Zad 1.

sobota, 18 marca 2023 19:14

Zadanie 1. Zastąp instrukcję dzielenia całkowitoliczbowego zmiennej `n` typu `int32_t` przez stałą 3 przy pomocy operacji mnożenia liczb typu `int64_t`. Skorzystaj z faktu, że $\frac{x}{k} \equiv x \cdot \frac{1}{k}$. Zapisz $\frac{1}{k}$ przy pomocy **liczby stałopozycyjnej** (ang. *fixed point number*). Przedstaw dowód poprawności swojego rozwiązania. Instrukcja dzielenia działa zgodnie z wzorem podanym na wykładzie, tj.:

$$\mathtt{div3}(n) = \begin{cases} \lfloor \frac{n}{3} \rfloor & \text{dla } n \geq 0 \\ \lceil \frac{n}{3} \rceil & \text{dla } n < 0 \end{cases}$$

Najpierw rozwiąż zadanie dla przypadku $n \geq 0$, a potem uogólnij to na pełen przedział liczb.

Wskazówka: Spróbuj rozwiązać zadanie samodzielnie, a następnie przeczytaj §10.3 książki „*Uczta programistów*".

```
int32_t div3 (int32_t n) {
    int32_t M = 0x55555556; // (2^32+2)/3
    int64_t res = M * n >> 32; // res = floor(M * n / 2^32)
    return res + ((n >> 31) & 1); // add 1 if n < 0
}
```

$$M = \frac{2^{32}+2}{3}$$

1) $n \geq 0$

$$res = \left\lfloor \frac{2^{32}+2}{3} \cdot \frac{n}{2^{32}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2^{32}n + 2n}{3 \cdot 2^{32}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{3} + \frac{2n}{2^{32} \cdot 3} \right\rfloor$$

$$0 \leq n \leq 2^{31} - 1 < 2^{31}$$

czyli $0 \leq \frac{2n}{2^{32} \cdot 3} < \frac{2 \cdot 2^{31}}{2^{32} \cdot 3} = \frac{2^{32}}{2^{32} \cdot 3} = \frac{1}{3}$

zatem $res = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$

THEOREM D4. *For n, d integers, d ≠ 0, and x real,*

$$\left\lfloor \frac{n}{d} + x \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor \text{ if } 0 \leq x < \left|\frac{1}{d}\right|, \text{ and } \left\lceil \frac{n}{d} + x \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{d} \right\rceil \text{ if } -\left|\frac{1}{d}\right| < x \leq 0.$$

2) $n < 0$

wtedy $res = \left\lfloor \frac{2^{32}+2}{3} \cdot \frac{n}{2^{32}} \right\rfloor + \underset{\in \mathbb{Z}}{1} =$

$$\left\lfloor \frac{2^{32}n + 2n + 2^{32} \cdot 3}{2^{32} \cdot 3} \right\rfloor = \left\lceil \frac{2^{32}n + 2n + 1}{2^{32} \cdot 3} \right\rceil = (*)$$

THEOREM D2. *For n, d integers, d > 0,*

$$\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor = \left\lceil \frac{n-d+1}{d} \right\rceil \quad \text{and} \quad \left\lceil \frac{n}{d} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n+d-1}{d} \right\rfloor.$$

$$x + d - 1 = 2^{32} \cdot n + 2n + 2^{32} \cdot 3 = \underbrace{2^{32} n + 2n}_{x-1} + d$$

$$(*) = \left\lceil \frac{n}{3} + \frac{2n+1}{2^{32} \cdot 3} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$$

$$-2^{31} \le n \le -1 \Rightarrow -\frac{1}{3} < -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^{32} \cdot 3} \le \frac{2n+1}{2^{32} \cdot 3} \le -\frac{1}{2^{32} \cdot 3} < 0$$

$\square$