Algebra Komputerowa

Elementy Teorii Grup [1]

Filip Zieliński

2025

Spis Treści

KOŁO NAUKOWE

Rząd Grupy

KOŁO NAUKOWE

Definicja

Niech G będzie grupą. Jeśli G jest grupą skończoną, to rząd G to liczba elementów G. Jeżeli G jest grupą nieskończoną, to mówimy, że rząd grupy G jest nieskończony. Rząd grupy G oznaczamy jako

$$\mathrm{ord}(G)$$

Rząd Grupy

Definicja

Niech G będzie grupą. Jeśli G jest grupą skończoną, to rząd G to liczba elementów G. Jeżeli G jest grupą nieskończoną, to mówimy, że rząd grupy G jest nieskończony. Rząd grupy G oznaczamy jako

$$\mathrm{ord}(G)$$

Uwaga

Przez całą prezentacje w przeważającej większości stosujemy konwencje grupy multiplikatywnej, z tym wyjątkiem, że element neutralny oznaczamy jako e zamiast $\mathbf{1}$.

Definicja

Grupa $(G, \cdot)$ jest **grupą cykliczną** wtw. gdy, istnieje taki element $a \in G$, że każdy element grupy G jest jego potęgą, to znaczy

$$\forall g \in G \; \exists k \in \mathbb{Z} : \quad g = a^k.$$

Element a nazywamy wtedy *generatorem grupy cyklicznej*

Uwaga

W konwencji multiplikatywnej mówimy o k-tej *potędze elementu a* i zapisujemy ją jako $a^k = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{k}$, natomiast w konwencji addytywnej, mówimy o k-tej *wielokrotności elementu a* i zapisujemy $k \cdot a = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{k}$.

Konwencja

Jeśli a jest generatorem grupy G to piszemy $G = \langle a \rangle$.

Przykład

Grupami cyklicznymi są np.

1. $(\sqrt[n]{1}, \cdot)$
2. $(\mathbb{Z}_n, +)$
3. $\mathbb{Z}$

Abelowość grup cyklicznych

KOŁO NAUKOWE

Obserwacja

Każda grupa cykliczna jest abelowa.

Dowód.

Rozważmy grupę $\langle a \rangle$. Wystarczy zauważyć, że z łączności wprost wynika $a^p a^q = a^q a^p$. $\square$

Twierdzenie

Grupa cykliczna $\langle a \rangle$ jest skończona wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją liczby całkowite p, q, gdzie $p \neq q$, takie, że $a^p = a^q$.

Twierdzenie

Grupa cykliczna $\langle a \rangle$ jest skończona wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją liczby całkowite p, q, gdzie $p \neq q$, takie, że $a^p = a^q$.

Obserwacja

Grupę cykliczną rzędu n można zapisać w postaci $\{a^0, a^1 \ldots, a^{n-1}\}$, natomiast nieskończoną grupę cykliczną w postaci $\{\ldots, a^{-1}, a^0, a^1, \ldots\}$.

Wniosek

Grupa cykliczna $\langle a \rangle$ jest nieskończona wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $p \neq q$, $p, q \in \mathbb{Z}$ zachodzi $a^p \neq a^q$.

Izomorfizm grup cyklicznych

Twierdzenie

Wszystkie grupy cykliczne nieskończonego rzędu są izomorficzne. Wszystkie grupy cykliczne skończone równych rzędów są izomorficzne.

Twierdzenie

Niech $G = \langle a \rangle$ będzie grupą cykliczną, a H jej podgrupą, $H < G$. Wtedy $H = \{e\}$, albo H jest grupą cykliczną postaci $\langle a^m \rangle$ dla pewnego $m \in \mathbb{N}$. Dodatkowo:

- Jeżeli G jest grupą nieskończoną, to dla każdego $p, q \in \mathbb{N}$, $p \neq q$ zachodzi $\langle a^p \rangle \neq \langle a^q \rangle$.
- Jeżeli G jest grupą skończoną rzędu n, to każda podgrupa jest postaci $\langle a^m \rangle$ dla pewnego m będącego dzielnikiem n. Wtedy G ma tyle różnych podgrup, ile dzielników naturalnych liczba n. Podgrupa $\langle a^m \rangle$ ma dokłanie $q = \frac{n}{m}$ elementów.

