

Análisis de utilización de métodos de diferenciación para similaridad de cambios de temperatura y de ecuaciones diferenciales para modelos de dinámica poblacional

Maximiliano Lombardia

Universidad de San Andrés, Buenos Aires, AR

2do Semestre 2024

Resumen

En el marco del estudio de series temporales y modelos de dinámica poblacional, respectivamente, se estudiarán las diferencias de temperatura en varias secuencias temporales de múltiples ciudades, y se compararán entre ellas, y por otro lado se analizará la utilización de métodos para resolver ecuaciones diferenciales para comprender las variables involucradas en la dinámica poblacional. Se concluirán, finalmente, cómo las soluciones de las ecuaciones diferenciales asociadas aportan suficiente información para poder simular distintas situaciones en base a las variables de cada problema. Se determinará que Runge-Kutta de Orden 4 es el mejor método para resolver este tipo de problemas, y en base a eso se generará un análisis del efecto Allee, para concluir el comportamiento que aporta éste al problema propuesto. También se ponderará positivamente la diferenciación tradicional como herramienta para resolver problemas de series temporales.

1. Introducción

En múltiples ocasiones, se cuenta con información sobre tasas de crecimiento, o que determinan de un punto a otro cómo avanza cierta variable, pero no se cuenta con una ecuación relacionada que permita condensar toda esa información y realizar una proyección a futuro. Es en este contexto, entonces, que la diferenciación y la resolución de ecuaciones diferenciales juegan un rol importante, ya que se puede plantear, por un lado, un análisis de tasas de variación en base a la primera, y la solución numérica en el caso de

la segunda para poder comparar analíticamente luego (o dar una solución para aquellas que no se pueden resolver analíticamente).

En este trabajo, se analizarán series temporales y modelos simples de dinámica poblacional, utilizando la ecuación logística y una variación con el efecto Allee. Se utilizarán métodos de resolución de ecuaciones diferenciales y luego el objetivo será más orientado a estudiar el modelo propuesto.

2. Métodos y reglas a evaluar/aplicar

Para todos los métodos, existe el parámetro h , el cual representa el tamaño del paso o incremento en el dominio de la variable independiente. Si bien utilizar un valor de h demasiado pequeño puede tener implicaciones en el tiempo de cálculo y en la estabilidad del método, elegir un valor progresivamente menor de este parámetro mejorará la precisión de la solución. En términos prácticos, h es equivalente a la distancia entre cada punto de la solución (es decir, $h = t_{i+1} - t_i$).[1]

2.1. Diferenciación tradicional

En la primera actividad se utilizará la definición tradicional de diferenciación, la cual es una técnica utilizada para aproximar la derivada de una función en un punto dado utilizando métodos numéricos.

En otras palabras, es una forma de estimar la tasa de cambio de una función en un punto específico, sin tener que calcular la expresión analítica de la derivada.[1]

Se utilizará conceptualmente la definición de la derivada:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (1)$$

para analizar la diferenciación que se necesita.

2.2. Método de Euler

El método de Euler consiste en construir una sucesión discreta de valores w que aproximan la solución $y(t)$ de tal manera que w_i sea equivalente a $t_i \forall i = 1, \dots, N$. Entonces, con eso los w_i quedan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} w_0 &= y_a \\ w_{i+1} &= w_i + hf(t_i, w_i) \end{aligned} \quad (2)$$

donde f es la ecuación diferencial a la cual se le desea encontrar la solución.

2.3. Método de Runge-Kutta de Orden 4

Para evitar computar las derivadas de mayor orden de $f(t, y)$, se suelen utilizar los métodos de Runge-Kutta, que mantienen el error de truncación de un orden alto sin la necesidad de calcular las derivadas de mayor orden.[1] En particular, el método de Runge-Kutta permite aproximar $T^4(t, y)$ (siendo éste el polinomio de Taylor de Orden 4) con un error de truncamiento local $O(h^4)$ para la solución de $y(t)$, con el siguiente esquema:

$$\begin{aligned} w_0 &= \alpha \\ k_1 &= hf(t_i, w_i) \\ k_2 &= hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 &= hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 &= hf(t_{i+1}, w_i + k_3) \\ w_{i+1} &= w_i + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} \end{aligned} \quad (3)$$

donde f es la ecuación diferencial a la cual se le desea encontrar la solución.

