Zad 7

poniedziałek, 21 listopada 2022 17:56

M6.7. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wykazać, że jeśli s jest naturalną funkcją sklejaną trzeciego stopnia, interpolującą funkcję f w węzłach $x_0, x_1, \ldots, x_n$ $(a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$, to

$$\int_a^b [s''(x)]^2\,dx = \sum_{k=1}^{n-1} \left(f[x_k, x_{k+1}] - f[x_{k-1}, x_k]\right) M_k,$$

gdzie $M_k := s''(x_k)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$.

Jeśli dodatkowe (tzw. brzegowe) dwa warunki mają postać

- 4°_{nat} $s''(a) = s''(b) = 0$
- 4°_{comp} $s'(a) = f'(a)$, $s'(b) = f'(b)$
- 4°_{per} $s'(a) = s'(b)$, $s''(a) = s''(b)$ (jeśli f jest funkcją okresową o okresie $b-a$)

to s nazywamy odpowiednio funkcją naturalną, zupełną lub okresową.

$s(x_k) = f(x_k)$

$s_i(x)$ to składowa funkcji sklejanej na przedziale $[x_{i-1}, x_i]$ dla $i = 1, \ldots, n$

przez h_i oznaczamy $x_i - x_{i-1}$

Chcemy, żeby $s''(x) \in C[a,b]$, tzn.

$s_i''(x_i) = s_{i+1}''(x_i)$ dla $i = 1, \ldots, n-1$

dodatkowo $s_1''(x_0) = s_n''(x_n) = 0$, bo s jest naturalną funkcją sklejaną.

Definiujemy

$$s_i''(x) = M_{i-1}\frac{x_i - x}{h_i} + M_i\frac{x - x_{i-1}}{h_i}.$$ wtedy

$$s_i''(x_i) = M_i$$

$$s_{i+1}''(x_i) = M_i\frac{x_{i+1} - x_i}{h_{i+1}} + M_{i+1}\frac{x_i - x_i}{h_{i+1}} = M_i$$

więc wszystko się zgadza

ponadto $s_i^{(3)}(x) = \frac{M_i - M_{i-1}}{h_i}$. mamy

$$\int_a^b [s''(x)]^2 dx = \sum_{i=1}^{n}\left[\int_{x_{i-1}}^{x_i}[s_i''(x)]^2 dx\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[\int^{x_i}\left[s_i''(x)\cdot s_i''(x)\right] dx =\right.$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\underbrace{s_i''(x)}_{u} \cdot \underbrace{s_i''(x)}_{v'} \right] dx \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[s_i''(x) s_i'(x) \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[s_i^{(3)}(x) \cdot s_i'(x) \right] dx \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \Big[M_i \cdot s_i'(x_i) - s_i''(x_{i-1}) \cdot s_i'(x_{i-1})$$

$$- \frac{M_i - M_{i-1}}{h_i} \cdot \int_{x_{i-1}}^{x_i} s_i'(x)\, dx \Big] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \Big[M_i \cdot s_i'(x_i) - M_{i-1} \cdot s_i'(x_{i-1})$$

$$- \frac{M_i - M_{i-1}}{h_i} \cdot \left(s_i(x) \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} \right) \Big] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[M_i s_i'(x_i) - M_{i-1} s_i'(x_{i-1}) \right] - \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{M_i - M_{i-1}}{h_i} \underbrace{\left(f(x_i) - f(x_{i-1}) \right)}_{d} \right] =$$

suma teleskopowa

$$= -\underbrace{M_0}_{0} s_1'(x_0) + \underbrace{M_n}_{0} s_n'(x_n) - \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{M_i \cdot d}{h_i} - \frac{M_{i-1} \cdot d}{h_i} \right] =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} \frac{M_i}{h_i} \left(f(x_i) - f(x_{i-1}) \right) + \sum_{i=1}^{n} \frac{M_{i-1}}{h_i} \left(f(x_i) - f(x_{i-1}) \right) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} M_i \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} + \sum_{i=0}^{n-1} M_i \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n-1} M_i \cdot f[x_{i-1}, x_i] + \sum_{i=1}^{n-1} M_i \cdot f[x_i, x_{i+1}] =$$

$$= - \sum_{i=1} M_i \cdot f[x_{i-1}, x_i] + \sum_{i=1} M_i \cdot f[x_i, x_{i+1}] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} M_i \left(f[x_i, x_{i+1}] - f[x_{i-1}, x_i] \right)$$

$$\square$$