Zad 8.

poniedziałek, 14 listopada 2022 21:22

M5.8. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech L_n będzie wielomianem interpolującym funkcję $f(x) = \exp x$ w zerach wielomianu Czebyszewa T_{n+1}. Jaka wartość n gwarantuje, że zachodzi nierówność

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1} |f(x) - L_n(x)| \leqslant 10^{-5} \,?$$

$$\max_{-1\leq x\leq 1} |T_{n+1}(x)| = 1$$

$$f(x) = e^x$$

$$f^{(n+1)}(x) = e^x$$

$$\max_{-1\leq x\leq 1} |e^x| = e^1 = e$$

$$f(x) - L_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x) p_{n+1}(x),$$

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \left|\frac{1}{(n+1)!} \cdot e \cdot p_{n+1}(x)\right|$$

wiemy, że $L_n(x)$ interpoluje $f(x)$ w zerach wielomianu Czebyszewa, zatem wielomian węzłowy $p_{n+1}(x)$ jest równy $2^{-n} T_{n+1}(x)$. mamy

$$\left|\frac{1}{(n+1)!} e \cdot 2^{-n} T_{n+1}(x)\right| \leq \underbrace{\frac{e}{(n+1)!} \cdot 2^{-n} \leq 10^{-5}}_{\text{trzeba rozwiązać taką nierówność}}$$

$$\frac{e}{(n+1)!\,2^n} \leq \frac{1}{100000}$$

$$(n+1)! \cdot 2^n \geq 10^5 e$$

metoda prób i błędów

niezawodność metodą prób i błędów
wychodzi, że $n \geq 6$