Zad 12.

wtorek, 10 stycznia 2023 01:46

12. Dany jest graf prosty G, w którym $n = |V(G)| > 3$ i dla dowolnych trzech wierzchołków u, v, w istnieją co najmniej dwie spośród trzech krawędzi $\{u, v\}, \{v, w\}, \{w, u\}$. Wykaż, że w G istnieje cykl Hamiltona.

Weźmy $u, v \in V(G)$ t. że $\{u, v\} \notin E(G)$ (zakładamy, że graf nie jest pełny i takie wierzchołki istnieją, inaczej istnienie cyklu Hamiltona jest oczywiste). Weźmy dowolny $w \in V(G) \setminus \{u, v\}$. Wtedy wiemy, że $\{w, u\} \in E(G) \wedge \{w, v\} \in E(G)$. Obliczamy

$$\deg(u) + \deg(v) = (n-2) \cdot 2 = 2n - 4$$

$$2n - 4 \overset{?}{\geqslant} n \Rightarrow n \geqslant 4 ✓$$

Skoro $\forall u, v \; \{u, v\} \notin E(G) \Rightarrow \deg(u) + \deg(v) \geqslant n$, to z tw. Orego graf posiada cykl Hamiltona

$\square$