Definicja

Jeśli podgrupa $\langle a \rangle$ grupy G jest skończona i ma rząd n, to mówimy, że a jest *elementem rzędu n*. Jeśli $\langle a \rangle$ jest nieskończona to mówimy, że a jest *elementem rzędu nieskończonego*. Rząd elementu a w grupie G oznaczamy jako

$$\mathrm{ord}_G(a)$$

Niech będzie dana grupa G i jej podgrupa H.

Definicja

Warstwą lewostronną elementu $a \in G$ względem podgrupy H nazywamy zbiór $\{ah \mid h \in H\}$ i oznaczamy przez aH.

Definicja

Warstwą prawostronną elementu $a \in G$ względem podgrupy H nazywamy zbiór $\{ha \mid h \in H\}$ i oznaczamy przez Ha.

Obserwacja

Niech $b \in G$. Wtedy

$$b \in aH \Leftrightarrow (\exists h \in H : b = ah) \Leftrightarrow (\exists h \in H : a^{-1}b = h) \Leftrightarrow a^{-1}b \in H.$$

Analogicznie

$$b \in Ha \Leftrightarrow ba^{-1} \in H.$$

Obserwacja

Niech $b \in G$. Wtedy

$$b \in aH \Leftrightarrow (\exists h \in H : b = ah) \Leftrightarrow (\exists h \in H : a^{-1}b = h) \Leftrightarrow a^{-1}b \in H.$$

Analogicznie

$$b \in Ha \Leftrightarrow ba^{-1} \in H.$$

Konwencja

W zapisie addytywnym warstwy oznaczamy przez $a + H$.

Obserwacja

W grupie abelowej G zachodzi

$$\forall a \in G \; \forall H < G \quad aH = Ha.$$

Równość Warstw

KOŁO NAUKOWE

Twierdzenie

Jeśli H jest podgrupą grupy G, to każde dwie warstwy lewostronne (prawostronne) względem H są albo równe albo rozłączne.

Twierdzenie

Jeśli H jest podgrupą grupy G, to każde dwie warstwy lewostronne (prawostronne) względem H są albo równe albo rozłączne.

Wniosek

Każdy element grupy G należy do dokładnie jednej warstwy lewostronnej (prawostronnej) względem podgrupy H.

Wniosek

Jeśli H jest podgrupą grupy G to

1. $aH = bH \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$
2. $Ha = Hb \Leftrightarrow ba^{-1} \in H$

Równoliczność Warstw

Twierdzenie

Dowolne dwie lewostronne (prawostronne) warstwy względem tej samej podgrupy są równoliczne.
Dowolna warstwa lewostronna jest równa z dowolną warstwą prawostronną względem tej samej podgrupy.

Twierdzenie

Dowolne dwie lewostronne (prawostronne) warstwy względem tej samej podgrupy są równoliczne.
Dowolna warstwa lewostronna jest równa z dowolną warstwą prawostronną względem tej samej podgrupy.

Dowód.

Dowód dla warstw lewostronnych. Wystarczy pokazać, że $\varphi : aH \to bH$ zadane przez $\varphi(ah) = bh$ jest bijekcją. Dla drugiego stwierdzenia, wystarczy obserwacja, że $eH = He = H$. $\square$

Odwrotności Elementów Warstw

Twierdzenie

Zbiór odwrotności elementów warstwy lewostronnej aH (prawostronnej Ha) jest warstwą prawostronną Ha^{-1} (lewostronną $a^{-1}H$).

Twierdzenie

Zbiór odwrotności elementów warstwy lewostronnej aH (prawostronnej Ha) jest warstwą prawostronną Ha^{-1} (lewostronną $a^{-1}H$).

Dowód.

Dowód dla warstw lewostronnych. $b \in aH \Rightarrow b = ah$ dla pewnego $h \in H$. Wtedy $b^{-1} = (ah)^{-1} = h^{-1}a^{-1} \in Ha^{-1}$.
Weźmy $c \in Ha^{-1} \Rightarrow c = h_1 a^{-1}$ dla pewnego $h_1 \in H$. Zauważmy, że $c = c_1^{-1}$ dla $c_1 = ah_1^{-1} \in aH$. $\square$

Wniosek

Zbiór wszystkich warstw lewostronnych względem podgrupy H jest równoliczny ze zbiorem wszystkich warstw prawostronnych względem podgrupy H.

