Zad 4.

poniedziałek, 16 stycznia 2023 20:34

M11.4. $\boxed{\text{1,5 punktu}}$ Niech będzie $w_n(x) = \sum_{k=0}^{n}{}' a_k T_k(x)$, gdzie T_k jest k-tym wielomianem Czebyszewa. Wykazać, że

$$\int_{-1}^{1} w_n(x)\,\mathrm{d}x = 2\sum_{i=0}^{\lfloor n/2\rfloor}{}' \frac{a_{2i}}{1-4i^2}.$$

$$\int_{-1}^{1} w_n(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \sum_{k=0}^{n}{}' a_k T_k(x) =$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{a_0 T_0}{2} + a_1 T_1 + \ldots + a_n T_n \, dx = \frac{a_0}{2}\int_{-1}^{1} T_0 + a_1 \int_{-1}^{1} T_1 +$$

$$\ldots + a_n \int_{-1}^{1} T_n = \sum_{k=0}^{n}{}' \left(a_k \int_{-1}^{1} T_k\,dx\right)$$

z poprzedniej (?) listy wiemy, że $\int_{-1}^{1} T_k = \begin{cases} 0, & k \text{ nieparzyste} \\ \frac{2}{1-k^2}, & k \text{ parzyste} \end{cases}$

więc $\displaystyle \sum_{k=0}^{n}{}' \left(a_k \int_{-1}^{1} T_k(x)\,dx\right) = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor}{}' \frac{2a_{2i}}{1-(2i)^2} = 2\cdot \sum_{i=0}^{\lfloor n/2\rfloor}{}' \frac{a_{2i}}{1-4i^2}$ $\square$

bierzemy tylko parzyste indeksy