Zad 8.

poniedziałek, 12 grudnia 2022 20:57

M8.8. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Znaleźć 5-ty wielomian optymalny dla funkcji $f(x) := 2018x^7 + 12x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ w sensie normy jednostajnej na przedziale $[-1, 1]$.

szukamy w_5^* dla f, czyli alternans ma być 7-punktowy. Wiemy, że wielomian czebyszewa T_7 ma na przedziale $[-1,1]$ 8 punktów ekstremalnych. [takich, że $T_7(x_i) = -T_7(x_{i-1})$]

$$T_7 = 2^6 x^7 + 0 \cdot x^6 + \dots$$

$$f(x) = 2018x^7 + 0 \cdot x^6 + 12x^5 + \dots$$

$f(x) - T_7(x) \cdot \frac{2018}{2^6} \in \Pi_5$. Niech $v_5 = f - T_7 \cdot \frac{2018}{2^6}$.

wtedy $f - v_5 = T_7 \cdot \frac{2018}{2^6}$

no i ten wielomian ma 8 punktów ekstremalnych więc możemy jeden z nich (skrajny) pominąć i utworzą one alternans

no i też wartości T_7 mają w tych punktach znaki naprzemiennie

ważne!

zatem

$$v = w_5^* = f - T_7 \cdot \frac{2018}{2^6}$$

Twierdzenie (twierdzenie Czebyszewa o alternansie)

Niech T będzie dowolnym podzbiorem domkniętym przedziału $[a, b]$. Na to, by wielomian w_n był n-tym wielomianem optymalnym dla funkcji $f \in C(T)$ (tj. by dla każdego $u_n \in \Pi_n$ zachodziła nierówność $\|f - w_n\|_\infty^T \leqslant \|f - u_n\|_\infty^T$) potrzeba i wystarcza, żeby istniały takie punkty $x_0, x_1, \dots, x_{n+1} \in T$ ($x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1}$), że dla $e_n := f - w_n$ jest

$$e_n(x_k) = -e_n(x_{k-1}) \qquad (k = 0, 1, \dots, n+1), \tag{14}$$

$$|e_n(x_j)| = \|e_n\|_\infty^T \qquad (j = 0, 1, \dots, n+1). \tag{15}$$

Zbiór punktów $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$, w których różnica e_n przyjmuje wartość $\|e_n\|_\infty^T = \max_{x \in T} |e_n(x)|$ z naprzemiennymi znakami, nazywamy (n-tym) alternansem funkcji f (związanym ze zbiorem T).

f - v5

git ✓

bo czebyszew to jest cosinus więc ekstrema mają znaki na zmianę

punkty ekstremalne $T_7 \cdot \frac{2018}{2^6}$ (jest ich 7) *[8]