

Zad 1

poniedziałek, 21 listopada 2022 10:39

M6.1. 1 punkt Uzasadnić następujący *algorytm Clenshawa* obliczania wartości wielomianu

$$w(x) = \frac{1}{2}c_0T_0(x) + c_1T_1(x) + c_2T_2(x) + \dots + c_nT_n(x)$$

w punkcie x (c_0, c_1, \dots, c_n są danymi stałymi). Określamy pomocniczo wielkości B_0, B_1, \dots, B_{n+2} wzorami

$$\begin{aligned} B_{n+2} &:= B_{n+1} := 0; \\ B_k &:= 2xB_{k+1} - B_{k+2} + c_k \quad (k = n, n-1, \dots, 0). \end{aligned}$$

Wówczas $w(x) = \frac{1}{2}(B_0 - B_2)$.

$$\begin{aligned} c_k &= B_k - 2xB_{k+1} + B_{k+2} \\ w(x) &= \sum_{k=0}^n c_k T_k(x) = \sum_{k=0}^n (B_k - 2xB_{k+1} + B_{k+2}) T_k(x) = \\ &= \sum_{k=0}^n B_k T_k(x) - 2x \sum_{k=0}^n B_{k+1} T_k(x) + \sum_{k=0}^n B_{k+2} T_k(x) = \\ &= \sum_{k=2}^n B_k T_k(x) + \frac{1}{2}B_0 T_0(x) + B_1 T_1(x) \\ &\quad - 2x \sum_{k=1}^n B_k T_{k-1}(x) + \sum_{k=2}^n B_k T_{k-2}(x) = \\ &= \sum_{k=2}^n B_k T_k(x) - 2x \sum_{k=2}^n B_k T_{k-1}(x) + \sum_{k=2}^n B_k T_{k-2}(x) \\ &\quad + \frac{1}{2}B_0 T_0(x) + B_1 T_1(x) - 2x \cdot \frac{1}{2}B_1 T_0(x) \\ &\quad - \frac{1}{2}B_2 T_0(x) = \\ &\quad \sum_{k=2}^n B_k [T_k(x) - 2x T_{k-1}(x) + T_{k-2}(x)] \quad \leftarrow \begin{aligned} T_k(x) &= 2x T_{k-1} - T_{k-2} \\ T_k(x) - 2x T_{k-1} + T_{k-2} &= 0 \end{aligned} \\ &\quad + \frac{1}{2}B_0 + xB_1 - xB_1 - \frac{1}{2}B_2 = \\ &= \frac{1}{2}(B_0 - B_2) \end{aligned}$$

□