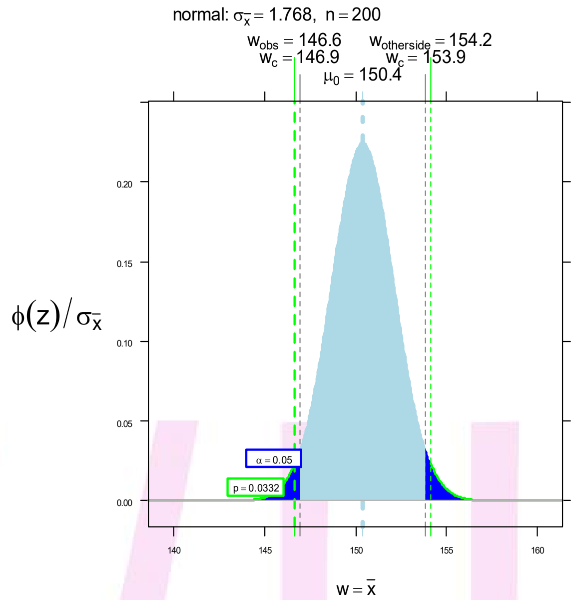
library(BSDA)
z.test(TAsist0,alternative="two.sided", mu=150.4, sigma.x=25)

Su salida de resultados comprende

```
        One-sample z-Test

data:  TAsist0
z = -2.1298, p-value = 0.03319
alternative hypothesis: true mean is not equal to 150.4
95 percent confidence interval:
 143.1702 150.0998
sample estimates:
mean of x
  146.635
```

que nos muestra el valor del estadístico (-2.1298) y su valor-p (0.03319) (bilateral, como corresponde al contraste planteado). Si tomásemos $\alpha = 0.05$ el contraste es significativo (se acepta $H_1: \mu \neq 150.4$) pues $p < \alpha$. Por el contrario, si tomamos $\alpha = 0.01$ el contraste es no significativo (se acepta $H_0: \mu = 150.4$) pues $p > \alpha$. Además, se proporciona el intervalo de confianza para la media μ con coeficiente de confianza $1-\alpha = 0.95$ es [143.1702,150.0998] que no contiene al valor de la hipótesis nula 150.4. Una representación gráfica del estadístico T y tomando un nivel de significación de $\alpha = 0.05$ para el contraste bilateral es



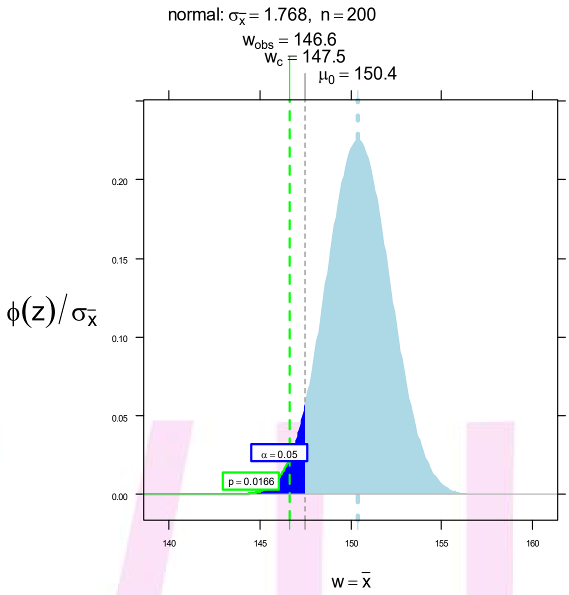
Si deseamos resolver el test unilateral a la izquierda $\begin{array}{l} H_0 : \mu \geq \mu_0 = 150.4 \\ H_1 : \mu < \mu_0 = 150.4 \end{array}$ solo debemos elegir la opción "less" en lugar de "two.side".

z.test(TAsist0,alternative="less", mu=150.4, sigma.x=25)

```
      One-sample z-Test

data:  TAsist0
z = -2.1298, p-value = 0.01659
alternative hypothesis: true mean is less than 150.4
95 percent confidence interval:
       NA 149.5427
sample estimates:
mean of x
  146.635
```

que nos muestra el valor del estadístico (-2.1298) y su valor-p (0.01659). Si tomamos $\alpha = 0.05$ el contraste es significativo (se acepta $H_1 : \mu < 150.4$) pues $p < \alpha$. Por el contrario, si tomamos $\alpha = 0.01$ el contraste es no significativo (se acepta $H_0 : \mu \geq 150.4$) pues $p > \alpha$. Además, se proporciona la cota superior de confianza para la media μ con coeficiente de confianza $1-\alpha = 0.95$ es $(-\infty, 149.5427]$ que no contiene al valor de la hipótesis nula 150.4.



