Zad 9.

wtorek, 24 stycznia 2023 14:31

M12.9. 2 punkty Wykazać, że wzór

$$\|A\|_E := \sqrt{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}^2}$$

definiuje submultiplikatywną normę w $\mathbb{R}^{n\times n}$, zwaną *normą euklidesową*, zgodną z normą wektorową $\|\cdot\|_2$.

Definicja

Normą macierzy nazywamy nieujemną funkcję rzeczywistą $\|\cdot\|$, określoną w przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^{n\times n}$ wszystkich macierzy kwadratowych stopnia n, o następujących własnościach:

$$\bigwedge_{A\in\mathbb{R}^{n\times n}\setminus\{\Theta\}} \{\|A\| > 0\};$$

$$\bigwedge_{A\in\mathbb{R}^{n\times n}} \bigwedge_{\alpha\in\mathbf{R}} \{\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|\};$$

$$\bigwedge_{A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}} \{\|A+B\| \leqslant \|A\| + \|B\|\};$$

$$\bigwedge_{A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}} \{\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|\}.$$

Definicja

Będziemy mówili, że normy macierzy i wektora są *zgodne*, jeśli

$$\bigwedge_{A\in\mathbb{R}^{n\times n}} \bigwedge_{x\in\mathbb{R}^n} \{\|Ax\| \leqslant \|A\|\|x\|\}.$$

(i) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}\setminus\{0\} \Rightarrow \exists i,j \; a_{ij} \neq 0 \Rightarrow \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2} > 0$

(ii) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \; \alpha \in \mathbb{R}$

$$\|\alpha A\| = \sqrt{\sum_{i,j} \alpha^2 a_{ij}^2} = \sqrt{\alpha^2 \sum_{i,j} a_{ij}^2} = |\alpha| \cdot \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2} = |\alpha| \cdot \|A\|$$

(iii) $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$\|A+B\| \overset{?}{\leq} \|A\| + \|B\| \iff \|A+B\|^2 \leq \|A\|^2 + \|B\|^2 + 2\|A\|\cdot\|B\|$$

$$\|A+B\|^2 = \sum_{i,j}(a_{ij}+b_{ij})^2 = \sum_{i,j} a_{ij}^2 + \sum_{i,j} b_{ij}^2 + 2\sum_{i,j} a_{ij} b_{ij}$$

$$2\|A\|\cdot\|B\| = 2 \cdot \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2} \cdot \sqrt{\sum_{i,j} b_{ij}^2}$$

$$\sum_{i,j} a_{ij} b_{ij} \overset{?}{\leq} \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2} \cdot \sqrt{\sum_{i,j} b_{ij}^2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\sum_{i,j} a_{ij} b_{ij}\right)^2 \leq \sum_{i,j} a_{ij}^2 \cdot \sum_{i,j} b_{ij}^2$$

prawdziwe z nierówności Cauchy'ego Schwarza

[macierze można traktować jako wektory

Cauchy'ego Schwarza

[macierze można traktować jako wektory $\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$] czyli śmiga

(iv) $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$\|AB\| \overset{?}{\leq} \|A\| \cdot \|B\|$ znowu podnosimy do kwadratu

$$\sum_{i,j} \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right]^2 \overset{?}{\leq} \left(\sum_{i,j} a_{ij}^2 \right) \left(\sum_{i,j} b_{ij}^2 \right)$$

$$\left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right]^2 \leq \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 \sum_{k=1}^{n} b_{kj}^2 \leftarrow \text{Cauchy-Schwarz}$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right]^2}_{\|AB\|} \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 \sum_{k=1}^{n} b_{kj}^2 = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2}_{\|A\|} \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} b_{kj}^2}_{\|B\|}$$

(v) zgodność z $\|\cdot\|_2$

$$\|Ax\|_2^2 \overset{?}{\leq} \|A\|_E^2 \cdot \|x\|_2^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right)^2 \leq \sum_{i,j} a_{ij}^2 \cdot \sum_{i} x_i^2$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right)^2 \leq \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \cdot \sum_{j=1}^{n} x_j^2$$

znowu prawdziwe z Cauchyego-Schwarza

patrzymy na i-ty wiersz

tu nic nie zależy od i

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \sum_{j=1}^{n} x_j^2 = \sum_{i,j} a_{ij}^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

□