

### Zad 3.

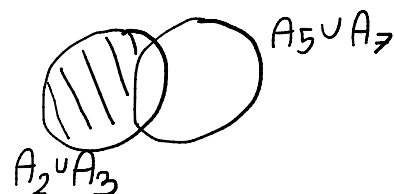
poniedziałek, 28 listopada 2022 20:47

3. Oblicz, ile jest liczb naturalnych między 1 i  $n$  (włącznie z tymi liczbami), które są podzielne przez 2 lub 3 ale nie dzielą się ani przez 5 ani przez 7.

Niech  $A_i := \{k \in \mathbb{N} \mid k \in [1, n] \wedge k \equiv 0 \pmod{i}\}$ .  
Wtedy  $|A_i| = \lfloor \frac{n}{i} \rfloor$ . Chcemy obliczyć moc zbioru

$$(A_2 \cup A_3) \setminus (A_5 \cup A_7)$$

wczyby podzielne przez 2 lub 3 ale  
niepodzielne ani przez 5 ani 7



czyli liczymy  $|(A_2 \cup A_3) \setminus (A_5 \cup A_7)| =: X$   
z zasady włączeń i wyłączeń mamy

$$|A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7| = |A_2| + |A_3| + |A_5| + |A_7|$$

$$- |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_5| - |A_2 \cap A_7|$$

$$- |A_3 \cap A_5| - |A_3 \cap A_7| - |A_5 \cap A_7|$$

$$+ |A_2 \cap A_3 \cap A_5| + |A_2 \cap A_3 \cap A_7|$$

$$+ |A_3 \cap A_5 \cap A_7| + |A_2 \cap A_5 \cap A_7| - |A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_7| =$$

$$= \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + \lfloor \frac{n}{5} \rfloor + \lfloor \frac{n}{7} \rfloor - \lfloor \frac{n}{6} \rfloor - \lfloor \frac{n}{10} \rfloor - \lfloor \frac{n}{14} \rfloor$$

$$- \lfloor \frac{n}{15} \rfloor - \lfloor \frac{n}{21} \rfloor - \lfloor \frac{n}{35} \rfloor + \lfloor \frac{n}{30} \rfloor + \lfloor \frac{n}{42} \rfloor$$

$$+ \lfloor \frac{n}{105} \rfloor + \lfloor \frac{n}{70} \rfloor - \lfloor \frac{n}{210} \rfloor$$

$$\text{oraz } |A_5 \cup A_7| = \lfloor \frac{n}{5} \rfloor + \lfloor \frac{n}{7} \rfloor - \lfloor \frac{n}{35} \rfloor$$

$$X = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + \cancel{\lfloor \frac{n}{5} \rfloor} + \cancel{\lfloor \frac{n}{7} \rfloor} - \lfloor \frac{n}{6} \rfloor - \lfloor \frac{n}{10} \rfloor - \lfloor \frac{n}{14} \rfloor$$

$$- \lfloor \frac{n}{15} \rfloor - \lfloor \frac{n}{21} \rfloor - \cancel{\lfloor \frac{n}{35} \rfloor} + \lfloor \frac{n}{30} \rfloor + \lfloor \frac{n}{42} \rfloor$$

$$-\lfloor \frac{n}{15} \rfloor - \lfloor \frac{n}{21} \rfloor - \cancel{\lfloor \frac{n}{35} \rfloor} + \lfloor \frac{n}{30} \rfloor + \lfloor \frac{n}{12} \rfloor$$

$$+ \lfloor \frac{n}{105} \rfloor - \lfloor \frac{n}{210} \rfloor + \lfloor \frac{n}{70} \rfloor + \cancel{\lfloor \frac{n}{35} \rfloor} - \cancel{\lfloor \frac{n}{5} \rfloor} - \cancel{\lfloor \frac{n}{7} \rfloor}$$