

Zad 4.

niedziela, 26 lutego 2023 12:34

4. (1pkt) Udowodnij, że algorytm mnożenia liczb "po rosyjsku" jest poprawny. Jaka jest jego złożoność czasowa i pamięciowa przy:

- jednorodnym kryterium kosztów,
- logarytmicznym kryterium kosztów?

ALGORYTM 3. Mnożenie "po rosyjsku"

1. oblicz ciąg a_1, a_2, \dots, a_k taki, że $a_1 = a$, $a_k = 1$, $a_{i+1} = \lfloor \frac{a_i}{2} \rfloor$ (dla $i = 1, \dots, k-1$),
2. oblicz ciąg b_1, b_2, \dots, b_k taki, że $b_1 = b$, $b_{i+1} = 2b_i$ (dla $i = 1, \dots, k-1$),
3. oblicz $\sum_{\substack{i=1 \\ a_i \text{ nieparzyste}}}^k b_i$

$a, b \in \mathbb{N}$ więc mają skończoną reprezentację binarną

$$a_1 = a = 1x_{k-1} \dots x_1x_0 \quad (a \gg 0)$$

$$a_2 = \lfloor \frac{a_1}{2} \rfloor = 01x_{k-1} \dots x_1 \quad (a \gg 1)$$

$$a_k = 000 \dots 1 = 1$$

analogicznie

$$b_1 = b \quad b_k = b \ll (k-1)$$

a_i jest nieparzyste wtedy, wtedy $x_{i-1} = 1$

$\sum_{\substack{i=1 \\ a_i \text{ niep}}}^k b_i$ odpowiada mnożeniu pisemnym liczb zapisanych w systemie binarnym gdzie a jest zapisana bez zer wiodących na k -bitach

1) jednorodne kryterium
czas $\Theta(k)$ pamięć $\Theta(k)$

2) kryterium logarytmiczne

$\frac{a_i}{2} \leftarrow$ długość k
↓

... ..

2) kryterium logarytmiczne

obliczanie $a_i \rightarrow k$ działań o koszcie
z grubsza $k = \Theta(k^2)$

obliczanie $b_i \rightarrow k$ działań o koszcie
z grubsza $m = \Theta(km)$
długość zapisu binomego

sumowanie też jest $\Theta(km)$ więc
dostajemy $\Theta(k^2 + km) = \Theta(k(k+m))$
czas

pamięć $\Theta(k)$