

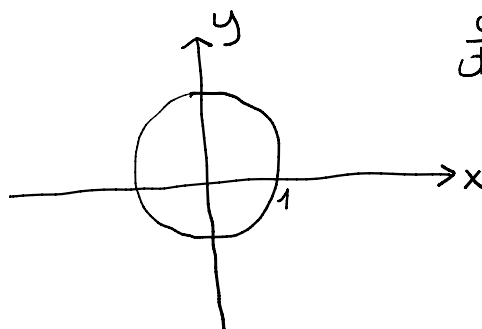
Zad 5.

niedziela, 18 czerwca 2023 17:41

Zadanie 5. Udowodnij, że wszystkie rozwiązania $x(t), y(t)$ układu

$$\frac{dx}{dt} = -1 - y + x^2, \quad \frac{dy}{dt} = x + xy,$$

które startują wewnątrz okręgu $x^2 + y^2 = 1$ pozostają tam dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$. Wskazówka: Oblicz $d(x^2 + y^2)/dt$.



$\frac{d}{dt}(x^2 + y^2)$ określa przyrost odległości punktów (x, y) od początku układu współrzędnych

sprawdzamy, $x^2 + y^2 = 1$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x^2 + y^2) &= 2x + 2y = 2xx' + 2yy' = \\ &= 2x(-1 - y + x^2) + 2y(x + xy) = -2x - 2xy + 2x^3 \\ &\quad + 2xy + 2xy^2 = 2(x^3 + xy^2 - x) = \\ &= 2x(x^2 + y^2 - 1) = 0 \end{aligned}$$

na brzegu $\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) = 0$ więc odległość jest stale równa 1 \square