En el caso de estar interesado en resolver el test unilateral a la derecha $\begin{matrix} H_0 : \mu \le \mu_0 = 150.4 \\ H_1 : \mu > \mu_0 = 150.4 \end{matrix}$ debemos cambiar “two.side” por “greater”.

z.test(TAsist0,alternative="greater", mu=150.4, sigma.x=25)

(b) **Contraste sobre una media de una distribución** $N(\mu, \sigma)$ **cuando la varianza es desconocida.**

$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$	$T = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$	$C = \{ \lvert T \rvert > t_{n-1,\alpha/2} \}$

Para la variable TAsist0 (TA sistólica inicial en mm Hg) planteamos el test bilateral que la media poblacional vale 150.4 mmHg, mediante la siguiente línea de comando

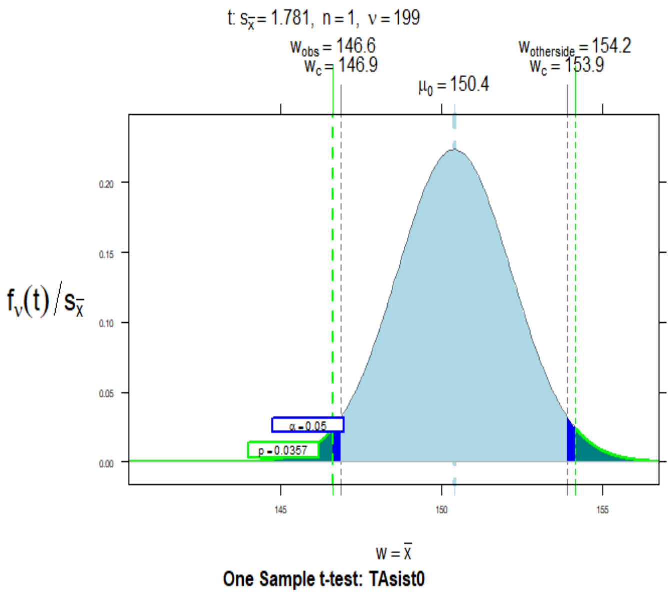
t.test(TAsist0,alternative="two.sided", mu=150.4)

Su salida de resultados comprende

```
        One Sample t-test

data:  TAsist0
t = -2.1144, df = 199, p-value = 0.03572
alternative hypothesis: true mean is not equal to 150.4
95 percent confidence interval:
 143.1237 150.1463
sample estimates:
mean of x
  146.635
```

que nos muestra el valor del estadístico (-2.1144), los grados de libertad (199) de la distribución T-Student y su valor-p (0.03572) (bilateral, como corresponde al contraste planteado). Si tomásemos $\alpha = 0.05$ el contraste es significativo (se acepta $H_1 : \mu \neq 150.4$) pues $p < \alpha$. Por el contrario, si tomamos $\alpha = 0.01$ el contraste es no significativo (se acepta $H_0 : \mu = 150.4$) pues $p > \alpha$. Además, nos muestra el intervalo de confianza para la media μ con coeficiente de confianza $1-\alpha = 0.95$ es [143.1237,150.1463] que no contiene al valor de la hipótesis nula 150.4. Una representación gráfica del estadístico T y tomando un nivel de significación de $\alpha = 0.05$ para el contraste bilateral es



(c) **Contraste sobre una proporción**

$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p \neq p_0$	$Z = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}}$	$C = \{\lvert Z \rvert > z_{\alpha/2}\}$

