Zad 1.

poniedziałek, 12 grudnia 2022 20:10

M8.1. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Niech $\{P_k\}$ będzie ciągiem standardowych wielomianów ortogonalnych w przedziale $[a, b]$, z wagą $p(x)$. Wykazać, że zachodzi związek rekurencyjny

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x - c_1,$$
$$P_k(x) = (x - c_k)P_{k-1}(x) - d_k P_{k-2}(x) \qquad (k = 2, 3, \ldots),$$

gdzie

$$c_k = \langle xP_{k-1}, P_{k-1}\rangle / \langle P_{k-1}, P_{k-1}\rangle \quad (k \geqslant 1),$$
$$d_k = \langle P_{k-1}, P_{k-1}\rangle / \langle P_{k-2}, P_{k-2}\rangle \quad (k \geqslant 2).$$

fakt
$<xf,g> = <f,xg>$
(ze wzorów na iloczyn skalarny)

$P_0(x)=1 \quad P_1(x) = x - c_1$. chcemy żeby

$<P_0,P_1>=0 \Rightarrow <1, x-c_1>=0$

$<1,x-c_1> = <1,x> - <1,c_1> = <x,1> - c_1\overbrace{<1,1>}^{\neq 0} = 0$

czyli $c_1 = \frac{<x,1>}{<1,1>} = \frac{<xP_0,P_0>}{<P_0,P_0>}$ ← baza indukcji

krok indukcyjny. Załóżmy, że $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$ ortogonalne (standardowe) i spełniają zależność z zadania.

chcemy, żeby $\forall i=0..n-1 \quad <P_n, P_i>=0$

$P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$ są bazą Π_{n-1}. mamy zatem

$$\underset{\Pi_n}{\underset{\cap}{P_n}} = x\underset{\Pi_n}{\underset{\cap}{P_{n-1}}} + \underset{\Pi_{n-1}}{\underset{\cap}{\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i P_i}}.$$

mamy dla $j=0\ldots n-3$

$$0 = <P_n, P_j> = <xP_{n-1} + \sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i P_i, P_j> = <xP_{n-1}, P_j> + <\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i P_i, P_j> =$$

$$= <xP_{n-1}, P_j> + \sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i <P_i, P_j> = <xP_{n-1}, P_j> + \alpha_j <P_j, P_j> =$$

$$= \underbrace{<P_{n-1}, \underbrace{xP_j}_{st. \leq n-2}>}_{=0} + \alpha_j <P_j, P_j> = \alpha_j \underbrace{<P_j, P_j>}_{\neq 0}$$

czyli $\alpha_j = 0$ dla $j=0..n-3$.

mamy więc $P_n = xP_{n-1} + \alpha_{n-2}P_{n-2} + \alpha_{n-1}P_{n-1} =$

$= (x+\alpha_{n-1})P_{n-1} + \alpha_{n-2}P_{n-2}$

$\neq 0$ $\quad \neq 0$

$= (x+\alpha_{n-1})P_{n-1} \cdot \quad -$

$j = n-2$

$$0 = \langle P_n, P_{n-2}\rangle = \langle xP_{n-1}, P_{n-2}\rangle + \alpha_{n-1}\overbrace{\langle P_{n-1}, P_{n-2}\rangle}^{=0} + \alpha_{n-2}\overbrace{\langle P_{n-2}, P_{n-2}\rangle}^{\neq 0}$$

$$\alpha_{n-2} = -\frac{\langle xP_{n-1}, P_{n-2}\rangle}{\langle P_{n-2}, P_{n-2}\rangle} \overset{?}{=} -\frac{\langle P_{n-1}, P_{n-1}\rangle}{\langle P_{n-2}, P_{n-2}\rangle} = -d_n$$

$$\underset{\pi_{n-1}}{\overset{}{P_{n-1}}} - x\underset{\pi_{n-1}}{P_{n-2}} \in \pi_{n-2} \Rightarrow P_{n-1} - xP_{n-2} = \sum_{i=0}^{n-2} \beta_i P_i$$

(bo P_{n-1} i P_{n-2} mają współczynnik wiodący 1)

$$xP_{n-2} = P_{n-1} - \sum_{i=0}^{n-2} \beta_i P_i$$

$$\langle xP_{n-1}, P_{n-2}\rangle = \langle P_{n-1}, xP_{n-2}\rangle = \langle P_{n-1}, P_{n-1} - \sum_{i=0}^{n-2}\beta_i P_i\rangle =$$

$$= \langle P_{n-1}, P_{n-1}\rangle - \sum_{i=0}^{n-2}\beta_i \underbrace{\langle P_{n-1}, P_i\rangle}_{=0} = \langle P_{n-1}, P_{n-1}\rangle$$

czyli $\alpha_{n-2} = -\frac{\langle P_{n-1}, P_{n-1}\rangle}{\langle P_{n-2}, P_{n-2}\rangle} = -d_k$ git

$j = n-1$

$$0 = \langle P_n, P_{n-1}\rangle = \langle xP_{n-1}, P_{n-1}\rangle + \alpha_{n-2}\underbrace{\langle P_{n-2}, P_{n-1}\rangle}_{=0} + \alpha_{n-1}\underbrace{\langle P_{n-1}, P_{n-1}\rangle}_{\neq 0}$$

czyli $\alpha_{n-1} = -\frac{\langle xP_{n-1}, P_{n-1}\rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1}\rangle} = -c_n$

no więc $P_n = (x+\alpha_{n-1})P_{n-1} + \alpha_{n-2}P_{n-2} =$

$= (x-c_n)P_{n-1} - d_nP_{n-2}$ jest ortog. do wszystkich pozostałych, ma współczynnik wiodący $=1$ i spełnia rekurencję $\square$