LINJÄRA EKVATIONSSYSTEM

GRUPPÖVNING OCH DATORLABORATION 4

TMV206 - LINJÄR ALGEBRA (VT 2019)

Instruktioner

Allt material nedan **ingår i tentamen**.

Uppgift 2 bland teoriuppgifterna samt uppgift 2 bland datoruppgifterna ska redovisas skriftligt. **Deadline för inlämningen är 6/3 (onsdagsgrupper), respektive 8/3 (fredagsgrupper), kl. 8**. Dessutom ska gruppen muntligt kunna redovisa dessa två uppgifter 13/3, respektive 15/3, och stå till svars för inlämningen.

Varje grupp redovisar gemensamt genom att lämna in lösning av teoriuppgiften i en .pdf-fil (alternativt doc/docx/odt/jpg), matlabkod (.m-filer, zippade) och plottar via kursrummet i Canvas. Se till att första raderna både i .pdf-filen och i .m-filen lyder: "% Grupp X, gruppövning 4", där X ersätts med ert gruppnummer, följt av en lista över CID för aktiva gruppmedlemmar. Ifall någon gruppmedlem inte bidragit till lösningen, så ska dennes CID inte vara med på listan!

Teoriuppgiften: Det krävs lösningar som är fullständiga med förklaringar och motiveringar. Endast en mängd formler och uträkningar duger inte. Läraren ska inte behöva tolka lösningen. Bara genom att läsa lösningen ska ert resonemang framgå. Lösningen ska börja med en formulering av problemet och avslutas med att det tydligt framgår vad svaren på **alla** de ställda frågorna är.

Matlabuppgiften: Det krävs en .m-fil med en väl kommenterad och strukturerad Matlab-kod, samt plottar och svar på ställda frågor. Var noga med att er kod går att köra oberoende av andra program och inställningar i matlab, och att funktioner tar precis de argument och lämnar de värden, samt skriver ut/ritar det, som krävs i uppgiften.

Teoriövningar

Uppgift 1. Kolla upp vad ett *homogent* linjärt ekvationssystem är. Antag att vi har ett sådant med m ekvationer och n obekanta.

(a) Vad händer med högerledsvektorn när man utför Gausselimination på systemet?
(b) Kan det finnas en unik, oändligt många respektive inga lösningar till systemet om $m = n$?
(c) Kan det finnas en unik, oändligt många respektive inga lösningar till systemet om $m < n$?
(d) Kan det finnas en unik, oändligt många respektive inga lösningar till systemet om $m > n$?

Uppgift 2. Antag att vi är i $\mathbb{R}^3$. Här vet vi att lösningsmängden till ett linjärt ekvationssystem i tre obekanta variabler x, y, z kan vara av fem olika slag.

(a) En typ är "en punkt". En annan (mer urartad) typ är "hela rummet". Vilka är de tre andra?
(b) Vilka typer av lösningsmängd kan ett 2×3 system som

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

För de möjliga typerna, ge exempel (värden på $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2$). Förklara även geometriskt, i termer av vektorerna (A_1, B_1, C_1) och (A_2, B_2, C_2), när de olika fallen uppträder.

(c) Motsvarande frågor för lösningsmängden till 3×3 system som

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0. \end{cases}$$

Uppgift 3. Betrakta den geometriska summan

$$(1-x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k,$$

där högerledet förstås betyder $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$.

(a) För vilka tal $x \in \mathbf{R}$ är vänsterledet meningsfullt? För vilka tal $x \in \mathbf{R}$ är högerledet meningsfullt? För vilka tal $x \in \mathbf{R}$ är vänsterledet lika med högerledet?

(b) Ersätt nu talet x med en $n \times n$ matris A i formeln. Fundera på betydelsen av och giltigheten hos en sådan matrisformel, vilken kallas en Neumannserie. Ta reda på vad en ”matrisnorm” $\|A\|$ är, och hur stor $\|A\|$ får vara för att högerledet i matrisformeln ska vara meningsfullt.

Uppgift 4. Kolla upp vad under- respektive övertriangulär matris betyder.

(a) Vad händer om man multiplicerar en övertriangulär matris med en annan övertriangulär matris? Vad händer om man multiplicerar en undertriangulär matris med en annan undertriangulär matris? Vad händer om man multiplicerar en övertriangulär matris med en undertriangulär matris?

(b) Visa att (nästan) varje 2×2-matris $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ kan skrivas som en unik produkt $A = LU$, där

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l & 1 \end{pmatrix} \text{ och } U = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & v \end{pmatrix}.$$

Bestäm L och U uttryckt i a, b, c och d. Vilka A kan inte skrivas som $A = LU$?

(c) Vad har detta med Gausselimination att göra?