Si estamos interesados en averiguar si la proporción de personas fumadoras y de género masculino es de 0.8, debemos plantear el contrate de hipótesis

$$H_0 : p = 0.68$$
$$H_1 : p \neq 0.68$$

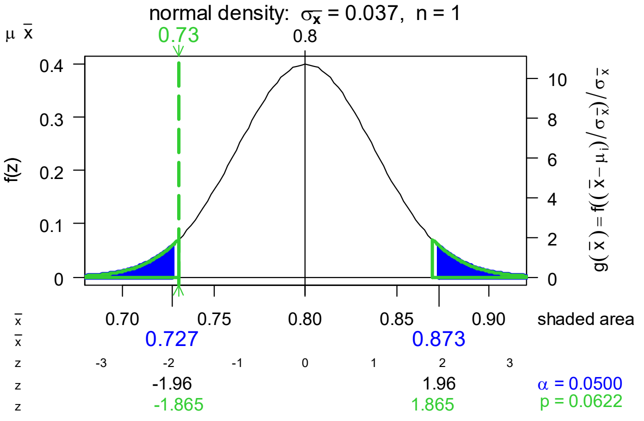
y ejecutar el comando

prop.test(60, 100, p=0.68, alternative="two.sided",conf.level = 0.95, correct = FALSE)

```
1-sample proportions test without continuity correction

data:  60 out of 100, null probability 0.68
X-squared = 2.9412, df = 1, p-value = 0.08635
alternative hypothesis: true p is not equal to 0.68
95 percent confidence interval:
 0.5020026 0.6905987
sample estimates:
  p
0.6
```

Si tomamos un valor de $\alpha = 0.05$, nuestra decisión es aceptar la hipótesis nula de que dicho porcentaje es del 68%. Cabe indicar en este caso que el estadístico que se proporciona 2.9412 se corresponde con Z^2, siendo Z el estadístico del contraste.



CONTRASTES DE DOS MUESTRAS

(d) **Test de hipótesis sobre la igualdad de medias cuando las varianzas son conocidas**

$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$ $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$	$Z = \dfrac{(\bar{x} - \bar{y})}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$C = \{\lvert Z \rvert > z_{\alpha/2}\}$

Podemos estar interesado en ver si las cifras medias poblaciones de la variable TAsist0 son iguales en cada género. Planteamos las hipótesis

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$$
$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

que resolvemos con el comando

z.test(TAsist0_m,TAsist0_f,alternative="two.sided",mu=0, sigma.x=20, sigma.y=28)

```
      Two-sample z-Test

data:  TAsist0_m$TAsist0 and TAsist0_f$TAsist0
z = -2.3453, p-value = 0.01901
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -14.814099  -1.325901
sample estimates:
mean of x mean of y
   142.60    150.67
```

Igual que en caso anteriores, el cuadro nos muestra el valor del estadístico del contraste, y lo más importante su p valor 0.01901. Así, el test resulta significativo (se rechaza la hipótesis nula) para niveles de α superior a 0.01901, por ejemple $\alpha = 0.05$. además, se indica el intervalo de confianza para $\mu_1 - \mu_2$ con nivel de confianza $1-\alpha = 0.95$ es [-14.8141, -1.3259]. Sim embargo, para estos datos el test es no significativo si tomamos un nivel $\alpha = 0.01$

(e) **Test de hipótesis sobre la igualdad de medias cuando las varianzas son desconocidas pero iguales**

$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$ $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$	$T = \dfrac{(\bar{x} - \bar{y})}{s_p\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$	$C = \left\{ \lvert T \rvert > t_{n_1+n_2-2,\alpha/2} \right\}$

Si consideramos la variable Peso y deseamos comprobar si los pesos medios por genero son iguales, planteamos las hipótesis

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$$
$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

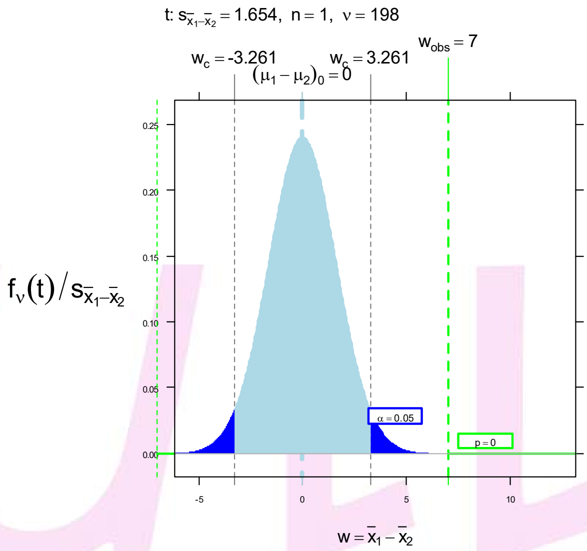
que resolvemos con el comando

t.test(peso~genero,alternative="two.sided",var.equal=TRUE)

```
      Two Sample t-test

data:  peso by genero
t = 4.2332, df = 198, p-value = 3.524e-05
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
  3.739106 10.260894
sample estimates:
mean in group masculino  mean in group femenino
                  70.52                   63.52
```

Al obtener un p valor tan pequeño 0.00003524, la conclusión es de un test significativo, rechazamos la hipótesis nula de igual de vectores medios. También se proporción el intervalo de confianza para $\mu_1 - \mu_2$.



