La **función piso** está definida en el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. Asocia a cada $x \in \mathbb{R}$ el máximo entero menor o igual que x. Se denota con

$$\text{piso}(x) = \lfloor x \rfloor = \text{máximo entero menor o igual a } x.$$

Por ejemplo $\lfloor 1.83 \rfloor = 1$, $\lfloor 97 \rfloor = 97$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$.

Encuentra los elementos $\max A$ **y** $\min A$ **para**

$$A = \left\{ x^2 \lfloor |x-1| + 2 \rfloor + \lfloor x \rfloor, \text{ tal que } x \in (0,2] \right\}.$$

Veamos cómo se comporta el número $x^2 \lfloor |x-1| + 2 \rfloor + \lfloor x \rfloor$ para $x \in (0,1)$, $x \in [1,2)$ y $x = 2$.

Si x está en el intervalo abierto $(0,1)$ su distancia al 1 siempre será menor que 1 pero mayor que 0 (pues $1 \notin (0,1)$), es decir $0 < |x-1| < 1$. Sumando 2 en cada miembro de la desigualdad obtenemos $2 < |x-1| + 2 < 3$, luego $\lfloor |x-1| + 2 \rfloor = 2$ y $x^2 \lfloor |x-1| + 2 \rfloor = 2x^2$. Como $x \in (0,1)$, $\lfloor x \rfloor = 0$. Tenemos entonces que $x^2 \lfloor |x-1| + 2 \rfloor + \lfloor x \rfloor = 2x^2$.

Si x está en el intervalo semiabierto $[1,2)$ su distancia al 1 será menor que 1 y mayor o igual que 0 (pues $|1-1| = 0$), es decir $0 \le |x-1| < 1$, Sumando 2 en cada miembro de la desigualdad obtenemos $2 \le |x-1| + 2 < 3$, luego $\lfloor |x-1| + 2 \rfloor = 2$ y $x^2 \lfloor |x-1| + 2 \rfloor = 2x^2$. Como $x \in [1,2)$, $\lfloor x \rfloor = 1$. Tenemos entonces que $x^2 \lfloor |x-1| + 2 \rfloor + \lfloor x \rfloor = 2x^2 + 1$.

Finalmente, si $x = 2$ entonces $\lfloor |x-1| + 2 \rfloor = 3$ y $x^2 \lfloor |x-1| + 2 \rfloor = 3x^2$, $\lfloor x \rfloor = 2$ y $x^2 \lfloor |x-1| + 2 \rfloor + \lfloor x \rfloor = 3x^2 + 2 = 14$.

Es decir,

$$x^2 \lfloor |x-1| + 2 \rfloor + \lfloor x \rfloor = \begin{cases} 2x^2, & \text{para } 0 < x < 1 \\ 2x^2 + 1, & \text{para } 1 \le x < 2 \\ 14, & \text{para } x = 2 \end{cases}$$

Por inspección vemos que el valor máximo que puede alcanzar en A el número $x^2 \lfloor |x-1| + 2 \rfloor + \lfloor x \rfloor$ es 14. Así, $\max A = 14$.

El mínimo de los valores de $x^2 \lfloor |x-1| + 2 \rfloor + \lfloor x \rfloor$ es 0 cuando $x = 0$, pero 0 no es un elemento de A luego el $\min A$ no existe. No hay un elemento de A que sea menor o igual que cualquier otro elemento de A (¿Lo puedes demostrar?).

☺