Zad 2.

środa, 19 kwietnia 2023 15:50

[0,1), inaczej ciąg rozbieżny

Zadanie 2. Wyprowadź wzór na n-tą iterację Picarda dla zagadnienia początkowego $x' = x^2$, $x(0) = 1$ na odcinku $[0,2]$, jeżeli $x_0(t) \equiv 1$. Oblicz granicę tego ciągu. Znajdź rozwiązanie zagadnienia i porównaj rezultaty.

$$f(t,x) = x^2$$

$$x_0 \equiv \underbrace{1}$$

$$x_1 = 1 + \int_0^t 1 \, ds = \underbrace{1 + t}$$

$$x_2 = 1 + \int_0^t (1+s)^2 \, ds =$$

$$= 1 + \int_0^t 1 + 2s + s^2 \, ds = \underbrace{1 + t + t^2} + \frac{t^3}{3}$$

śmieci

$$x_3 = 1 + \int_0^t \left(1 + s + s^2 + \frac{s^3}{3}\right)^2 ds =$$

$$= 1 + \int_0^t 1 + s + s^2 + \frac{s^3}{3} + s + s^2 + s^3 + \frac{s^4}{3} +$$

$$+ s^2 + s^3 + s^4 + \frac{s^5}{3} + \frac{s^3}{3} + \frac{s^4}{3} + \frac{s^5}{3} + \frac{s^6}{9} \, ds =$$

$$= 1 + \int_0^t 1 + 2s + 3s^2 + \frac{8}{3}s^3 + \frac{4}{3}s^4 + \frac{2}{3}s^5 + \frac{1}{9}s^6 \, ds =$$

$$= \underbrace{1 + t + t^2 + t^3} + \frac{2}{3}t^4 + \frac{4}{15}t^5 + \frac{1}{9}t^6 + \frac{1}{63}t^7$$

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} t^n + r_{n+1}(t)$$

$$r_{n+1}(t) \leq n t^{n+1}$$

$$x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{1}{1-t} \quad (\text{szereg geom.})$$