Algebra Komputerowa

Elementy Teorii Grup

Filip Zieliński

2025

Spis Treści

KOŁO NAUKOWE

KOŁO NAUKOWE

Definicja

Grupa $(G, \cdot)$ jest **grupą cykliczną** wtw. gdy, istnieje taki element $a \in G$, że każdy element grupy G jest jego potęgą, to znaczy

$$\forall g \in G \; \exists k \in \mathbb{Z} : \quad g = a^k.$$

Element a nazywamy wtedy *generatorem grupy cyklicznej*

Uwaga

W konwencji multiplikatywnej mówimy o k-tej *potędze elementu a* i zapisujemy ją jako $a^k = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{k}$, natomiast w konwencji addytywnej, mówimy o k-tej *wielokrotności elementu a* i zapisujemy $k \cdot a = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{k}$.

Konwencja

Jeśli a jest generatorem grupy G to piszemy $G = \langle a \rangle$.

Przykład

Grupami cyklicznymi są np.

1. $(\sqrt[n]{1}, \cdot)$
2. $(\mathbb{Z}_n, +)$
3. $\mathbb{Z}$

Abelowość grup cyklicznych

Obserwacja

Każda grupa cykliczna jest abelowa.

Dowód.

Rozważmy grupę $\langle a \rangle$. Wystarczy zauważyć, że z łączności wprost wynika $a^p a^q = a^q a^p$. $\square$

Skończone grupy cykliczne

KOŁO NAUKOWE

Twierdzenie

Grupa cykliczna $\langle a \rangle$ jest skończona wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją liczby całkowite p, q, gdzie $p \neq q$, takie, że $a^p = a^q$.

Skończone grupy cykliczne

Twierdzenie

Grupa cykliczna $\langle a \rangle$ jest skończona wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją liczby całkowite p, q, gdzie $p \neq q$, takie, że $a^p = a^q$.

Obserwacja

Grupę cykliczną rzędu n można zapisać w postaci $\{a^0, a^1 \ldots, a^{n-1}\}$, natomiast nieskończoną grupę cykliczną w postaci $\{\ldots, a^{-1}, a^0, a^1, \ldots\}$.

Wniosek

Grupa cykliczna $\langle a \rangle$ jest nieskończona wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $p \neq q$, $p, q \in \mathbb{Z}$ zachodzi $a^p \neq a^q$.

izomorfizm grup cyklicznych

Twierdzenie

Wszystkie grupy cykliczne nieskończonego rzędu są izomorficzne. Wszystkie grupy cykliczne skończone równych rzędów są izomorficzne.