Zad 8.

wtorek, 24 stycznia 2023 15:26

M12.8. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Wykazać, że norma macierzowa indukowana przez normę wektorową $\|\cdot\|_\infty$ wyraża się wzorem

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

$$\|A\|_\infty = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \sup_{\|y\|=1} \|Ay\|_\infty$$

Weźmy $y\in\mathbb{R}^n$ t.że $\|y\|_\infty = 1 \Rightarrow \max_{1\leq i\leq n} |y_i| = 1$

$$Ay = \begin{pmatrix} \sum a_{1j}y_j \\ \vdots \\ \sum a_{nj}y_j \end{pmatrix} \Rightarrow \|Ay\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n}\left(\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j\right|\right) \leq$$

z nierówności trójkąta

to co chcemy

$$\leq \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\cdot|y_j| \leq \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \sum_{j=1}^{n} |a_{1j}|$$

b.s.o niech $\max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \sum_{j=1}^{n} |a_{1j}|$

teraz chcemy wskazać $y\in\mathbb{R}^n$, dla którego zachodzi równość

dla $y = \begin{pmatrix} \mathrm{sgn}(a_{11}) \\ \vdots \\ \mathrm{sgn}(a_{1n}) \end{pmatrix}$ $\max_{1\leq i\leq n}\left(\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j\right|\right) =$

$$= \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \sum_{j=1}^{n} |a_{1j}| \qquad \square$$