Zad 9

poniedziałek, 24 października 2022 12:08

M3.9. $\boxed{\text{1 punkt}}$ *Metoda Halleya* rozwiązywania równania $f(x) = 0$ korzysta ze wzoru iteracyjnego

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)\,f(x_n)'}{(f(x_n)')^2 - (f(x_n)f(x_n)'')/2}.$$

Wykazać, że jest to metoda równoważna metodzie Newtona zastosowanej do funkcji $f/\sqrt{f'}$.

Kolejne przybliżenia są dane rekurencyjnym wzorem:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

metoda Newtona dla $g(x)$:

$$g(x) := \frac{f(x)}{\sqrt{f'(x)}} \qquad x_{k+1} = x_k - \frac{g(x_k)}{g'(x_k)}$$

$$g'(x) = \frac{f'(x)\sqrt{f'(x)} - f(x)\cdot\frac{f''(x)}{2\sqrt{f'(x)}}}{f'(x)} =$$

$$= \frac{f'(x)\sqrt{f'(x)} - \frac{f(x)f''(x)}{2\sqrt{f'(x)}}}{f'(x)} = \frac{f'(x)\sqrt{f'(x)}\cdot 2\sqrt{f'(x)} - f(x)f''(x)}{2\sqrt{f'(x)}\cdot f'(x)} =$$

$$= \frac{2(f'(x))^2 - f(x)\cdot f''(x)}{2\sqrt{f'(x)}\cdot f'(x)}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\frac{f(x)}{\sqrt{f'(x)}}}{\frac{2(f'(x))^2 - f(x)\cdot f''(x)}{2\sqrt{f'(x)}\cdot f'(x)}} =$$

$$= x_k - \frac{f(x)\cdot 2\cancel{\sqrt{f'(x)}}\cdot f'(x)}{\cancel{\sqrt{f'(x)}}\left[2(f'(x))^2 - f(x)\cdot f''(x)\right]} =$$

$$= x_k - \frac{2f(x)f'(x)}{\dots} = x_k - \frac{f(x)f'(x)}{[f'(x)]^2 \quad f(x)f''(x)}$$

$$= x_k - \frac{2f(x)f'(x)}{2f'(x)^2 - f(x)f''(x)} = x_k - \frac{f(x)f'(x)}{[f'(x)]^2 - \frac{f(x)f''(x)}{2}}$$

c.b.d.o

□