# Zad 8.

wtorek, 10 stycznia 2023 14:24

8. *Turniejem* nazywamy graf skierowany, którego każde dwa wierzchołki są połączone dokładnie jednym łukiem. Pokaż, że w każdym turnieju istnieje wierzchołek, z którego można dojść do każdego innego po drodze skierowanej długości co najwyżej 2 do każdego innego.

Weźmy $u \in V(G)$ t. że $outdeg(u) = \max_{v \in V(G)} [outdeg(v)]$.

(i tym samym $indeg(u) \geq 1$)

Jeżeli $outdeg(u) = n-1$ $(n = |V(G)|)$, to z $u$ da się przejść do każdego wierzchołka drogą długości 1. Załóżmy zatem, że $outdeg(u) < n-1$.

Weźmy $v \in V(G)$ t. że $(v,u) \in E(G)$ (taki napewno istnieje, bo każde dwa wierzchołki są połączone łukiem i założyliśmy, że $u$ ma jakieś krawędzie do niego wchodzące).

Nie wprost, droga skierowana z $u$ do $v$ dłuższa niż 2.

Wtedy $\forall w \in V(G)$ $(u,w) \in E(G) \Rightarrow (w,v) \notin E(G)$.

Równoważnie $\forall w \in V(G)$ $(u,w) \in E(G) \Rightarrow (v,w) \in E(G)$, bo każde dwa wierzchołki połączone łukiem.

Widać zatem, że $outdeg(v) \geq outdeg(u) + 1$, ale przecież $outdeg(u) = \max_{x \in V(G)} [outdeg(x)]$

$\lightning$