Zad 3.

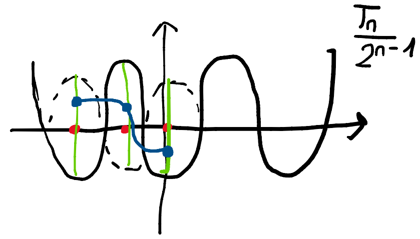
środa, 28 grudnia 2022 16:34

M9.3. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wykazać, że wielomian $\tilde{T}_n := 2^{1-n}T_n$ ma najmniejszą normę w przedziale $[-1, 1]$ spośród wszystkich wielomianów stopnia $\leqslant n$, o współczynniku wiodącym rownym 1.

załóżmy, że $\exists w \in \Pi_n \quad \|w\| < \|\frac{T_n}{2^{n-1}}\|$

norma jednostajna jest wyznaczana poprzez wartości funkcji w jej punktach ekstremalnych. $\frac{T_n}{2^{n-1}}$ ma $n+1$ punktów ekstremalnych. Skoro $\|w\| < \|\frac{T_n}{2^{n-1}}\|$ to dla każdego punktu ekstremalnego x_i $|w(x_i)| < |\frac{T_n}{2^{n-1}}(x_i)|$.

Istnieje zatem n punktów pośrednich z_i, w których $w(z_i) = \frac{T_n}{2^{n-1}}(z_i)$ (rysunek poglądowy)



• – punkty ekstremalne

| – $w(x_i)$ leży gdzieś na tej linii

• – $w(x_i)$

widać, że przecinają się pomiędzy x_i i x_{i+1}

Rozważamy

$r(x) = w(x) - \frac{T_n}{2^{n-1}}(x)$

$r(x) \in \Pi_{n-1}$ (bo w i $\frac{T_n}{2^{n-1}} \in \Pi_n$ z współczynnikiem wiodącym równym 1)

$r(x)$ ma n miejsc zerowych z_i

$\Downarrow$

$r(x) \equiv 0$

czyli $w(x) = \frac{T_n}{2^{n-1}}(x)$ $\lightning$

a przecież $\|w\| < \|\frac{T_n}{2^{n-1}}\|$