



Algebra Komputerowa

Elementy Teorii Grup [1]

Filip Zieliński

2025

1. Grupy Cykliczne
2. Warstwy
3. Podgrupy Normalne
4. Jądro Homomorfizmu
5. Kongruencje w grupach

Definicja

Niech G będzie grupą. Jeśli G jest grupą skończoną, to rząd G to liczba elementów G . Jeżeli G jest grupą nieskończoną, to mówimy, że rząd grupy G jest nieskończony. Rząd grupy G oznaczamy jako

$$\text{ord}(G)$$

Definicja

Niech G będzie grupą. Jeśli G jest grupą skończoną, to rząd G to liczba elementów G . Jeżeli G jest grupą nieskończoną, to mówimy, że rząd grupy G jest nieskończony. Rząd grupy G oznaczamy jako

$$\text{ord}(G)$$

Uwaga

Przez całą prezentację w przeważającej większości stosujemy konwencje grupy mnożeniowej, z tym wyjątkiem, że element neutralny oznaczamy jako e zamiast 1 .

Definicja

Grupa (G, \cdot) jest **grupą cykliczną** wtw. gdy, istnieje taki element $a \in G$, że każdy element grupy G jest jego potęgą, to znaczy

$$\forall g \in G \exists k \in \mathbb{Z} : g = a^k.$$

Element a nazywamy wtedy *generatorem grupy cyklicznej*

Uwaga

W konwencji multiplikatywnej mówimy o k -tej potędze elementu a i zapisujemy ją jako $a^k = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_k$, natomiast w konwencji

addytywnej, mówimy o k -tej wielokrotności elementu a i zapisujemy $k \cdot a = \underbrace{a + a + \dots + a}_k$.

Konwencja

Jeśli a jest generatorem grupy G to piszemy $G = \langle a \rangle$.

Przykład

Grupami cyklicznymi są np.

1. $(\sqrt[n]{1}, \cdot)$
2. $(\mathbb{Z}_n, +)$
3. \mathbb{Z}

Obserwacja

Każda grupa cykliczna jest abelowa.

Dowód.

Rozważmy grupę $\langle a \rangle$. Wystarczy zauważyć, że z łączności wprost wynika $a^p a^q = a^q a^p$. ☐

Twierdzenie

Grupa cykliczna $\langle a \rangle$ jest skończona wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją liczby całkowite p, q , gdzie $p \neq q$, takie, że $a^p = a^q$.

Twierdzenie

Grupa cykliczna $\langle a \rangle$ jest skończona wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją liczby całkowite p, q , gdzie $p \neq q$, takie, że $a^p = a^q$.

Obserwacja

Grupę cykliczną rzędu n można zapisać w postaci $\{a^0, a^1, \dots, a^{n-1}\}$, natomiast nieskończoną grupę cykliczną w postaci $\{\dots, a^{-1}, a^0, a^1, \dots\}$.

Wniosek

Grupa cykliczna $\langle a \rangle$ jest nieskończona wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $p \neq q$, $p, q \in \mathbb{Z}$ zachodzi $a^p \neq a^q$.

Twierdzenie

Wszystkie grupy cykliczne nieskończonego rzędu są izomorficzne.
Wszystkie grupy cykliczne skończone równych rzędów są izomorficzne.

Twierdzenie

Niech $G = \langle a \rangle$ będzie grupą cykliczną, a H jej podgrupą, $H < G$. Wtedy $H = \{e\}$, albo H jest grupą cykliczną postaci $\langle a^m \rangle$ dla pewnego $m \in \mathbb{N}$. Dodatkowo:

- Jeżeli G jest grupą nieskończoną, to dla każdego $p, q \in \mathbb{N}$, $p \neq q$ zachodzi $\langle a^p \rangle \neq \langle a^q \rangle$.
- Jeżeli G jest grupą skończoną rzędu n , to każda podgrupa jest postaci $\langle a^m \rangle$ dla pewnego m będącego dzielnikiem n . Wtedy G ma tyle różnych podgrup, ile dzielników naturalnych liczba n . Podgrupa $\langle a^m \rangle$ ma dokładnie $q = \frac{n}{m}$ elementów.

