# Zad 2.

wtorek, 10 stycznia 2023 13:37

2. Graf prosty $G$ jest samodopełniający wtedy i tylko wtedy, gdy jest izomorficzny ze swym dopełnieniem. Pokaż, że samodopełniający graf $n$ wierzchołkowy istnieje dokładnie wtedy, gdy $n \equiv 0$ lub $n \equiv 1$ modulo 4.

   Wsk.: Gdy $n \equiv 0$ możesz oprzeć konstrukcję na podziale zbioru $V$ na cztery części. Gdy $n \equiv 1$ do poprzedniej konstrukcji można dodać jeden wierzchołek.

($\Rightarrow$) $G \cong \hat{G} \Rightarrow |E(G)| = |E(\hat{G})|$. ponadto $G \cup \hat{G} = K_n$

$$\Downarrow$$

$$|E(G)| + |E(\hat{G})| = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Otrzymujemy zatem zależność

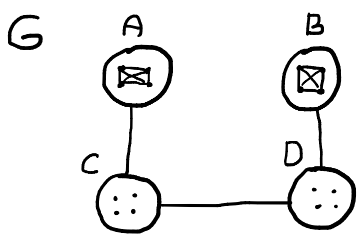
$$|E(G)| = |E(\hat{G})| = \frac{n(n-1)}{4}$$

$|E(G)| \in \mathbb{N}$, zatem $n \equiv_4 0$ lub $n-1 \equiv_4 0 \Rightarrow n \equiv_4 1$

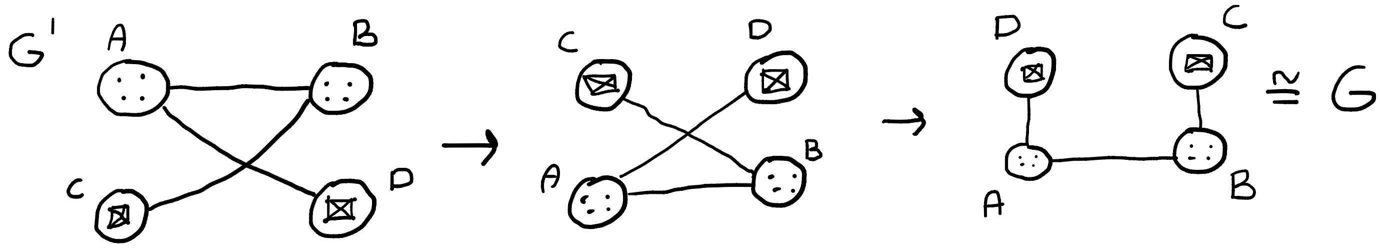
(bo $nwd(n, n-1) = 1$)

($\Leftarrow$) 1) $n \equiv_4 0$

Skoro $n$ jest podzielne przez 4, to możemy rozdzielić wszystkie wierzchołki pomiędzy równoliczne 4 podzbiory: A, B, C oraz D. Niech podgrafy na zbiorach A i B będą grafami pełnymi, a na C i D – pustymi. Ponadto, niech każdy wierzchołek ze zbioru A będzie połączony z każdym ze zbioru C. Analogicznie dla zbiorów C i D oraz D i B (rysunek)




dopełnienie takiego grafu wygląda wtedy następująco

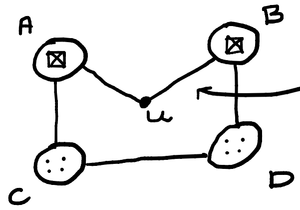



2) $n \equiv_4 1$

2) $n \equiv_4 1$

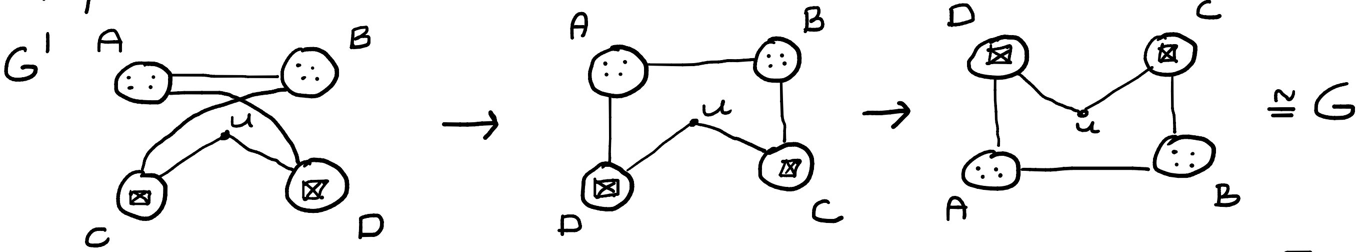
Analogiczna konstrukcja jak w (1) z dodatkowym wierzchołkiem (rysunek)

G




u połączone krawędzią z każdym $v \in B$ (analogicznie A)

Dopełnienie:




$\square$