Zad 5.

niedziela, 22 stycznia 2023 23:12

M12.5. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$. Sprawdzić, że wzór

a) $\|\boldsymbol{x}\|_1 := \sum_{k=1}^{n} |x_k|$,

b) $\|\boldsymbol{x}\|_\infty := \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|$,

definiuje normę w przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

Definicja

Normą wektorową nazywamy nieujemną funkcję rzeczywistą $\|\cdot\|$, określoną w przestrzeni $\mathbb{R}^n$, o następujących własnościach:

$$\bigwedge_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\theta\}} \{\|\boldsymbol{x}\| > 0\};$$

$$\bigwedge_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n} \bigwedge_{\alpha \in \mathbf{R}} \{\|\alpha \boldsymbol{x}\| = |\alpha| \|\boldsymbol{x}\|\};$$

$$\bigwedge_{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n} \{\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leqslant \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|\}.$$

a)

1° $x \neq 0 \Rightarrow \exists i \; x_i \neq 0$

zatem trywialnie $\|x\|_1 > 0$

2° $x \in \mathbb{R}^n \quad \alpha \in \mathbb{R}$

$$\|\alpha x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |\alpha x_k| = \sum_{k=1}^{n} |\alpha| \cdot |x_k| = |\alpha| \sum_{k=1}^{n} |x_k| = |\alpha| \cdot \|x\|_1$$

3° $$\|x+y\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| + |y_k| = \sum_{k=1}^{n} |x_k| + \sum_{k=1}^{n} |y_k| = \|x\|_1 + \|y_k\|$$

$\square$

b) 1° znowu trywialnie $\|x\|_\infty > 0 \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

2° $$\|\alpha x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |\alpha x_k| = |\alpha| \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| = |\alpha| \|x\|_\infty$$

3° $$\|x+y\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k + y_k| \leq \max_{1 \leq k \leq n} (|x_k| + |y_k|) \leq$$

$$\leq \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| + \max_{1 \leq i \leq n} |y_i| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

$\square$