

¿Está acotado el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{n+1}{n}, \text{ para } n \in \mathbb{N}\}$?

¿De qué nos hablan? Veamos primero unas definiciones.

Definición. El número M es **una cota superior** de un conjunto B de números reales, si M es mayor o igual que cualquier elemento de B . Es decir si $x \leq M$, para toda $x \in B$.

Imaginemos a los elementos de B sobre la recta numérica \mathbb{R} , el número M está a la *derecha* de todos los elementos de B .

Por ejemplo, si B es el conjunto de los números pares que constan de dos dígitos, es decir $B = \{10, 12, 14, \dots, 96, 98\}$, claramente el número 5,351 es una cota superior de B pues es mayor o igual que cualquier elemento de B . El conjunto B tiene **muchas** cotas superiores, digamos 318, $563\pi^2$, etc.

Definición. Un conjunto X de número reales está **acotado superiormente** si hay *al menos una* cota superior de X .

Definición. El número m es **una cota inferior** de un conjunto C de números reales, si m es menor o igual que cualquier elemento de C . Es decir si $m \leq x$, para toda $x \in C$.

Imaginemos a los elementos de C sobre la recta numérica \mathbb{R} , el número m está a la *izquierda* de todos los elementos de B .

Si C es el conjunto de los múltiplos de 8 que constan de dos dígitos, es decir $C = \{16, 24, 32, \dots, 88, 96\}$, claramente el número 7 es una cota inferior de C pues es menor o igual que cualquier elemento de C . El conjunto C tiene **muchas** cotas inferiores, digamos $-15,311$, el -692 , etc.

Definición. Un conjunto Y de número reales está **acotado inferiormente** si hay *al menos una* cota inferior de Y .

Definición. Un conjunto S de números reales está **acotado**, si está acotado inferiormente **y** está acotado superiormente.

Nos preguntan si el conjunto A está acotado, para responder hay que verificar si está acotado superiormente y si está acotado inferiormente.

Hay que buscar alguna cota superior y alguna cota inferior de A .

Los elementos de A son de la forma $x = \frac{n+1}{n}$ para n un número natural.

Pero $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$, con $n \in \mathbb{N}$. Vemos que

$$A = \left\{ 1 + \frac{1}{1} = 2, 1 + \frac{1}{2} = 1.5, 1 + \frac{1}{3} = 1.\bar{3}, 1 + \frac{1}{4} = 1.25, \dots, 1 + \frac{1}{273} = 1.00\overline{366300}, \dots \right\}.$$

Es decir

$$A = \{2, 1.5, 1.\bar{3}, 1.25, \dots, 1.00\overline{366300}, \dots\}.$$

Conforme n es más grande, el elemento correspondiente $x = 1 + \frac{1}{n}$ de A es más pequeño. Vemos que ningún elemento de A es mayor que 83 (¿están de acuerdo?), es decir, 83 es *una* cota superior de A , luego A *está acotado superiormente*.

Vemos también que ningún elemento de A es negativo, todos son positivos, luego -17 es una cota inferior de A , es decir, A *está acotado inferiormente*.

Como A está acotado superiormente y está acotado inferiormente, sabemos que **A está acotado**.