Definicja

Jeśli podgrupa $\langle a \rangle$ grupy G jest skończona i ma rząd n , to mówimy, że a jest *elementem rzędu n* . Jeśli $\langle a \rangle$ jest nieskończona to mówimy, że a jest *elementem rzędu nieskończonego*. Rząd elementu a w grupie G oznaczamy jako

$$\text{ord}_G(a)$$

Niech będzie dana grupa G i jej podgrupa H .

Definicja

Warstwą lewostronną elementu $a \in G$ względem podgrupy H nazywamy zbiór $\{ah \mid h \in H\}$ i oznaczamy przez aH .

Definicja

Warstwą prawostronną elementu $a \in G$ względem podgrupy H nazywamy zbiór $\{ha \mid h \in H\}$ i oznaczamy przez Ha .

Obserwacja

Niech $b \in G$. Wtedy

$$b \in aH \Leftrightarrow (\exists h \in H : b = ah) \Leftrightarrow (\exists h \in H : a^{-1}b = h) \Leftrightarrow a^{-1}b \in H.$$

Analogicznie

$$b \in Ha \Leftrightarrow ba^{-1} \in H.$$

Obserwacja

Niech $b \in G$. Wtedy

$$b \in aH \Leftrightarrow (\exists h \in H : b = ah) \Leftrightarrow (\exists h \in H : a^{-1}b = h) \Leftrightarrow a^{-1}b \in H.$$

Analogicznie

$$b \in Ha \Leftrightarrow ba^{-1} \in H.$$

Konwencja

W zapisie addytywnym warstwy oznaczamy przez $a + H$.

Obserwacja

W grupie abelowej G zachodzi

$$\forall a \in G \forall H < G \quad aH = Ha.$$

Twierdzenie

Jeśli H jest podgrupą grupy G , to każde dwie warstwy lewostronne (prawostronne) względem H są albo równe albo rozłączne.

Twierdzenie

Jeśli H jest podgrupą grupy G , to każde dwie warstwy lewostronne (prawostronne) względem H są albo równe albo rozłączne.

Wniosek

Każdy element grupy G należy do dokładnie jednej warstwy lewostronnej (prawostronnej) względem podgrupy H .

Wniosek

Jeśli H jest podgrupą grupy G to

1. $aH = bH \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$

2. $Ha = Hb \Leftrightarrow ba^{-1} \in H$

Twierdzenie

Dowolne dwie lewostronne (prawostronne) warstwy względem tej samej podgrupy są równoliczne.

Dowolna warstwa lewostronna jest równa z dowolną warstwą prawostronną względem tej samej podgrupy.

Twierdzenie

Dowolne dwie lewostronne (prawostronne) warstwy względem tej samej podgrupy są równoliczne.

Dowolna warstwa lewostronna jest równa z dowolną warstwą prawostronną względem tej samej podgrupy.

Dowód.

Dowód dla warstw lewostronnych. Wystarczy pokazać, że $\varphi : aH \rightarrow bH$ zadane przez $\varphi(ah) = bh$ jest bijekcją. Dla drugiego stwierdzenia, wystarczy obserwacja, że $eH = He = H$. □

Twierdzenie

Zbiór odwrotności elementów warstwy lewostronnej aH (prawostronnej Ha) jest warstwą prawostronną Ha^{-1} (lewostronną $a^{-1}H$).

Twierdzenie

Zbiór odwrotności elementów warstwy lewostronnej aH (prawostronnej Ha) jest warstwą prawostronną Ha^{-1} (lewostronną $a^{-1}H$).

Dowód.

Dowód dla warstw lewostronnych. $b \in aH \Rightarrow b = ah$ dla pewnego $h \in H$. Wtedy $b^{-1} = (ah)^{-1} = h^{-1}a^{-1} \in Ha^{-1}$.

Weźmy $c \in Ha^{-1} \Rightarrow c = h_1a^{-1}$ dla pewnego $h_1 \in H$. Zauważmy, że $c = c_1^{-1}$ dla $c_1 = ah_1^{-1} \in aH$. □

Wniosek

Zbiór wszystkich warstw lewostronnych względem podgrupy H jest równoliczny ze zbiorem wszystkich warstw prawostronnych względem podgrupy H .