2.4. Cálculo de errores

Para la segunda actividad, se decidió comparar con la solución analítica de las ecuaciones y la numérica utilizando como métrica de comparación el error relativo:

$$e_r = \frac{|p - p^*|}{|p|} \quad (4)$$

3. Experimentos numéricos

Dependiendo la actividad, los experimentos constarán de actividades de análisis distintas: en el primer caso, se analizarán distintas series temporales en base a sus características, mientras que la segunda precisará experimentar con distintos valores para los parámetros involucrados en las ecuaciones.

Para los experimentos realizados, se usó Python como lenguaje para implementar las funciones y cálculos necesarios.

3.1. Cálculo de similaridad de series temporales

En esta actividad se requiere analizar varias series temporales T_i con mediciones de temperatura de la región i :

$$T_i = x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n) \quad (5)$$

obtenidas de la plataforma kaggle.

Para estas series se propone, en primera instancia, encontrar una métrica $S_{i,j}(T_i, T_j)$ basándose en la información disponible en las temperaturas y teniendo en cuenta la diferencia $\frac{\Delta x}{\Delta t}$. Luego de haber encontrado esa métrica, se propone explorar varias ciudades en un mismo hemisferio, y luego de distintos para analizar la diferencia.

Respecto a la métrica, se propone utilizar la distancia euclídea, entonces la métrica propuesta tendría la forma de:

$$S_{i,j}(T_i, T_j) = \sqrt{\sum \left(\frac{\Delta x_i}{\Delta t} - \frac{\Delta x_t}{\Delta t} \right)^2} \quad (6)$$

donde $\frac{\Delta x_i}{\Delta t}, \frac{\Delta x_t}{\Delta t}$ son las variaciones de cambio de temperatura en la misma franja temporal.

Finalmente, otra consideración adicional es que se utilizó en todos los casos $\Delta t = 1$ día.

3.2. Modelos de dinámica poblacional

Para este segundo caso se propone analizar dinámicas poblacionales, primero utilizando la ecuación logística:

$$\frac{dN}{dt} = rN \frac{K - N}{K} \quad (7)$$

y luego utilizando una variación con el efecto Allee:

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right) \left(\frac{N}{A} - 1 \right) \quad (8)$$

Eventualmente el ejercicio propone, en el caso logístico, compararlo con la solución analítica, la cual tiene como solución la siguiente forma[2]:

$$N(t) = \frac{K \left(\frac{N_0}{K - N_0} \right) e^{rt}}{1 + \left(\frac{N_0}{K - N_0} \right) e^{rt}} \quad (9)$$

Para este experimento, se utilizarán comparaciones con los métodos de Euler y Runge-Kutta de Orden 4 (RK4).

4. Resultados y análisis

4.1. Cálculo de similaridad de series temporales

Utilizando la métrica mencionada, se procedió a analizar similaridades entre ciudades del mismo hemisferio, y de distintos.

En primera instancia, se pudo verificar la hipótesis inicial: para ciudades del mismo hemisferio naturalmente se cuenta con valores similares de temperaturas y variaciones, mientras que para ciudades de hemisferios y regiones distintas se pueden apreciar variaciones significativas. En los valores de la métrica elegida se podía ver esta diferencia, donde ciudades con temperaturas similares obtenían un puntaje (o valor de métrica) cercano a 50, mientras que en el otro caso se contaba con valores de como mínimo el doble.

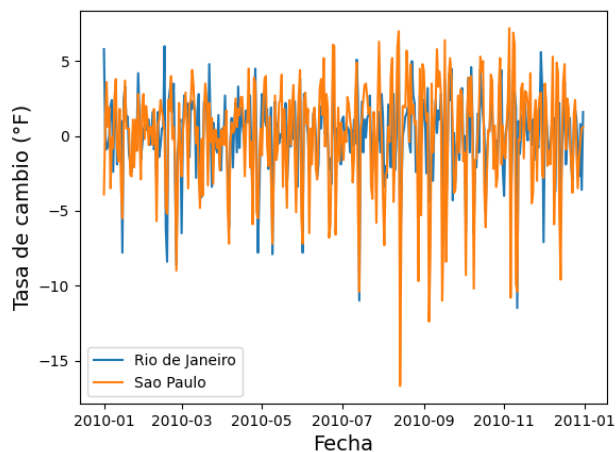


Figura 1: Gráfico de las tasas de cambio de temperatura para São Paulo y Río de Janeiro, con puntaje de 53.2169.

