Zad 7.

poniedziałek, 5 grudnia 2022 19:07

7. Ile jest ciągów n liter należących do 26–literowego alfabetu łacińskiego zawierających parzystą liczbę liter 'a' (zero też jest parzyste).

Wsk.: Ułóż zależność rekurencyjną opisującą tę liczbę i rozwiąż ją np. za pomocą metody anihilatorów

a_n - # ciągów n liter zawierających parzystą ilość liter 'a'.

wszystkich ciągów n-liter jest 26^n.

mamy $a_1 = 25$, $a_{n+1} = 25a_n + (26^n - a_n)$

parzysta ilość 'a' na prefiksie, dopisujemy literę niebędącą 'a'

nieparzysta ilość 'a' na prefiksie, dopisujemy 'a'

$$a_{n+1} = 24a_n + 26^n$$

$$a_{n+1} - 24a_n = 26^n$$

1) rozwiązanie ogólne $a_{n+1} - 24a_n = 0$

$\langle a_{n+1}\rangle - 24\langle a_n\rangle = E\langle a_n\rangle - 24\langle a_n\rangle =$

$= (E-24)\langle a_n\rangle = 0$ czyli rozwiązanie ogólne równania jednorodnego jest postaci

$$a_n = \alpha 24^n$$

2) rozwiązanie szczególne $a_{n+1} - 24a_n = 26^n$

Niech $a_n = \beta \cdot 26^{n-1}$. wyliczamy β

$$\beta \cdot 26^n - 24\beta \cdot 26^{n-1} = 26^n \quad / : 26^{n-1}$$

$$26\beta - 24\beta = 26$$

$$2\beta = 26$$

$$\beta = 13$$

rozwiązanie ogólne równania $a_{n+1} - 24a_n = 26^n$ jest sumą (1) i (2), tzn.

$$a_n = \alpha 24^n + 13 \cdot 26^{n-1}$$

dla $a_1 = 25$ mamy

$$25 = 24\alpha + 13$$

$$25 = 24\alpha + 13$$
$$24\alpha = 12$$
$$\alpha = \frac{1}{2}$$

czyli $a_n = \frac{1}{2} \cdot 24^n + 13 \cdot 26^{n-1}$

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot 24^n + 13 \cdot \frac{26^n}{26}$$

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot 24^n + \frac{1}{2} \cdot 26^n$$