Zad 2.

poniedziałek, 16 stycznia 2023 19:56

M11.2. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wykazać, że dla każdej funkcji $f \in C[a,b]$ ciąg kwadratur Gaussa $\{G_n(f)\}$ jest przy $n \to \infty$ zbieżny do całki $\int_a^b p(x) f(x)\, dx$.

z tw. Weierstrassa o aproksymacji

$f \in C[a,b] \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists k \in \mathbb{N} \ \forall x \in [a,b] \ |f(x) - \omega_k(x)| < \varepsilon \ (\omega_k \in \Pi_k)$

dla $n > k$ mamy $\int_a^b p(x) \omega_k(x) = \sum_{i=0}^{n} A_i \omega_k(x_i)$

(kwadratura Gaussa jest dokładna dla Π_{n-1})

dalej

$$\left| \int_a^b p(x) f(x)\, dx - \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) \right| = \left| \int_a^b p(x) f(x) dx - \int_a^b p(x) \omega_k(x) dx \right|$$

$$+ \left| \sum_{i=0}^{n} A_i \omega_k(x_i) - \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) \right| =$$

$$= \left| \int_a^b p(x) [f(x) - \omega_k(x)] \right| + \left| \sum_{i=0}^{n} A_i [\omega_k(x_i) - f(x_i)] \right| \leq$$

$$\leq \int_a^b p(x) \cdot |f(x) - \omega_k(x)| + \sum_{i=0}^{n} A_i \cdot |f(x_i) - \omega_k(x_i)|$$

$$\leq \varepsilon \int_a^b p(x)\, dx + \varepsilon \cdot \sum_{i=0}^{n} A_i \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$$

$\square$