Zad 2.

niedziela, 18 czerwca 2023 18:27

Zadanie 2. Dla jakich wartości λ zagadnienie

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = y(2\pi), \quad y'(0) = y'(2\pi)$$

ma nietrywialne rozwiązanie?

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(2\pi) \\ y'(0) = y'(2\pi) \end{cases}$$

dla $\lambda > 0$

$$y(t) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda} t) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda} t)$$

$$y'(t) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda} t)\sqrt{\lambda} - c_2 \sin(\sqrt{\lambda} t) \cdot \sqrt{\lambda}$$

$$y'(0) = \sqrt{\lambda} \cdot c_1 =$$

$$y'(2\pi) = \sqrt{\lambda} c_1 \cos(\sqrt{\lambda} \cdot 2\pi) - \sqrt{\lambda} c_2 \sin(\sqrt{\lambda} \cdot 2\pi)$$

$$y(0) = c_2 = y(2\pi) = c_1 \sin(2\pi\sqrt{\lambda}) + c_2 \cos(2\pi\sqrt{\lambda})$$

$$\Downarrow$$

same

$$2\pi \cdot \sqrt{\lambda} = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\lambda} = k$$

$$\lambda = k^2, \quad k \in \mathbb{Z}$$