Zad 3.

środa, 19 kwietnia 2023 16:04

Zadanie 3. Stosując twierdzenie Picarda-Lindelöfa dla podanych niżej zagadnień Cauchy'ego udowodnij, że rozwiązanie $y = y(t)$ istnieje na zadanym przedziale:

a) $y' = y^2 + \cos t^2$, $y(0) = 0$, $0 \le t \le \frac{1}{2}$,

b) $y' = 1 + y + y^2 \cos t$, $y(0) = 0$, $0 \le t \le \frac{1}{3}$.

a) $t_0 = 0 \quad \alpha = \frac{1}{2} = \min\{a, \frac{b}{M}\}$ $\quad \frac{b}{M} \geqslant \frac{1}{2}$

Niech $R = \{(t,y): 0 \le t \le \frac{1}{2}, |y| \le \underbrace{1}_{}\}$

$$M = \max_{(t,y)\in R} |y^2 + \cos t^2| = 1 + 1 = 2 \, [(t,y) = (0,1)]$$

$$\frac{b}{M} = \frac{1}{2} \wedge a = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

z (P-L) rozwiązanie istnieje na $[0, \frac{1}{2}]$ $\square$

b) $t_0 = 0 \quad \alpha = \frac{1}{3}$

$f(t,y) = 1 + y + y^2 \cos t$ $\quad$ do zgadnięcia

$R = \{(t,y): 0 \le t \le \frac{1}{3}, |y| \le \underbrace{1}_{}\}$

$$M = \max_{(t,y)\in R} |1 + y + y^2 \cos t| = 3 \, [(t,y) = (0,1)]$$

znowu teza z (P-L) $\square$