Zad 1

poniedziałek, 24 października 2022 18:38

27 października 2022 r.

M3.1. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Uzasadnić, że odwrotność liczby c można obliczać bez wykonywania dzieleń, za pomocą wzoru $x_{n+1} := x_n(2 - c\,x_n)$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Uzasadnić (lokalną?) zbieżność tej metody. Dla jakich wartości x_0 metoda jest zbieżna?

zadanie: dla $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ znaleźć $x = \frac{1}{c}$

$$X_{n+1} = X_n(2 - cX_n) = \varphi(X_n)$$

1. $\varphi(\frac{1}{c}) = \frac{1}{c}(2 - c \cdot \frac{1}{c}) = \frac{1}{c}$

2. $|\varphi'(x)| < 1$

$$\varphi'(x) = (2x - cx^2)' = 2 - 2cx$$

$|2 - 2cx| < 1$ czyli

$$-1 < 2 - 2cx < 1$$

$$3 > 2cx > 1$$

$$\frac{3}{2} > cx > \frac{1}{2}$$

dla $c > 0$

$x \in (\frac{1}{2c}, \frac{3}{2c})$

dla $c < 0$

$x \in (\frac{3}{2c}, \frac{1}{2c})$

przybliżenia początkowe muszą być w tych przedziałach żeby metoda była zbieżna

Chcąc uzasadnić zbieżność powołujemy się na to, że $\varphi(x)$ jest funkcją

powołujemy
się na to, że $\varphi(x)$ jest funkcją zwężającą dla x w odpowiednich przedziałach