Dowód.

Na podstawie poprzedniego twierdzenia, zauważmy, że odwzorowanie prowadzące ze zbioru warstw lewostronnych w zbiór warstw prawostronnych wzgledem tej samej podgrupy H zadane wzorem $\varphi(aH) = Ha^{-1}$ jest bijekcją. □

Definicja

Niech G będzie grupą skończoną, a H jej podgrupą. **Indeksem podgrupy** H w grupie G nazywamy liczbę warstw lewostronnych grupy G względem H. Indeks podgrupy H w grupie G oznaczamy przez $[G : H]$

Twierdzenie (Lagrange'a)

Niech G będzie grupą skończoną, a H jej podgrupą. Wtedy

$$\mathrm{ord}(G) = \mathrm{ord}(H)[G : H].$$

Definicja

Niech G będzie grupą skończoną, a H jej podgrupą. **Indeksem podgrupy H** w grupie G nazywamy liczbę warstw lewostronnych grupy G względem H. Indeks podgrupy H w grupie G oznaczamy przez $[G : H]$

Twierdzenie (Lagrange'a)

Niech G będzie grupą skończoną, a H jej podgrupą. Wtedy

$$\mathrm{ord}(G) = \mathrm{ord}(H)[G : H].$$

Dowód.

Wystarczy obserwacja, że każdy element należy do dokładnie jednej warstwy oraz każda warstwa jest równoliczna. $\square$

Wniosek

Rząd elementu grupy skończonej jest dzielnikiem rzędu grupy, to znaczy dla grupy G zachodzi $\mathrm{ord}_G(a) \mid \mathrm{ord}(G) \quad \forall a \in G$.

Wniosek

W grupie skończonej G rzędu n zachodzi $a^n = e$ dla każdego $a \in G$

Dowód.

Niech $\mathrm{ord}_G(a) = m$. Wtedy $n = mq$. Zatem
$a^n = (a^m)^q = e^q = e$ $\square$

Twierdzenie

Grupa skończona G, której rząd jest liczbą pierwszą jest grupą cykliczną.

Grupy Pierwszego Rzędu
Warstwy

KOŁO NAUKOWE

Twierdzenie

Grupa skończona G, której rząd jest liczbą pierwszą jest grupą cykliczną.

Dowód.

$\mathrm{ord}(G) > 1$, zatem istnieje $a \in G$, różny od e. Ponieważ $\mathrm{ord}_G(a) \mid \mathrm{ord}(G)$ oraz jedynym elementem rzędu 1 jest element neutralny, to $\mathrm{ord}_G(a) = \mathrm{ord}(G)$ zatem $\langle a \rangle = G$. $\square$

Twierdzenie

Grupa skończona G, której rząd jest liczbą pierwszą jest grupą cykliczną.

Dowód.

$\mathrm{ord}(G) > 1$, zatem istnieje $a \in G$, różny od e. Ponieważ $\mathrm{ord}_G(a) \mid \mathrm{ord}(G)$ oraz jedynym elementem rzędu 1 jest element neutralny, to $\mathrm{ord}_G(a) = \mathrm{ord}(G)$ zatem $\langle a \rangle = G$. $\square$

Wniosek

Grupa różna od jednoelementowej nie zawiera podgrup właściwych wtedy i tylko wtedy gdy jest skończona i jej rząd jest liczbą pierwszą.

Definicja

Niech G będzie grupą, a H jej podgrupą. Mówimy, że H jest **Podgrupą normalną** G, jeżeli zachodzi $\forall a \in G \quad aH = Ha$ (równośc warstw prawostronnych i lewostronnych).

Konwencja

Jeżeli H jest podgrupą normalną grupy G to zapisujemy $H \trianglelefteq G$.

Konwencja

Funkcjonuje też równoważne określenie jako *Dzielnik Normalny*.

Obserwacja

Każda podgrupa grupy abelowej jest podgrupą normalną.

Obserwacja

Każda podgrupa grupy abelowej jest podgrupą normalną.

Obserwacja

Każda grupa zawiera trywialne podgrupy normalne - samą siebie i podgrupę jednoelementową (element neutralny).

