Zad 1.

niedziela, 4 grudnia 2022 21:41

M7.1. $\boxed{\text{1,5 punktu}}$ Wykazać, że wielomiany Czebyszewa T_k spełniają równości

(a) ortogonalność czebyszewa $\leftarrow \int_{-1}^{1}(1-x^2)^{-1/2}T_k(x)T_l(x)\,dx = 0 \qquad (k \neq l;\ k,l = 0,1,\ldots),$

(b) norma^2 czebyszewa $\leftarrow \int_{-1}^{1}(1-x^2)^{-1/2}\left[T_k(x)\right]^2\,dx = \begin{cases} \pi & (k=0), \\ \pi/2 & (k=1,2,\ldots). \end{cases}$ $\qquad \|T_k\| = \sqrt{\langle T_k, T_k\rangle}$

Co one oznaczają?

(a) $\quad w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} w(x)f(x)g(x)\,dx$

$k \neq l$

$$\langle T_k, T_l\rangle = \int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}T_k\cdot T_l = \int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cos(k\arccos(x))\cdot$$

$$\cos(l\cdot\arccos(x))\,dx = \left|\begin{array}{l} t=\arccos x \\ x=\cos t \\ dx=-\sin t\,dt\end{array}\right| = \int_0^{\pi}\frac{\sin t}{\sqrt{1-\cos^2 t}}\cos(kt)\cos(lt)\,dt =$$

$$= \int_0^{\pi}\cos(kt)\cdot\cos(l\cdot t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}2\cos(kt)\cos(lt)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left[\cos[(k-l)t] + \cos[(k+l)t]\right]dt =$$

• $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin[(k-l)t]}{k-l} + \frac{\sin[(k+l)t]}{k+l}\right]\Bigg|_{t=0}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin[(k-l)\pi]}{k-l} + \frac{\sin[(k+l)\pi]}{k+l} - \frac{\overset{=0}{\sin 0}}{k-l} - \frac{\overset{=0}{\sin 0}}{k+l}\right] =$$

$= 0 \quad$ ($k \pm l \in \mathbb{Z}$, a sin zeruje się w wielokrotnościach π)

$\square$

podobne rozumowanie jak w (a)

$$(b)\quad \langle T_k, T_k\rangle = \int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(T_k)^2\,dx \overset{(a)}{=} \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\overset{=1}{\cos 0} + \cos(2kt)\,dt =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\left[\pi + \frac{\sin(2kt)}{2k}\right]\Big|_{t=0}^{\pi} = \frac{\pi}{2} & \text{dla } k \neq 0 \\ \frac{1}{2}\left[\pi + \pi\right] = \pi & \text{dla } k = 0 \end{cases}$$

$\square$