Zad 3

poniedziałek, 21 listopada 2022 11:21

M6.3. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Określmy wielomian $H_{2n+1} \in \Pi_n$ za pomocą wzoru

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\, h_k(x) + \sum_{k=0}^{n} f'(x_k)\, \bar{h}_k(x),$$

gdzie węzły $x_0, \ldots, x_n$ są parami różne, ponadto

$$\left.\begin{aligned} h_k(x) &:= [1 - 2(x - x_k)\lambda'_k(x_k)]\lambda_k^2(x), \\ \bar{h}_k(x) &:= (x - x_k)\lambda_k^2(x), \\ \lambda_k(x) &:= \frac{p_{n+1}(x)}{(x - x_k)p'_{n+1}(x_k)}, \end{aligned}\right\} \quad (0 \leqslant k \leqslant n)$$

oraz $p_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$. Wykazać, że H_{2n+1} spełnia warunki

(2) $$H_{2n+1}(x_i) = f(x_i), \quad H'_{2n+1}(x_i) = f'(x_i) \qquad (0 \leqslant i \leqslant n).$$

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)h_k(x) + \sum_{k=0}^{n} f'(x_k)\bar{h}_k(x)$$

$$H'_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)h'_k(x) + \sum_{k=0}^{n} f'(x_k)\bar{h}'_k(x)$$

chcemy, żeby

1. $\bar{h}_k(x_i) = 0$
2. $h_k(x_i) = \begin{cases} 1 & i=k \\ 0 & i\neq k \end{cases}$ dla $i \in \{0, \ldots, n\}$

3. $h'_k(x_i) = 0$
4. $\bar{h}'_k(x_i) = \begin{cases} 1 & i=k \\ 0 & i\neq k \end{cases}$

wtedy warunki z zadania zachodzą

ad. 1

0 jak i=k   0 jak i≠k

$$\bar{h}_k(x_i) = (x_i - x_k)\lambda_k^2(x_i) = (x_i - x_k)\frac{p_{n+1}^2(x_i)}{(x_i - x_k)^2[p'_{n+1}(x_k)]^2} = 0 \quad ✓$$

ad. 2

$$h_k(x_k) = [1 - 2\overbrace{(x_k - x_k)}^{=0}\lambda'_k(x_k)]\lambda_k^2(x_k) =$$

$$= \lambda_k^2(x_k) = \frac{p_{n+1}^2(x_k)}{(x_k - x_k)^2[p'_{n+1}(x_k)]^2} = \frac{(x_k - x_0)^2 \cdots (x_k - x_{k-1})^2(x_k - x_{k+1})^2 \cdots (x_k - x_n)^2}{\prod_{i\neq k}^{n}(x_k - x_i)^2} = 1 \quad ✓$$

jak sobie rozpisać

$i \neq k$ ✓

jak sobie rozpisać
tą pochodną nawet kawałek
to widać, że tylko to się
nie wyzeruje

$$i\neq k \quad h_k(x_i) = [1-2(x_i-x_k)\lambda_k'(x_k)]\underbrace{\lambda_k^2(x_i)}_{0} = 0 \quad ✓$$

ad. 3

$$h_k'(x) = 2\lambda_k(x)\lambda_k'(x)[1-2(x-x_k)\lambda_k'(x_k)] + \lambda_k^2(x)[-2\lambda_k'(x_k)] =$$

$$= 2\lambda_k(x)\lambda_k'(x) - 2\lambda_k^2(x)\lambda_k'(x_k)$$

$$h_k'(x_i) = \underbrace{2\lambda_k(x_i)}_{0 \text{ dla } i\neq k}\lambda_k'(x_i) - \underbrace{2\lambda_k^2(x_i)}_{0 \text{ dla } i\neq k}\lambda_k'(x_k) =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{dla } i\neq k \\ 2\lambda_k'(x_k) - 2\lambda_k'(x_k) = 0 & \text{dla } i=k \text{ (bo } \lambda_k(x_k)=1 \text{ jak wcześniej pokazaliśmy)} \end{cases} \quad ✓$$

ad. 4

$$\bar{h}_k'(x) = 2\lambda_k(x)\lambda_k'(x)[x-x_k] + \lambda_k^2(x)$$

$i=k$

$$\bar{h}_k'(x_k) = 2\lambda_k(x_k)\lambda_k'(x_k)\underbrace{[x_k-x_k]}_{0} + \underbrace{\lambda_k^2(x_k)}_{1} = 1 \quad ✓$$

$i\neq k$

$$\bar{h}_k'(x_i) = \underbrace{2\lambda_k(x_i)}_{0}\lambda_k'(x_i)[x_i-x_k] + \underbrace{\lambda_k^2(x_i)}_{0} = 0 \quad ✓$$

$\square$