ICKE-LINJÄRA AVBILDNINGAR

GRUPPÖVNING OCH DATORLABORATION 3

TMV206 - LINJÄR ALGEBRA (VT 2019)

Instruktioner

Allt material nedan **ingår i tentamen**.

Denna gruppövning ska inte redovisas skriftligt eller muntligt. Närvaro är dock obligatorisk och ni ska gruppvis muntligt redovisa följande:

- Från gruppövning 1: Teoriuppgift 2 och matlabuppgift 3.
- Från gruppövning 2: Teoriuppgift 2 och matlabuppgift 4.

Fyra av grupperna har redovisning kl. 9.00-9.45, nästa fyra kl. 10.00-10.45, och de resterande har redovisning 11.00-11.45. Gruppen ska ha förberett en 10 minuters (strikt!) presentation av var och en av dessa 4 uppgifter. Vilken ni ska redovisa meddelas på plats.

Teoriövningar

Uppgift 1. Vi har sett att en linje i planet kan beskrivas antingen med en likhet $Ax + By + C = 0$ eller på parameterform

$$\begin{cases} x = x_0 + tv_x \\ y = y_0 + tv_y. \end{cases}$$

(a) Gör samma sak för en cirkel med centrum i origo och radien r, d. v. s. en likhet och en parametrisering som beskriver cirkeln.

(b) Gör samma sak för en cirkel med centrum i en godtycklig punkt (x_0, y_0).

(c) Låt $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Betrakta bilden i u, v-planet av en cirkel (i x, y-planet) med centrum i origo under den linjära avbildningen $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Bestäm en parametrisering och en ekvation för denna bild.

Uppgift 2. Hur många multiplikationer av par av tal krävs det för att multiplicera en $m \times n$-matris med en $n \times p$-matris?

Uppgift 3. Vi vet hur vi kan addera och multiplicera två komplexa tal $z = x + iy$ och $w = u + iv$. Komplexa tal är ju inget annat än plana vektorer $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ och $w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, mellan vilka den ”komplexa produkten” $zw = (xu - yv) + i(xv + yu)$ används. Vi ska nu se hur denna produkt är ett specialfall av matrismultiplikation, om vi identifierar ett komplext tal $z = x + iy = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ med matrisen $A(z) = \left(\begin{smallmatrix} x & -y \\ y & x \end{smallmatrix}\right)$.

(a) Visa att addition och multiplikation av matriserna $A(z)$ och $A(w)$ motsvarar addition och multiplikation av de komplexa talen z och w.

(b) Beskriv geometriskt vad $A(i)$ åstadkommer.

(c) Låt f vara komplex kvadrering av plana vektorer/komplexa tal: $f(z) = z^2$. Beräkna vektorns z^2 två koordinater uttryckt i koordinaterna x, y för z, dels med den komplexa produkten zz och dels med matrisprodukten $A(z)A(z)$. Visa att f inte är en linjär funktion.

Datorövningar

Uppgift 1. För att rita en kurva i Matlab använder man sig lämpligen av en parametrisering av kurvan. Det första man behöver då är en parameter t. Matlab gillar inte att man säger t. ex. ”Låt t vara intervallet mellan 0 och 2π”, utan man får nöja sig med ett antal punkter i $[0, 2\pi]$.

(a) Kolla vad kommandona $t = 0 : 10$, $t = 0 : 0.2 : pi$ och $t = 0 : pi/16 : pi$ ger. Jämför slutvärdet på de två sista. Kommentar?

(b) Vad händer om du t. ex. tar $\cos t$ där t är en vektor. (Detta är en finess i Matlab som är ett uttryck av att Matlab hela tiden tänker vektorer och matriser.) Utnyttja detta för att plotta funktionerna cos, tan, arctan och exp (Vad är den sista?) i intervallet $[0, 10]$.

(c) Använd de parametriseringar vi fann tidigare för att plotta en cirkel, en ellips och kurvan $x^4 + y^4 = r^2$.

(d) Plotta en cirkel med centrum i origo och plotta sedan bilden av denna efter att den linjära avbildningen $A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (för några olika k) har ’deformerat’ den. Prova gärna också att t. ex. rotera den.

Uppgift 2. Låt A vara en 5000×1000-matris, B en 1000×2000-matris samt $\mathbf{x}$ en 2000-vektor. Ta tiden på följande sätt att beräkna produkten $AB\mathbf{x}$: $(AB)\mathbf{x}$, $A(B\mathbf{x})$ samt $AB\mathbf{x}$ (d. v. s. att låta Matlab bestämma ordningen). (Man kan använda paret tic/toc för att mäta tiden.) Kommentar, slutsats? Spelar det absolut ingen roll hur man sätter parenteserna?

Uppgift 3. Låt $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ vara den komplexa kvadreringsfunktionen (en icke-linjär avbildning) av plana vektorer från teoriuppgift 3. Vi väljer en favoritpunkt: $P = (3, 1)$, eller med komplex notation $P = 3 + i$. Runt denna tittar vi nu på den axelparallella kvadrat, låt oss kalla den D_t, som har sidlängd $2t$ och P i centrum. Kurvan D_t består alltså av två vertikala linjer, på avstånd t till höger och vänster och P, och två horisontella linjer över och under P på avstånd t.

Vi ska i denna övning studera utseendet av bilden under f av kvadraten D_t, vilken vi kallar $f(D_t)$, för olika värden på t. Eftersom f inte är linjär, kommer inte den av f deformerade kvadraten vara en parallellogram som i det linjära fallet. Skriv en funktion som tar t som argument och ritar upp $f(D_t)$. Titta först på $f(D_t)$ för relativt stora värden på t, t ex $t = 1, 2, 3, 4$. Rita sedan $f(D_t)$ för små positiva värden på t, mycket mindre än 1. Låt hela tiden matlab skala om din figur, så att figuren $f(D_t)$ är ungefär lika stor oavsett t-värde. Beskriv vad som händer med **formen** på $f(D_t)$ då t blir stor respektive när t blir liten.