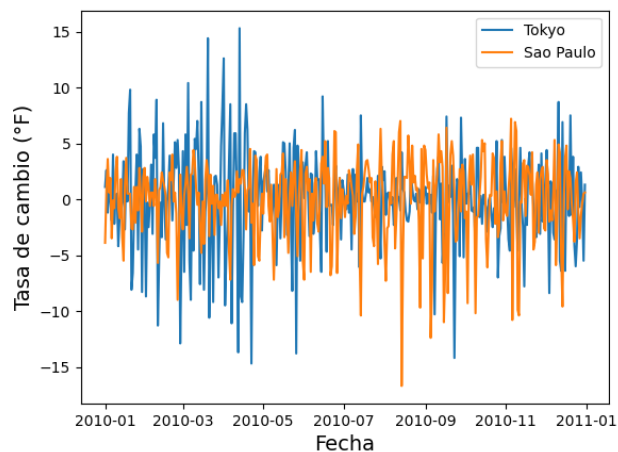


Figura 3: Gráfico de las tasas de cambio de temperatura para São Paulo y Tokio, con puntaje de 106.8457.

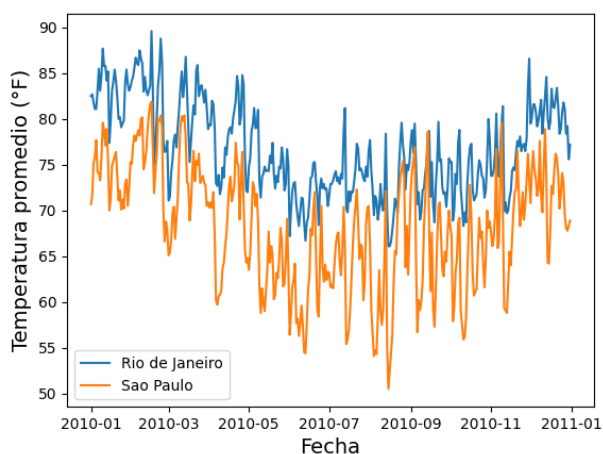


Figura 2: Gráfico de la evolución de temperatura para para São Paulo y Río de Janeiro.

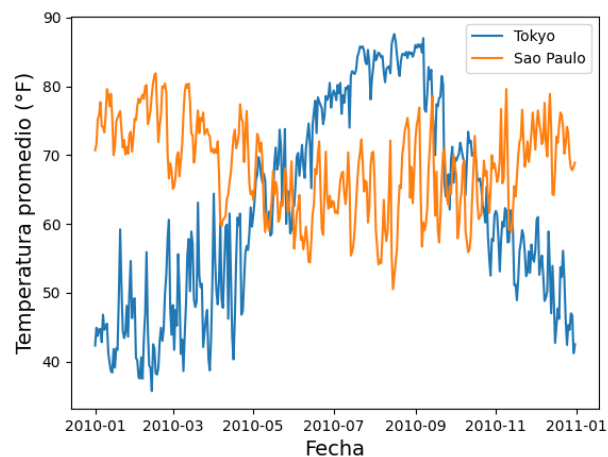


Figura 4: Gráfico de la evolución de temperatura para para São Paulo y Tokio.

Se encontraron casos especiales, sin embargo, donde las temperaturas no necesariamente eran similares en módulo, pero presentaban similitudes en sus variaciones, obteniendo puntajes similares a aquellos de ciudades en el mismo hemisferio, reforzando en gran parte la importancia

de poder analizar las variaciones de temperatura para entender el comportamiento climático, más allá del valor de la temperatura en sí.



Figura 5: Gráfico de las tasas de cambio de temperatura para La Paz y Singapur, con puntaje de 55.02744.

