Zad 5

wtorek, 25 października 2022 10:32

$f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$ $x \in \mathbb{R}$

$f(\alpha) = 0$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

1) $$0 = f(\alpha) = f(x_n) + \frac{f'(x_n)}{1!}(\alpha - x_n) + \frac{f''(\varepsilon_n)}{2!}(\alpha - x_n)^2$$

$$0 = f(x_n) - f'(x_n)(x_n - \alpha) + \frac{1}{2} f''(x_n)(x_n - \alpha)^2$$

$$f'(x_n)(x_n - \alpha) - f(x_n) = \frac{1}{2} f''(\varepsilon_n)(x_n - \alpha)^2$$

$$(x_{n+1} - \alpha) = (x_n - \alpha) - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{1}{2} \frac{f''(\varepsilon_n)(x_n - \alpha)^2}{f'(x_n)}$$

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{1}{2} \frac{f''(\varepsilon_n)}{f'(x_n)} (x_n - \alpha)^2 \geq 0$$

czyli $\underbrace{\varepsilon_{n+1} \geq 0}_{}$ $\Rightarrow$ $\underbrace{x_n \geq \alpha}_{}$, $n \geq 1$

błędy są nieujemne

$x_{n+1} - \alpha \geq 0$

wszystkie x_n na prawo od α

2) $$x_{n+1} = x_n - \underbrace{\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}_{>0}$$

zatem $x_{n+1} < x_n$

podobnie $\varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n$

3) ciągi ε_n oraz x_n są malejące i ograniczone z dołu odpowiednio przez 0 i α

więc $\lim_{n \to \infty} \varepsilon_n = \varepsilon$ oraz $\lim_{n \to \infty} x_n = x$

(granice istnieją)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} - \alpha = x_n - \alpha - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$\varepsilon = \varepsilon - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$\frac{f(x)}{f'(x)} = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \,, \quad x = \alpha$$

x musi być równy α
z jedyności pierwiastka $f(x)$
(bo $f(x)$ stale rośnie)

α jest jedynym pierwiastkiem
i jest pojedynczym pierwiastkiem