Zad 4.

środa, 14 grudnia 2022 20:15

M8.4. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech $p_n, q_n \in \Pi_n$ będą wielomianami optymalnymi dla funkcji ciągłej f na odcinku $[a, b]$ w sensie normy jednostajnej. Udowodnić, że $p_n \equiv q_n$. Co z tego wynika?

p_n optymalny zatem z tw. o alternansie dostajemy $n+2$ punktów takich, że bso.

$\forall u_n \ ||f - w_n||_\infty^T \leqslant ||f - u_n||_\infty^T$

$||f||_\infty \equiv ||f||_\infty^T := \max_{x \in T} |f(x)|,$

$$f(x_0) - p_n(x_0) > 0$$
$$f(x_1) - p_n(x_1) < 0$$
itp.

↓ do tego

z drugiej strony w_n również jest optymalny dla f, zatem w punktach x_i musi być conajmniej tak samo blisko f co p_n, stąd napewno musi zajść

$$f(x_0) - p_n(x_0) \geq f(x_0) - w_n(x_0)$$
$$f(x_1) - p_n(x_1) \leq f(x_1) - w_n(x_1)$$
itp.

dostajemy zatem
$$p_n(x_0) - w_n(x_0) \leq 0$$
$$p_n(x_1) - w_n(x_1) \geq 0$$
$$\vdots$$
$$p_n(x_{n+1}) - w_n(x_{n+1})$$
odpowiednio $\leq$ lub ≥ 0

z tw. o wartości średniej

$\underbrace{p_n(x)}_{\in \Pi_n} - \underbrace{w_n(x)}_{\in \Pi_n} \in \Pi_n$ plus $p_n(x) - w_n(x)$ ma conajmniej $n+1$ zer

stąd $p_n(x) - w_n(x) \equiv 0$
$$\Downarrow$$
$$p_n(x) \equiv w_n(x) \quad \square$$