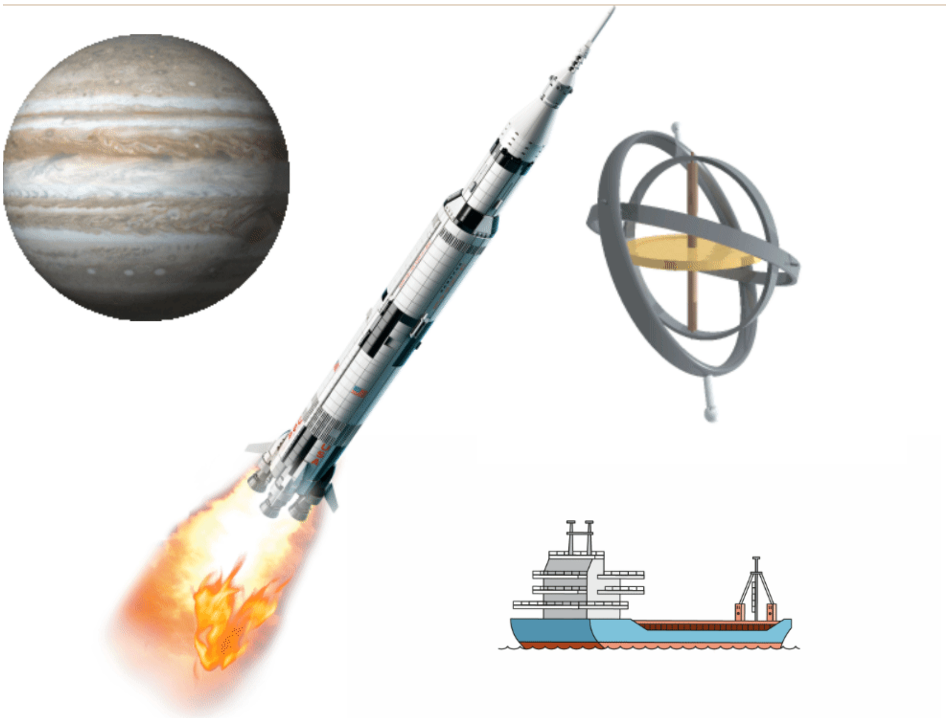
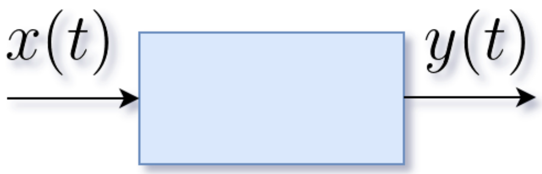
Математическое моделирование комбинированных динамических систем

Выделено жирным -- ввод нового понятия.
Выделено цветом -- суть.

Многочисленные современные технические системы содержат дискретные элементы с сосредоточенными по пространству параметрами (абсолютно твердые тела, датчики первичной информации, усилители, двигатели) или как их еще называют **объекты управления с сосредоточенными по пространству параметрами** (ОУСПП) и континуальные элементы с распределенными (в том или ином смысле) по пространству параметрами (упругие стержни, оболочки, потоки жидкости и газа) или другими словами **объекты управления с распределенными по пространству параметрами** (ОУРПП). Дискретные (ОУСПП) и континуальные (ОУРПП) элементы связаны между собой через границы раздела (граничные поверхности), и в этом смысле соответствующие физические модели являются **комбинированными**.

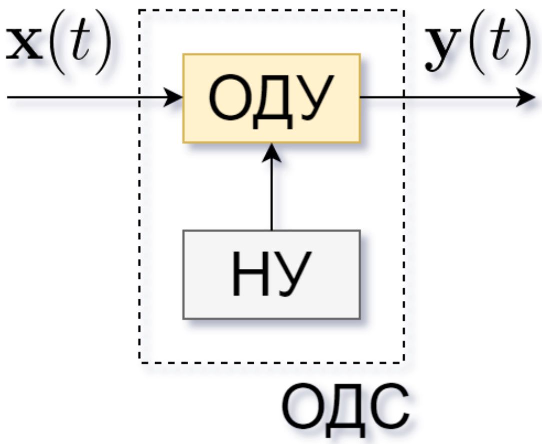


Определение. Всякую систему, преобразующую входную вектор-функцию (возмущение) $x(t)$ и выходную вектор-функцию (реакцию) $y(t)$, среди аргументов которых содержится время t, причем так, что $x\Big|_{t>t_1}$ не влияет на $y\Big|_{t\leqslant t_1}$, будем называть **динамической системой**.



