Zad 1.

środa, 9 listopada 2022 23:50

1. Niech $f(n) = \sum_{k=1}^{n} \lceil \log_2 k \rceil$. Wykaż, że

$$f(n) = n - 1 + f(\lceil n/2 \rceil) + f(\lfloor n/2 \rfloor)$$

dla wszystkich $n \geq 1$. Pokaż, że jeśli w powyższej zależności wymagamy, by $f(1) = 0$, to f jest jedyną funkcją spelniającą tę zależność.

Wsk.: Rozbij $\sum \lceil \log_2 k \rceil$ na sumy po k parzystych i nieparzystych

$$\sum_{k=1}^{n} \lceil \log_2 k \rceil = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \lceil \log_2 2k \rceil + \sum_{k=1}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \lceil \log_2 (2k-1) \rceil =$$

$$= \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \lceil \log_2 k + 1 \rceil + \sum_{k=1}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \lceil \log_2 (k - \tfrac{1}{2}) + 1 \rceil =$$

$$= \lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor + \lceil \tfrac{n}{2} \rceil + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \lceil \log_2 k \rceil + \sum_{k=2}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \lceil \log_2 (k - \tfrac{1}{2}) \rceil - 1 =$$

$$= n - 1 + f(\lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor) + \sum_{k=2}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \lceil \log_2 k \rceil = n - 1 + f(\lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor) + f(\lceil \tfrac{n}{2} \rceil)$$

$$2^i < k - \tfrac{1}{2} < k \leq 2^{i+1}$$

bo $k - (k - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, a $\forall i \geq 0 \; 2^{i+1} - 2^i > \frac{1}{2}$

czyli $\lceil \log_2 (k - \frac{1}{2}) \rceil = \lceil \log_2 k \rceil$ dla $k \geq 2$ □

$f(1) = 0$

$f(2) = 2 - 1 + \underline{f(1)} + f(1)$

$f(3) = 3 - 1 + \underline{f(1)} + f(2)$

$f(4) = 4 - 1 + f(2) + f(2) = 3 + 2(2 - 1 + \underline{2f(1)})$

$f(1) = 0$ wyznacza jednoznacznie wszystkie wartości funkcji □