

### Zad 3.

wtorek, 17 stycznia 2023 13:34

3. *Topologiczne porządkowanie wierzchołków.* Niech  $G$  będzie digrafem acyklicznym (bez skierowanych cykli). Napisz procedurę, która w czasie  $O(n+m)$  przyporządkowuje numery wierzchołkom w taki sposób, że gdy  $(i, j)$  jest łukiem w  $G$ , to  $i < j$ .

korzystamy z faktu, że w acyklicznym digrafie zawsze istnieje wierzchołek  $u$  t.je  $\text{indeg}(u) = 0$ , oraz, że usunięcie z digrafu wierzchołka wraz z krawędziami do niego incydentnymi nie może spowodować pojawienia się cyklu.

algorytm:

```
vector<int> graph[N];
vector<int> indeg(N, 0);

vector<int> sorted(N, -1);
// indeksy wierzchołków w tej tablicy wyznaczają ich etykiety po posortowaniu topologicznym

vector<int> visited(N, false);

// O(n + m)
// obliczamy indeg każdego wierzchołka w grafie
void dfs(int u) {
    visited[u] = true;
    for (int v : graph[u]) {
        indeg[v]++;
        if (!visited[v]) dfs(v);
    }
}

int main() {
    queue<int> q;
    dfs(0); // obliczamy indeg(u) dla każdego wierzchołka

    // O(n)
    for (int u = 0; u < N; u++) {
        if (indeg[u] == 0) q.push(u);
    } // zbieramy na kolejke wierzchołki o indeg(u) = 0

    // O(n + m)
    int ind = 0;
    while (!q.empty()) {
        /* zdejmujemy u z kolejki i ustawiamy go na swoim miejscu
        w posortowanej liście wierzchołków */
        int u = q.front(); q.pop();
        sorted[ind] = u; ind++;
        // O(outdeg(u))
        for (int v : graph[u]) {
            indeg[v]--; // usuwamy krawędzie wychodzące z u
            if (indeg[v] == 0) q.push(v);
            // jeżeli v jest nowym wierzchołkiem o indeg = 0 to wrzucamy go do kolejki
        }
    }
}
```

ta pętla wykona  $n$  obrotów, bo po zdjęciu wierzchołka z kolejki już nigdy na nią nie wróci

złożoność  $O(n+m)$  ✓

i po posortowaniu topologicznym powinien on być przed każdym innym wierzchołkiem

usuwamy po kolei z grafu wierzchołki o  $\text{indeg} = 0$

ta pętla wykona się łącznie (w ciągu  $n$  obrotów while'a)  $n$  razy, stąd  $O(n+m)$