

Zad 10.

poniedziałek, 12 grudnia 2022 22:21

M8.10. 1 punkt Wyznaczyć pierwszy wielomian optymalny w sensie aproksymacji jednostajnej dla funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ w przedziale $[0, 1]$.

szukamy $w_1^* = ax + b$

$$r = f - w_1^* = \sqrt{x} - ax - b$$

$$r' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - a = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} - a$$

$$r'' = -\frac{1}{4} \cdot x^{-\frac{3}{2}} \quad \text{włósta na } (a, b)$$

alternans x_0, x_1, x_2

$r(x_i) = \varepsilon \cdot (-1)^i$. wiemy z włóstości, że $x_0 = 0, x_2 = 1$ (krajce przedziału)

mamy dodatkowo, że

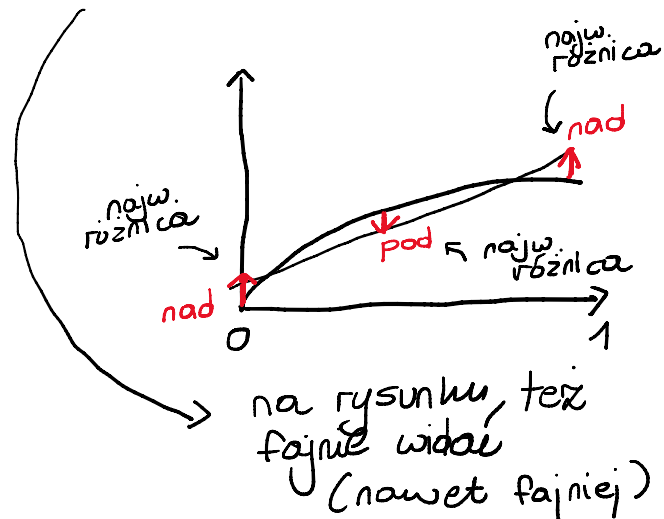
$$r'(x_i) = 0 \quad (\text{bo } x_i \text{ to punkty ekstremalne})$$

stąd

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} - a = 0$$

$$\sqrt{x_1} = \frac{1}{2a}$$

$$x_1 = \frac{1}{4a^2} \quad (\text{bo } x_1 \in (0, 1))$$



dalej

$$\begin{cases} 0 - b = \varepsilon \Rightarrow \varepsilon = -b \\ \sqrt{x_1} - ax_1 - b = -\varepsilon \Rightarrow \frac{1}{2a} - a \cdot \frac{1}{4a^2} - b = b \\ 1 - a - b = \varepsilon \Rightarrow 1 - a - b = -b \end{cases}$$

czyli $\begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ x_1 = \frac{1}{4} \\ b = \frac{1}{8} \\ \varepsilon = -\frac{1}{8} \end{cases}$

sprawdzając

x_i	$\sqrt{x_i}$	$ax_i + b$	$\sqrt{x_i} - ax_i + b$
0	0	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$
1	1	$\frac{5}{8}$	$-\frac{1}{8}$

git

czyli $0, \frac{1}{4}, 1$ to alternans zatem

\cup alternans zutem

$$\omega_1^* = x + \frac{1}{8}$$