Zad 4.

czwartek, 27 października 2022 22:20

M1.4. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Dla danych: naturalnej liczby t oraz niezerowej liczby rzeczywistej $x = s\,m\,2^c$, gdzie s jest znakiem liczby x, c – liczbą całkowitą, a m – liczbą z przedziału $[1, 2)$, o rozwinięciu dwójkowym $m = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} e_{-k}2^{-k}$, w którym $e_{-k} \in \{0, 1\}$ dla $k \geqslant 1$, definiujemy *zaokrąglenie liczby x* do $t+1$ cyfr za pomocą wzoru

$$\mathrm{rd}\,(x) := s\,\bar{m}\,2^c,$$

gdzie $\bar{m} = 1 + \sum_{k=1}^{t} e_{-k}2^{-k} + e_{-t-1}2^{-t}$.
Wykazać, że

$$|\mathrm{rd}\,(x) - x| \leqslant 2^c\mathsf{u},$$

gdzie $\mathsf{u} := 2^{-t-1}$ jest *precyzją arytmetyki.*
Wywnioskować stąd, że błąd względny zaokrąglenia liczby x nie przekracza precyzji arytmetyki u.

$$|rd(x) - x| = |s\bar{m}2^c - sm2^c| =$$

$$= 2^c \left| \sum_{k=1}^{t} e_{-k}2^{-k} + e_{-t-1}2^{-t} + 1 - \left(\sum_{k=1}^{\infty} e_{-k}2^{-k} + 1\right) \right| =$$

$$= 2^c \left| \sum_{k=t+1}^{\infty} e_{-k}2^{-k} - e_{-(t+1)}2^{-t} \right| =$$

$$= 2^c \left| \sum_{k=t+2}^{\infty} e_{-k}2^{-k} - \frac{1}{2^{t+1}} e_{-(t+1)} \right| =$$

uwaga tutaj

$$= 2^c \left| e_{-(t+1)} \cdot 2^{-(t+1)} - \sum_{k=t+2}^{\infty} e_{-k}2^{-k} \right| \leq 2^c \left| e_{-(t+1)} \cdot 2^{-(t+1)} \right| \leq$$

$$2^c \cdot 1 \cdot 2^{-(t+1)} \quad \square$$

b) $$\frac{|rd(x) - x|}{|x|} \leq \frac{2^c \cdot 2^{-(t+1)}}{|x|} \underset{(1)}{\leq} \frac{2^c \cdot 2^{-(t+1)}}{|2^c|} = u \quad \square$$

(1) gdyby nie, to $|x| < |2^c|$

$$|x| < |2^c| \leq |m2^c| \leq |sm2^c|$$ a przecież $x = sm2^c$