Cartera óptima con rendimiento objetivo.

Introducción al diseño y análisis.

Dr. Martín Lozano `https://mlozanoqf.github.io/`

18 de diciembre de 2025, 05:33 a.m.

	Fundamental	Intermedio	Especializado
Finanzas	$\times$	✓	$\times$
Estadística	✓	$\times$	$\times$
R	$\times$	✓	$\times$

1 Introducción.

- Conceptos fundamentales del análisis riesgo–rendimiento.
- Explicar la frontera media–varianza, destacando cómo se obtiene mediante métodos analíticos y numéricos.
- Construir y evaluar portafolios ingenuos, de mínima varianza, de 2 y 10 activos usando datos reales.
- Análisis cuando se permiten o restringen las ventas en corto.

2 Diez empresas públicas de Estados Unidos.

Ticker	Nombre de la empresa	Industria
AMD	Advanced Micro Dev.	Computación de alto rendimiento
CNC	Centene Corp.	Servicios de salud
GIS	General Mills, Inc.	Productos de consumo envasados
LMT	Lockheed Martin Corp.	Aeroespacial y defensa
LRCX	Lam Research Corp.	Semiconductores
NEM	Newmont Corp.	Minería de metales preciosos
SNPS	Synopsys, Inc.	Software de diseño
SYF	Synchrony Financial	Servicios financieros
TRMB	Trimble Inc.	Tecnología geoespacial
TTD	The Trade Desk, Inc.	Tecnología publicitaria

3 Paquetes.

```r
library(tidyquant)
library(tidyverse)
library(lubridate)
library(scales)
library(quadprog)
```

4 Inicialización, parte 1.

```
# Empresas y rango temporal

tickers <- c("AMD","CNC","GIS","LMT","LRCX","NEM","SNPS","SYF","TRMB","TTD")
n_months <- 60L
price_start <- ymd("2020-09-01")
price_end <- price_start %m+% months(n_months + 1) - days(1)
returns_start <- price_start %m+% months(1)
returns_end <- returns_start %m+% months(n_months) - months(1)

# Descarga de precios históricos de las acciones

prices <- tq_get(tickers, from = price_start, to = price_end, get = "stock.prices")

# Cálculo de retornos mensuales por activo

monthly_returns <- prices |>
  arrange(symbol, date) |>
  group_by(symbol) |>
  tq_transmute(select = adjusted, mutate_fun = periodReturn,
               period = "monthly", type = "arithmetic",
               col_rename = "monthly_return") |>
  filter(between(date, returns_start, returns_end)) |>
  slice_head(n = n_months) |>
  ungroup()

stopifnot(n_distinct(monthly_returns$symbol) == length(tickers))

# Función: estadísticas básicas por activo

asset_stats <- function(data) {
  data |>
    group_by(symbol) |>
    summarise(ER = mean(monthly_return, na.rm = TRUE),
              SD = sd(monthly_return, na.rm = TRUE),
              SR = ER / SD, .groups = "drop")}
```

5 Riesgo-rendimiento: 10 activos individuales.

```r
stats <- asset_stats(monthly_returns) |>
  arrange(-SR) |>
  print()
```

```
## # A tibble: 10 x 4
##    symbol        ER     SD       SR
##    <chr>      <dbl>  <dbl>    <dbl>
##  1 SYF      0.0259   0.106   0.244
##  2 SNPS     0.0216   0.0902  0.240
##  3 LRCX     0.0257   0.111   0.231
##  4 AMD      0.0223   0.150   0.149
##  5 TRMB     0.0132   0.0970  0.136
##  6 LMT      0.00709  0.0647  0.110
##  7 NEM      0.0107   0.103   0.103
##  8 TTD      0.0170   0.184   0.0926
##  9 GIS      0.000182 0.0477  0.00382
## 10 CNC     -0.00542  0.102  -0.0532
```

6 Cartera de mínima varianza global (GMV).

Sea n el número de activos. Definimos:

$$\Sigma := \mathrm{Var}(R) \in \mathbb{R}^{n\times n}, \qquad \mu := \mathbb{E}[R] \in \mathbb{R}^n, \qquad \mathbf{1} := (1, \dots, 1)^\top \in \mathbb{R}^n.$$

Definimos los escalares:

$$\begin{aligned} a &:= \mathbf{1}^\top \Sigma^{-1} \mathbf{1}, \\ b &:= \mathbf{1}^\top \Sigma^{-1} \mu, \\ c &:= \mu^\top \Sigma^{-1} \mu, \\ d &:= ac - b^2. \end{aligned}$$

El problema es:

$$\min_{w \in \mathbb{R}^n} \; w^\top \Sigma w \quad \text{s.a.} \quad \mathbf{1}^\top w = 1.$$

El Lagrangiano es:

$$\mathcal{L}(w, \lambda) = w^\top \Sigma w - \lambda(\mathbf{1}^\top w - 1).$$

La condición de primer orden (FOC) es:

$$\nabla_w \mathcal{L} = 2\Sigma w - \lambda \mathbf{1} = 0 \quad \Rightarrow \quad w = \frac{\lambda}{2} \Sigma^{-1} \mathbf{1}.$$

Usando la restricción $\mathbf{1}^\top w = 1$:

$$\mathbf{1}^\top w = \frac{\lambda}{2} \mathbf{1}^\top \Sigma^{-1} \mathbf{1} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda}{2} = \frac{1}{a}.$$

Por tanto, los pesos de mínima varianza global son:

$$w_{\min} = \frac{\Sigma^{-1} \mathbf{1}}{a}.$$

7 Cartera de mínima varianza con objetivo r^*.

Sea $r^* \in \mathbb{R}$ el rendimiento objetivo. El problema es:

$$\min_{w \in \mathbb{R}^n} w^\top \Sigma w \quad \text{s.a.} \quad \mathbf{1}^\top w = 1, \;\; \mu^\top w = r^*.$$

El Lagrangiano es:

$$\mathcal{L}(w, \lambda, \gamma) = w^\top \Sigma w - \lambda(\mathbf{1}^\top w - 1) - \gamma(\mu^\top w - r^*).$$

La FOC es:

$$\nabla_w \mathcal{L} = 2\Sigma w - \lambda \mathbf{1} - \gamma \mu = 0.$$

Definimos los vectores:

$$g := \Sigma^{-1} \frac{c\,\mathbf{1} - b\,\mu}{d}, \qquad h := \Sigma^{-1} \frac{a\,\mu - b\,\mathbf{1}}{d}.$$

Entonces, para cualquier objetivo r^*, los pesos se obtienen como:

$$w(r^*) = g + h\,r^*.$$

Para un vector de pesos w:

$$\mathbb{E}[R_p] = w^\top \mu, \qquad \sigma_p = \sqrt{w^\top \Sigma w}.$$

8 Conclusión.

- La diversificación reduce riesgo y permite construir portafolios con mejor relación riesgo–rendimiento que los activos individuales.
- La frontera media–varianza es una herramienta poderosa para visualizar las decisiones de inversión y comprender el intercambio entre riesgo y retorno.