Zad 4.

poniedziałek, 20 marca 2023 23:24

4. (1pkt) Rozważ następującą wersję problemu wydawania reszty: dla danych liczb naturalnych a, b ($a \leq b$) chcemy przedstawić ułamek $\frac{a}{b}$ jako sumę różnych ułamków o licznikach równych 1. Udowodnij, że algorytm zachłanny zawsze daje rozwiązanie. Czy zawsze jest to rozwiązanie optymalne (tj. o najmniejszej liczbie składników)?

algorytm zachłannie rozpisuje $\frac{a}{b}$ na sumę $\frac{1}{k} + \frac{c}{d}$, gdzie $\frac{1}{k} \leq \frac{a}{b}$ możliwie największe, potem to samo robi z $\frac{c}{d}$

nie zawsze jest optymalne, ponieważ przykładowo dla $\frac{a}{b} = \frac{13}{40}$

$$\frac{13}{40} = \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{8}}_{\text{optymalne}} = \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{20} + \frac{1}{40}}_{\text{zachłanne}}$$

warunek stopu

1° $a = b$ oczywiste

2° $a < b$

niech $k = \min\{k \in \mathbb{N}_{\geq 2} : \frac{1}{k} \leq \frac{a}{b}\}$

wtedy $\frac{a}{b} - \frac{1}{k} = \frac{ak-b}{bk}$. mamy:

$\frac{1}{k-1} > \frac{a}{b}$ (bo k minimalne) oraz $k-1 \geq 1$ (bo $k \geq 2$)

$\Downarrow$

$\frac{b}{k-1} > \frac{ab}{b} = a \Rightarrow b > a(k-1) \Rightarrow ka - b < a$

zatem licznik się zmniejsza i $\in \mathbb{N}$

mianownik w oczywisty sposób się zwiększa.

wniosek: liczniki ułamków rozkładanych przez algorytm tworzy malejący ciąg liczb $\mathbb{N}_{\geq 0}$

$\Downarrow$

otrzymamy poprawny rozkład w

$\Downarrow$

otrzymamy poprawny rozkład w skończonej liczbie iteracji

$\Downarrow$

algos się skończy $\square$