Замечание. Полагаем что $x\Big|_{t\geqslant t_1}$ не влияет на $y\Big|_{t\leqslant t_1}$.

Рассмотрим теперь отдельно какой-либо объект управления с сосредоточенными по пространству параметрами комбинированной физической модели.



Здесь $t \in \mathbb{R}$, а $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{N_x}, \mathbf{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{N_y}$ -- т.н. «сосредоточенные» входная и выходная вектор-функции. Движение подобного объекта с достаточной степенью точности описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ) при задании соответствующих начальных условий (НУ).

Символически соответствующая задача Коши может быть записана в виде:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 \qquad (1)$$

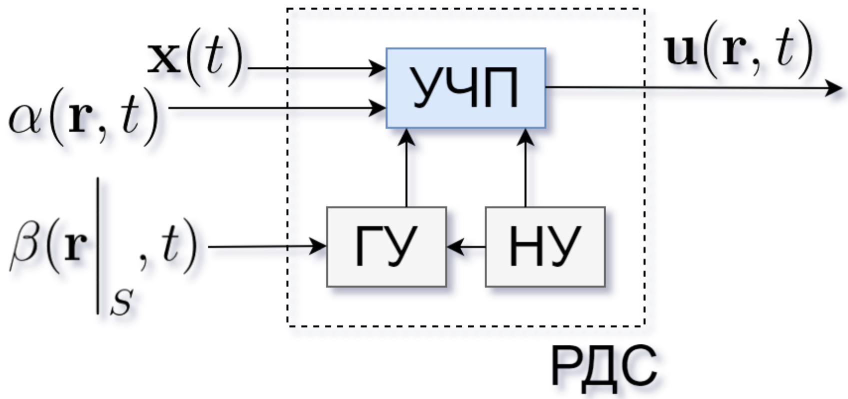
Здесь $\dot{(\ldots)} = \frac{\mathrm{d}(\ldots)}{\mathrm{d}t}$, а $\mathbf{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{N_x} \times \mathbb{R}^{N_y} \to \mathbb{R}^{N_y}$ -- некоторая нелинейная функция своих аргументов.

Определение. Всякую динамическую систему (Рис. 2), которая явно представляется системой обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) при заданных начальных условиях (НУ), будем называть **обыкновенной динамической системой** (ОДС) с сосредоточенными характеристиками.

> Применительно к задачам механики, вектор $\mathbf{y}$ обычно представляет собой набор обобщенных координат и скоростей объекта управления с сосредоточенными по пространству параметрами, который обладает конечным числом степеней свободы. Из аналитической механики известно, что уравнения движения элемента с конечным числом степеней свободы, записанные, например, в форме уравнений Лагранжа II рода, всегда можно разрешить относительно обобщенных ускорений. Включение в набор $\mathbf{y}$ обобщенных скоростей позволяет привести разрешенные относительно вторых производных обобщенных координат по времени ОДУ к нормальной форме Коши (1).

Замечание. При решении конкретных задач вектор $\mathbf{y}$ может представлять собой некоторое подмножество набора обобщенных координат и скоростей объекта управления с сосредоточенными по пространству параметрами.

Рассмотрим теперь отдельно какой-либо объект управления с распределенными по пространству параметрами комбинированной физической модели.



Здесь символом $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_{N_r})^T \in \mathbb{R}^{N_r}$ обозначена совокупность (набор) независимых (лагранжевых либо эйлеровых) пространственных координат, позволяющих указать некоторую индивидуальную точку объекта управления с распределенными по пространству параметрами.

