Derivaciones matemáticas | Valor del dinero en el tiempo.

Finanzas para no financieros.

Dr. Martín Lozano https://mlozanoqf.github.io/

03 de enero de 2026, 04:51 p.m.

	Fundamental	Intermedio	Especializado
Finanzas	✓	×	×
Estadística	×	×	×
R	×	×	×

1 Introducción

- El valor del dinero en el tiempo implica que \$1 hoy no equivale a \$1 mañana. Con una tasa i, el dinero puede crecer (capitalizarse) o traerse al presente (descontarse).
- Las fórmulas de VP y VF permiten comparar cantidades en fechas distintas usando una fecha base, lo cual es clave para decidir entre alternativas.
- A partir del caso más simple de un solo periodo, se construye la fórmula general para n periodos y luego se extiende a flujos de efectivo: anualidades y perpetuidades.
- Estas derivaciones son la base para aplicaciones como valuación de proyectos, créditos e hipotecas, planes de ahorro e inversiones, y valuación de activos con flujos futuros.

2 Valor futuro y presente.

- Valor futuro, a un solo periodo, $n = 1$.
  $VF = VP + (i \times VP) \rightarrow VF = VP(1 + i)$.
- Valor futuro, a dos periodos, $n = 2$.
  $VF = VP(1 + i) + (i \times VP(1 + i)) \rightarrow VF = VP(1 + i)(1 + i)$
  $VF = VP(1 + i)^2$.
- Valor futuro, a n periodos.
  $VF = VP(1 + i)^n$.
- Valor presente.
  $VF = VP(1 + i)^n \rightarrow VP = \dfrac{VF}{(1 + i)^n}$.
- En la práctica, traer a valor presente o futuro una sola cantidad de dinero no es muy común. Lo regular es que tengamos que hacer operaciones con varios flujos de efectivo futuros al mismo tiempo, como en el pago de créditos que involucran muchos pagos.

3 Valor presente de una anualidad ordinaria (pagos al final).

- Planteamiento (pago fijo C, tasa por periodo i, n pagos).
  $VPA = \dfrac{C}{1+i} + \dfrac{C}{(1+i)^2} + \cdots + \dfrac{C}{(1+i)^n}.$
- Factorizamos C.
  $VPA = C\left[\dfrac{1}{1+i} + \dfrac{1}{(1+i)^2} + \cdots + \dfrac{1}{(1+i)^n}\right].$
- Para ver una serie geométrica, definimos $q = \dfrac{1}{1+i}$.
  $VPA = C\left[q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n\right].$
- Definimos S.
  $S = q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n$
  $qS = q^2 + q^3 + q^4 + \cdots + q^n + q^{n+1}$
  $S - qS = (q + q^2 + \cdots + q^n) - (q^2 + \cdots + q^n + q^{n+1})$
  $S - qS = q - q^{n+1} \rightarrow S(1-q) = q(1-q^n)$
  $S = \dfrac{q(1-q^n)}{1-q}.$
- Nos olvidamos de q y regresamos a i.
  Numerador: $q(1-q^n) \rightarrow (1+i)^{-1}(1-(1+i)^{-n})$.
  Denominador: $(1-q) = 1 - \dfrac{1}{1+i} \rightarrow \dfrac{i}{1+i} \rightarrow i(1+i)^{-1}$.
  $S = \dfrac{q(1-q^n)}{1-q} \rightarrow \dfrac{(1+i)^{-1}(1-(1+i)^{-n})}{i(1+i)^{-1}}$
  $S = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$
- Nos olvidamos de S y regresamos al planteamiento original.
  $VPA = C \times S \rightarrow VPA = C\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$

4 Valor futuro de una anualidad ordinaria (pagos al final).

- Partimos del valor presente de la anualidad.
  $VPA = C\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$.
- Llevamos VPA al final del periodo n.
  $VFA = VPA(1+i)^n$.
- Sustituimos VPA.
  $VFA = C\dfrac{(1-(1+i)^{-n})(1+i)^n}{i}$.
- Simplificamos.
  $VFA = C\dfrac{(1+i)^n-1}{i}$.

5 Valor presente de una anualidad anticipada.

- Partimos del valor presente de la anualidad ordinaria.
  $$VPA = \frac{C}{(1+i)} + \frac{C}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{C}{(1+i)^n}.$$
- Definimos el valor presente de la anualidad anticipada.
  $$VPA_{ant} = C + \frac{C}{(1+i)} + \cdots + \frac{C}{(1+i)^{n-1}}.$$
- Re-escribimos la ordinaria.
  $$VPA = \frac{1}{(1+i)}\left(C + \frac{C}{(1+i)} + \cdots + \frac{C}{(1+i)^{n-1}}\right) \rightarrow \frac{VPA_{ant}}{(1+i)}$$
- En resumen.
  $$VPA_{ant} = VPA(1+i).$$
  $$VPA = C\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

6 Valor futuro de una anualidad anticipada.

- Partimos del valor futuro de la anualidad ordinaria. El último pago en $t = n$ no capitaliza, queda C.
  $VFA = C(1+i)^{n-1} + C(1+i)^{n-2} + \cdots + C(1+i) + C.$
- Definimos el valor futuro de la anualidad anticipada.
  $VFA_{ant} = C(1+i)^{n} + C(1+i)^{n-1} + \cdots + C(1+i)^2 + C(1+i).$
- Re-escribimos la anticipada.
  $VFA_{ant} = (1+i)\left(C(1+i)^{n-1} + C(1+i)^{n-2} + \cdots + C\right) \to (1+i)VFA$
- En resumen.
  $VFA_{ant} = VFA(1+i).$
  $VFA = C\dfrac{(1+i)^n - 1}{i}.$

7 Perpetuidad (pagos al final).

- Planteamiento (pago fijo C cada periodo, tasa i, duración infinita).
  $$VPP = \frac{C}{1+i} + \frac{C}{(1+i)^2} + \frac{C}{(1+i)^3} + \cdots.$$
- Factorizamos C y definimos $q = \dfrac{1}{1+i}$.
  $$VPP = C\left[\frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \cdots\right]$$
  $$VPP = C\left[q + q^2 + q^3 + \cdots\right].$$
- Definimos S.
  $$S = q + q^2 + q^3 + \cdots$$
  $$qS = q^2 + q^3 + q^4 + \cdots$$
  $$S - qS = (q + q^2 + q^3 + \cdots) - (q^2 + q^3 + q^4 + \cdots)$$
  $$S - qS = q \to S(1-q) = q$$
  $$S = \frac{q}{1-q}.$$
- Sustituimos $q = (1+i)^{-1}$, y $(1-q) = i(1+i)^{-1}$.
  $$S = \frac{(1+i)^{-1}}{i(1+i)^{-1}}$$
  $$S = \frac{1}{i}.$$
- Finalmente.
  $$VPP = C \times S$$
  $$VPP = \frac{C}{i}.$$

8 Conclusión.

- A partir de la capitalización por periodos se obtiene la relación general entre VP y VF.
- Usando la suma de una serie geométrica se derivan las fórmulas para anualidades y perpetuidades.
- En conjunto, estas expresiones permiten valorar y comparar flujos de efectivo en distintos momentos de tiempo de manera consistente.