

Obtener la integral $\int \frac{xe^{-x}}{(x-1)^2} dx$.

Para integrar por partes debemos colocar la integral en la forma $\int u dv$.

Hacemos $u = xe^{-x}$ y $dv = \frac{dx}{(x-1)^2}$.

La fórmula para integrar por partes dice que $\int u dv = uv - \int v du$.

Calculamos du y v .

$$u = xe^{-x},$$

por lo tanto

$$du = e^{-x}(1-x)dx.$$

Ahora v , como

$$dv = (x-1)^{-2} dx,$$

$$v = \int \frac{1}{(x-1)^2} dx.$$

Para obtener esta última integral sustituimos $s = x - 1$, luego $ds = dx$,

$$\int \frac{1}{(x-1)^2} dx = \int \frac{1}{s^2} ds = \frac{1}{-s} = \frac{1}{-(x-1)} = \frac{1}{1-x}.$$

Ahora aplicamos la fórmula de la integración por partes,

$$\begin{aligned} \int \frac{xe^{-x}}{(x-1)^2} dx &= (xe^{-x}) \left(\frac{1}{1-x} \right) - \int \frac{1}{1-x} e^{-x}(1-x) dx \\ &= \frac{xe^{-x}}{1-x} - \int e^{-x} dx \\ &= \frac{xe^{-x}}{1-x} + e^{-x} \\ &= -\frac{e^{-x}}{x-1} + \text{constante}. \end{aligned}$$

