Zad 6.

środa, 9 listopada 2022 23:43

6. Pokaż, że

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} F_2 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Skonstruuj algorytm który dla danych $p_1, \ldots, p_k, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ wylicza szybko a_n zadane zależnością rekurencyjną $a_n = p_1 a_{n-1} + p_2 a_{n-2} + \cdots + p_k a_{n-k}$.

Z zad. 5

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} F_2 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} + F_n \\ F_n + F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{pmatrix} \qquad \square$$

przepisując rekurencję na postać macierzową:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_{k-1} & p_k \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=: M} \underbrace{\begin{pmatrix} a_k \\ \vdots \\ a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}}_{=: V_0} = \begin{pmatrix} a_{k+1} \\ \vdots \\ a_3 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

czyli

$$\begin{pmatrix} a_n \\ \vdots \end{pmatrix} = M^{n-k} V_0$$

no i teraz wystarczy napisać szybkie potęgowanie na macierzach