Пусть символ $\Omega \subset \mathbb{R}^{N_r}$ обозначает некоторую область, занятую объектом, а символ $S = \partial\Omega$ означает границы области.

Символ $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{N_x}$ обозначает сосредоточенную входную вектор-функцию, а символы $\alpha(\mathbf{r}, t)$, $\alpha : \mathbb{R}^{N_r} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{N_\alpha}$ и $\beta(\mathbf{r}\big|_S, t)$, $\beta : \mathbb{R}^{N_r - 1} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{N_\beta}$ обозначают распределенные входные вектор-функции, зависящие не только от времени t, но и от координат $\mathbf{r}$ индивидуальной точки континуального элемента.

Символ $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{u} : \mathbb{R}^{N_r} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{N_u}$ -- распределенная выходная вектор-функция, характеризующая движение объекта с распределенными по пространству параметрами.

> Применительно к задачам механики, под распределенной выходной вектор-функцией $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ естественно понимать совокупность полей перемещений и скоростей континуального элемента (континуальных элементов) или ОУРПП.

Движение объекта с распределенными по пространству параметрами (с достаточной степенью точности) описывается уравнениями в частных производных, дополненных соответствующими начальными и граничными условиями, т.е. начально-краевой задачей для уравнений в частных производных. Соответствующая структурной схеме на Рис. 3 модельная начально-краевая задача символически может быть представлена в виде:

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbb{F}(t, \mathbf{u}, \mathbf{x}, \alpha) \qquad (2)$$

$$\mathbb{G}(\mathbf{u}, \beta)\Big|_S = 0 \qquad (3)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{r}) \qquad (4)$$

Дифференциальные операторы $\mathbb{F}$, содержащие частные производные $\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}, \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2}$ (и, возможно, более высокого порядка) по независимым пространственным переменным, действуют на функции $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ и соответствуют уравнениям в частных производных (УЧП), описывающим движение объектов с распределенными по пространству параметрами.

Операторы $\mathbb{G}$ могут содержать частные производные $\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$ (и, возможно, более высокого порядка), действуют на функции $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ и соответствуют граничным условиям (ГУ), поставленным на границе объектов с распределенными по пространству параметрами.

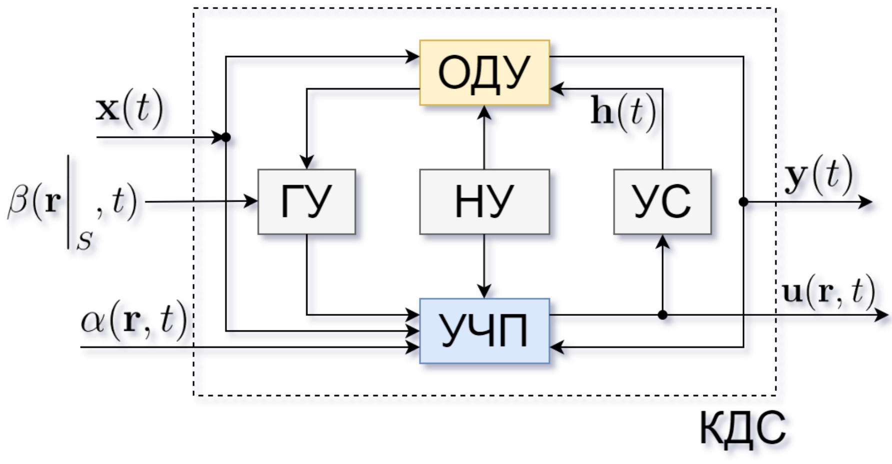
> Заметим, что фактически УЧП, моделирующие движение ОУРПП, представляют собой уравнения движения бесконечно малого фрагмента (частицы) сплошной среды. Последние уравнения можно разрешить относительно ускорений. Дополняя поля перемещений частиц среды полями их скоростей, соответствующие УЧП можно привести к форме (2).
>
> Для жидких сред поля перемещений не актуальны, и уравнения их движения (относительно скоростей частиц среды) непосредственно приводятся к виду (2).
>
> Далее, уравнения теплопроводности и диффузии характеризуются первым порядком по времени t , и также непосредственно приводятся к форме (2).

