Zad 1.

środa, 19 kwietnia 2023 18:35

Zadanie 1. Załóżmy, że funkcja $f = f(t,x)$ jest klasy C^1 na zbiorze $t_0 \le t < \infty$, $-\infty < y < \infty$ oraz spełnia dodatkowe oszacowanie $|f(t,y)| \le K$ na całym tym zbiorze dla pewnej stałej $K > 0$. Udowodnić, że rozwiązanie zagadnienia

$$x' = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0$$

istnieje dla wszystkich $t \ge t_0$.

f, $\frac{\partial f}{\partial y}$ - ciągłe, z (P-L) rozwiązanie istnieje na jakimś $[t_0, t_0+\alpha]$. żeby móc przedłużyć sprawdzamy oszacowanie a priori

weźmy dowolne $T > t_0$ i to rozwiązanie $y(t)$

$$\sup_{t\in[t_0,T)} |y(t)| \overset{?}{<} \infty$$

z równania całkowego mamy:

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s,y)\,ds$$

$$|y(t)| \le |y_0| + \int_{t_0}^{t} |f(s,y)|\,ds \le$$

$$\le |y_0| + \int_{t_0}^{t} K\,ds = |y_0| + K(t-t_0)$$

$$\sup_{t\in[t_0,T)} |y_0| + K(t-t_0) = |y_0| + K(T-t_0) < \infty$$

skoro T było dowolne, to z tw. o przedłużaniu dostajemy rozwiązanie dla wszystkich $t \ge t_0$