Dowód.

Na podstawie poprzedniego twierdzenia, zauważmy, że odwzorowanie prowadzące ze zbioru warstw lewostronnych w zbiór warstw prawostronnych względem tej samej podgrupy H zadane wzorem $\varphi(aH) = Ha^{-1}$ jest bijekcją. □

Definicja

Niech G będzie grupą skończoną, a H jej podgrupą. **Indeksem podgrupy H** w grupie G nazywamy liczbę warstw lewostronnych grupy G względem H . Indeks podgrupy H w grupie G oznaczamy przez $[G : H]$

Twierdzenie (Lagrange'a)

Niech G będzie grupą skończoną, a H jej podgrupą. Wtedy

$$\text{ord}(G) = \text{ord}(H)[G : H].$$

Definicja

Niech G będzie grupą skończoną, a H jej podgrupą. **Indeksem podgrupy H** w grupie G nazywamy liczbę warstw lewostronnych grupy G względem H . Indeks podgrupy H w grupie G oznaczamy przez $[G : H]$

Twierdzenie (Lagrange'a)

Niech G będzie grupą skończoną, a H jej podgrupą. Wtedy

$$\text{ord}(G) = \text{ord}(H)[G : H].$$

Dowód.

Wystarczy obserwacja, że każdy element należy do dokładnie jednej warstwy oraz każda warstwa jest równoliczna. □

Wniosek

Rząd elementu grupy skończonej jest dzielnikiem rzędu grupy, to znaczy dla grupy G zachodzi $\text{ord}_G(a) \mid \text{ord}(G) \quad \forall a \in G$.

Wniosek

W grupie skończonej G rzędu n zachodzi $a^n = e$ dla każdego $a \in G$

Dowód.

Niech $\text{ord}_G(a) = m$. Wtedy $n = mq$. Zatem
 $a^n = (a^m)^q = e^q = e$



Twierdzenie

Grupa skończona G , której rząd jest liczbą pierwszą jest grupą cykliczną.

Twierdzenie

Grupa skończona G , której rząd jest liczbą pierwszą jest grupą cykliczną.

Dowód.

$\text{ord}(G) > 1$, zatem istnieje $a \in G$, różny od e . Ponieważ $\text{ord}_G(a) \mid \text{ord}(G)$ oraz jedynym elementem rzędu 1 jest element neutralny, to $\text{ord}_G(a) = \text{ord}(G)$ zatem $\langle a \rangle = G$. □

Twierdzenie

Grupa skończona G , której rząd jest liczbą pierwszą jest grupą cykliczną.

Dowód.

$\text{ord}(G) > 1$, zatem istnieje $a \in G$, różny od e . Ponieważ $\text{ord}_G(a) \mid \text{ord}(G)$ oraz jedynym elementem rzędu 1 jest element neutralny, to $\text{ord}_G(a) = \text{ord}(G)$ zatem $\langle a \rangle = G$. □

Wniosek

Grupa różna od jednoelementowej nie zawiera podgrup właściwych wtedy i tylko wtedy gdy jest skończona i jej rząd jest liczbą pierwszą.

Definicja

Niech G będzie grupą, a H jej podgrupą. Mówimy, że H jest **Podgrupą normalną** G , jeżeli zachodzi $\forall a \in G \quad aH = Ha$ (równość warstw prawostronnych i lewostronnych).

Konwencja

Jeżeli H jest podgrupą normalną grupy G to zapisujemy $H \trianglelefteq G$.

Konwencja

Funkcjonuje też równoważne określenie jako *Dzielnik Normalny*.

Obserwacja

Każda podgrupa grupy abelowej jest podgrupą normalną.

Obserwacja

Każda podgrupa grupy abelowej jest podgrupą normalną.

Obserwacja

Każda grupa zawiera trywialne podgrupy normalne - samą siebie i podgrupę jednoelementową (element neutralny).

Obserwacja

Każda podgrupa grupy abelowej jest podgrupą normalną.

Obserwacja

Każda grupa zawiera trywialne podgrupy normalne - samą siebie i podgrupę jednoelementową (element neutralny).

