¿Está acotado el conjunto $A=\left\{x\in\mathbb{R}\;\middle|\; x=\dfrac{n+1}{n},\text{ para } n\in\mathbb{N}\right\}$?

¿De qué nos hablan? Veamos primero unas definiciones.

Definición. El número M es **una** *cota superior* de un conjunto B de números reales, si M es mayor o igual que cualquier elemento de B. Es decir si $x\leq M$, para toda $x\in B$.

Imaginemos a los elementos de B sobre la recta numérica $\mathbb{R}$, el número M está a la *derecha* de todos los elementos de B.

Por ejemplo, si B es el conjunto de los números pares que constan de dos dígitos, es decir $B=\{10,12,14,\ldots,96,98\}$, claramente el número 5,351 es una cota superior de B pues es mayor o igual que cualquier elemento de B. El conjunto B tiene **muchas** cotas superiores, digamos 318, $563\pi^2$, etc.

Definición. Un conjunto X de número reales está *acotado superiormente* si hay *al menos una* cota superior de X.

Definición. El número m es **una** *cota inferior* de un conjunto C de números reales, si m es menor o igual que cualquier elemento de C. Es decir si $m\leq x$, para toda $x\in C$.

Imaginemos a los elementos de C sobre la recta numérica $\mathbb{R}$, el número m está a la *izquierda* de todos los elementos de B.

Si C es el conjunto de los múltiplos de 8 que constan de dos dígitos, es decir $C=\{16,24,32,\ldots,88,96\}$, claramente el número 7 es una cota inferior de C pues es menor o igual que cualquier elemento de C. El conjunto C tiene **muchas** cotas inferiores, digamos $-15{,}311$, el -692, etc.

Definición. Un conjunto Y de número reales está *acotado inferiormente* si hay *al menos una* cota inferior de Y.

Definición. Un conjunto S de números reales está *acotado*, si está acotado inferiormente *y* está acotado superiormente.

Nos preguntan si el conjunto A está acotado, para responder hay que verificar si está acotado superiormente y si está acotado inferiormente.

Hay que buscar alguna cota superior y alguna cota inferior de A.

Los elementos de A son de la forma $x=\dfrac{n+1}{n}$ para n un número natural.

Pero $\dfrac{n+1}{n}=1+\dfrac{1}{n}$, con $n\in\mathbb{N}$. Vemos que

$$A=\left\{1+\frac{1}{1}=2,1+\frac{1}{2}=1.5,1+\frac{1}{3}=1.\overline{3},1+\frac{1}{4}=1.25,\ldots,1+\frac{1}{273}=1.00\overline{366300},\ldots\right\}.$$

Es decir

$$A=\{2,1.5,1.\overline{3},1.25,\ldots,1.00\overline{366300},\ldots\}.$$

Conforme n es más grande, el elemento correspondiente $x=1+\dfrac{1}{n}$ de A es más pequeño. Vemos que ningún elemento de A es mayor que 83 (¿están de acuerdo?), es decir, 83 es *una* cota superior de A, luego *A está acotado superiormente*.

Vemos también que ningún elemento de A es negativo, todos son positivos, luego -17 es una cota inferior de A, es decir, *A está acotado inferiormente*.

Como A está acotado superiormente y está acotado inferiormente, sabemos que A está acotado.

☺