Zad 6.

środa, 19 kwietnia 2023 16:47

Zadanie 6. Stosując lemat Gronwalla udowodnij, że $y(t) = -1$ jest jedynym rozwiązaniem zagadnienia $y' = t(1+y)$, $y(0) = -1$.

załóżmy, że istnieje inne rozw. $\tilde{y}(t)$

$r(t) = \tilde{y}(t) - y(t) = \tilde{y}(t) + 1$ dowolne T

1) $r(t)$ nieujemna na $[0,T]$, bo $y' \geq 0$ na $[0,T]$, więc dowolne rozw. startuje w -1 i rośnie, stąd $\tilde{y}(t) + 1 \geq 0$

2) $r(t) \overset{?}{\leq} L\int_0^t r(s)\,ds$, $L > 0$

$\tilde{y}(t)$ musi spełniać równanie całkowe

$$\tilde{y}(t) = \tilde{y}(0) + \int_0^t s(1+\tilde{y})\,ds$$

podobnie z $y(t)$

$$r(t) = \tilde{y}(t) + 1 = \tilde{y}(t) - y(t) = -1 + \int_0^t s(1+\tilde{y})\,ds + 1 - \int_0^t s(1+y)\,ds =$$

$$= \int_0^t s(1+\tilde{y}) - s(1+y)\,ds =$$

$$= \int_0^t s(\tilde{y} - y)\,ds = \int_0^t s\,r(s)\,ds \leq$$

$$\leq T\int_0^t r(s)$$

z Lematu Gronwalla $r(t) = 0$ $\forall t$ $[0,\infty)$

czyli $\tilde{y} \equiv y$ $\square$