Zad 6.

sobota, 17 grudnia 2022 13:56

6. Przez Q_k oznaczamy graf k-wymiarowej kostki, tj. wierzchołkami w Q_k są wszystkie k-elementowe ciągi zer i jedynek, oraz dwa wierzchołki są sąsiednie wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im ciągi różnią się dokładnie jedną współrzędną. Wykaż, że $n(Q_k) = 2^k$ i $m(Q_k) = k2^{k-1}$. Udowodnij, że Q_k jest grafem dwudzielnym.

1) k-elementowych ciągów zero jedynkowych jest 2^k, stąd $n(Q_k) = 2^k$.

2) dla każdego z 2^k ciągów istnieje k ciągów różniących się od niego jedną współrzędną. ← wybieramy po prostu która ma być inna

Żeby nie liczyć krawędzi podwójnie to trzeba jeszcze podzielić przez 2, stąd

$$m(Q_k) = k \cdot 2^k \cdot \frac{1}{2} = k \cdot 2^{k-1}$$

3) graf dwudzielny <=> wszystkie cykle długości parzystej

Łatwo zauważyć, że przechodząc z jednego wierzchołka do drugiego defacto wykonujemy negacje na jednej ze współrzędnych ciągu znajdującego się w wierzchołku z którego zaczynamy. Żeby ponownie otrzymać startowy ciąg, musimy zanegować wszystkie zanegowane ~~bity~~ drugi raz, co daje parzystą ilość negacji => parzystą ilość przejść.

Każdy dowolny cykl jest zatem cyklem parzystej długości, czyli graf jest dwudzielny