Zad 2.

poniedziałek, 9 stycznia 2023 00:40

M10.2. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Obliczamy wartość całki $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ stosując *kwadraturę Newtona-Cotesa*, czyli kwadraturę interpolacyjną z węzłami równoodległymi $x_k := a + kh$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, gdzie $h := (b-a)/n$:

$$Q_n^{NC}(f) := \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} f(x_k).$$

Wykazać, że

$$(1) \qquad A_k^{(n)} = h(-1)^{n-k}\frac{1}{k!(n-k)!}\int_0^n \prod_{j=0,\,j\neq k}^{n} (t-j)\,dt \qquad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Niech będzie $B_k^{(n)} := A_k^{(n)}/(b-a)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$. Sprawdzić, że

a) wielkości $B_k^{(n)}$ są liczbami wymiernymi;

b) $B_k^{(n)} = B_{n-k}^{(n)}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$

(*)

1) $x - x_j = (a+th) - (a+jh) = (t-j)h$

2) $x_k - x_j = (k-j)h$

$$A_k^{(n)} = \int_a^b \lambda_k(x) = \int_a^b \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} \frac{x-x_j}{x_k-x_j}\,dx = \left| \begin{array}{l} x = a+th \\ dx = h\,dt \end{array} \right| \overset{(*)}{=}$$

$$= h\int_0^n \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} \frac{(t-j)h}{(k-j)h}\,dt = h \cdot \prod_{j\neq k}(k-j)^{-1} \int_0^n \prod_{j\neq k}^{n}(t-j)\,dt =$$

$$= h \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} \cdot \int_0^n \prod_{j\neq k}^{n}(t-j)\,dt \qquad \square$$

$$\prod_{j\neq k}^{n} \frac{1}{k-j} = \underbrace{\frac{1}{k-0}\cdot\frac{1}{k-1}\cdots\frac{1}{k-(k-1)}}_{k \text{ składników} > 0} \cdot \underbrace{\frac{1}{k-(k+1)}\cdots\frac{1}{k-n}}_{n-k \text{ składników} < 0}$$

a) $$A_k^{(n)} = \frac{b-a}{n} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} \int_0^n \prod_{j\neq k}^{n} (t-j)\,dt$$

potencjalnie niewymierne ✗

wymierne ✓

całka z wielomianu o wymiernych (całkowitych) współczynnikach od 0 do n $\Rightarrow$ wymierne ✓

jak podzielimy przez $(b-a)$ to problem znika $\Rightarrow B_k^{(n)} \in \mathbb{Q}$

$\square$

b) $$A_{n-k}^{(n)} = h\frac{(-1)^k}{(n-k)!\,k!}\int_0^n \prod_{j=0}^{n} (t-j)\,dt = \left| \begin{array}{l} s = n-t \\ ds = -dt \end{array} \right| =$$

b) $A^{(n)}_{n-k} = h\frac{(-1)^{k}}{(n-k)!\,k!}\int_0^n \prod_{\substack{j=0\\ j\neq n-k}}^{n} (t-j)\,dt = \left| ds = -dt \right| =$

$$= h\frac{(-1)^k}{(n-k)!\,k!}\int_n^0 -\prod_{j\neq n-k}^{n} (n-s-j)\,ds = h\frac{(-1)^k}{(n-k)!\,k!}\int_0^n \prod_{j\neq n-k}^{n} -(s-(n-j))\,ds =$$

$$= h\frac{(-1)^{k+n}}{(n-k)!\,k!}\int_0^n \prod_{j\neq n-k}^{n} (s-(n-j))\,ds = h\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!\,k!}\int_0^n \prod_{i\neq k}^{n} (s-i)\,ds =$$

$$= A^{(n)}_k \qquad \square$$

wyciągamy (-1) przed całkę n razy

(*) $(-1)^{n+k} = (-1)^{n-k}$, bo $n+k$ i $n-k$ tej samej parzystości