Zad 2.

poniedziałek, 20 marca 2023 18:27

2. (1pkt) Udowodnij, że algorytm Kruskala znajduje minimalne drzewa spinające poprzez przyrównanie tych drzew do drzew optymalnych.

1) minimalność

- Lemat

Niech F oznacza zbiór krawędzi wybranych przez algorytm Kruskala, w dowolnym jego momencie. Chcemy pokazać, że dla dowolnego takiego F będzie istniało minimalne drzewo spinające T, takie że $F \subseteq T$ i T nie zawiera krawędzi odrzuconych przez algorytm

dowód

1° dla $F = \emptyset$, $F \subseteq T$ dla dowolnego T

2° załóżmy, że teza spełniona jest dla zbioru F (który nie jest jeszcze drzewem spinającym) i jakiegoś T. rozważamy $F \cup \{e\}$.

a) $e \in T$. wtedy $F \cup \{e\} \subseteq T$

b) $e \notin T$. wtedy $T \cup \{e\}$ posiada cykl C

Weźmy krawędź f taką, że $f \in C$ oraz $f \notin F \cup \{e\}$. Taka krawędź musi istnieć, bo inaczej $F \cup \{e\}$ posiadałoby cykl. Oczywiście $f \in T$ oraz skoro nie należy do $F \cup \{e\}$, to nie została jeszcze rozważona przez algorytm (z założenia, że T nie zawiera krawędzi odrzuconych przez algorytm.). Oznacza to, że $c(f) \geq c(e)$.

Drzewo $T \setminus \{f\} \cup \{e\}$ ma zatem $\leq$ wagę niż T.

Mamy zatem $F \cup \{e\} \subseteq T \setminus \{f\} \cup \{e\}$ i teza zachodzi.

w praktyce =, inaczej T nie byłoby minimalne

na mocy indukcji finałowy zbiór F wyprodukowany przez algorytm jest minimalnym drzewem na mocy indukcji finałowy zbiór F wyprodukowany przez algorytm jest minimalnym drzewem spinającym

□

2) bycie drzewem spinającym udowodnione w notatce o algorytmach zachłannych