Obserwacja

Każda podgrupa grupy abelowej jest podgrupą normalną.

Obserwacja

Każda grupa zawiera trywialne podgrupy normalne - samą siebie i podgrupę jednoelementową (element neutralny).

Twierdzenie

Rozważmy grupę G i jej podgrupę H. Zdefiniujmy zbiór aHa^{-1} jako $aHa^{-1} = \{aha^{-1} \mid h \in H\}$. Następujące warunki są równoważne:

1. $\forall a \in G \quad aH = Ha$
2. $\forall a \in G \quad aHa^{-1} = H$
3. $\forall a \in G \quad aHa^{-1} \subseteq H$

Przykład

- Rozważmy grupę $GL_n(R)$ wszystkich nieosobliwych macierzy $n \times n$ oraz jej podgrupę $SL_n(R)$ wszystkich macierzy $n \times n$ o wyznaczniku równym 1. Zachodzi $SL_n(R) \trianglelefteq GL_n(R)$
- Rozważmy grupę n-elementowych permutacji S_n oraz jej podgrupę permutacji parzystych A_n. Zachodzi $A_n \trianglelefteq S_n$.

Przykład

- Rozważmy grupę $GL_n(R)$ wszystkich nieosobliwych macierzy $n \times n$ oraz jej podgrupę $SL_n(R)$ wszystkich macierzy $n \times n$ o wyznaczniku równym 1. Zachodzi $SL_n(R) \trianglelefteq GL_n(R)$
- Rozważmy grupę n-elementowych permutacji S_n oraz jej podgrupę permutacji parzystych A_n. Zachodzi $A_n \trianglelefteq S_n$.

Lemat

Jeżeli liczba warstw lewostronnych (zatem też prawostronnych) względem podgrupy H wynosi 2, to zachodzi $H \trianglelefteq G$.

Twierdzenie

Niech będzie dany zbiór warstw grupy G względem jej podgrupy normalnej H. Wówczas odwzorowanie określone wzorem

$$aH \circ bH = (ab)H$$

określa poprawne działanie w tym zbiorze. Zbiór warstw z tak okreslonym działaniem jest grupą.

Twierdzenie

Niech będzie dany zbiór warstw grupy G względem jej podgrupy normalnej H. Wówczas odwzorowanie określone wzorem

$$aH \circ bH = (ab)H$$

określa poprawne działanie w tym zbiorze. Zbiór warstw z tak okreslonym działaniem jest grupą.

Definicja

Grupę warstw grupy G względem podgrupy normalnej H zdefiniowanej jak powyżej nazywamy **Grupą ilorazową** grupy G względem podgrupy H lub grupą ilorazową G modulo H i oznaczamy symbolem G/H

Przykład

1. $G/\{e\} \cong G$.
2. $G/G \cong \{e\}$.
3. $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_7$

Konwencja

Działanie w grupie warstw zazwyczaj oznaczamy tak samo jak działanie w grupie, co nie prowadzi do nieporozumień. Tak więc zwykle piszemy $aH \cdot bH$ w konwencji multiplikatywnej, bądź $(a + H) + (b + H)$ w zapisie addytywnym.

Definicja

Rozważmy grupy G, G' oraz homomorfizm $\varphi : G \to G'$. Jądro homomorfizmu φ to zbiór

$$\ker\varphi = \varphi^{-1}(\{e'\}) = \{a \in G \mid \varphi(a) = e'\}$$

gdzie e' to element neutralny grupy G'.

Twierdzenie

Jeśli $\varphi : G \to G'$ jest homomorfizmem grup G, G' to $\ker \varphi$ jest podgrupą normalną grupy G.

Twierdzenie

Jeśli $\varphi : G \to G'$ jest homomorfizmem grup G, G' to $\ker \varphi$ jest podgrupą normalną grupy G.

Dowód.