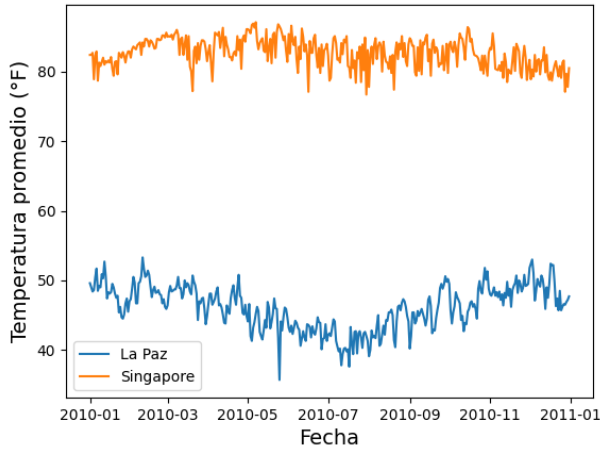


Figura 6: Gráfico de la evolución de temperatura para La Paz y Singapur.

4.2. Modelos de dinámica poblacional

En primera instancia, se compararon los métodos numéricos mencionados en la sección 2 para analizar cuál obtenía mejor performance comparado con la solución analítica. Si bien a nivel gráfico los métodos dibujan una trayectoria similar a la analítica, analizando el error relativo promedio se puede ver que RK4 reporta errores con múltiples órdenes de magnitud menores. Con esto, se puede visibilizar claramente que RK4 es un mejor método para la resolución de este tipo de ecuaciones.

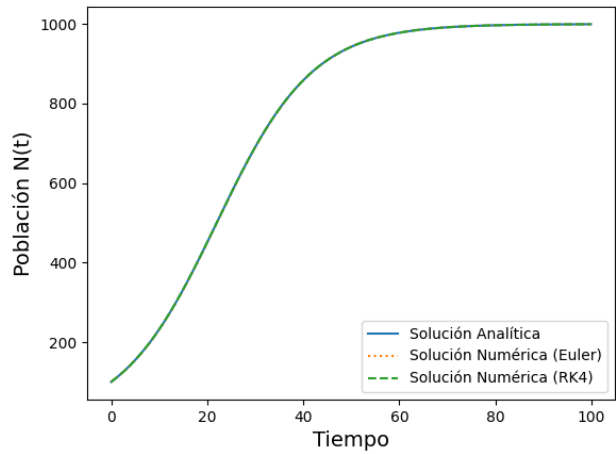


Figura 7: Gráfico de comparación para los métodos numéricos estudiados y la solución analítica.

N_0	Euler	RK4
50	0.1566e-2	0.2150e-10
100	0.7707e-3	0.102e-10
200	0.2958e-2	0.4065e-11
1500	0.2659e-2	0.9676e-12

Tabla 1: Tabla con los errores relativos promedios a medida que avanza N_0 .

Respecto entonces a la interpretación de los

modelos, tanto la definición de los parámetros involucrados como la elección de la condición resultan en una interpretación distinta del comportamiento del modelo.

En el caso de la ecuación logística, se notó una relación entre la población inicial N_0 y la capacidad de carga K . Más específicamente, si $N_0 > 0$, pero $N_0 \ll K$ (es decir, es notablemente menor), la población crece establemente hasta llegar a la capacidad de carga, mientras que si N_0 supera a K , el sistema tenderá a decrecer la población hasta llegar a la condición de equilibrio otorgada por K .

La ecuación modificada con el efecto de Allee agrega, además de variables, comportamientos en base al nuevo parámetro A . En este caso, si $N_0 < A$, la población descenderá lentamente hasta llegar a 0, y si se ubica entre A y K ($A < N_0 < K$) la población podrá desarrollarse correctamente. Si N_0 es mayor a la capacidad de carga, ocurre lo mismo que en la ecuación logística: el sistema desciende hasta la capacidad de carga. Es así que se confirma que este nuevo parámetro es el de un “requerimiento mínimo” para que el sistema permita su correcto desarrollo.[3]

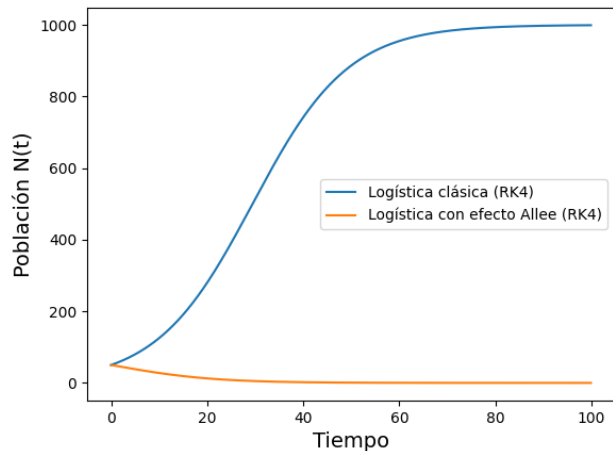


Figura 8: Gráfico de evolución del sistema para la ecuación logística y logística con efecto Allee con $N_0 = 50$, $K = 1000$, $r = 0.1$, $A = 100$.

