Zad 8.

niedziela, 18 grudnia 2022 23:40

$n \geq 2$

8. Udowodnij, że w dwudzielnym grafie o n wierzchołkach, liczba krawędzi jest równa co najwyżej $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$.

$G(V,E)$

Niech $V_1 \subseteq V$, $V_2 \subseteq V$, $V_1 \cup V_2 = V$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, t. że $\forall u,v \in V_1$ $\{u,v\} \notin V$ (analogicznie dla V_2). ← takie V_1, V_2 istnieją z racji, że $G(V,E)$ dwudzielny

Oznaczmy $|V_1| = k$. wtedy $|V_2| = n-k$.

Maksymalną ilością krawędzi w takim dwudzielnym grafie jest wtedy $k(n-k)$ [każdy wierzchołek z V_1 łączymy z wierzchołkiem z V_2]

optymalizując dla k otrzymujemy

$f(k) = k(n-k) = -k^2 + nk$

$f'(k) = -2k + n$

$-2k + n = 0 \Rightarrow k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ (bo $k \in \mathbb{N}_{>0}$)

mamy zatem $f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor (n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lceil \frac{n}{2} \rceil$

dla n parzystego $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lceil \frac{n}{2} \rceil = (\frac{n}{2})^2 = \frac{n^2}{4} = \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$

dla n nieparzystego $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lceil \frac{n}{2} \rceil = \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n+1}{2} = \frac{n^2-1}{4} = \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$

zatem max. liczba krawędzi faktycznie wynosi $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ $\square$

$n = 2k + 1$ $\quad k \in \mathbb{Z}$

$n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2+k) + 1$

$4(k^2+k) + 1 - 1 = 4(k^2+k)$

$4 \mid k^2 + k$ stąd $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor = \frac{n^2-1}{4}$