Zad 9.

poniedziałek, 30 stycznia 2023 22:10

M13.9. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech macierz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ spełnia warunki

$$|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}| \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

(Mówimy, że A jest macierzą z dominującą przekątną kolumnowo.)
Pokazać, że metoda iteracyjna Jacobiego, zastosowana do układu równań o macierzy A, jest zbieżna.

$B_J = -D^{-1}(L+U)$ $\qquad A = L + D + U$

definiujemy normę $\|\cdot\|_N$ dla dowolnej macierzy

$\|Z\|_N = \|DZD^{-1}\|_1 \leftarrow$ to się przyda bo $\|\cdot\|_1$ bierze sumę po kolumnie i będzie można skorzystać z dominującej przekątnej

warunki na bycie normą
1) i 2) triv, 3)

$\|A+B\|_N = \|D(A+B)D^{-1}\|_1 = \|DAD^{-1} + DBD^{-1}\|_1$

to spełnia 3), bo $\|\cdot\|_1$ jest normą

dalej

$$\|B_J\|_N = \|D[-D^{-1}(L+U)]D^{-1}\|_1 = $$
$$= -\|(L+U)D^{-1}\|_1 = \left\| \begin{bmatrix} 0 & \frac{a_{12}}{a_{22}} & \cdots & \frac{a_{1n}}{a_{nn}} \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & 0 & & \frac{a_{2n}}{a_{nn}} \\ & & \vdots & \\ \frac{a_{n1}}{a_{11}} & \frac{a_{n2}}{a_{22}} & & 0 \end{bmatrix} \right\|_1 =$$

identyczny argument jak w 13.7 tylko tym razem dzielimy kolumny przez a_{ii}

$$= \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |b_{ij}| =$$
$$= \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i\neq j}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{jj}}\right| =$$
$$= \max_{1\leq j\leq n} \frac{\sum_{i\neq j} |a_{ij}|}{|a_{jj}|} < 1$$

bo A = dominująca przekątna kolumnowo

skoro.

dominującą
przekątną kolumnowo

skoro
$\|B_J\|_N < 1$ to
metoda zbiega
(warunkiem dostatecznym jest $\|B_J\| < 1$ dla
dowolnej normy, wytłumaczone
lepiej w 13.7)