Zad 10.

poniedziałek, 16 stycznia 2023 22:24

M11.10. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wyznaczyć, o ile to możliwe, takie wartości stałych A, B, C, żeby równość

$$\int_{-1}^{1} f(x)(1-x^2)^{-1/2}\,dx = Af(-1)+Bf(0)+Cf(1)$$

zachodziła dla dowolnego wielomianu f stopnia $\leqslant 5$. Podać także przykład wielomianu stopnia 6, dla którego powyższa równość nie zachodzi.

$$\int_{-1}^{1} f(x)(1-x^2)^{-1/2}\,dx = Af(x_0)+Bf(x_1)+Cf(x_2)$$

znowu x_1, x_0, x_2 mają być miejscami zerowymi trzeciego wielomianu ortog. względem $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Wiemy, że ten wielomian to $T_3(x)$ [charakterystyczne $p(x)$]. Miejsca zerowe $T_3(x)$ to

Wielomian Czebyszewa $T_k(x)$ posiada k zer rzeczywistych należących do [-1;1] danych wzorem:

$$x_j = \cos\left(\frac{2j-1}{2k}\pi\right), \quad j = 1,2,\ldots,k.$$

$x_0 = \cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$x_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$x_2 = \cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

no a w zadaniu ktoś chce żeby $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$

czyli takie A, B, C nie istnieją

dla $\omega_6 = (x-1)^2 x^2 (x+1)^2$

$\int_{-1}^{1} (x-1)^2 x^2 (x+1)^2 p(x)\,dx > 0$, a

$Af(-1) + Bf(0) + Cf(1) = 0$ więc dla tego nie ma równości