Zad 9.

niedziela, 4 grudnia 2022 21:31

M7.9. $\boxed{\text{1,5 punktu}}$ Niech $\{P_k\}$ będzie ciągiem wielomianów, określonych w następujący sposób rekurencyjny:

$$P_0(x) = \alpha_0, \qquad P_1(x) = (\alpha_1 x - \beta_1)P_0(x),$$
$$P_k(x) = (\alpha_k x - \beta_k)P_{k-1}(x) - \gamma_k P_{k-2}(x) \qquad (k = 2, 3, \ldots),$$

gdzie α_k, β_k, γ_k są danymi stałymi. Uzasadnić następujący *uogólniony algorytm Clenshawa* obliczania wartości wielomianu

$$s_n := a_0 P_0 + a_1 P_1 + \ldots + a_n P_n$$

o danych współczynnikach $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

Obliczamy pomocnicze wielkości V_k $(k = 0, 1, \ldots, n+2)$ według wzorów

$$V_k = a_k + (\alpha_{k+1} x - \beta_{k+1})V_{k+1} - \gamma_{k+2} V_{k+2} \qquad (k = n, n-1, \ldots, 0),$$

gdzie $V_{n+1} = 0$, $V_{n+2} = 0$.

Wynik: $s_n(x) = \alpha_0 V_0$.

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i P_i \qquad a_i = V_i - (\alpha_{i+1} x - \beta_{i+1})V_{i+1} - \gamma_{i+2} V_{i+2}$$

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} \left(V_i - (\alpha_{i+1} x - \beta_{i+1})V_{i+1} - \gamma_{i+2} V_{i+2}\right) P_i =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} P_i V_i - \sum_{i=0}^{n} (\alpha_{i+1} x - \beta_{i+1}) V_{i+1} P_i - \sum_{i=0}^{n} \gamma_{i+2} V_{i+2} P_i =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} V_i P_i - \sum_{i=1}^{n+1} V_i P_{i-1} (\alpha_i x - \beta_i) - \sum_{i=2}^{n+2} V_i P_{i-2} \gamma_i =$$

$$= V_0 P_0 + V_1 P_1 + \sum_{i=2}^{n} V_i P_i - V_1 P_0 (\alpha_1 x - \beta_1) - \sum_{i=2}^{n} V_i P_{i-1} (\alpha_i x - \beta_i)$$

$$- \sum_{i=2}^{n} V_i P_{i-2} \gamma_i = V_0 P_0 + V_1 (\alpha_1 x - \beta_1) P_0 - V_1 (\alpha_1 x - \beta_1) P_0$$

$$+ \sum_{i=2}^{n} V_i \left(P_i - P_{i-1} (\alpha_i x - \beta_i) - P_{i-2} \gamma_i\right) =$$

$$= V_0 P_0 = \alpha_0 V_0$$

$\lrcorner$

$$= V_0 P_0 = \alpha_0 V_0$$

$\square$