Zad 12.

środa, 19 kwietnia 2023 18:01

Zadanie 12. Znajdź $b > 0$ oraz domknięty podzbiór przestrzeni $C([0,b])$, na którym operator F zadany wzorem

$$F(u)(x) = 1 + \int_0^x u^3(y)\,\mathrm{d}y$$

jest kontrakcją.

domknięta kula o środku w 0

Niech $Z \subseteq C[0,b]$, $Z := \overline{B_r(0)} =$

$= \{ y \in C[0,b] : \|y\|_\infty \leq r \}$ $r > 0$

1) $F[Z] \subseteq Z$

weźmy $y \in Z$ i $t \in [0,b]$

$$|F(y)(t)| = \left|1 + \int_0^t y^3(s)\,ds\right| \leq$$

$$\leq 1 + \int_0^t |y^3(s)|\,ds \leq 1 + \int_0^b \|y\|_\infty^3\,ds =$$

$$= 1 + b\|y\|_\infty^3 \leq 1 + br^3$$

chcemy, żeby $1 + br^3 \leq r$

2) kontraktywność

weźmy $y, \tilde{y} \in Z$ i $t \in [0,b]$

$$|F(y)(t) - F(\tilde{y})(t)| = \left|\int_0^t y^3(s) - \tilde{y}^3(s)\,ds\right| \leq$$

$$\leq \int_0^b |y^3(s) - \tilde{y}^3(s)|\,ds =$$

$$= \int_0^b |y(s) - \tilde{y}(s)| \cdot |y^2(s) + y(s)\tilde{y}(s) + \tilde{y}^2(s)|\,ds$$

$$\leq \int_0^b \|y - \tilde{y}\|_\infty \cdot 3r^2 = 3br^2 \|y - \tilde{y}\|_\infty$$

szacujemy przez normy

z (1) i (2)

to muszą spełniać

$$\begin{cases} 1 + br^3 \leq r \\ \ldots \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + br^3 \leq r \\ 3br^2 < 1 \end{cases}$$

spełniać

$\underline{r = 2}$ przykładowo

$$\begin{cases} 8b \leq 1 \\ 12b < 1 \end{cases}$$

$\underline{b = \frac{1}{13}}$