Dowód faktu, że jądro jest podgrupą był w zestawie zadań. Skorzystajmy z warunku równoważnego definicji podgrupy normalnej. $\ker \varphi \trianglelefteq G \Leftrightarrow \forall a \in G \quad a \ker \varphi a^{-1} \subseteq \ker \varphi$. Weźmy dowolny $k \in \ker \varphi$ oraz dowolny $a \in G$. Zachodzi $\varphi(aka^{-1}) = \varphi(a)\varphi(k)\varphi(a^-1) = \varphi(a)e'\varphi(a^{-1}) = \varphi(aa^{-1}) = \varphi(e) = e'$, zatem $\forall a \in g \; \forall k \in \ker \varphi \quad aka^{-1} \in \ker \varphi \Leftrightarrow \forall a \in G \quad a \ker \varphi a^{-1} \subseteq \ker \varphi$. $\square$

Twierdzenie

Rozważmy grupę G i jej podgrupę normalną H. Odwzorowanie $\nu : G \to G/H$ zadane wzorem $\nu(a) = aH$ jest homomorfizmem oraz $\ker \nu = H$.

Jądro, a podgrupy normalne

Twierdzenie

Rozważmy grupę G i jej podgrupę normalną H. Odwzorowanie $\nu : G \to G/H$ zadane wzorem $\nu(a) = aH$ jest homomorfizmem oraz $\ker \nu = H$.

Dowód.

Jest to homomorfizm ponieważ $\nu(ab) = (ab)H = aH \cdot bH = \nu(a)\nu(b)$. Elementem neutralnym grupy G/H jest warstwa $eH = H = hH \quad \forall h \in H$. Zatem faktycznie $\ker \nu = \{a \mid \nu(a) = H\} = H$. $\square$

Twierdzenie

Rozważmy grupę G i jej podgrupę normalną H. Odwzorowanie $\nu : G \to G/H$ zadane wzorem $\nu(a) = aH$ jest homomorfizmem oraz $\ker \nu = H$.

Dowód.

Jest to homomorfizm ponieważ $\nu(ab) = (ab)H = aH \cdot bH = \nu(a)\nu(b)$. Elementem neutralnym grupy G/H jest warstwa $eH = H = hH \quad \forall h \in H$. Zatem faktycznie $\ker \nu = \{a \mid \nu(a) = H\} = H$. □

Konwencja

Tak zadany homomorfizm z G do G/H nazywamy *homomorfizmem kanonicznym*.

Wniosek

Każda podgrupa normalna jest jądrem homomorfizmu oraz jądrami homomorfizmów są tylko podgrupy normalne.

Wniosek

Każda podgrupa normalna jest jądrem homomorfizmu oraz jądrami homomorfizmów są tylko podgrupy normalne.

Twierdzenie

Jeśli φ jest homomorfizmem grupy G na grupę G', to istnieje izomorfizm $\psi : G' \to G/\ker\varphi$, dla którego przemienny jest diagram

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\nu"'] & G' \arrow[d, "\psi"] \\ & G/\ker\varphi \end{tikzcd}$$

gdzie ν to homomorfizm kanoniczny.

Definicja

Relacja $R \subseteq X \times X$, gdzie $X \neq \emptyset$ jest **relacją równoważności** jeżeli są spełnione następujące warunki

1. $\forall x \in X \quad xRx$ *(zwrotność)*
2. $\forall x, y \in X \quad xRy \Rightarrow yRx$ *(symetryczność)*
3. $\forall x, y, z \in X \quad xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$ *(przechodniość)*

Definicja

Niech $R \subseteq X \times X$ będzie relacją równoważności. **Klasą abstrakcji** elementu $x \in X$ nazywamy zbiór

$$[x]_R = \{y \in X \mid xRy\}$$

Definicja

Niech X będzie niepustym zbiorem. **Podziałem zbioru** (rozbiciem zbioru) X nazywamy taką rodzinę Π niepustych jego podzbiorów, że każdy element należy dokładnie do jednego podzbioru tej rodziny. To znaczy, rodzina $\Pi = \{X_t\}_{t \in T}$ podzbiorów X jest jego podziałem wtedy i tylko wtedy, gdy

1. $X_t \neq \emptyset$ dla każdego $t \in T$,
2. jeśli $X_i \neq X_j$, to $X_i \cap X_j = \emptyset$,
3. $X = \bigcup_{t \in T} X_t$.

