Zad 6.

piątek, 28 października 2022 13:21

M2.6. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wartość wielomianu $L(x) := a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ w punkcie x można obliczyć według następującego *schematu Hornera*:

— Oblicz wielkości pomocnicze $w_0, w_1, \ldots, w_n$ za pomocą wzorów
a) $w_n := a_n$,
b) $w_k := w_{k+1} \times x + a_k \quad (k = n-1, n-2, \ldots, 0)$.
— Wynik: $L(x) = w_0$.

Zakładając, że $a_0, a_1, \ldots, a_n$ oraz x są liczbami zmiennopozycyjnymi wykazać, że schemat Hornera jest algorytmem numerycznie poprawnym.

przypadek dla $n=2$

zamiast x powinno być $x(1+\gamma)$ wszędzie

$$L(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

$$fl(L(x)) = (((0+a_2)(1+\alpha_2)x(1+\beta_2)+a_1)(1+\alpha_1)x(1+\beta_1)+a_0)(1+\alpha_0) =$$

$$= \sum_{i=0}^{2} x^i a_i \underbrace{\left(\prod_{j=0}^{i}(1+\alpha_j)\right)\left(\prod_{j=1}^{i}(1+\beta_j)\right)(1+\gamma)}_{\substack{2i+1+1=2i+2 \\ \text{czynników}}} =$$

$$= \sum_{i=0}^{2} x^i a_i (1+\varepsilon_i) = \qquad |\varepsilon_i| \le \frac{(2i+2)u}{1-(2+2i)u}$$

$$= a_0(1+\varepsilon_i) + xa_1(1+\varepsilon_1) + x^2a_2(1+\varepsilon_2)$$

dokładny wynik dla lekko zaburzonych danych

uogólnienie do n polega na zamianie 2 na n w sumie $\sum_{i=0}^{2}$