Encuentra los puntos en que tiene tangente horizontal o vertical la gráfica de la función $y = (x-4)\sqrt[3]{x}$.

La pendiente de una recta horizontal es 0 y de una recta vertical, bueno, digamos que si una recta *tiende* a ser vertical su *pendiente tiende a infinito*.

Así, nos piden hallar los puntos sobre la gráfica de la función donde la tangente tiene pendiente 0 o *infinito*. La derivada de la función da la pendiente de la tangente. La función es

$$\begin{aligned} y &= (x-4)\sqrt[3]{x} \\ &= (x-4)x^{1/3} \\ &= x^{4/3} - 4x^{1/3}. \end{aligned}$$

La derivada es

$$\begin{aligned} y' &= \frac{4}{3}x^{1/3} - \frac{4}{3}x^{-2/3} \\ &= \frac{4}{3}x^{-2/3}(x-1) \\ &= \frac{4(x-1)}{3x^{2/3}}. \end{aligned}$$

El valor de la derivada es 0 si el denominador es distinto de cero y el numerador es igual a cero, lo cual sucede si $x = 1$. En la gráfica de la función, el punto y correspondiente es -3. Así, en el punto de coordenadas $(1, -3)$ la gráfica de $y = (x-4)\sqrt[3]{x}$ tiene tangente horizontal, a saber la recta con ecuación $y = -3$.

De la fórmula de la derivada vemos que si x tiende a cero, el numerador tiende a -4 y el denominador tiende a 0 por lo que, cuando $x \to 0$, $y' \to \infty$. El punto y correspondiente es 0, luego en el punto de coordenadas $(0, 0)$ de la gráfica, la función $y = (x-4)\sqrt[3]{x}$ tiene tangente vertical, a saber, la recta con ecuación $x = 0$.

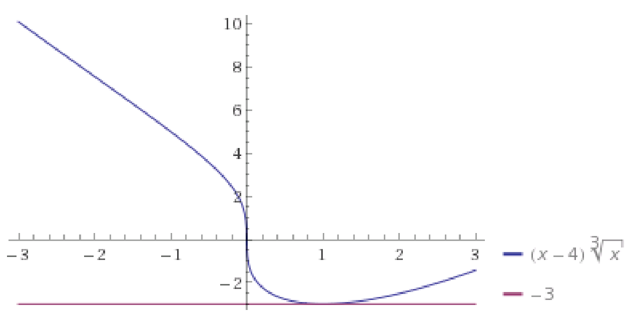

Figura 1: Tangente horizontal en $x = 1$, tangente vertical en $x = 0$.

☺