Twierdzenie

Rozważmy grupę G i jej podgrupę H . Zdefiniujmy zbiór $aHa^{-1} = \{aha^{-1} \mid h \in H\}$. Następujące warunki są równoważne:

1. $\forall a \in G \quad aH = Ha$
2. $\forall a \in G \quad aHa^{-1} = H$
3. $\forall a \in G \quad aHa^{-1} \subseteq H$

Przykład

- Rozważmy grupę $GL_n(R)$ wszystkich nieosobliwych macierzy $n \times n$ oraz jej podgrupę $SL_n(R)$ wszystkich macierzy $n \times n$ o wyznaczniku równym 1. Zachodzi $SL_n(R) \trianglelefteq GL_n(R)$
- Rozważmy grupę n -elementowych permutacji S_n oraz jej podgrupę permutacji parzystych A_n . Zachodzi $A_n \trianglelefteq S_n$.

Przykład

- Rozważmy grupę $GL_n(R)$ wszystkich nieosobliwych macierzy $n \times n$ oraz jej podgrupę $SL_n(R)$ wszystkich macierzy $n \times n$ o wyznaczniku równym 1. Zachodzi $SL_n(R) \trianglelefteq GL_n(R)$
- Rozważmy grupę n -elementowych permutacji S_n oraz jej podgrupę permutacji parzystych A_n . Zachodzi $A_n \trianglelefteq S_n$.

Lemat

Jeżeli liczba warstw lewostronnych (zatem też prawostronnych) względem podgrupy H wynosi 2, to zachodzi $H \trianglelefteq G$.

Twierdzenie

Niech będzie dany zbiór warstw grupy G względem jej podgrupy normalnej H . Wówczas odwzorowanie określone wzorem

$$aH \circ bH = (ab)H$$

określa poprawne działanie w tym zbiorze. Zbiór warstw z tak określonym działaniem jest grupą.

Twierdzenie

Niech będzie dany zbiór warstw grupy G względem jej podgrupy normalnej H . Wówczas odwzorowanie określone wzorem

$$aH \circ bH = (ab)H$$

określa poprawne działanie w tym zbiorze. Zbiór warstw z tak określonym działaniem jest grupą.

Definicja

Grupę warstw grupy G względem podgrupy normalnej H zdefiniowanej jak powyżej nazywamy **Grupą ilorazową** grupy G względem podgrupy H lub grupą ilorazową G modulo H i oznaczamy symbolem G/H

Przykład

1. $G/\{1\} \cong G$.
2. $G/G \cong \{1\}$.
3. $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_7$

Konwencja

Działanie w grupie warstw zazwyczaj oznaczamy tak samo jak działanie w grupie, co nie prowadzi do nieporozumień. Tak więc zwykle piszemy $aH \cdot bH$ w konwencji multiplikatywnej, bądź $(a + H) + (b + H)$ w zapisie addytywnym.

Definicja

Rozważmy grupy G, G' oraz homomorfizm $\varphi : G \rightarrow G'$. Jądro homomorfizmu φ to zbiór

$$\ker \varphi = \varphi^{-1}(\{e'\}) = \{a \in G \mid \varphi(a) = e'\}$$

gdzie e' to element neutralny grupy G' .

Twierdzenie

Jeśli $\varphi : G \rightarrow G'$ jest homomorfizmem grup G, G' to $\ker \varphi$ jest podgrupą normalną grupy G .

Twierdzenie

Jeśli $\varphi : G \rightarrow G'$ jest homomorfizmem grup G, G' to $\ker \varphi$ jest podgrupą normalną grupy G .

Dowód.

