Zad 8.

poniedziałek, 30 stycznia 2023 22:51

M13.8. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wykazać, że jeśli A jest macierzą ze ściśle dominującą przekątną, to $\|B_S\|_\infty < 1$, a więc metoda Gaussa-Seidela jest zbieżna.

$$x^{(k+1)} = -(L+D)^{-1}Ux^{(k)} + (L+D)^{-1}b$$

metoda Gaussa-Seidela

macierz iteracji: $-(L+D)^{-1}U$

załóżmy, że $-(L+D)^{-1}Uv = \lambda v$ [v jest wektorem własnym dla λ]

i $\|v\|_\infty = 1$ tzn. $|v_i| \le 1$ i $\exists k\ |v_k| = 1$

[możemy znormalizować sobie v]

$-(L+D)^{-1}Uv = \lambda v$ mnożymy stronami przez $(L+D)$

$$-(L+D)(L+D)^{-1}Uv = (L+D)\lambda v$$

$$-Uv = (L+D)\lambda v$$

rozważmy k-tą współrzędną tego równania

$$-\sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}v_j = \lambda \cdot \sum_{j=1}^{k} a_{kj}v_j =$$

$$= \lambda a_{kk}\cdot v_k + \lambda\sum_{j=1}^{k-1} a_{kj}v_j$$

zatem $\lambda a_{kk}\cdot v_k = -\lambda\sum_{j=1}^{k-1} a_{kj}v_j - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}v_j$

$|v_k| = 1 \quad |v_j| \le 1$

nierówność $\triangle$, kasujemy $-$ i szacowania na $|v_j|$

$$|\lambda|\cdot|a_{kk}|\cdot\underbrace{|v_k|}_{1} \le \sum_{j=k+1}^{n}|a_{kj}| + |\lambda|\cdot\sum_{j=1}^{k-1}|a_{kj}|$$

$$|\lambda|\left(|a_{kk}| - \sum_{j=1}^{k-1}|a_{kj}|\right) \le \sum_{j=k+1}^{n}|a_{kj}|$$

$$|\lambda| \le \frac{\sum_{j=k+1}^{n}|a_{kj}|}{|a_{kk}| - \sum_{j=1}^{k-1}|a_{kj}|} \overset{(*)}{<} 1$$

$$|\lambda| \leq \frac{\sum\limits_{j=k+1}}{|a_{kk}| - \sum\limits_{j=1}^{k-1} |a_{kj}|} < 1$$

(*) z zadania

$$|a_{kk}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{kj}| = \sum_{j=1}^{k-1} |a_{kj}| + \sum_{j=k+1}^{n} |a_{kj}|$$

czyli $$|a_{kk}| - \sum_{j=1}^{k-1} |a_{kj}| > \sum_{j=k+1}^{n} |a_{kj}|$$

$\square$