Zad 4.

poniedziałek, 28 listopada 2022 20:22

4. Ile jest takich permutacji zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, że żadna z liczb $i \in \{1, 2, \ldots, k\}, (k < n)$ nie znajdzie się na pozycji i?

wszystkich permutacji jest $n!$

Niech $A_i := \{\sigma \in S_n \mid \sigma(i) = i\}$, czyli A_i jest zbiorem tych permutacji, które działają identycznościowo na i-tym elemencie zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Chcemy policzyć $n! - \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right|$. mamy

$|A_i| = (n-1)!$ $[\forall i]$

$|A_i \cap A_j| = (n-2)!$ $[\forall i,j \quad i \neq j]$ dwa elementy przechodzą na siebie, resztę ustawiamy na $(n-2)!$ sposobów

$|A_i \cap A_j \cap A_k| = (n-3)!$ $[\forall i,j,k$ różnych od siebie$]$

$\vdots$

$|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n| = 1$ (permutacja identycznościowa)

z zasady włączeń i wyłączeń mamy zatem

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \binom{n}{1}\cdot(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \binom{n}{3}(n-3)! - \ldots$$

$$\ldots \pm \binom{n}{n}\cdot 1 = \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\cdot(-1)^{i+1}(n-i)!$$

czyli permutacji z treści jest

$$n! - \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}(-1)^{i+1}(n-i)!$$