Dowód faktu, że jądro jest podgrupą był w zestawie zadań. Skorzystajmy z warunku równoważnego definicji podgrupy normalnej. $\ker \varphi \trianglelefteq G \Leftrightarrow \forall a \in G \quad a \ker \varphi a^{-1} \subseteq \ker \varphi$. Weźmy dowolny $k \in \ker \varphi$ oraz dowolny $a \in G$. Zachodzi $\varphi(aka^{-1}) = \varphi(a)\varphi(k)\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)e'\varphi(a^{-1}) = \varphi(aa^{-1}) = \varphi(e) = e'$, zatem $\forall a \in G \quad \forall k \in \ker \varphi \quad aka^{-1} \in \ker \varphi \Leftrightarrow \forall a \in G \quad a \ker \varphi a^{-1} \subseteq \ker \varphi$. □

Twierdzenie

Rozważmy grupę G i jej podgrupę normalną H . Odwzorowanie $\nu : G \rightarrow G/H$ zadane wzorem $\nu(a) = aH$ jest homomorfizmem oraz $\ker \nu = H$.

Twierdzenie

Rozważmy grupę G i jej podgrupę normalną H . Odwzorowanie $\nu : G \rightarrow G/H$ zadane wzorem $\nu(a) = aH$ jest homomorfizmem oraz $\ker \nu = H$.

Dowód.

Jest to homomorfizm ponieważ

$\nu(ab) = (ab)H = aH \cdot bH = \nu(a)\nu(b)$. Elementem neutralnym grupy G/H jest warstwa $eH = H = hH \quad \forall h \in H$. Zatem faktycznie $\ker \nu = \{a \mid \nu(a) = H\} = H$. □

Twierdzenie

Rozważmy grupę G i jej podgrupę normalną H . Odwzorowanie $\nu : G \rightarrow G/H$ zadane wzorem $\nu(a) = aH$ jest homomorfizmem oraz $\ker \nu = H$.

Dowód.

Jest to homomorfizm ponieważ

$\nu(ab) = (ab)H = aH \cdot bH = \nu(a)\nu(b)$. Elementem neutralnym grupy G/H jest warstwa $eH = H = hH \quad \forall h \in H$. Zatem faktycznie $\ker \nu = \{a \mid \nu(a) = H\} = H$. □

Konwencja

Tak zadany homomorfizm z G do G/H nazywamy *homomorfizmem kanonicznym*.

Wniosek

Każda podgrupa normalna jest jądrem homomorfizmu oraz jądrami homomorfizmów są tylko podgrupy normalne.

Wniosek

Każda podgrupa normalna jest jądrem homomorfizmu oraz jądrami homomorfizmów są tylko podgrupy normalne.

Twierdzenie

Jeśli φ jest homomorfizmem grupy G na grupę G' , to istnieje izomorfizm $\psi : G' \rightarrow G / \ker \varphi$, dla którego przemienny jest diagram

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & G \\ & \searrow \nu & \downarrow \psi \\ & & G' / \ker \varphi \end{array}$$

gdzie ν to homomorfizm kanoniczny.

Definicja

Relacja $R \subseteq X \times X$, gdzie $X \neq \emptyset$ jest **relacją równoważności** jeżeli są spełnione następujące warunki

1. $\forall x \in X \quad xRx$ (zwrotność)
2. $\forall x, y \in X \quad xRy \Rightarrow yRx$ (symetryczność)
3. $\forall x, y, z \in X \quad xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$ (przechodniość)

Definicja

Niech $R \subseteq X \times X$ będzie relacją równoważności. **Klasą abstrakcji** elementu $x \in X$ nazywamy zbiór

$$[x]_R = \{y \in X \mid xRy\}$$

Definicja

Niech X będzie niepustym zbiorem. **Podziałem zbioru** (rozbiciem zbioru) X nazywamy taką rodzinę \mathcal{I} niepustych jego podzbiorów, że każdy element należy dokładnie do jednego podzbioru tej rodziny. To znaczy, rodzina $\mathcal{I} = \{X_t\}_{t \in T}$ podzbiorów X jest jego podziałem wtedy i tylko wtedy, gdy

1. $X_t \neq \emptyset$ dla każdego $t \in T$,
2. jeśli $X_i \neq X_j$, to $X_i \cap X_j = \emptyset$,
3. $X = \bigcup_{t \in T} X_t$.

