Zad 3.

sobota, 29 października 2022 16:47

M4.3. $\boxed{\text{1,5 punktu}}$ Niech α będzie podwójnym zerem funkcji f, czyli niech $0 = f(\alpha) = f'(\alpha) \neq f''(\alpha)$. Wykazać, że metoda Newtona jest wówczas (lokalnie?) zbieżna liniowo.

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) = \underbrace{\varphi(\alpha)}_{\alpha} + \frac{\varphi'(\varepsilon_n)}{1!}(x_n - \alpha)$$

$$\frac{x_{n+1} - \alpha}{x_n - \alpha} = \varphi'(\varepsilon_n) \qquad \left|\frac{x_{n+1} - \alpha}{x_n - \alpha}\right| = |\varphi'(\varepsilon_n)|$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}-\alpha}{x_n-\alpha}\right| = \lim_{x\to\alpha}|\varphi'(x)| = \lim_{x\to\alpha}\left|\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}\right|$$

$$0 < \lim_{x\to\alpha}\left|\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}\right| < 1$$

chcemy sprawdzić czy coś takiego zachodzi

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{|f(x)||f''(x)|}{|f'(x)^2|} = \lim_{x\to\alpha}\frac{|f(x)|}{|f'(x)^2|}\cdot\lim_{x\to\alpha}|f''(x)| =$$

$$= |f''(\alpha)|\cdot\lim_{x\to\alpha}\left|\frac{f(x)}{f'(x)^2}\right| = |f''(\alpha)|\cdot\left|\frac{1}{2f''(\alpha)}\right| = \frac{1}{2}$$

czyli zbieżność jest liniowa

$$\lim_{x\to\alpha}\left|\frac{f(x)}{f'(x)^2}\right| = \left|\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{f'(x)^2}\right| = \left|\frac{1}{2f''(\alpha)}\right|$$

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{f'(x)^2} \overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x\to\alpha}\frac{f'(x)}{2f'(x)f''(x)} = \lim_{x\to\alpha}\frac{1}{2f''(x)} = \frac{1}{2f''(\alpha)}$$