Zad 3.

poniedziałek, 5 grudnia 2022 23:31

3. Znajdź wzór na liczbę ciągów długości $2n$, w których każda liczba ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ występuje dokładnie dwa razy i takich, że sąsiednie liczby są różne.

A_i - zbiór takich rozłożeń, że 2 takie same liczby i są obok siebie

wszystkich rozłożeń jest $\frac{(2n)!}{2^n}$ ← wszystkie permutacje

dzielimy, bo liczymy podwójnie rozłożenia gdzie te same liczby zamieniamy miejscami

mamy

$$\forall i \; |A_i| = \frac{[2(n-1)]!}{2^{n-1}} \cdot (2n-1) = \frac{(2n-1)!}{2^{n-1}}$$

sklejoną parę wstawiamy na początku, końcu lub gdzieś w środku

$$\forall i \neq j \; |A_i \cap A_j| = \frac{[2(n-2)]!}{2^{n-2}} (2n-3)(2n-2) = \frac{(2n-2)!}{2^{n-2}}$$

analogicznie

po wstawieniu pierwszej pary mamy więcej miejsc do wstawiania

itp. aż

$$|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n| = \frac{n!}{2^0} = n! \text{ ustawień}$$

z zasady włączeń i wyłączeń

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n+1} \frac{(2n-i)!}{2^{n-i}}$$

więc wynikiem jest

$$\frac{(2n)!}{2^n} - \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n+1} \frac{(2n-i)!}{2^{n-i}}$$