

Zad 11.

środa, 19 kwietnia 2023 12:04

**Zadanie 11.** Spadek kamienia pod wpływem siły grawitacji, z uwzględnieniem oporu powietrza, jest opisany równaniem

$$x''(t) = -g + k(x'(t))^2, \quad k > 0.$$

Pokaż, że po długim czasie porusza się on z prędkością graniczną, tzn.  $\lim_{t \rightarrow \infty} x'(t) = -(g/k)^{1/2}$ .

$$x' = \sqrt{\frac{g}{k}} y \quad y = \sqrt{\frac{k}{g}} x'$$

$$x'' = \sqrt{\frac{g}{k}} y'$$

$$\sqrt{\frac{g}{k}} y' = -g + g y^2, \quad k > 0$$

$$\sqrt{\frac{g}{k}} \int \frac{dy}{y^2 - 1} = \int g dt = gt + c$$

$$\int = \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1} \right) dy = \frac{1}{2} [\ln(y-1) - \ln(y+1)] =$$

$$= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{y-1}{y+1}\right)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{g}{k}} \ln\left(\frac{y-1}{y+1}\right) = gt + c$$

$$\ln\left(\frac{y-1}{y+1}\right) = \frac{2gt}{\sqrt{\frac{g}{k}}} + c \quad \leftarrow \text{zjada dzielenie}$$

$$\ln\left(\frac{y-1}{y+1}\right) = 2t\sqrt{gk} + c \quad / \exp$$

$$\frac{y-1}{y+1} = ce^{2t\sqrt{gk}}$$

$$\frac{y+1-2}{y+1} = 1 - \frac{2}{y+1} = ce^{2t\sqrt{gk}}$$

$$\frac{2}{y+1} = -ce^{2t\sqrt{gk}} + 1$$

$$y+1 = \frac{2}{1 - ce^{2t\sqrt{gk}}}$$

$$y+1 = 1 - ce^{2t\sqrt{gk}}$$

$$\sqrt{\frac{k}{g}} x' = \frac{2}{1 + ce^{2t\sqrt{gk}}} - 1 \quad \nearrow 0$$

$$x' = -\sqrt{\frac{g}{k}} + \frac{2\sqrt{g}}{\sqrt{k} + ce^{2t\sqrt{gk}}}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x' = -\sqrt{\frac{g}{k}}$$

□