Zbiór Ilorazowy

KOŁO NAUKOWE

Definicja

Niech $R \subseteq X \times X$ będzie relacją równoważności. **Zbiorem Ilorazowym** relacji R nazywamy rodzinę klas abstrakcji elementów z X i oznaczamy

$$X/R = \{[x]_R \mid x \in X\}.$$

Zbiór Ilorazowy

Definicja

Niech $R \subseteq X \times X$ będzie relacją równoważności. **Zbiorem Ilorazowym** relacji R nazywamy rodzinę klas abstrakcji elementów z X i oznaczamy

$$X/R = \{[x]_R \mid x \in X\}.$$

Twierdzenie

Niech $R \subseteq X \times X$ będzie relacją równoważności. Zbiór ilorazowy X/R jest podziałem zbioru X.

Twierdzenie

Niech X będzie niepustym zbiorem, a $\Pi = \{X_t\}_{t \in T}$ jego podziałem. Relacja $R \subseteq X \times X$ określona wzorem

$$xRy \Leftrightarrow \exists t \in T : x, y \in X_t$$

jest relacją równoważności.

Twierdzenie

Niech X będzie niepustym zbiorem, a $\Pi = \{X_t\}_{t \in T}$ jego podziałem. Relacja $R \subseteq X \times X$ określona wzorem

$$xRy \Leftrightarrow \exists t \in T : x, y \in X_t$$

jest relacją równoważności.

Twierdzenie

Niech G będzie grupą, a H jej podgrupą. Rodzina watstw lewostronnych $\{Ha \mid a \in G\}$ jest podziałem zbioru G. Rodzina warstw prawostronnych $\{aH \mid a \in G\}$ jest podziałem zbioru G. Relacje równoważności generowane przez te podziały oznaczamy odpowiednio przez $\overset{L}{\underset{H}{\equiv}}$ oraz $\overset{R}{\underset{H}{\equiv}}$.

Obserwacja

Jeżeli H jest podgrupą normalną G to zbiór warstw lewostronnych i prawostronnych G/H są sobie równe, zatem relacje równoważności indukowane przez nie są tą samą relacją.

Konwencja

Zwykle piszemy po prostu $a \underset{H}{\equiv} b$ lub $a \equiv b$ (H) lub $a \equiv b$ $(mod\ H)$.

Wniosek

Jeżeli $H \trianglelefteq G$ oraz $a, b \in G$, to po prostu

$$a \equiv b\ (mod\ H) \Leftrightarrow a^{-1}b \in H.$$

Obserwacja

Niech G będzie grupą, $H \trianglelefteq G$ oraz $a, b, c, d \in G$. Załóżmy, że $a \equiv b \ (mod\ h)$ oraz $c \equiv d \ (mod\ H)$. Wynika z tego, że $aH = bH$ oraz $cH = dH$. Ponieważ G/H jest grupą, mamy $aH \cdot bH = cH \cdot dH \Leftrightarrow (ac)H = (bd)H \Leftrightarrow ac \equiv bd \ (mod\ H)$.

Obserwacja

Niech G będzie grupą, $H \trianglelefteq G$ oraz $a, b, c, d \in G$. Załóżmy, że $a \equiv b \ (mod\ h)$ oraz $c \equiv d \ (mod\ H)$. Wynika z tego, że $aH = bH$ oraz $cH = dH$. Ponieważ G/H jest grupą, mamy $aH \cdot bH = cH \cdot dH \Leftrightarrow (ac)H = (bd)H \Leftrightarrow ac \equiv bd \ (mod\ H)$.

Definicja

Relacja równoważności R w zbiorze G, który jest grupą, nazywa się **kongruencją**, jeśli zachodzi

$$\forall a, b, c, d \in G \quad aRb \wedge cRd \Rightarrow (ac)R(bd)$$

Twierdzenie

Jeśli H jest podgrupą normalną grupy G, to relacja przystawania elementów modulo H jest kongruencją.

Twierdzenie

Jeśli H jest podgrupą normalną grupy G, to relacja przystawania elementów modulo H jest kongruencją.

Twierdzenie

Jeśli relacja R jest kongruencją w grupie G, to klasa abstrakcji H zawierające element neutralny grupy G jest podgrupą normalną oraz zachodzi $G/R = G/H$.

Źródła

Prezentacja bardzo mocno korzysta z rozdziału *XII* poniższej książki.

[1] Bolesław Gleichgewicht. *Algebra : podręcznik dla kierunków nauczycielskich studiów matematycznych*. PWN, 1976.

Pytania, wątpliwości, uwagi ?