Zad 4

poniedziałek, 21 listopada 2022 11:58

M6.4. $\boxed{\text{1,5 punktu}}$ Niech będzie $f \in C^{2n+2}[a,b]$ i niech wielomian $H_{2n+1}(x) \in \Pi_{2n+1}$ spełnia warunki (2) dla parami różnych węzłów $x_0, \ldots, x_n \in [a,b]$. Udowodnić, że dla każdego $x \in [a,b]$ istnieje taki punkt $\xi \in (a,b)$, że

$$f(x) - H_{2n+1}(x) = \frac{1}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi) p_{n+1}^2(x).$$

Wskazówka: Dla $x \in [a, b]$, różnego od każdego z węzłów, rozważyć funkcję

$$g(t) = f(t) - H_{2n+1}(t) - K\, p_{n+1}^2(t),$$

gdzie stała K jest dobrana tak, żeby $g(x) = 0$.

weźmy $x \in [a,b]$, $x \neq x_i$ dla $i = 0, \ldots, n$

$$0 = g(x) = \underbrace{f(x)}_{\text{znane}} - \underbrace{H_{2n+1}(x)}_{\text{znane}} - K_x \underbrace{p_{n+1}^2(x)}_{\substack{\text{znane oraz} \\ \text{różne od } 0 \\ [\text{bo } x \neq x_i]}}$$

wyznaczamy K_x

$$K_x = \frac{f(x) - H_{2n+1}(x)}{p_{n+1}^2(x)}$$

$g(x_i) = 0 \rightarrow (n+1) \cdot 2$ zer [bo x_i to podwójne pierwiastki $g(t)$]

$g(x) = 0 \rightarrow 1$ zero

$g(t) \rightarrow 2n+3$ zer $\leq$

$g'(t) \rightarrow 2n+2$ zer $\leq$

$\vdots$

$g^{(2n+2)}(t) \rightarrow 1$ zero $\leq$

$$g^{(2n+2)}(t) = f^{(2n+2)}(t) - \underbrace{0}_{\text{bo } H_{2n+1} \in \Pi_{2n+1}} - K_x (2n+2)!$$

niech γ oznacza to jedno zero $g^{(2n+2)}$

$$0 = g^{(2n+2)}(x) = f^{(2n+2)}(\gamma) - K_x (2n+2)!$$

$$0 = g^{(2n+2)}(\gamma) = f^{(2n+2)}(\gamma) - K_x(2n+2)!$$

$$K_x = \frac{f^{(2n+2)}(\gamma)}{(2n+2)!}$$

$$\frac{f(x) - H_{2n+1}(x)}{p_{n+1}^2(x)} = \frac{f^{(2n+2)}(\gamma)}{(2n+2)!}$$

$$f(x) - H_{2n+1}(x) = \frac{1}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\gamma) p_{n+1}^2(x)$$

$\square$

dla $x = x_i$

$$f(x) - H_{2n+1}(x) = 0 = \frac{1}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\gamma) \underbrace{p_{n+1}^2(x)}_{\overset{\shortparallel}{0}}$$

więc też śmiga