Zad 4

poniedziałek, 21 listopada 2022 22:14

4. Załóżmy, że $f : A \to B$ jest bijekcją, $\circ$ jest działaniem na zbiorze A i $*$ jest działaniem indukowanym w zbiorze B przez działanie $\circ$ poprzez funkcję f. Udowodnić, że:

(i) jeśli $\circ$ jest przemienne, to $*$ jest przemienne (na wykładzie był dowód analogicznego faktu dla łączności);

(ii) jeśli $\circ$ ma element neutralny w A, to $*$ ma element neutralny w B;

(iii) jeśli $(A, \circ)$ jest grupą, to $(B, *)$ jest grupą.

(i) $a, b \in B$

$$a * b = f\left(f^{-1}(a) \circ f^{-1}(b)\right) = f\left(f^{-1}(b) \circ f^{-1}(a)\right) =$$
$$= b * a \quad \square$$

(ii) $e_A, a \in A$

$a = a \circ e_A$, $f(a) \in B$

$$f(a) = f(a \circ e_A) = f\left(f^{-1}(f(a)) \circ f^{-1}(f(e_A))\right) =$$
$$= f(a) * f(e_A)$$ czyli $f(e_A)$ jest elementem neutralnym w B (prawostronnym)

[rozumowanie analogiczne dla lewostronnego]

(iii) 1° łączność

$a, b, c \in B$

$$(a * b) * c = f\left(f^{-1}(a) \circ f^{-1}(b)\right) * c =$$
$$= f\left(f^{-1}\left[f(f^{-1}(a) \circ f^{-1}(b))\right] \circ f^{-1}(c)\right) =$$

$$= f\left(f^{-1}\left[f(f^{-1}(a) \circ f^{-1}(b))\right] \circ f^{-1}(c)\right) =$$

$$= f\left(\left[f^{-1}(a) \circ f^{-1}(b)\right] \circ f^{-1}(c)\right) =$$

$$= f\left(f^{-1}(a) \circ \left[f^{-1}(b) \circ f^{-1}(c)\right]\right) =$$

$$= f\left(f^{-1}(a) \circ f^{-1}\left(f\left(f^{-1}(b) \circ f^{-1}(c)\right)\right)\right) = a * (b * c) \quad \square$$

2° element neutralny z (ii)

3° $a \in A$, $a^{-1} \in A$ el. odwrotny do a (bo $(A, \circ)$ grupa)

$$f(e_A) = f(a \circ a^{-1}) = f\left(f^{-1}(f(a)) \circ f^{-1}(f(a^{-1}))\right) =$$

$$= f(a) * f(a^{-1}) = e_B$$

czyli $f(a^{-1})$ odwrotny do $f(a)$

(a f jest bijekcją, więc każde $b \in B$ ma element odwrotny)

czyli $(B, *)$ grupa