Two Sample t-test: peso by genero

(f) **Test de hipótesis sobre la igualdad de medias cuando las varianzas son desconocidas pero distintas**

$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$ $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$	$T = \dfrac{(\bar{x} - \bar{y})}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}}$	$C = \{\lvert T \rvert > t_{f,\alpha/2}\}$

Si consideramos la variable Peso y deseamos comprobar si los pesos medios por genero son iguales, planteamos las hipótesis

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$$
$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

que resolvemos con el comando

t.test(peso~genero,alternative="two.sided",var.equal=FALSE)

```
Welch Two Sample t-test

data:  peso by genero
t = 4.2332, df = 193.83, p-value = 3.554e-05
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
  3.738674 10.261326
sample estimates:
mean in group masculino  mean in group femenino
                  70.52                   63.52
```

Los comentarios a estos resultados son idénticos al caso anterior (e).

(g) **Test de hipótesis sobre la igualdad de varianzas cuando las medias son desconocidas**

$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$	$C = \left\{ F < F_{n_1-1,n_2-1,1-\alpha/2} \text{ o } F > F_{n_1-1,n_2-1,\alpha/2} \right\}$

Si queremos resolver el contraste sobre la igualdad de medias cuando las varianzas son desconocidas (e) o (f), debemos dilucidar antes en que caso nos encontramos. Es decir, plantear el contraste

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$
$$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

Ejecutaremos el comando

var.test(peso~genero,alternative="two.sided")

```
      F test to compare two variances

data:  peso by genero
F = 0.74409, num df = 99, denom df = 99, p-value = 0.1431
alternative hypothesis: true ratio of variances is not equal to 1
95 percent confidence interval:
 0.5006534 1.1058887
sample estimates:
ratio of variances
          0.744088
```

Parece evidente que la hipótesis más sostenible, de acuerdo con el p valor observado, es la igualdad de varianzas. Luego de los apartados (e) y (f) solo debemos tener en cuenta el apartado (e).

(h) **Test de hipótesis sobre la igualdad de medias cuando las muestras son dependientes**

$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$ $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$	$T = \frac{\bar{d} - \Delta_0}{s_d / \sqrt{n}}$	$C = \left\{ T > t_{n-1,\alpha} \right\}$

En esta ocasión, cuando se dispone de dos muestras aleatorias dependientes, como puede ser el caso de observar una misma variable en dos ocasiones distintas a los mismos individuos. Procedemos a realizar una comparación sobre la igualdad de medias. Como ejemplo, tomaremos a la TA sistólica que fue medida en dos ocasiones distintas en el mismo día (TAsist0 y TAsist1). Planteamos las hipótesis

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$$
$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

que resolvemos con el comando

t.test(TAsist0,TAsist1,alternative="two.sided",paired=TRUE))

```
	Paired t-test

data:  TAsist0 and TAsist1
t = 14.533, df = 199, p-value < 2.2e-16
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 10.48842 13.78158
sample estimates:
mean of the differences
                 12.135
```

El cuadro nos muestra el valor del estadístico del contraste (14.533), y lo más importante su p valor 2.2e-16. Así, el test resulta significativo (se rechaza la hipótesis nula) para los niveles usuales de α (0.05 o 0.01) . además, se indica el intervalo de confianza para $\mu_1 - \mu_2$ con nivel de confianza $1-\alpha = 0.95$ es [10.4884, 13.7815].

