Zad 8.

niedziela, 18 czerwca 2023 21:54

$u_t = u_{xx}$

Zadanie 8. Rozważamy równanie ciepła na odcinku $(0, \ell)$ z warunkami brzegowymi typu Robina, tzn.

$$\begin{cases} u_x(0,t) - a_0 u(0,t) = 0, \\ u_x(\ell,t) + a_\ell u(\ell,t) = 0. \end{cases}$$

$u_x(0,t) = a_0 u(0,t)$

$u_x(l,t) = -a_l(l,t)$

Udowodnij używając metody energetycznej, że jeżli $a_0 > 0$ i $a_\ell > 0$, to $\int_0^\ell u^2(x,t)\, dx$ maleje jako funkcja t.

$$\frac{d}{dt}\int_0^l u^2(x,t)\,dx = \int_0^l 2u(x,t)\cdot u_t(x,t)\,dx =$$

$$= 2\int_0^l u u_{xx}(x,t)\,dx =$$

$$= 2\left(-\int_0^l u_x^2(x,t)\,dx + u u_x \Big|_{x=0}^{x=l}\right) =$$

$$= 2\left(-\int_0^l u_x^2(x,t)\,dx + u(l,t)\cdot u_x(l,t) - u(0,t)u_x(0,t)\right) =$$

$$= -2\int_0^l u_x^2\,dx + 2\left(-a_l u^2(l,t) - a_0 u^2(0,t)\right) =$$

$$= \underbrace{-2\int_0^l u_x^2\,dx}_{\leq 0} \underbrace{-2a_l u^2(l,t)}_{\leq 0} \underbrace{-2a_0 u^2(0,t)}_{\leq 0} < 0$$

$\square$