

# LINJÄRA OCH AFFINA AVBILDNINGAR

## GRUPPÖVNING OCH DATORLABORATION 1

TMV206 - LINJÄR ALGEBRA (VT 2019)

### INSTRUKTIONER

Allt material nedan **ingår i tentamen**.

Uppgift 2 bland teoriuppgifterna samt uppgift 3 bland datoruppgifterna ska redovisas skriftligt. **Deadline för inlämningen är 13/2 (onsdagsgrupper), respektive 15/2 (fredagsgrupper), kl. 8.** Dessutom ska gruppen muntligt kunna redovisa dessa två uppgifter 20/2, respektive 22/2, och stå till svars för inlämningen.

Varje grupp redovisar gemensamt genom att lämna in lösning av teoriuppgiften i en .pdf-fil (alternativt doc/docx/odt/jpg), matlabkod (.m-filer, zippade) och plottar via kursrummet i Canvas. Se till att första raderna både i .pdf-filen och i .m-filen lyder: "% Grupp X, gruppövning 1", där X ersätts med ert gruppnummer, följt av en lista över CID för aktiva gruppmedlemmar. Ifall någon gruppmedlem inte bidragit till lösningen, så ska dennes CID inte vara med på listan!

*Teoriuppgiften:* Det krävs lösningar som är fullständiga med förklaringar och motiveringar. Endast en mängd formler och uträkningar duger inte. Läraren ska inte behöva tolka lösningen. Bara genom att läsa lösningen ska ert resonemang framgå. Lösningen ska börja med en formulering av problemet och avslutas med att det tydligt framgår vad svaren på **alla** de ställda frågorna är.

*Matlabuppgiften:* Det krävs en .m-fil med en väl kommenterad och strukturerad Matlab-kod, samt plottar och svar på ställda frågor. Var noga med att er kod går att köra oberoende av andra program och inställningar i matlab, och att funktioner tar precis de argument och lämnar de värden, samt skriver ut/ritar det, som krävs i uppgiften.

### TEORIÖVNINGAR

**Uppgift 1.** Bestäm matriserna för följande linjära avbildningar. Sats 3.11, exempel 3.17 och proposition 3.18 kan vara till hjälp.

- (a) i två dimensioner
  - (i) Rotation moturs  $\theta$  radianer kring origo.
  - (ii) Skalning med en faktor  $s$ , med origo som fix punkt.
  - (iii) Ortogonal projektion på  $x$ -axeln respektive  $y$ -axeln.
- (b) i tre dimensioner
  - (i) Rotation moturs  $\theta$  radianer kring  $z$ -axeln.
  - (ii) Skalning med en faktor  $s$ , med origo som fix punkt.
  - (iii) Ortogonal projektion på  $xy$ -planet,  $yz$ -planet respektive  $z$ -axeln.

**Uppgift 2.** När man sysslar med (dator)-grafik är affina avbildningar viktiga. En affin avbildning är en (godtycklig) sammansättning av en linjär avbildning och en translation. Studera bokens kapitel 3.7.

- (a) En translation  $T_{\mathbf{b}}$  med en vektor  $\mathbf{b}$ , är helt enkelt addition med vektorn  $\mathbf{b}$ :  $T_{\mathbf{b}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{b}$ . Visa att en translation **inte** är en linjär avbildning (om  $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ ).
- (b) Låt  $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$  vara en linjär avbildning med matrisen  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Beräkna  $T_{\mathbf{b}} \circ f(\mathbf{x})$  och  $f \circ T_{\mathbf{b}}(\mathbf{x})$ .

- (c) Betrakta ekvationen  $A\mathbf{b} = \mathbf{b}$ , eller ekvivalent  $(A - I)\mathbf{b} = \mathbf{0}$ , där vi ser både  $A$  och  $\mathbf{b}$  som variabler. Ge exempel på  $A$  och  $\mathbf{b}$  som uppfyller ekvationen (utöver de uppenbara  $A = I$  med  $\mathbf{b}$  godtycklig, resp.  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$  med  $A$  godtycklig). Beskriv geometriskt den linjära avbildning som representeras av matrisen  $A$  och dess samband med vektorn  $\mathbf{b}$ .
- (d) *Bakgrundsinfo:* Man kan representera en affin avbildning av planet med en linjär avbildning av rummet. En tvådimensionell vektor  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  kan nämligen identifieras med den tredimensionella vektorn  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ . Se bokens kapitel 3.7 för att i detalj ta reda på hur man gör.

*Uppgift:* Låt  $B$  vara en  $3 \times 3$ -matris som representerar en linjär avbildning av rummet som i sin tur representerar en affin avbildning av planet. Detta innebär att  $B\mathbf{v}$  har  $z$ -koordinat 1 för alla vektorer  $\mathbf{v}$  vars  $z$ -koordinat är 1. Visa att sista raden i  $B$  måste vara  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

**Uppgift 3.** Låt  $\mathbf{a}$  vara en fix enhetsvektor i rummet.

- (a) Visa att avbildningarna  $f(\mathbf{v}) = \mathbf{a} \times \mathbf{v}$  och  $g(\mathbf{v}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{v})\mathbf{a}$  är linjära. Vilka tre olika produkter använder sig dessa två definitioner av  $f$  och  $g$  av?
- (b) Ange en enhetsvektor  $\mathbf{a}$  där ingen av de tre koordinaterna är 0. För detta  $\mathbf{a}$ , bestäm matrisen för den linjära avbildningen  $f + g$ .
- (c) Låt nu  $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Rita punkterna/vektorerna  $f(\mathbf{v})$ ,  $g(\mathbf{v})$  och  $(f + g)(\mathbf{v})$ , givet några val av  $\mathbf{v}$ .

