Zad 1.

poniedziałek, 16 stycznia 2023 19:52

M11.1. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Udowodnić, że wielomiany Czebyszewa spełniają tożsamość

$$T_{n+j}(u_k) = T_n(u_k) \cdot T_j(u_k)$$

gdzie u_k oznaczają punkty ekstremalne wielomianu T_n.

- cosinus sumy: $cos(\alpha + \beta) = cos\,\alpha\, cos\,\beta - sin\,\alpha\, sin\,\beta$

$$u_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

$$L = T_{n+j}(u_k) = \cos\left[(n+j)\arccos\left(\cos\frac{k\pi}{n}\right)\right] = \cos\left[(n+j)\cdot\frac{k\pi}{n}\right] =$$

$$= \cos\left(k\pi + \frac{jk\pi}{n}\right) = \cos(k\pi)\cdot\cos\left(\frac{jk\pi}{n}\right) - \underbrace{\sin(k\pi)}_{=0}\sin\left(\frac{jk\pi}{n}\right)$$

$$P = T_n(u_k)\cdot T_j(u_k) = \cos(k\pi)\cdot\cos\left(\frac{jk\pi}{n}\right) = P \qquad \square$$