Определение. Всякую динамическую систему, которая явно представляется системой уравнений с частными производными (УЧП) при заданных граничных условиях (ГУ) и начальных условиях (НУ), будем называть **распределенной динамической системой** (РДС).

Ясно, что динамическое поведение исходной комбинированной физической модели невозможно в общем случае моделировать ни на основе лишь обыкновенных динамических систем (ОДС), ни на основе лишь распределенных динамических систем (РДС).

> т.е. для моделирования комбинирований физической модели потребуется ввести ещё одно определение.

Определение. Всякую динамическую систему, которая является совокупностью обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) и уравнений с частными производными (УЧП) с граничными условиями (ГУ) при заданных условиях связи (УС) и начальных условиях (НУ) будем называть **комбинированной динамической системой** (КДС) (англ. *hybrid dynamic system (HDS)* [3] -- гибридная динамичная система).



Здесь, как и ранее, $\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{N_x}$ и $\mathbf{y}(t), \quad \mathbf{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{N_y}$ суть сосредоточенные входная и выходная вектор-функции, причем в набор $\mathbf{y}$ включены обобщенные координаты и скорости всех объектов с сосредоточенными по пространству параметрами (ОУСПП).

$\mathbf{r} \in \mathbb{R}^{N_r}$ представляет собой совокупность (набор) независимых (лагранжевых либо эйлеровых) координат, позволяющих указать некоторую индивидуальную точку того или иного объекта с распределенными по пространству параметрами (ОУРПП).

$\Omega \subset \mathbb{R}^{N_r}, S = \partial\Omega$ суть области, занимаемые объектами с распределенными по пространству параметрами и их границы.

Символы $\alpha(\mathbf{r}, t), \quad \alpha : \mathbb{R}^{N_r} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{N_\alpha}$ и $\beta(\mathbf{r}\big|_S, t), \quad \beta : \mathbb{R}^{N_r - 1} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{N_\beta}$ обозначают распределенные входные вектор-функции.

Символ $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{u} : \mathbb{R}^{N_r} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{N_u}$ обозначает распределенную выходную вектор-функцию и представляет собой, например, совокупность полей перемещений и скоростей объектов с распределенными по пространству параметрами.

Символ $\mathbf{h}(t), \quad \mathbf{h} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{N_h}$ соответствует условиям связи и представляет собой, например, совокупность сил и моментов сил, действующих через границы раздела со стороны объектов с распределенными по пространству параметрами на объекты с сосредоточенными по пространству параметрами.

Символически, модельные уравнения, соответствующие схеме на Рис. 4, могут быть представлены в виде:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{h}) \quad (5)$$

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbb{F}(t, \mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \alpha), \quad \mathbf{r} \in \Omega \quad (6)$$

$$\mathbb{G}(\mathbf{u}, \mathbf{y}, \beta)\Big|_S = 0 \quad (7)$$

$$\mathbf{h} = \int_S \mathbb{H}(\mathbf{u}) dS \quad (8)$$

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \quad \mathbf{u}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{r}) \quad (9)$$

Здесь $\mathbf{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{N_x} \times \mathbb{R}^{N_y} \to \mathbb{R}^{N_y}$.

Дифференциальные операторы $\mathbb{F}$, содержащие частные производные $\partial/\partial\mathbf{r}, \partial^2/\partial\mathbf{r}^2$ (и, возможно, более высокого порядка) по независимым пространственным переменным, действуют на функции $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ и соответствуют уравнениям в частных производных (УЧП), описывающим движение объектов с распределенными по пространству параметрами.

