Zad 10.

środa, 9 listopada 2022 22:28

10. Udowodnij, że jeśli $a, b \in \mathbb{N}$ oraz x i y są niezerowymi liczbami całkowitymi spełniającymi równanie diofantyczne $ax + by = 1$, to

$$(1) \quad \gcd(a, b) = \gcd(a, y) = \gcd(x, b) = \gcd(x, y).$$

(2) Wykaż ponadto, że dokładnie jedna z liczb x i y musi być ujemna.

(2) nie wprost

1° $x, y > 0$

$a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow a, b \geqslant 1 \Rightarrow a + b \geqslant 2 \Rightarrow ax + by \geqslant 2$ $\lightning$

2° $x, y < 0$

$ax < 0 \wedge by < 0 \Rightarrow ax + by < 0$ $\lightning$

(1) $ax + by = 1$ $\quad \gcd(a, b) = d$

$d | a \wedge d | b \Rightarrow d | xa \wedge d | yb \Rightarrow d | ax + by \Rightarrow d = 1$

więc $a \perp b$ $\quad$ analogiczny argument dla pozostałych gcd $\square$