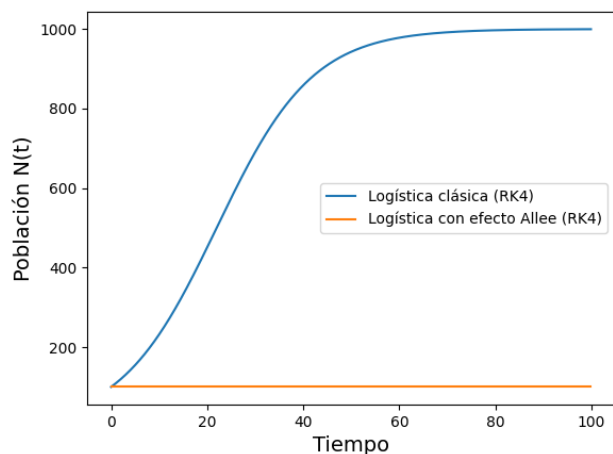


Figura 9: Gráfico de evolución del sistema para la ecuación logística y logística con efecto Allee con $N_0 = 100$, $K = 1000$, $r = 0.1$, $A = 100$.

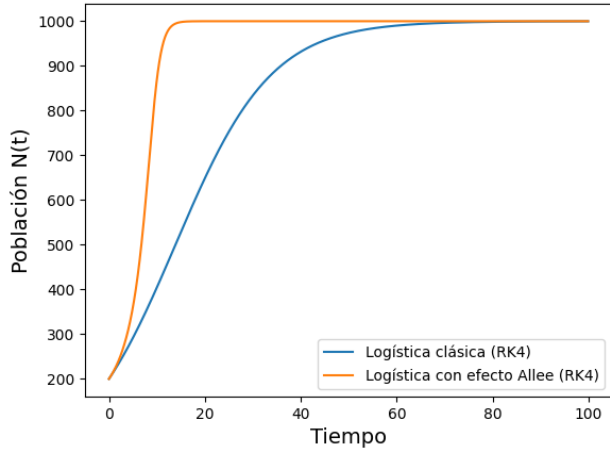


Figura 10: Gráfico de evolución del sistema para la ecuación logística y logística con efecto Allee con $N_0 = 200$, $K = 1000$, $r = 0.1$, $A = 100$.

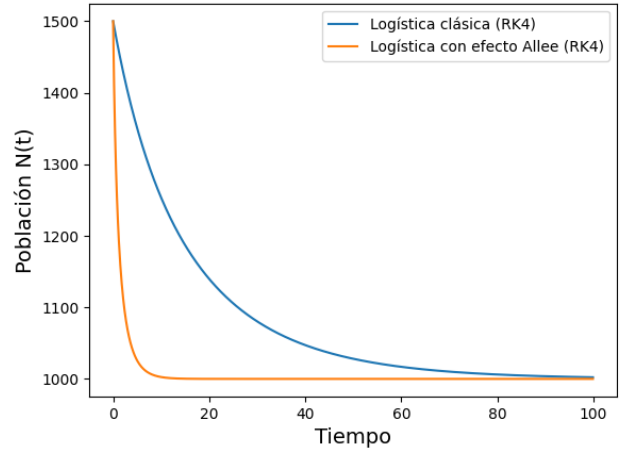


Figura 12: Gráfico de evolución del sistema para la ecuación logística y logística con efecto Allee con $N_0 = 1500$, $K = 1000$, $r = 0.1$, $A = 100$.

El parámetro r , para ambos casos, modifica la pendiente de la curva, acelerando o desacelerando el progreso del sistema.

