Zad 7.

poniedziałek, 14 listopada 2022 20:21

Twierdzenie

Jeśli funkcja f ma w przedziale $[a, b]$ ciągłą $(n+1)$-szą pochodną, a wielomian $L_n \in \Pi_n$ interpoluje tę funkcję w parami różnych punktach $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$, to dla każdego $x \in [a, b]$ zachodzi równość

$$f(x) - L_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x) p_{n+1}(x), \tag{4}$$

gdzie ξ_x jest pewną liczbą (zależną od x) z przedziału (a, b).

M5.7. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech $L_1 \in \Pi_1$ interpoluje funkcję f w puntach x_0 i x_1. Wykazać, że dla każdego $x \in [x_0, x_1]$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - L_1(x)| \leqslant \frac{1}{8}(x_1 - x_0)^2 M_2,$$

gdzie $M_2 := \max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_1} |f''(x)|$.

$$|f(x) - L_1(x)| = \left| \frac{1}{(1+1)!} f''(\varepsilon_x) p_2(x) \right| \quad \text{dla } \varepsilon_x \in [x_0, x_1]$$

$$|p_2(x)| = |x - x_0||x - x_1| = \prod_{i=0}^{1} |x - x_i| \underset{(z\ 5.)}{\leq} \frac{1}{4} \cdot 1! \, (x_1 - x_0)^2$$

$$\max_{x_0 \leq x \leq x_1} |f''(x)| = M_2 \quad \text{zatem} \quad |f''(\varepsilon)| \leq M_2$$

finalnie

$$\left| \frac{1}{2!} f''(\varepsilon_x) p_2(x) \right| \leq \frac{1}{2!} \cdot M_2 \cdot \frac{1}{4} (x_1 - x_0)^2 = \frac{1}{8} (x_1 - x_0)^2 M_2$$

$\square$