

Zad 4.

wtorek, 10 stycznia 2023 20:27

4. W grafie skierowanym $\text{indeg}(v)$ i $\text{outdeg}(v)$ oznaczają odpowiednio liczbę łuków wchodzących i wychodzących z wierzchołka v . Pokaż, że digraf zawiera skierowany cykl Eulera dokładnie, gdy jest spójny (po wymazaniu skierowań łuków) i dla wszystkich $v \in V$: $\text{indeg}(v) = \text{outdeg}(v)$.

stwierdzenie nie jest poprawne, ponieważ
digraf



posiada cykl Eulera, natomiast
nie jest spójny... 😱

chodziło chyba bardziej o takie twierdzenie
G - digraf spójny

G-eulerowski $\Leftrightarrow \forall v \in V \text{ } \text{indeg}(v) = \text{outdeg}(v)$ (dowód)

(\Rightarrow) cykl Eulera przechodząc przez wierzchołek v z jednej strony musi do niego trafić krawędzią wchodzącej do v , a z drugiej strony, żeby pójść dalej musi skorzystać z krawędzi wychodzącej z v . Cykl także przechodzi po wszystkich krawędziach, stąd $\text{indeg}(v) = \text{outdeg}(v)$

(\Leftarrow) indukcja po liczbie krawędzi grafu $m = 1, 2$ zachodzi w oczywisty sposób



zauważamy, że zachodzi dla każdej ilości krawędzi $< m$. Położmy, że zachodzi dla m krawędzi

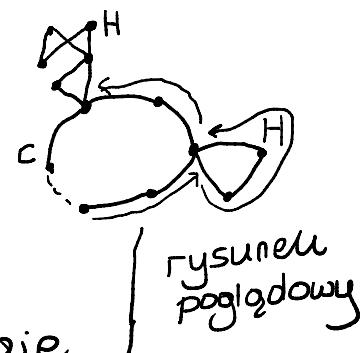
skoro $\forall v \in V \text{ } \text{indeg}(v) = \text{outdeg}(v)$, to graf G zawiera cykl skierowany.

(z każdego wierzchołka, do którego wchodzi krawędź można pójść do innego, $\exists u \text{ : } \text{indeg}(u) = \text{outdeg}(u)$), co wnoszą

wchodzi krawędź można pojrzeć do innego, [z zat. $\text{indeg}(u) = \text{outdeg}(u)$], czynnościami możemy powtarzać, aż nie ojdziemy do wcześniejszej odwiedzonej wierzchołka [G ma ich skończoną ilość więc taka sytuacja napewno się wydarzy]. Odpowiednio obiegie przebytej drogi utwórz cykl]

ozn. C

Jeśli cykl ten zawiera wszystkie krawędzie G, to jest on euklowski co kończy dowód. Jeśli nie, to możemy rozważyć graf H powstający w wyniku usunięcia z H krawędzi wchodzących w skład C. $m(H) < m(G)$, zatem z zat. indukcyjnego każda składowa spójności H ma cykl eulera. Pozostaje przejść po cyklu C, przy napotkaniu „wejścia” do składowej H przejść się po cyklu eulera na niej opartej, kontynuować taki postępowanie do zakończenia cyklu C – otrzymujemy cykl eulera w grafie G □



rysunek poglądowy