Zad 2.

poniedziałek, 30 stycznia 2023 19:14

M13.2. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ będzie macierzą o elementach

$$\begin{array}{ll} b_{ii} = 1 & (i = 1, 2, \ldots, n), \\ b_{ij} = -1 & (i < j), \\ b_{ij} = 0 & (i > j). \end{array}$$

Sprawdzić, że $\det B \ll \operatorname{cond}_\infty(B)$, gdzie $\operatorname{cond}_\infty(B) := \|B\|_\infty \|B^{-1}\|_\infty$. Jaki stąd wniosek?

$$[b_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & & -1 \\ 0 & 1 & -1 & & -1 \\ \vdots & & 1 & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \end{bmatrix}$$

$\|A\|_\infty \leftarrow$ największa suma $|el.|$ w wierszach macierzy

$\det B = 1$, bo B górnotrójkątna

$$\|B\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = n \text{ (pierwszy wiersz)}$$

obliczamy B^{-1} kolumnowym Gaussem

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & -1 & -1 & & -1 & 1 & & & & \\ & 1 & -1 & & -1 & & 1 & & & \\ & & 1 & \cdots & -1 & & & 1 & & \\ & & & \vdots & & & & & \ddots & \\ & & & & 1 & & & & & 1 \end{array}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & & 0 & 1 & 1 & 1 & & 1 \\ & 1 & -1 & \cdots & -1 & & 1 & & & 0 \\ & & 1 & & -1 & & & 1 & \cdots & 0 \\ & & & \vdots & & & & & \vdots & \\ & & & & 1 & & & & & 1 \end{array}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & & 0 & 1 & 1 & 2 & & 2 \\ & 1 & 0 & \cdots & 0 & & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & & 1 & & -1 & & & 1 & & 0 \\ & & & \vdots & & & & & \vdots & \\ & & & & 1 & & & & & 1 \end{array}\right]$$

$\Downarrow$ itd.

$$\Downarrow \ \text{itd.}$$

$$\left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & & 0 \\ & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & 1 & & 0 \\ & & & \vdots & 1 \end{matrix} \ \middle| \ \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 4 & & 2^{n-2} \\ & 1 & 1 & 2 & \cdots & 2^{n-3} \\ & & 1 & 1 & & 2^{n-4} \\ & & & \vdots & & \\ & & & & & 1 \end{matrix}}_{B^{-1}} \right]$$

stąd $\|B^{-1}\|_\infty = 2^{n-1}$ (znowu pierwszy wiersz)

$$\mathrm{cond}_\infty(B) = n \cdot 2^{n-1} \quad \text{i} \quad 1 \leq n 2^{n-1} \quad \forall n \geq 1$$

□

wniosek: macierz o małych elementach może mieć duży wskaźnik uwarunkowania (?)