GRAFER OCH GRANNMATRISER

GRUPPÖVNING OCH DATORLABORATION 6

TMV206 - LINJÄR ALGEBRA (VT 2019)

Instruktioner

Allt material nedan **ingår i tentamen**.

Denna gruppövning ska inte redovisas skriftligt eller muntligt. Närvaro på eftermiddagens presentationer är dock obligatorisk och ni ska gruppvis muntligt redovisa följande:

- Från gruppövning 4: Teoriuppgift 2 och matlabuppgift 2.
- Från gruppövning 5: Teoriuppgift 1 och matlabuppgift 2.

Fyra av grupperna har redovisning kl. 13.15-14.00, nästa fyra kl. 14.15-15.00, och de resterande har redovisning 15.15-16.00. Gruppen ska ha förberett en 10 minuters (strikt!) presentation av var och en av dessa 4 uppgifter. Vilken ni ska redovisa meddelas på plats.

Teoriövningar

Uppgift 1. Antag att vi har en graf (eller riktad graf) G. Vi definierar då det *sammanhängande höljet* $sh(G)$ av G som en graf med följande egenskaper:

- $sh(G)$ har samma noder som G.
- Det finns en kant mellan två noder i $sh(G)$ om och endast om det finns en väg mellan dem i grafen G.

Kom ihåg att en riktad graf är sammanhängande om det finns väg (i någon riktning) mellan varje par av noder och starkt sammanhängande om det finns i båda riktningarna mellan varje par av noder.

(a) Antag att grafen G har grannmatrisen A. Ge en formel (algoritm) hur man kan beräkna grannmatrisen för $sh(G)$ från A.

(b) Ge ett villkor för att (den ej riktade) grafen G är sammanhängande uttryckt i grannmatrisen för $sh(G)$.

(c) Ge ett villkor för att den riktade grafen G är starkt sammanhängande uttryckt i grannmatrisen för $sh(G)$.

(d) Ge ett villkor för att den riktade grafen G är svagt sammanhängande uttryckt i grannmatrisen för $sh(G)$.

Uppgift 2. Vad gäller för kriterium på en matris M för att den ska kunna vara övergångsmatrisen för en Markovkedja?

Uppgift 3. Betrakta en Markovkedja med två noder v_1 och v_2. Låt $0 \leq a \leq 1$ and $0 \leq b \leq 1$ vara givna, och antag att sannolikheten att gå från v_1 till v_2 är a och sannolikheten att gå från v_2 till v_1 är b.

(a) Bestäm övergångsmatrisen M och egenvärdena för dess transponat M^t.

(b) Beräkna den stationära fördelningen för Markovkedjan genom att lösa lämpligt ekvationssystem.

(c) För vilka a och b finns det en unik stationär fördelningen för Markovkedjan?

(d) För vilka a och b konvergerar Markovkedjan mot en stationär fördelning, oavsett startfördelning?

Anmärkning: Man kan visa för en allmän Markovkedja med övergångsmatris M att M^t alltid har 1 som ett egenvärde och alla andra egenvärden ligger i det slutna intervallet $[-1, 1]$.

Uppgift 4. Låt G vara en graf med n noder. Låt p beteckna sannolikheten att det finns en kant från en nod till en annan, inklusive sig själv. (För varje par av noder är sannolikheten lika med p.)

(a) Låt $n = 2$ respektive 3. Vad är sannolikheten att G är sammanhängande? För vilket n är sannolikheten störst? Beror det på p?

(b) Vad tror ni händer om vi fixerar p och låter n växa?

Datorövningar

Först ett litet tips som kan vara användbart i övningarna nedan. Om A är en matris och p är ett tal så ger kommandot $A > p$ en (logisk) matris med ettor på alla platser där elementet i A är större än p och nollor på övriga ställen. För att få en "vanlig" matris som man kan göra beräkningar med så kan man t. ex. skriva $+(A > p)$.

Uppgift 1. Gör en funktion RANDGRAF som givet ett tal n och en sannolikhet p ger grannmatrisen för en riktad graf med n noder där sannolikheten att det finns en kant från en nod till en annan (inklusive sig själv) är p, för varje par av noder.

Uppgift 2. Gör en funktion HOLJE som givet en grannmatris för en riktad graf ger grannmatrisen för dess sammanhängande höljet.

Uppgift 3. Gör en funktion SMH (respektive STARKTSMH) som givet en grannmatris för en riktad graf ger 1 om den är svagt sammanhängande (respektive starkt sammanhängande) och 0 annars. Tips: Använd något ni redan gjort och även kommandot 'ones' kan vara användbart.

Uppgift 4. Gör en funktion GRAF2MARKOV som givet grannmatrisen för en riktad graf ger övergångsmatrisen för motsvarande slumpvandring (Markovkedja).

Uppgift 5. Gör en funktion STATIONAR som givet övergångsmatrisen för en Markovkedja ger den unika stationära fördelningen (om den existerar). Om matrisen man ger funktionen inte är övergångsmatrisen för en Markovkedja så ska funktionen ge svaret 'FELAKTIG MATRIS'. Om den inte konvergerar till en unik stationär fördelning så ska den ge svaret 'KONVERGERAR EJ TILL STATIONÄR FÖRDELNING'.

Uppgift 6. Undersök experimentellt huruvida de svar ni fick i sista teoriuppgiften vad det gäller sannolikheten att grafer är sammanhängande verkar rimliga. Först bör ni skapa en funktion som ger grannmatrisen för en (icke riktad) slumpgraf. Generera sedan ett stort antal slumpgrafer och kolla hur stor andel som är sammanhängande.