Datorövningar

Uppgift 1. Vi ska börja med att titta på två olika sätt att lösa ett linjärt ekvationssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ när A är en kvadratisk matris. Det första sättet är att beräkna inversen till A (=inv(A) i Matlab) och multiplicera med den på lämpligt sätt. Det andra sättet är Gauss-elimination (skrives $A\backslash\mathbf{b}$ i Matlab). Matlabs rutin är så smart att den upptäcker om A har någon speciell form, t. ex. om A redan är triangulär och utnyttjar i så fall detta.

(a) Bilda en 3×3-matris A med slumptal och en 3-vektor $\mathbf{b}$ också med slumptal. Lös sedan systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ med de båda metoderna och kolla att du får samma svar. Kolla också att svaret är rätt! Hur gör man det?

(b) Vi ska nu jämföra hur lång tid de olika metoderna tar. Med hjälp av paret av kommandon tic och toc kan man mäta tiden. Detta fungerar bra åtminstone när man har tider på 1/10s och uppåt. Använd slumpmatriser och slumpvektorer och testa storlekar upp till 5000×5000 och gärna högre.

Uppgift 2. Vi ska i denna uppgift jämföra den numeriska effektiviteten hos Gausselimination och hos en enkel iterativ metod för att lösa linjära ekvationssystem.

(a) Skriv en funktion som tar en kvadratisk matris A och en matchande vektor $\mathbf{b}$, löser ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ med Gausselimination, utan att använda några färdiga matlabkommandon för att lösa ekvationssystem, och returnerar lösningen $\mathbf{x}$. Ni behöver inte göra några radbyten för att undvika division med noll, utan det räcker att koden fungerar för en generisk matris.

(b) Skriv en funktion som tar en kvadratisk matris B, en matchande vektor $\mathbf{b}$ och ett positivt heltal r, som löser ekvationssystemet $(I - B)\mathbf{x} = \mathbf{b}$ approximativt med Neumannserie (jämför teoriövning 3), genom att returnera

$$\mathbf{x} = \sum_{k=0}^{r} B^k \mathbf{b}.$$

Er funktion får inte göra några matris×matris-multiplikationer! Man har ju fått se i Datoruppgift 2 i Gruppövning 3 att matris×vektor-multiplikationer däremot är önskvärda. Kontrollera att approximationen fungerar. Tänk på att B måste vara ”liten”.

(c) Gör sedan ett skript som för varierande matrisstorlek n (i storleksordningen $n = 1$ till $n = 500$) genererar slumpmatriser B med norm $\|B\| = 1/2$ (kommandot ”norm(B)” ger 2-normen av en matris B) och vektorer $\mathbf{b}$, och löser $(I - B)\mathbf{x} = \mathbf{b}$ med både Gausselimination och approximativt med Neumannserie.

Skriptet ska mäta tiden som de två funktionerna tar och illustrera resultatet grafiskt, genom tre plottar:

- tidsåtgången för Gausselimination som en funktion av matrisstorleken;
- tidsåtgången för Neumannserieapproximationen som en funktion av matrisstorleken;
- det relativa felet $\|\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_G\|/\|\mathbf{x}_G\|$ som en funktion av matrisstorleken. Här betecknar $\mathbf{x}_G$ lösningen med Gausselimination, $\mathbf{x}_N$ betecknar den approximativa lösningen med Neumannserie, och $\|\cdot\|$ betecknar längden av en vektor. (Matlab-kommandot ”norm” fungerar även här.)

Välj r så att det relativa felet är av storleksordningen 10^{-5}. Hur snabb är Gausseliminationen i förhållande till approximationen med Neumannserie, och hur beror dessa på matrisstorleken n?

Uppgift 3. Ta reda på skillnaden mellan Gauss-elimination och Gauss-Jordan-elimination. I Matlab finns ett kommando ’rref’ som utför Gauss-Jordan-elimination på en matris. Använd den för att lösa övning 5.7 i boken.

Uppgift 4. Vi ska nu se vad Matlab gör om man kör Gauss-Jordan-elimination när koefficientmatrisen inte är kvadratisk. Ta ’rref’ till hjälp för att svara på frågorna. Operatorn ’$A\backslash\mathbf{b}$’ kallas för mldivide (matrix left division) i Matlab och ta en (grundlig) titt på hjälpen för mldivide innan du börjar.

(a) Låt först A vara en (inte alltför stor) slumpmatris med fler rader än kolumner, $\mathbf{b}$ en slumpvektor med samma antal element som A:s antal rader. Låt Matlab lösa $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ med Gauss-Jordan-elimination $A\backslash\mathbf{b}$. Vad ger Matlab för svar? Kolla om det är en lösning. Förklara vad Matlabs svar är?

(b) Låt nu istället A ha fler kolumner än rader med $\mathbf{b}$ av matchande storlek. Vad ger Matlab för svar? Kolla om det är en lösning. Finns det fler lösningar? Beskriv kvalitativt lösningsmängden (en unik lösning, en linje, ett plan, ...?).