# Zad 4.

wtorek, 24 stycznia 2023 17:56

**M12.4.** $\boxed{\text{2 punkty}}$ Udowodnić, że spośród wszystkich wielomianów stopnia $n$-tego postaci

$$w_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0,$$

najmniejszą wartość całki

$$\int_a^b p(x) w_n^2(x)\, dx$$

daje $n$-ty standardowy wielomian ortogonalny w sensie normy średniokwadratowej z funkcją wagową $p(x)$.

$$w_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$$

$$P_n(x) = x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$$

$$\int_a^b p(x) w_n^2(x) = \langle w_n, w_n \rangle \longleftarrow \text{nie wprost } < \langle p_n, p_n \rangle$$

$$\langle w_n, w_n \rangle = \langle p_n + \underbrace{q_{n-1}}_{\in \Pi_{n-1}}, p_n + q_{n-1} \rangle =$$

$$= \underbrace{\langle p_n, p_n \rangle}_{>0} + 2\underbrace{\langle p_n, q_{n-1} \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle q_{n-1}, q_{n-1} \rangle}_{\geq 0}$$

$$\langle p_n, p_n \rangle + \langle q_{n-1}, q_{n-1} \rangle < \langle p_n, p_n \rangle$$

$$\Downarrow$$

$$\langle q_{n-1}, q_{n-1} \rangle < 0 \quad \lightning$$