ITERATION OCH FRAKTALER

GRUPPÖVNING OCH DATORLABORATION 2

TMV206 - LINJÄR ALGEBRA (VT 2019)

Instruktioner

Allt material nedan **ingår i tentamen**.

Uppgift 2 bland teoriuppgifterna samt uppgift 4 bland datoruppgifterna ska redovisas skriftligt. **Deadline för inlämningen är 20/2 (onsdagsgrupper), respektive 22/2 (fredagsgrupper), kl. 8**. Dessutom ska gruppen muntligt kunna redovisa dessa två uppgifter 20/2, respektive 22/2, och stå till svars för inlämningen.

Varje grupp redovisar gemensamt genom att lämna in lösning av teoriuppgiften i en .pdf-fil (alternativt doc/docx/odt/jpg), matlabkod (.m-filer, zippade) och plottar via kursrummet i Canvas. Se till att första raderna både i .pdf-filen och i .m-filen lyder: ”% Grupp X, gruppövning 2”, där X ersätts med ert gruppnummer, följt av en lista över CID för aktiva gruppmedlemmar. Ifall någon gruppmedlem inte bidragit till lösningen, så ska dennes CID inte vara med på listan!

Teoriuppgiften: Det krävs lösningar som är fullständiga med förklaringar och motiveringar. Endast en mängd formler och uträkningar duger inte. Läraren ska inte behöva tolka lösningen. Bara genom att läsa lösningen ska ert resonemang framgå. Lösningen ska börja med en formulering av problemet och avslutas med att det tydligt framgår vad svaren på **alla** de ställda frågorna är.

Matlabuppgiften: Det krävs en .m-fil med en väl kommenterad och strukturerad Matlab-kod, samt plottar och svar på ställda frågor. Var noga med att er kod går att köra oberoende av andra program och inställningar i matlab, och att funktioner tar precis de argument och lämnar de värden, samt skriver ut/ritar det, som krävs i uppgiften.

Teoriövningar

Uppgift 1. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$.

(a) Vad gör A med $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, respektive en godtycklig vektor $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$?

(b) Beräkna A^n och $\det(A^n)$ för $n = 2, 3, 4, \ldots$. Vad händer med $\det(A^n)$ då $n \longrightarrow \infty$?

(c) Vad gör A^n med $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ respektive en godtycklig vektor $\mathbf{v}$? Vad händer med riktningen för vektorn $A^n\mathbf{v}$ då n växer?

(d) För en given vektor $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ definierar vi en följd av vektorer $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots$ rekursivt genom

$$(\clubsuit) \qquad \begin{cases} \mathbf{v}_0 = \mathbf{v} \\ \mathbf{v}_n = A\mathbf{v}_{n-1}, \ n \geq 1. \end{cases}$$

Bestäm en explicit formel för $\mathbf{v}_n$.

Uppgift 2. Låt $\mathbf{e} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ vara en godtycklig enhetsvektor.

(a) Vad ger det faktum att $\mathbf{e}$ är en enhetsvektor för villkor på a och b?

(b) Bestäm matrisen P för den linjära avbildning som projicerar ortogonalt på linjen med riktningsvektor $\mathbf{e}$.

(c) Vad är P^2, P^3 och P^n för ett godtyckligt positivt heltal n? Kan man tänka ut det utan att räkna?

(d) Vad är determinanten av P? Kan man tänka ut det utan att räkna?

(e) Vad är P^{-1}?

Uppgift 3. Låt $\mathbf{u} = \binom{a}{c}$ och $\mathbf{v} = \binom{b}{d}$.

(a) Bestäm matrisen M för den linjära avbildning som avbildar $\mathbf{e}_x$ och $\mathbf{e}_y$ på $\mathbf{u}$ respektive $\mathbf{v}$.

(b) Bestäm matrisen N för den inversa avbildningen (till den i första deluppgiften), och beräkna de vektorer som denna avbildar $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ på.

(c) Bestäm matrisen för den linjära avbildning som avbildar vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ på $\mathbf{w} = \binom{e}{f}$ respektive $\mathbf{x} = \binom{g}{h}$. Tips: Utnyttja deluppgifterna ovan.

Datorövningar

Slutmålet med övningen är att konstruera matlabkod som genererar så kallade IFS-fraktaler men vi tar det i steg.

