Zad 7.

poniedziałek, 9 stycznia 2023 19:34

M10.7. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Niech $f \in C^4[a,b]$. Obliczamy wartość całki $I(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ za pomocą kwadratury *Newtona-Cotesa* dla $n = 3$. Udowodnić, że istnieje taka liczba $\xi \in [a,b]$, dla której

$$I(f) - Q_3^{NC}(f) = -\frac{3f^{(4)}(\xi)}{80}h^5 \qquad (h := (b-a)/3).$$

Twierdzenie

Reszta R_n kwadratury Newtona-Cotesa wyraża się wzorem

$$R_n(f) = \begin{cases} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\int_a^b \omega(x)\mathrm{d}x & (n = 1,3,\ldots), \\ \frac{f^{(n+2)}(\eta)}{(n+2)!}\int_a^b x\,\omega(x)\mathrm{d}x & (n = 2,4,\ldots), \end{cases} \tag{6}$$

gdzie $\xi, \eta \in (a,b)$.

tym razem to

$$R_3(f) = \frac{f^{(4)}(\eta)}{4!} \cdot \int_a^b (x-a)(x-x_1)(x-x_2)(x-b)\,dx$$

$\int_a^b \omega(x) =$ identyczne podstawienie jak w M10.6 $= h^5 \int_0^3 t(t-1)(t-2)(t-3)\,dt =$

$$= h^5 \int_0^3 [(t^2-t)(t^2-5t+6)]\,dt = h^5 \int_0^3 [t^4-5t^3+6t^2-t^3+5t^2-6t]\,dt =$$

$$= h^5 \int_0^3 t^4-6t^3+11t^2-6t\,dt = h^5\left[\frac{3^5}{5} - \frac{6\cdot 3^4}{4} + \frac{11\cdot 3^3}{3} - \frac{6\cdot 3^2}{2}\right] =$$

$$= h^5\left(\frac{243}{5} - \frac{3\cdot 81}{2} + 11\cdot 9 - 27\right) = \underbrace{h^5\cdot\left(-\frac{9}{10}\right)}$$

$$99 - 27 = 72 = \frac{720}{10}$$

$$\frac{243}{5} - \frac{243}{2} = \frac{486}{10} - \frac{1215}{10}$$

$$\begin{array}{r} 243 \\ \cdot\ 5 \\ \hline 1215 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 720 \\ +486 \\ \hline 1206 \end{array} \qquad 1206 - 1215 = -9$$

- $$R_3(f) = -\frac{f^{(4)}(\eta)}{4!}h^5 \cdot \frac{9}{10} = -\frac{3f^{(4)}(\eta)}{80} \quad \square$$