Definicja

Niech $R \subseteq X \times X$ będzie relacją równoważności. **Zbiorem ilorazowym** relacji R nazywamy rodzinę klas abstrakcji elementów z X i oznaczamy

$$X/R = \{[x]_R \mid x \in X\}.$$

Definicja

Niech $R \subseteq X \times X$ będzie relacją równoważności. **Zbiorem ilorazowym** relacji R nazywamy rodzinę klas abstrakcji elementów z X i oznaczamy

$$X/R = \{[x]_R \mid x \in X\}.$$

Twierdzenie

Niech $R \subseteq X \times X$ będzie relacją równoważności. Zbiór ilorazowy X/R jest podziałem zbioru X .

Twierdzenie

Niech X będzie niepustym zbiorem, a $\Pi = \{X_t\}_{t \in T}$ jego podziałem. Relacja $R \subseteq X \times X$ określona wzorem

$$xRy \Leftrightarrow \exists t \in T : x, y \in X_t$$

jest relacją równoważności.

Twierdzenie

Niech X będzie niepustym zbiorem, a $\Pi = \{X_t\}_{t \in T}$ jego podziałem. Relacja $R \subseteq X \times X$ określona wzorem

$$xRy \Leftrightarrow \exists t \in T : x, y \in X_t$$

jest relacją równoważności.

Twierdzenie

Niech G będzie grupą, a H jej podgrupą. Rodzina warstw lewostronnych $\{Ha \mid a \in G\}$ jest podziałem zbioru G . Rodzina warstw prawostronnych $\{aH \mid a \in G\}$ jest podziałem zbioru G . Relacje równoważności generowane przez te podziały oznaczamy odpowiednio przez $\overset{L}{\equiv}_H$ oraz $\overset{R}{\equiv}_H$.

Obserwacja

Jeżeli H jest podgrupą normalną G to zbiór warstw lewostronnych i prawostronnych G/H są sobie równe, zatem relacje równoważności indukowane przez nie są tą samą relacją.

Konwencja

Zwykle piszemy po prostu $a \equiv_H b$ lub $a \equiv b (H)$ lub $a \equiv b \pmod{H}$.

Wniosek

Jeżeli $H \trianglelefteq G$ oraz $a, b \in G$, to po prostu

$$a \equiv b \pmod{H} \Leftrightarrow a^{-1}b \in H.$$

Obserwacja

Niech G będzie grupą, $H \trianglelefteq G$ oraz $a, b, c, d \in G$. Załóżmy, że $a \equiv b \pmod{H}$ oraz $c \equiv d \pmod{H}$. Wynika z tego, że $aH = bH$ oraz $cH = dH$. Ponieważ G/H jest grupą, mamy $aH \cdot bH = cH \cdot dH \Leftrightarrow (ac)H = (bd)H \Leftrightarrow ac \equiv bd \pmod{H}$.

Obserwacja

Niech G będzie grupą, $H \trianglelefteq G$ oraz $a, b, c, d \in G$. Załóżmy, że $a \equiv b \pmod{H}$ oraz $c \equiv d \pmod{H}$. Wynika z tego, że $aH = bH$ oraz $cH = dH$. Ponieważ G/H jest grupą, mamy $aH \cdot bH = cH \cdot dH \Leftrightarrow (ac)H = (bd)H \Leftrightarrow ac \equiv bd \pmod{H}$.

Definicja

Relacja równoważności R w zbiorze G , który jest grupą, nazywa się **kongruencją**, jeśli zachodzi

$$\forall a, b, c, d \in G \quad aRb \wedge cRd \Rightarrow (ac)R(bd)$$

Twierdzenie

Jeśli H jest podgrupą normalną grupy G , to relacja przystawiania elementów modulo H jest kongruencją.

Twierdzenie

Jeśli H jest podgrupą normalną grupy G , to relacja przystawiania elementów modulo H jest kongruencją.

Twierdzenie

Jeśli relacja R jest kongruencją w grupie G , to klasa abstrakcji H zawierające element neutralny grupy G jest podgrupą normalną oraz zachodzi $G/R = G/H$.

Prezentacja bardzo mocno korzysta z rozdziału XII poniższej książki.

- [1] [Bolesław Gleichgewicht](#). *Algebra : podręcznik dla kierunków nauczycielskich studiów matematycznych*. [PWN](#), 1976.

Pytania, wątpliwości, uwagi ?