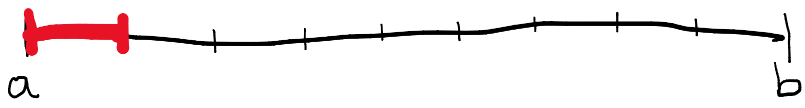
Zad 5.

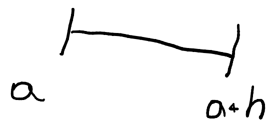
poniedziałek, 14 listopada 2022 20:05

M5.5. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Załóżmy, że $x_i = a + ih$ dla $i = 0, 1, \ldots, n$ i że $h = (b-a)/n > 0$. Wykazać, że dla każdego $x \in [a, b]$ zachodzi nierówność

$$\prod_{i=0}^{n} |x - x_i| \leqslant \tfrac{1}{4} n! h^{n+1}.$$



załóżmy najpierw, że punkt x leży w którymś ze skrajnych przedziałów (np tam gdzie —).
mamy wtedy x gdzieś w takim przedziale



maksymalny iloczyn odległości x do końców tego przedziału otrzymamy kiedy x leży w jego połowie.

$$\frac{1}{2}h \cdot \frac{1}{2}h = \frac{1}{4}h^2$$

dalej, maksymalny iloczyn odległości x do reszty węzłów otrzymamy, kiedy x będzie leżał na zewnętrznej granicy przedziału i będzie on wtedy wynosił

$$2h \cdot 3h \cdot 4h \cdot \ldots \cdot nh = n! \cdot h^{n-1}$$

stąd dostajemy

$$\prod_{i=0}^{n} |x - x_i| \le \frac{1}{4}h^2 \cdot n! h^{n-1} = \frac{1}{4} n! h^{n+1}$$

teraz pozostaje pokazać, że jest to maksymalne szacowanie maksymalne szacowanie

Weźmy zatem x leżący w którymś z przedziałów różnych od tych skrajnych, tj.

$i \neq 0, n-1$

1) ponownie mamy $\frac{1}{4}h^2$

2) idąc w prawo mamy $2h \cdot 3h \cdot \ldots \cdot (n-i)h$

3) idąc w lewo, $2h \cdot 3h \cdot \ldots \cdot (i+1)h$

razem $\frac{1}{4}h^2 \cdot 2h \cdot 3h \cdot \ldots \cdot (n-i)h \cdot 2h \cdot 3h \cdot \ldots \cdot (i+1)h$

no i widać, że to jest mniejsze od $\frac{1}{4}h^{n+1}n!$

$\square$