Lista 1

Konwersatorium 12.10.2022, Ćwiczenia 19.10.2022.

Oznaczenia zadań i ich części: S: do samodzielnego wykonania, K: do omówienia na konwersatorium.

0S. Materiał teoretyczny (definicje, twierdzenia, przykłady): działanie w zbiorze, łączność, przemienność, element neutralny. Definicja grupy i pierwsze przykłady grup. Transport działania poprzez bijekcję.

1K. Sprawdzić czy następujące działanie $*$ na danym zbiorze A jest łączne, przemienne i czy ma element neutralny.

(i) $A = \mathbb{N}_{>0}$; $m * n = m^n$.

(ii) $A = \{0, 1\}$; $m * n = m \cdot n$.

2K. Niech $A = \{0, 1\}$ będzie zbiorem z działaniem $*$, $B = \{\text{Fałsz}, \text{Prawda}\}$, natomiast $f : A \to B$ będzie bijekcją taką, że $f(0) = \text{Fałsz}$. Niech $\heartsuit$ będzie działaniem w zbiorze B indukowanym przez działanie $*$ poprzez bijekcję f. Czym jest działanie $\heartsuit$, jeśli:

(i) $m * n = m \cdot n$.

(ii) $m * n = \min(m, n)$.

2. Dla $r > 0$ niech $K_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant r\}$.

(i) Narysować na płaszczyźnie Gaussa zbiór K_r.

(ii) Dla których $r > 0$ mnożenie liczb zespolonych jest działaniem w zbiorze K_r?

3. Sprawdzić czy następujące działanie $*$ na danym zbiorze A jest łączne, przemienne i czy ma element neutralny. Sprawdzić też, czy $(A, *)$ jest grupą.

(i) $A = \mathbb{Q}$; $a * b = \frac{a+b}{2}$.

(ii) $A = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$; $a * b = \frac{a}{b}$.

(iii) $A = \mathbb{R}$; $x * y = x + y + 2$.

(iv) $A = \mathbb{N}$; $m * n = \min(m, n)$.

(v) $A = \mathbb{N}$; $m * n = \max(m, n)$.

(vi) $A = \mathbb{N}$; $m * n = m$.

(vii) $A = \mathbb{N}$; $m * n = 2^{m+n}$.

(viii) $A = \mathbb{Z}$; $m * n = m - n$.

(ix) A to płaszczyzna; $P * Q$ to środek odcinka o końcach P, Q.

4. Załóżmy, że $f : A \to B$ jest bijekcją, $\circ$ jest działaniem na zbiorze A i $*$ jest działaniem indukowanym w zbiorze B przez działanie $\circ$ poprzez funkcję f. Udowodnić, że:

(i) jeśli $\circ$ jest przemienne, to $*$ jest przemienne (na wykładzie był dowód analogicznego faktu dla łączności);

(ii) jeśli $\circ$ ma element neutralny w A, to $*$ ma element neutralny w B;

(iii) jeśli $(A, \circ)$ jest grupą, to $(B, *)$ jest grupą.

5. Załóżmy, że $\circ$ jest działaniem łącznym w skończonym zbiorze A. Udowodnić, że istnieje $a \in A$ takie, że $a \circ a = a$.
Wskazówka
Dla $x \in A$ oraz $l > 0$ niech x^l oznacza $\underbrace{x \circ \cdots \circ x}_{l \text{ razy}}$.

   (i) Zauważyć, że dla każdych $k, l > 0$ oraz $x \in A$ mamy:
$$(x^k)^l = x^{kl}, \quad x^k x^l = x^{k+l}.$$

   (ii) Dla $c \in A$ rozważyć elementy c^{2^k}, gdzie $k = 0, 1, 2, \ldots$ i znaleźć $b \in A$ oraz $l \geqslant 2$, takie że $b^l = b$.

   (iii) Udowodnić, że jeśli b i l są jak w (b) powyżej, to dla $a := b^{l-1}$ mamy $a \circ a = a$.

6. Podać przykład działania $*$ na zbiorze $\{0, 1\}$, takiego że
$$0 * (0 * 0) \neq (0 * 0) * 0.$$
Ile istnieje takich działań?