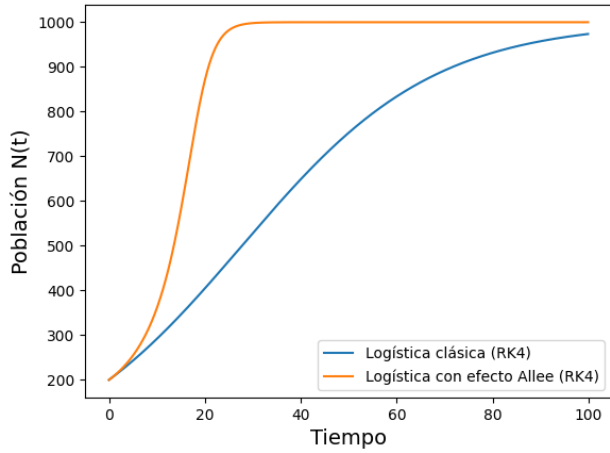


Figura 11: Gráfico de evolución del sistema para la ecuación logística y logística con efecto Allee con $N_0 = 200$, $K = 1000$, $r = 0.05$, $A = 100$.

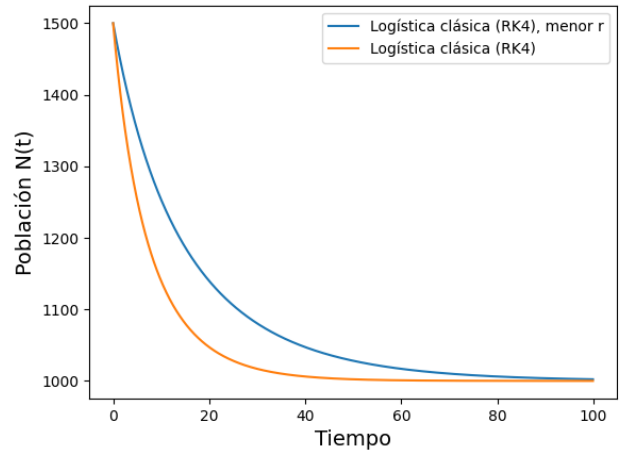


Figura 13: Gráfico de comparación para la ecuación logística con mismas condiciones, excepto el r .

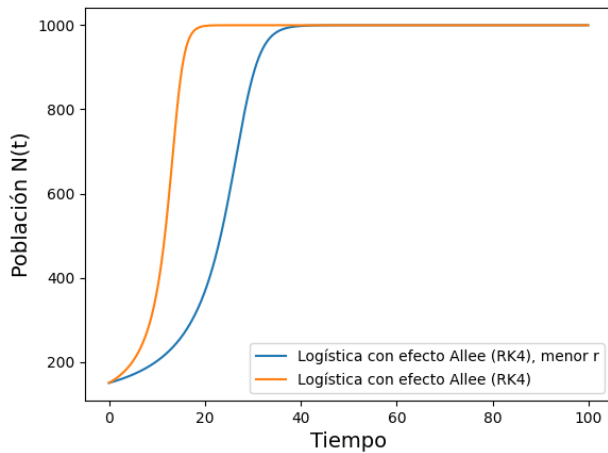


Figura 14: Gráfico de comparación para la ecuación con efecto Allee con mismas condiciones, excepto el r .

5. Conclusión

Se ha determinado, en primera instancia, la importancia de pensar la información otorgada como tasas de crecimiento para luego ser procesadas y conseguir una medida de comparación entre múltiples series temporales. Ésto permite encontrar patrones más allá de la distribución convencional de los datos.

Se ha estudiado el rendimiento de varios

métodos, resultando Runge-Kutta de Orden 4 (mejor conocido como RK4) como el mejor para resolver correctamente los problemas relacionados con ecuaciones diferenciales.

Finalmente, se ha procedido a estudiar el modelo propuesto en el contexto de evolución de especies, lográndose un entendimiento y visualización de estos casos.

Como propuestas a futuro, se propone realizar un análisis como el del primer ejercicio para datos en disciplinas distintas, como la medicina o en variables económicas puntuales para obtener conclusiones similares para esas áreas.

Referencias

- [1] Martin Palazzo Joaquin Cullen. *Apuntes de cátedra*. Universidad de San Andrés, 2024.
- [2] Edwin “Jed” Herman Gilbert Strang. *Cálculo volumen 2*. URL: <https://openstax.org/books/c%C3%A1lculo-volumen-2/pages/4-4-la-ecuacion-logistica>.
- [3] C.R. Townsend, M. Begon y J.L. Harper. *Essentials of Ecology*. Blackwell Pub., 2003. ISBN: 9781405103282. URL: <https://books.google.com.ar/books?id=pQTNFYpGdEC>.