Förklara geometriskt (t. ex. projicerar, speglar, roterar, skalar, skjuvar,...) vad  $f + g$  åstadkommer.

## DATORÖVNINGAR

**Uppgift 1.** Konstruera Matlab-funktioner som

- (a) har argument  $s$  och ger den  $2 \times 2$ -matris som svarar mot skalning med  $s$ .
- (b) har argument  $t$  och ger den  $2 \times 2$ -matris som svarar mot rotation  $t$  radianer moturs.

**Uppgift 2.** (a) Konstruera en funktion som har tre argument:  $A$ ,  $\mathbf{b}$  och  $\mathbf{x}$  där  $A$  är en  $2 \times 2$ -matris och  $\mathbf{b}$  och  $\mathbf{x}$  är 2-vektorer. Funktionen ska plotta punkterna  $\mathbf{x}$  och  $A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ .

(b) Samma som första deluppgiften fast plotta de två punkterna i två delfönster genom att använda 'subplot'. Använd samma skala i de båda fönstren, på både  $x$ - och  $y$ -axel.

**Uppgift 3.** (a) Samma som uppgift 2(b) fast låt nu istället  $X$  vara en 'vektor' av  $n$  punkter lagrade som en  $2 \times n$ -matris. Funktionen ska ta  $A$ ,  $\mathbf{b}$  och  $X$  som argument och ska rita den polygon med punkterna i  $X$  som hörn, samt motsvarandes polygon då man tar  $A\mathbf{x} + \mathbf{b}$  för de olika punkterna  $\mathbf{x}$  i  $X$ . Funktionen ska returnera värdet  $Y$ , den matris av samma typ som  $X$  som innehåller bildpunkterna  $A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ . Exempelvis ska

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ge enhetskvadraten och bilden av denna under funktionen  $A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ .

Se "Introduktion till MATLAB" för exempel hur man ritar polygontåg. Använd gärna kommandot 'axis' (kanske i kombination med 'max' och 'min') för att få lämpliga gränser för graferna. Observera att 'axis' ska anges efter plot-kommandot.

**Spara er kod på denna uppgift till gruppövning 2, där ni kommer behöva den igen.**

- (b) Mata in en polygon  $X$ : Välj en osymmetrisk, mer komplicerad form, så att ni direkt kan se i figuren av motsvarande polygon  $Y$  vilket hörn som avbildas på vilket. Tolka med hjälp av programmet i (a) vad var och en av följande matriser åstadkommer geometriskt (t. ex. projicerar, speglar, roterar, skalar, skjuvar,...). Vi använder hela tiden här  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ , det vill säga vi betraktar linjära, ej affina, avbildningar.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1.3 & -2.7 \\ 2.7 & 1.3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -0.88 & -0.48 \\ -0.48 & 0.88 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1.3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0.77 & -0.42 \\ -0.42 & 0.23 \end{pmatrix}.$$

Tänk på skalningen: Rita båda polygonerna, och både  $x$ - och  $y$ -axel med samma skala för att tolka rätt!

**Uppgift 4.** Det finns ett kommando 'ginput' som hämtar koordinaterna för ett (eller flera) musklick, se hjälpen. Du ska nu använda detta för att få en pil att rotera och ändra längd så att den pekar dit du klickar.

- Rita "en pil" som startar i origo och slutar i  $(1, 0)$  i ett kvadratisk koordinatsystem som går från  $-5$  till  $5$  i båda riktningarna. Pilen kan gärna vara en ifylld polygon med hörnen i punkterna  $(0, 0.02)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, -0.02)$ .
- Gör en oändlig loop som i varje steg använder '[x,y]=ginput(1)' för att hämta koordinater för ett musklick och sedan roterar och skalar den ursprungliga pilen så att den fortfarande startar i origo men spetsen hamnar i punkten där du klickar. Funktionen 'atan', d. v. s. arcus tangens, kan vara användbar för att bestämma en vinkel, men tänk på att 'atan' alltid ger en vinkel i intervallet  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  så det blir olika fall att ta hänsyn till beroende på tecknet hos  $x$ . (Man kanske vill också kolla upp funktionen 'atan2').

**Uppgift 5.** I den här uppgiften kommer du att ha användning av kommandona 'getframe' och 'movie' (samt en funktion som du gjort själv redan). Titta i hjälpen hur 'getframe' och 'movie' fungerar.

- Gör en film som illustrerar en sekundvisare. (Utgå gärna från polygonen i Uppgift 4 och rotera den.)
- Utöka så att den också har minut- och timvisare. Här tillåter du lämpligen tiden att gå snabbare (för att få lite "action") samt hoppar några sekunder i taget (för att inte göra slut på minnet).

*Anmärkning:* Minutvisaren kan gärna bildas av en ifylld polygon med hörnen i punkterna  $(0, 0.02)$ ,  $(0.8, 0.02)$ ,  $(0.8, -0.02)$  och  $(0, -0.02)$ .

Timvisaren kan bildas av en ifylld polygon med hörnen i punkterna  $(0, 0.02)$ ,  $(0.3, 0.03)$ ,  $(0.4, 0)$ ,  $(0.3, -0.03)$  och  $(0, -0.02)$ .