Uppgift 1. Konstruera en funktion som har tre argument; en 2×2-matris A, en 2-vektor $\mathbf{v}$ och ett positivt heltal n. Funktionen ska generera n stycken vektorer som i (♣), lägga dem i en $2 \times n$ matris och och sedan plotta ut dem som punkter. Tips: Det är bra att alltid först göra plats i minnet om man vet hur stor en matris ska vara. Man kan t. ex. använda kommandot 'zeros' för detta ändamålet.

Uppgift 2. Testa er funktion på följande (och gärna andra också) matriser och vektorer (testa med olika längd n):

(a) Låt A vara rotation $\pi/10$ radianer och ta startvektor $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

(b) Låt A vara rotation 2 radianer och ta startvektor $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. Varför blir resultatet så annorlunda jämfört med $\pi/10$ då n är stor (säg $n = 1000$)?

(c) A sammansättning av en rotation kring origo och en skalning med s. Det finns ett 'kritiskt' s-värde. Vilket? För vilka s blir det en inåtgående spiral?

Uppgift 3. Gör en ny funktion som istället för att hela tiden ta samma matris A varje gång tar en ny 'slumpmatris' med element i intervallet. -1 till 1. (Den har alltså då bara två argument $\mathbf{v}$ och n). Tips: Man använder sig lämpligen av funktionen 'rand'. Testa funktionen några gånger. Vad händer med $\mathbf{v}_n$ då n växer? (Observera att det är stor storleksskillnad på talen. Kolla på vektorerna som genereras.) Tag nu istället element i intervallet. -2 till 2. Vad händer nu med $\mathbf{v}_n$ då n växer? Om ni har tid så kan ni undersöka vad som händer om man tar intervallet -1.5 till 1.5.

Uppgift 4. (a) Dags nu att göra en kommandofil som genererar 'Barnsleys ormbunksblad'. Denna genereras av 4 stycken affina avbildningar $A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ som har matriser respektive vektorer givna av

$$A_1 = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0.16\end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix}0.85 & 0.04\\-0.04 & 0.85\end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix}0.2 & -0.26\\0.23 & 0.22\end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix}-0.15 & 0.28\\0.26 & 0.24\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\ \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix}0\\1.6\end{pmatrix},\ \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix}0\\1.6\end{pmatrix},\ \mathbf{b}_4 = \begin{pmatrix}0\\0.44\end{pmatrix}.$$

Man kan generera ormbunksbladet genom att beräkna en följd av punkter som i (♣) fast i varje steg så väljer man en av de 4 affina avbildningarna med en given sannolikhet. Med andra ord så startar man med en vektor $\mathbf{v}_0$ och skapar vektorn $\mathbf{v}_n$ rekursivt genom

$$\mathbf{v}_n = A_i\mathbf{v}_{n-1} + \mathbf{b}_i,\ n \geq 1,$$

där indexet i väljs slumpmässigt för varje n. Lämpliga sannolikheter för de 4 avbildningarna kan vara 1, 85, 7 respektive 7%.

(b) Vi ska nu använda programmet i uppgift 3(a) från gruppövning 1 för att studera konstruktionen av ormbunksbladet ovan. Tag som polygonet X den femhörning som origo, änden på det nedersta högra bladet, toppen på hela bladet, änden på det nedersta vänstra bladet och "bladfoten" på det nedersta vänstra bladet utgör. Plotta polygonerna som de fyra affina avbildningarna ger. Förklara med ord hur konstruktionen av ormbunksbladet fungerar. (Det är viktigt att välja en tillräckligt osymmetrisk polygon för att kunna avgöra vilken av avbildningarna som speglar.)

Uppgift 5. Ett annat sätt hur man kan undersöka de affina avbildningarna i Uppgift 4 är att sätta en av sannolikheterna till noll (och skala upp de övriga sannolikheterna så att deras summa blir 100%) och se hur ormbunksbladet förändras.

Uppgift 6. Gör om fraktalprogrammet så att det blir en funktion som har antal punkter, en lista med matriser, en lista med vektorer och en sannolikhetslista som argument och som genererar motsvarande IFS-figur. Sök exempel på affina avbildningar som ger fina fraktala bilder på nätet (sök exempelvis på IFS fractal) eller försök hitta på egna. (Lyckas ni väl med att hitta på någon egen så är jag nyfiken.)