Операторы $\mathbb{G}$ могут содержать частные производные $\partial/\partial\mathbf{r}$ (и, возможно, более высокого порядка), действуют на функции $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ и соответствуют граничным условиям (ГУ), поставленным на границе объектов с распределенными по пространству параметрами.

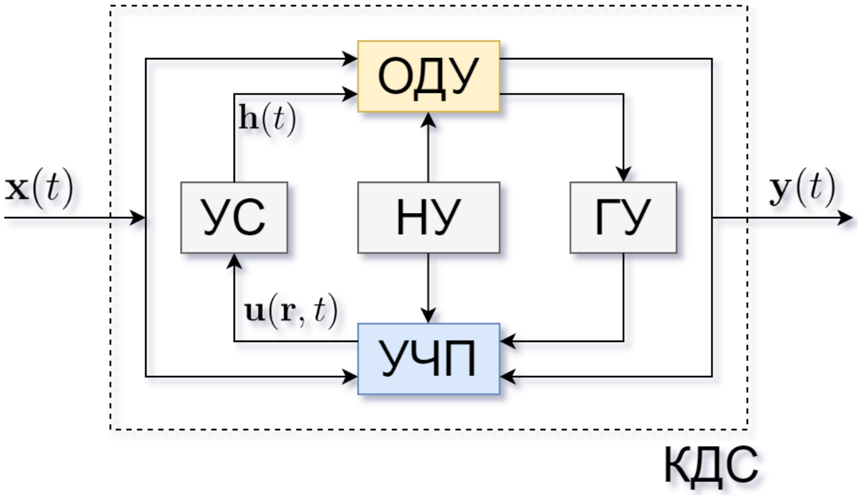
Входящие в (8) операторы $\mathbb{H}$ содержат производные $\partial/\partial\mathbf{r}$ и, возможно, более высокого порядка, действуют на поля перемещений и скоростей $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ объектов с распределенными по пространству параметрами и переводят их в элементарные поверхностные силы и элементарные моменты поверхностных сил $\mathbb{H}(\mathbf{u})dS$.

> В принципе, положение границ S может зависеть от наборов величин $\mathbf{y}, \mathbf{u}$. Однако надлежащим деформированием независимых пространственных координат $\mathbf{r}$ можно привести КДС к виду $(5) - (9)$.

Таким образом, (5) -- суть ОДУ, (6) -- суть УЧП, (7) -- суть ГУ, роль условий связи (УС) выполняют выражения (8) для сил и моментов сил, действующих со стороны континуальных элементов на дискретные, а (9) -- суть НУ.

Замечание. При решении конкретных задач вектор $\mathbf{y}$ может представлять собой некоторое подмножество набора обобщенных координат и скоростей объекта управления с сосредоточенными по пространству параметрами.

Заметим, что в большинстве случаев наибольший интерес представляют именно сосредоточенные входные вектор-функции (возмущения) и сосредоточенные выходные вектор-функции (реакции) комбинированных динамических систем (КДС). В частности, структурная схема КДС с сосредоточенной входной вектор-функцией $\mathbf{x}(t)$ и сосредоточенной выходной вектор-функцией $\mathbf{y}(t)$ приведена на Рис. 5.



Символически модельные уравнения, соответствующие структурной схеме на Рис. 5, могут быть представлены в виде:

$$
\begin{gathered}
\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{h}) \\
\dot{\mathbf{u}} = \mathbb{F}(t, \mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}), \quad \mathbf{r} \in \Omega \\
\mathbb{G}(\mathbf{u}, \mathbf{y})\Big|_S = 0 \\
\mathbf{h} = \int_S \mathbb{H}(\mathbf{u}) dS \\
\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \quad \mathbf{u}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{r})
\end{gathered}
\tag{10}
$$

Также возможна ситуация, когда вектор-функция $\mathbf{f}$ и операторы $\mathbb{F}$ в модельных уравнениях (10) не зависят от времени t , а зависимость от времени t сказывается лишь посредством входной вектор-функции $\mathbf{x}(t)$:

$$
\begin{gathered}
\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{h}) \\
\dot{\mathbf{u}} = \mathbb{F}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}), \quad \mathbf{r} \in \Omega \\
\mathbb{G}(\mathbf{u}, \mathbf{y})\Big|_S = 0 \\
\mathbf{h} = \int_S \mathbb{H}(\mathbf{u}) dS \\
\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \quad \mathbf{u}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{r})
\end{gathered}
\tag{11}
$$

Следуя терминологии теории автоматического управления, такие КДС называются **стационарными**.

