Zad 6.

niedziela, 18 czerwca 2023 20:21

Zadanie 6. Rozwiąż zagadnienie początkowo-brzegowe dla równania ciepła $u_t = u_{xx}$ w prostokącie $(0,1)\times(0,T)$ z warunkiem początkowym $u(x,0) = f(x)$ oraz warunkami brzegowymi $u(0,t) = u(1,t) = 0$. Podaj postać rozwiązania dla $f(x) = 4x(1-x)$.
Wykaż, że rozwiązanie jest dwukrotnie różniczkowalne dla $t > 0$, wykorzystując zbieżność jednostajną odpowiednich szeregów pochodnych.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(x,0) = u_0 = 4x(1-x) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \end{cases}$$

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = X(x)T'(t) \qquad \nabla_x u(x,t) = X''(x)T(t)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda$$

$$T(t) = ce^{\lambda t} \longrightarrow u(x,t) = e^{\lambda t}\left[c_1 \sin(\sqrt{\lambda}x) + c_2\cos(\sqrt{\lambda}x)\right]$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda \Rightarrow X'' = \lambda$$

$$X(x) = c_1\sin(\sqrt{\lambda}x) + c_2\cos(\sqrt{\lambda}x)$$

warunki brzegowe

$$u(0,t) = e^{\lambda t}c_2 = 0 \to c_2 = 0$$

$$u(1,t) = e^{\lambda t}\left[c_1\sin(\sqrt{\lambda}x)\right] = 0$$

$$\downarrow$$

$$\sin(\sqrt{\lambda}x) = 0$$

bo nie szukamy trywialnego

$$\sqrt{\lambda} = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\lambda = k^2\pi^2$$

$$u_k(x,t) = e^{k^2\pi^2 t}\cdot c_k \sin(k\pi x)$$

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(k\pi x)e^{k^2\pi^2 t}$$

$$u_0 \in C^\infty \to u_0 = 4x(1-x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(k\pi x) = u(x,0)$$

$u_0 \in C \to u_0 \quad \ldots \quad k=1$

$$c_k = \frac{1}{2} \int_0^1 4x(1-x)\sin(k\pi x)\,dx$$