Zad 1.

niedziela, 8 stycznia 2023 23:57

M10.1. $\boxed{\text{1,5 punktu}}$ Udowodnić, że wielomiany Czebyszewa spełniają tożsamość

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)\,dx = \begin{cases} 0, & n \text{ nieparzyste}, \\ \dfrac{2}{1-n^2}, & n \text{ parzyste}. \end{cases}$$

- dla n nieparzystego T_n jest funkcją nieparzystą, zatem z twierdzenia pudzianowskiego

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)\,dx = 0$$

- dla n parzystego

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \cos(n\cdot \arccos(x))\,dx = \left| \begin{matrix} t = \arccos(x) \\ x = \cos t \\ dx = -\sin t\, dt \end{matrix} \right|$$

$$= \int_0^{\pi} \cos(n\cdot t)\sin t\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin[t(n+1)] + \sin[-t(n-1)]\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin[t(n+1)] - \sin[t(n-1)]\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-\cos[t(n+1)]}{n+1} - \frac{-\cos[t(n-1)]}{n-1}\right]\Bigg|_{t=0}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-\cos[\pi(n+1)]}{n+1} + \frac{\cos[\pi(n-1)]}{n-1} + \frac{\cos 0}{n+1} - \frac{\cos 0}{n-1}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1} + \frac{2}{1-n^2}\right] =$$

$$= \frac{2}{1-n^2}$$

$\square$

- $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$

$$\left[\begin{cases} \frac{x+y}{2} = t \\ \frac{x-y}{2} = nt \end{cases} \quad \begin{cases} x+y = 2t \\ x-y = 2nt \end{cases} \\ 2x = 2t(n+1) \\ \begin{cases} x = t(n+1) \\ y = 2t - t(n+1) = -t(n-1) \end{cases}\right]$$

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1} = \frac{n-1-n-1}{n^2-1} = \frac{2}{1-n^2}$$

$\because \cos[(2k+1)\pi] = -1$