# Zad 2.

poniedziałek, 12 grudnia 2022 18:54

**M8.2.** $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech $\bar{T}_k(x)$ będą standardowymi wielomianami ortogonalnymi w przedziale $[-1,1]$, z wagą $(1-x^2)^{-1/2}$. Znaleźć związek rekurencyjny spełniany przez te wielomiany.

Wielomiany ortogonalne $\{\bar{P}_k\}$ nazwiemy **standardowymi**, jeśli dla każdego $k$ wielomian $\bar{P}_k$ ma współczynnik 1 przy $x^k$. Zauważmy, że jeśli $\{P_k\}$ jest dowolnym ciągiem wielomianów ortogonalnych w tej przestrzeni i $P_k(x) = a_k x^k + \ldots$ $(k \geqslant 0)$, to $P_k = a_k \bar{P}_k$ $(k \geqslant 0)$.

**Twierdzenie**

*Wielomiany ortogonalne $\{\bar{P}_k\}$ spełniają związek rekurencyjny*

$$\bar{P}_0(x) = 1, \tag{3}$$
$$\bar{P}_1(x) = x - c_1, \tag{4}$$
$$\bar{P}_k(x) = (x - c_k)\bar{P}_{k-1}(x) - d_k \bar{P}_{k-2}(x) \qquad (k = 2, 3, \ldots), \tag{5}$$

*gdzie*

$$c_k = \langle x\bar{P}_{k-1}, \bar{P}_{k-1}\rangle / \langle \bar{P}_{k-1}, \bar{P}_{k-1}\rangle \qquad (k = 1, 2, \ldots), \tag{6}$$
$$d_k = \langle \bar{P}_{k-1}, \bar{P}_{k-1}\rangle / \langle \bar{P}_{k-2}, \bar{P}_{k-2}\rangle \qquad (k = 2, 3, \ldots). \tag{7}$$

wiemy, że na $[-1,1]$ i dla $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ wielomiany $T_k(x)$ są ortogonalne (7.1)

mamy zatem $T_k(x) = 2^{k-1}\bar{T}_k(x)$ ← bo $T_k$ mają współczynnik wiodący równy $2^{k-1}$

szukamy stałych $c_k$ i $d_k$. mamy

$$\forall k \quad c_k = \frac{\langle x\bar{T}_{k-1}, \bar{T}_{k-1}\rangle}{\langle \bar{T}_{k-1}, \bar{T}_{k-1}\rangle} = \frac{\left(\frac{1}{2^{k-2}}\right)^2 \langle xT_{k-1}, T_{k-1}\rangle}{\left(\frac{1}{2^{k-2}}\right)^2 \langle T_{k-1}, T_{k-1}\rangle} = \frac{\frac{1}{2}\langle 2xT_{k-1}, T_{k-1}\rangle}{\langle T_{k-1}, T_{k-1}\rangle} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\langle T_k + T_{k-2}, T_{k-1}\rangle}{\langle T_{k-1}, T_{k-1}\rangle} = \frac{\frac{1}{2}\left[\overset{=0}{\langle T_k, T_{k-1}\rangle} + \overset{=0}{\langle T_{k-2}, T_{k-1}\rangle}\right]}{\langle T_{k-1}, T_{k-1}\rangle} = 0$$

oraz $(k>2)$

$$d_k = \frac{\langle \bar{T}_{k-1}, \bar{T}_{k-1}\rangle}{\langle \bar{T}_{k-2}, \bar{T}_{k-2}\rangle} = \frac{\left(\frac{1}{2^{k-2}}\right)^2 \langle T_{k-1}, T_{k-1}\rangle}{\left(\frac{1}{2^{k-3}}\right)^2 \langle T_{k-2}, T_{k-2}\rangle} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{\langle T_{k-1}, T_{k-1}\rangle}{\langle T_{k-2}, T_{k-2}\rangle} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi/2}{\pi/2} = \frac{1}{4}, \quad d_2 = \frac{\langle T_1, T_1\rangle}{\langle T_0, T_0\rangle} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\pi} = \frac{1}{2}$$

zatem $\bar{T}_0 \equiv 1 \quad \bar{T}_1(x) = x$

$\bar{T}_k(x) = x\bar{T}_{k-1}(x) - \gamma_k \bar{T}_{k-2}(x)$, gdzie

$\gamma_2 = \frac{1}{2}, \quad \gamma_k = \frac{1}{4}$ dla $k>2$