# Derivaciones matemáticas | Valor del dinero en el tiempo.

Finanzas para no financieros.

Dr. Martín Lozano https://mlozanoqf.github.io/

17 de diciembre de 2025, 02:14 a.m.

| | Fundamental | Intermedio | Especializado |
|---|---|---|---|
| Finanzas | ✓ | × | × |
| Estadística | × | × | × |
| R | × | × | × |

## 1 Introducción

- El valor del dinero en el tiempo implica que \$1 hoy no equivale a \$1 mañana. Con una tasa $i$, el dinero puede crecer (capitalizarse) o traerse al presente (descontarse).
- Las fórmulas de $VP$ y $VF$ permiten comparar cantidades en fechas distintas usando una fecha base, lo cual es clave para decidir entre alternativas.
- A partir del caso más simple de un solo periodo, se construye la fórmula general para $n$ periodos y luego se extiende a flujos de efectivo: anualidades y perpetuidades.
- Estas derivaciones son la base para aplicaciones como valuación de proyectos, créditos e hipotecas, planes de ahorro e inversiones, y valuación de activos con flujos futuros.

## 2 Valor futuro.

- Un solo periodo.
  $VF = VP + iVP \rightarrow VF = VP(1+i)$.
- Dos periodos.
  $VF = VP(1+i) + iVP(1+i) \rightarrow VF = VP(1+i)(1+i)$
  $\rightarrow VF = VP(1+i)^2$.
- $n$ periodos.
  $VF = VP(1+i)^n$.
- Valor presente.
  $VF = VP(1+i)^n \rightarrow VP = \dfrac{VF}{(1+i)^n}$.

## 3 Anualidad ordinaria (pagos al final).

- Planteamiento (pago fijo $C$, tasa por periodo $i$, $n$ pagos).
  $VP = \dfrac{C}{1+i} + \dfrac{C}{(1+i)^2} + \cdots + \dfrac{C}{(1+i)^n}$.
- Factorizamos $C$.
  $VP = C\left[\dfrac{1}{1+i} + \dfrac{1}{(1+i)^2} + \cdots + \dfrac{1}{(1+i)^n}\right]$.
- Para ver una serie geométrica, definimos $q = \dfrac{1}{1+i}$.
  $VP = C\,[q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n]$.
- Definimos $S$.
  $S = q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n$
  $qS = q^2 + q^3 + q^4 + \cdots + q^{n+1}$
  $S - qS = (q + q^2 + \cdots + q^n) - (q^2 + \cdots + q^{n+1})$
  $\to S - qS = q - q^{n+1} \to S(1-q) = q(1-q^n)$
  $\to S = \dfrac{q(1-q^n)}{1-q}$.
- Sustituimos $q = \dfrac{1}{1+i}$, y $(1-q) = 1 - \dfrac{1}{1+i} = \dfrac{i}{1+i}$:
  $S = \dfrac{\frac{1}{1+i}\left(1-(1+i)^{-n}\right)}{\frac{i}{1+i}} = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$.
- Finalmente.
  $VP = CS \to VP = C\,\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$.

## 4 Valor futuro de una anualidad ordinaria (pagos al final).

- Partimos del valor presente.
  $VP = C\,\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$
- Llevamos $VP$ al final del periodo $n$.
  $VF = VP(1+i)^n.$
- Sustituimos $VP$.
  $VF = \left(C\,\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right)(1+i)^n.$
- Simplificamos usando $(1+i)^n(1+i)^{-n} = 1$.
  $VF = C\,\dfrac{(1+i)^n-1}{i}.$

## 5 Perpetuidad (pagos al final).

- Planteamiento (pago fijo $C$ cada periodo, tasa $i$, duración infinita).
  $VP = \dfrac{C}{1+i} + \dfrac{C}{(1+i)^2} + \dfrac{C}{(1+i)^3} + \cdots.$
- Factorizamos $C$ y definimos $q = \dfrac{1}{1+i}$.
  $VP = C\left[\dfrac{1}{1+i} + \dfrac{1}{(1+i)^2} + \cdots\right]$
  $\to VP = C\left[q + q^2 + q^3 + \cdots\right].$
- Definimos $S$:
  $S = q + q^2 + q^3 + \cdots$
  $qS = q^2 + q^3 + q^4 + \cdots$
  $S - qS = (q + q^2 + q^3 + \cdots) - (q^2 + q^3 + q^4 + \cdots)$
  $\to S - qS = q \to S(1-q) = q$
  $\to S = \dfrac{q}{1-q}.$
- Sustituimos $q = \dfrac{1}{1+i}$, y $(1-q) = 1 - \dfrac{1}{1+i} = \dfrac{i}{1+i}$:
  $S = \frac{\frac{1}{1+i}}{\frac{i}{1+i}} = \dfrac{1}{i}.$
- Finalmente:
  $VP = C\,S \to VP = \dfrac{C}{i}.$

## 6 Conclusión.

- A partir de la capitalización por periodos se obtiene la relación general entre $VP$ y $VF$.
- Usando la suma de una serie geométrica se derivan las fórmulas para anualidades y perpetuidades.
- En conjunto, estas expresiones permiten valorar y comparar flujos de efectivo en distintos momentos de tiempo de manera consistente.