Zad 1.

czwartek, 27 października 2022 22:09

13 października 2022 r.

M1.1. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech B będzie liczbą naturalną większą od 1. Wykazać, że każda niezerowa liczba rzeczywista x ma jednoznaczne przedstawienie w *postaci znormalizowanej* $x = smB^c$, gdzie s jest znakiem liczby x, c – liczbą całkowitą (*cechą*), a m – liczbą z przedziału $[1, B)$, zwaną *mantysą*.

1. istnienie $\quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$s = \operatorname{sgn}(x) \qquad c = \lfloor \log_B(|x|) \rfloor \qquad m = \frac{x}{sB^c}$

$s \in \{-1, 1\}$ ✓ $\qquad c \in \mathbb{Z}$ ✓

$\frac{x}{sB^c} = \frac{\operatorname{sgn}(x) \cdot |x|}{s\,B^c} = \frac{|x|}{B^c}$

$c \le \log_B |x| < c+1$

$\Downarrow$

$B^c \le |x| < B^{c+1}$

$1 = \frac{|x|}{|x|} \le \frac{|x|}{B^c} < \frac{B^{c+1}}{B^c} = B$

$m \in [1; B)$ ✓

2. jedyność

$x = s_1 m_1 B^{c_1} = s_2 m_2 B^{c_2}$

a) $s_1 = s_2$

gdyby nie, to b.s.o $\quad s_1 m_1 B^{c_1} < 0, \quad s_2 m_2 B^{c_2} > 0$

$s_1 m_1 B^{c_1} \ne s_2 m_2 B^{c_2} \quad \lightning$

b) $c_1 = c_2$

nie wprost $c_1 \ne c_2$. b.s.o $\quad c_1 < c_2 \Rightarrow c_1 + 1 \le c_2$

$B^{c_1} \le m_1 B^{c_1} < B^{c_1+1} \le m_2 B^{c_2}$

czyli $m_1 B^{c_1} < m_2 B^{c_2} \quad \lightning$

c) $m_1 = m_2$

trywialnie z a) i b)

$\square$