Начальные значения $\mathbf{y}_0, \quad \mathbf{u}_0(\mathbf{r})$ могут соответствовать равновесному состоянию КДС. В равновесном состоянии $(\dot{\ldots}) = 0$, и данные величины суть решение уравнений:

$$\begin{gathered}
\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{h}_0) = 0 \\
\mathbb{F}(\mathbf{u}_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, 0) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega \\
\mathbb{G}(\mathbf{u}_0, \mathbf{y}_0)\Big|_S = 0 \qquad\qquad (12) \\
\mathbf{h}_0 = \int_S \mathbb{H}(\mathbf{u}_0) dS
\end{gathered}$$

Здесь $\mathbf{x}_0 = Const$. Заметим, что, если ввести отклонение $\mathbf{x}^*(t)$ входной вектор-функции от постоянного значения, т.е. полагать:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}^*(t) \qquad (13)$$

а также рассматривать отклонения $\mathbf{y}^*, \mathbf{u}^*, \mathbf{h}^*$ величин $\mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{h}$ от равновесных значений

$$\begin{gathered}
\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0 + \mathbf{y}^*(t) \\
\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}_0(\mathbf{r}) + \mathbf{u}^*(\mathbf{r}, t) \qquad (14) \\
\mathbf{h}(t) = \mathbf{h}_0 + \mathbf{h}^*(t)
\end{gathered}$$

то, очевидно, начальные условия относительно $\mathbf{y}^*, \mathbf{u}^*$ станут нулевыми

$$\mathbf{y}^*(0) = 0, \quad \mathbf{u}^*(\mathbf{r}, 0) = 0 \qquad (15)$$

Замечание. Как правило, функция $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{h})$ является аналитической по всем своим аргументам в некоторой области их изменения, а выражения для величин $\mathbb{F}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}), \quad \mathbb{G}(\mathbf{u}, \mathbf{y}), \quad \mathbb{H}(\mathbf{u})$ аналитичны по $\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}$ и производным величин $\mathbf{u}$ по пространственным координатам $\mathbf{r}$ по крайней мере в некоторой области изменения соответствующих величин. Однако возможны и досадные исключения, например, неравномодульная теория упругости.

> Применение данного математического аппарата позволяет избежать «проблемы переуправления» и генерации колебаний по неучтенным формам при моделировании управляемых деформируемых объектов, а также исследовать устойчивость гидродинамических подвесов с полным учетом зависимости поля скоростей поддерживающего слоя от радиальной координаты.

Применение

Данный класс математических моделей был назван комбинированными динамическими системами (КДС) в работах К.П. Андрейченко и Д.К. Андрейченко [1, 2].

Математические модели в форме КДС применялись при моделировании гидродинамических подвесов, управляемых подвижных объектов с деформируемыми конструкциями и т.д. в работах К.П. Андрейченко, Д.К. Андрейченко, Т.Ю. Петровой, М.С. Комаровой и М.С. Портенко.

Литература

[1] *Андрейченко, Д.К. К теории комбинированных динамических систем / Д.К. Андрейченко, К.П. Андрейченко // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2000. – № 3. – С. 54-69.*

[2] *Андрейченко, Д.К. Моделирование, анализ и синтез комбинированных динамических систем. Учебное пособие / Д.К. Андрейченко, К.П. Андрейченко. – Саратов: Райт-Экспо. – 2013. – 144 с.*

[3] *Andreichenko D.K., Andreichenko K.P. On the theory of hybrid dynamical systems // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2000. Vol. 39. No 3. pp. 383-398.*