Zad 4

niedziela, 20 listopada 2022 23:37

4. Udowodnij następujące stwierdzenia za pomocą zasady szufladkowej

   (a) W turnieju każda drużyna gra z każdą inną dokładnie raz. W każdym momencie trwania turnieju istnieją dwie drużyny, które rozegrały tyle samo meczów.

   (b) Wśród pięciu punktów wybranych w trójkącie równobocznym o boku 1, istnieje przynajmniej jedna para punktów odległych od siebie o co najwyżej $\frac{1}{2}$.

   (c) Każdy wielościan wypukły zawiera przynajmniej dwie ściany o tej samej liczbie krawędzi.

(a) x_i - ilość gier rozegranych przez i-tą drużynę

jakieś dwie zagrały tyle samo

1° $\exists x_i = 0$

1.1° $\exists j \neq i$ $x_j = 0$ $\to$ teza zachodzi

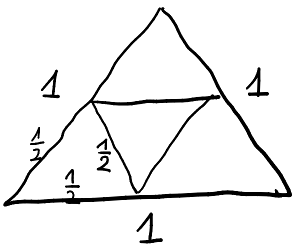
1.2° $\forall j \neq i$ $x_j \neq 0 \Rightarrow 1 \leq x_j \leq n-2$. $n-2-1+1 = n-2$ szufladek, $n-1$ drużyn

2° $\forall x_i \neq 0$

wtedy $1 \leq x_i \leq n-1$ znowu $n-1$ szufladek, n drużyn

$\square$

(b)



dzielimy trójkąt na 4 trójkąty równoboczne.
z zasady szufladkowej dwa z pięciu wybranych punktów są w jednym z takich małych trójkątów

skoro bok trójkąta wynosi $\frac{1}{2}$ to odległość pomiędzy tymi punktami nie przekracza $\frac{1}{2}$ $\square$

(c) szufladki $\to$ ilość krawędzi ściany

n - ilość ścian w wielościanie, $n \geq 3$

a_i - ilość krawędzi i-tej ściany

$3 \leq a_i \leq n$ dla $i = 1, \ldots, n$

zatem $n-3+1 = n-2$ szufladek

$\Downarrow$

w jednej z nich conajmniej dwie ściany $\square$