

## Lista Zadań 02 – Elementy Teorii Grup

Filip Zieliński

25 marca 2025

### Grupy Cykliczne

1. Czy cykliczna jest grupa  $(\mathbb{Z}, \star)$ , gdzie działanie  $\star$  określone jest wzorem  $a \star b = a + b + 5$ .
2. Udowodnić, że dla  $n > 1$  grupa  $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$  nie jest cykliczna.
3. Udowodnić, że jeśli  $\text{NWD}(m, n) > 1$  to grupa  $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$  nie jest cykliczna.
4. Udowodnić, że dla każdego  $a \in G$  zachodzi  $\text{ord}(a) = \text{ord}(a^{-1})$ .
5. Udowodnić, że jeśli  $G$  jest grupą abelową, to zbiór  $T(G) = \{a \mid a \in G \wedge \text{ord}(a) < \infty\}$  jest podgrupą grupy  $G$ . (Nazywamy ją *podgrupą torsyjną* grupy  $G$ .)
6. Udowodnić, że jeśli  $\varphi : G \rightarrow H$  jest homomorfizmem grup oraz  $\varphi(a) = b$  i  $\text{ord}(a) < \infty$  to  $\text{ord}(b) \mid \text{ord}(a)$ . Udowodnić, że jeśli  $\varphi$  jest izomorfizmem, to zachodzi  $\text{ord}(b) = \text{ord}(a)$ .
7. Udowodnić, że obraz homomorficzny grupy cyklicznej jest grupą cykliczną.