Algebra Komputerowa

Macierze Blokowe

Filip Zieliński

2025

Spis Treści

W poniższych rozważaniach skupimy się na macierzach blokowych 2×2. Wiele wyników da się jednak uogólnić.

Definicja

Rozważmy macierze $A \in \mathcal{M}_{n_1 \times m_1}, B \in \mathcal{M}_{n_1 \times m_2}, C \in \mathcal{M}_{n_2 \times m_1}, D \in \mathcal{M}_{n_2 \times m_2}$ nad ustalonym ciałem K. Wtedy, **Macierzą Blokową** (klatkową) $X \in \mathcal{M}_{n_1+n_2 \times m_1+m_2}$ złożoną z A, B, C, D definiujemy jako $X = (x_{ij})$, gdzie

$$x_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & i \leqslant n_1, \quad j \leqslant m_1 \\ b_{ij} & i \leqslant n_1, \quad m_1 < j \leqslant m_1 + m_2 \\ c_{ij} & n_1 < i \leqslant n_1 + n_2, \quad j \leqslant m_1 \\ d_{ij} & n_1 < i \leqslant n_1 + n_2 \quad m_1 < j \leqslant m_1 + m_2 \end{cases}$$

Macierze Blokowe

Takie macierze zapisujemy jako

$$X = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

Zauważmy, że macierze można dzielić na bloki na wiele sposobów,

$$X = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{array}\right]$$

ale zawsze zachodzi
$colA = colC, \quad colB = colD, \quad rowA = rowB, \quad rowC = rowD$

Obserwacja

Niech X, Y będą macierzami tych samych wymiarów. Jeżeli X, Y podzielimy na bloki odpowiednio *tych samych wymiarów*, to macierze blokowe można dodawać

$$X = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix}, \quad X + Y = \begin{bmatrix} A_1 + A_2 & B_1 + B_2 \\ C_1 + C_2 & D_1 + D_2 \end{bmatrix}$$

Równie naturalnie, zdefiniowane jest odejmowanie macierzy blokowych jak i mnożenie macierzy przez skalar z ciała.

Mnożenie Macierzy Blokowych

Twierdzenie

Niech, $X \in \mathcal{M}_{n_1+n_2 \times m_1+m_2}$, $Y \in \mathcal{M}_{m_1+m_2 \times p_1+p_2}$ będą macierzami nad tym samym ciałem K podzielonymi na bloki w następujący sposób

$$X = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix},$$

gdzie $colA_1 = colC_1 = rowA_2 = rowB_2$ oraz $colB_1 = colD_1 = rowC_2 = rowD_2$.
Wtedy

$$M = XY = \begin{bmatrix} A_1A_2 + B_1C_2 & A_1B_2 + B_1D_2 \\ C_1A_2 + D_1C_2 & C_1B_2 + D_1D_2 \end{bmatrix}$$