(i) **Test de hipótesis sobre la igualdad de dos proporciones**

$H_0 : p_1 - p_2 = 0$ $H_1 : p_1 - p_2 \neq 0$	$Z = \dfrac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)}{\sqrt{\dfrac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \dfrac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}}$	$C = \left\{ \lvert Z \rvert > z_{\alpha/2} \right\}$

Podemos estar interesados en contrastar si la proporción de personas con hipertensión es la misma en cada género. El siguiente comando nos permite realizar este contraste

prop.test(x = c(16, 34), n = c(100, 100), correct = FALSE)

```
2-sample test for equality of proportions without continuity correction

data:  c(16, 34) out of c(100, 100)
X-squared = 8.64, df = 1, p-value = 0.003289
alternative hypothesis: two.sided
95 percent confidence interval:
 -0.29740168 -0.06259832
sample estimates:
prop 1 prop 2
  0.16   0.34
```

Observando el p valor obtenido, 0.00.389, nos lleva a rechazar la hipótesis nula para los valores usuales de α. Luego dicha proporción de hipertensos no es la misma en cada género. Esta conclusión, se puede enriquecer si observamos el intervalo de confianza para la diferencia de proporciones [-0.29740168,-0.06259832] que está a la izquierda del valor cero, luego $p_1 - p_2 < 0 \Rightarrow p_1 < p_2$. Es decir, la proporción de hipertensos es menor para el género masculino.

EJERCICIOS:

1. Una empresa informática afirma en su publicidad que, al menos, el 96% de los ordenadores que fabrica están libres de fallos durante el primer año de uso. Sin embargo, para una muestra de 150 ordenadores comprados a dicha empresa, se detectan fallos, durante el primer año de uso, en 15 de ellos.

Se puede rechazar, con $\alpha = 0.1$, la afirmación de la empresa. ¿Cuál es el p-valor?

2. Una empresa informática produce dos tipos de CDs (I y II) de características y precios similares. Se elige una muestra de 72 clientes y se observa que 49 utilizan I. Por otro lado, para una muestra de 57 clientes, 46 utilizan II. ¿Se puede asegurar que existe preferencia significativa, al nivel $\alpha = 0.01$ ¿Cuál es el p-valor?

3. Un dentista afirma que al menos el 38% de los niños de 11 años tiene problemas de caries. Elegida una muestra de 121 niños se observó que 45 tenían caries:

a) ¿Cuál es la región crítica y la región de aceptación?

b) ¿Es cierta la afirmación del dentista con un nivel de confianza del 90%? ¿Cuál es el p-valor?

4. Se plantea la hipótesis de que la proporción de personas que dan un resultado positivo al realizarle una determinada prueba médica, es menor o igual que 0,001. Se eligen al azar 2000 personas y se les somete a la prueba. Se acepta la hipótesis si, como máximo, han resultado dos personas afectadas.

a) Hallar el nivel de significación del contraste.

b) Si la prueba afectase a las personas con una probabilidad de 0,004, ¿Cuál sería la probabilidad de aceptar la hipótesis planteada en primer lugar?

5. Un fabricante anuncia que el 99% de las placas base que produce no fallan durante las primeras 10000 horas de uso. Una empresa informática adquiere una partida de 2000 de estas placas para instalarlas en PCs bajo la condición de que, si más de 25 fallan antes de las 10000 horas de uso, el fabricante debe devolver a la empresa el 40% del valor de la partida.

a) Plantear un contrate de hipótesis adecuado. Determinar las regiones de aceptación y crítica.

b) Determinar el nivel de significación del contraste. ¿Cuál es la probabilidad de que el fabricante no devuelva ninguna cantidad?

6. Para el fichero de datos "HIPER200.RData", se pide realizar los contrastes de hipótesis correspondientes para responder a las siguientes cuestiones:

a) ¿La tensión arterial sistólica de los varones es menor que la tensión arterial de las mujeres?

b) ¿La tensión arterial sistólica para las personas que toman poca sal en las comidas es superior a la tensión arterial sistólica para las personas restantes?

c) ¿El peso medio de las personas con escasa actividad física es superior al peso medio del resto de las personas?

d) ¿La proporción de fumadores es superior a la proporción de fumadoras?

7. Tomar los primeros 30 valores de la variable Talla del fichero HIPER200.RData, y supuesto que los datos son normales con varianza desconocida, realizar el contraste bilateral $H_0 : \mu_0 = 160$. Calcular la potencia observada que se tiene para detectar una diferencia de 5 unidades respecto de $\mu_0 = 160$ o para el caso unilateral a la derecha obtener la potencia observada en un valor a 5 unidades de μ_0, en ambos casos se puede representar la función de potencia frente a los valores de la media; y la función de potencia frente al tamaño de la muestra.