Rendimiento aritmético y geométrico.

La media que anticipa el futuro y la que explica el pasado.

Dr. Martín Lozano `https://mlozanoqf.github.io/`

01 de noviembre de 2025, 10:23 p.m.

	Fundamental	Intermedio	Especializado
Finanzas	✓	×	×
Estadística	✓	×	×
R	×	×	×

1 Introducción.

- El análisis del rendimiento financiero puede hacerse desde distintas medias: aritmética y geométrica, cada una con un propósito distinto.
- Comprender sus diferencias evita errores comunes al interpretar la rentabilidad y el riesgo de una inversión.
- Este documento compara ambas medidas y muestra cómo estimar un rendimiento esperado y su incertidumbre asociada.

2 Ejemplo.

Año	Rendimiento histórico r_i	Capital acumulado real
–5	+15 %	$\$100 \times (1.15) = \$115.00$
–4	+20 %	$\$115 \times (1.20) = \$138.00$
–3	+30 %	$\$138 \times (1.30) = \$179.40$
–2	–20 %	$\$179.4 \times (0.8) = \$143.52$
–1	+25 %	$\$143.52 \times (1.25) = \$179.40$

Rendimientos de un fondo de inversión: $15\%, 20\%, 30\%, -20\%$ y 25%. Evolución de una inversión inicial de \$100.

3 Rendimiento aritmético.

Año	r_i	CA	CA ($\bar{r}_A = 14\%$)
–5	+15 %	\$115.00	\$114.00
–4	+20 %	\$138.00	\$129.96
–3	+30 %	\$179.40	\$148.15
–2	–20 %	\$143.52	\$168.89
–1	+25 %	\$179.40	\$192.53

$\bar{r}_A = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_i$

$\bar{r}_A = \frac{0.15+0.20+0.30-0.20+0.25}{5} = 14\%$

4 Rendimiento geométrico.

Año	r_i	CA	CA ($\bar{r}_A = 14\%$)	CA ($\bar{r}_G = 12.4\%$)
–5	+15 %	\$115.00	\$114.00	\$112.40
–4	+20 %	\$138.00	\$129.96	\$126.41
–3	+30 %	\$179.40	\$148.15	\$142.54
–2	–20 %	\$143.52	\$168.89	\$160.72
–1	+25 %	\$179.40	\$192.53	\$179.40

$\bar{r}_G = \left(\prod_{i=1}^{n}(1+r_i)\right)^{1/n} - 1$

$\bar{r}_G = [(1.15)(1.20)(1.30)(0.80)(1.25)]^{1/5} - 1$

$\bar{r}_G = (1.794)^{1/5} - 1 = 12.4\%$

5 Proyección al año 0.

Año	Rendimiento histórico r_i	Capital acumulado real
–5	+15 %	$115.00
...	...	...
–1	+25 %	$179.40
0 (hoy)	No lo sabemos	-

El rendimiento aritmético sirve como estimador del rendimiento esperado para el siguiente periodo.

6 Cálculo del capital esperado y su riesgo.

Capital real al final del año –1 es \$179.4.

Capital esperado al año 0 = $\$179.4 \times (1 + 0.14) = \$204.5$

Desviación estándar muestral:

$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(r_i - \bar{r}_A)^2}{n-1}} \rightarrow s = \sqrt{\frac{(0.15-0.14)^2+(0.20-0.14)^2+(0.30-0.14)^2+(-0.20-0.14)^2+(0.25-0.14)^2}{5-1}}$

$s = \sqrt{\frac{0.0001+0.0036+0.0256+0.1156+0.0121}{4}}$

$s = \sqrt{0.03925} = 0.1981$

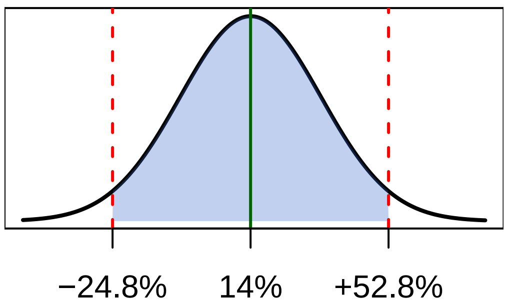
$s = 19.8\%$

7 Rango de variación esperada de los rendimientos.

Precaución: La muestra es pequeña.

$\bar{r}_A \pm 1.96s \rightarrow 14\% \pm 1.96(19.8\%) = 14\% \pm 38.8\%$

Los rendimientos posibles se ubican entre: $[-24.8\%, 52.8\%]$.



8 Rango estimado.

El rango del capital proyectado al año 0 sería:

Límite inferior: $\$179.4 \times (1 - 0.248) = \$134.8$.

Límite superior: $\$179.4 \times (1 + 0.528) = \$273.6$.

Con un 95% de confianza, el valor esperado de \$204.5 se ubica entre \$134.8 y \$273.6, reflejando la incertidumbre asociada a los rendimientos.

9 Relación entre $\bar{r}_G$ y $\bar{r}_A$.

$\bar{r}_G \approx \bar{r}_A - \frac{1}{2}s^2 \rightarrow 0.124 \approx 0.14 - \frac{1}{2}0.03925$

$0.124 \approx 0.14 - 0.019625$

$0.124 \approx 0.120375$

$12.4\% \approx 12.04\%$

10 Demostración general de que la media geométrica es menor o igual que la media aritmética.

Sea un conjunto de n números reales **positivos** $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Definimos:

- **Media aritmética (AM):**
  $A = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$
- **Media geométrica (GM):**
  $G = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$

La desigualdad que queremos demostrar es:

$$A \geq G$$

con igualdad **solo si** todos los x_i son iguales.

Demostración para $n = 2$

Sean $x_1 = a$ y $x_2 = b$, ambos positivos.

Queremos mostrar que:

$\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

Elevamos ambos lados al cuadrado (manteniendo la desigualdad, ya que los números son positivos):

$\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab$

$\dfrac{a^2 + 2ab + b^2}{4} \geq ab$

$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$

$(a-b)^2 \geq 0$

Esta última expresión **siempre es verdadera**, y la igualdad solo se cumple si $a = b$.

Caso general ($n > 2$)

Para más números, la demostración se puede extender por **inducción** o usando el **logaritmo y la convexidad**:

1. Tomamos logaritmos naturales: $\ln(G) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)$
2. La función $\ln(x)$ es **cóncava**, por lo que según la **desigualdad de Jensen**: $\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)$
3. Aplicando la exponencial a ambos lados: $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$

Conclusión:

Media aritmética $\geq$ Media geométrica

con igualdad solo si todos los valores son iguales.

11 Conclusión.

- La media geométrica resume el comportamiento histórico del capital.
- La media aritmética proyecta el rendimiento esperado futuro.
- Ambas ofrecen una visión complementaria: la geométrica evalúa el pasado con precisión, y la aritmética anticipa el futuro con incertidumbre.