Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Blok 1: lista M 4

3 listopada 2022 r.

M4.1. $\boxed{\text{1,5 punktu}}$ Zaproponować schemat Hornera do obliczania wartości $p(z_0), p'(z_0), p''(z_0)$ i $p'''(z_0)$, gdzie $p(z)$ jest danym wielomianem o współczynnikach $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

M4.2. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wyprowadzić wzory na metodę Newtona w dziedzinie liczb zespolonych dla funkcji

$$f(z) = f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y).$$

Załóżmy, że przybliżenie początkowe, to liczba zespolona $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$, gdzie $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. Wyprowadzić wzory na kolejne przybliżenia $z_k = x_k + \mathrm{i}y_k$, w których wykonywane są operacje arytmetyczne tylko na liczbach rzeczywistych.

M4.3. $\boxed{\text{1,5 punktu}}$ Niech α będzie podwójnym zerem funkcji f, czyli niech $0 = f(\alpha) = f'(\alpha) \neq f''(\alpha)$. Wykazać, że metoda Newtona jest wówczas (lokalnie?) zbieżna liniowo.

M4.4. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech α będzie punktem stałym przekształcenia $\phi \in C^{p+1}(\mathcal{J})$, gdzie $\mathcal{J} \coloneqq (\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ jest pewnym otoczeniem punktu α oraz $p \geqslant 1$. Udowodnić, że jeśli $\phi^{(i)}(\alpha) = 0$ dla $i = 1, 2, \ldots, p$ oraz $\phi^{(p+1)}(\alpha) \neq 0$, to metoda iteracyjna

$$x_{k+1} = \phi(x_k)$$

jest metodą rzędu $p + 1$ oraz

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^{p+1}} = \frac{\phi^{(p+1)}(\alpha)}{(p + 1)!}.$$

M4.5. $\boxed{\text{1,5 punktu}}$ Rozważmy wielomian $p(z)$ o współczynnikach rzeczywistych $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Niech pierwiastki czynnika kwadratowego $z^2 - uz - v$ będą pojedynczymi pierwiastkami wielomianu p. Udowodnić, że wówczas w metodzie Bairstowa jakobian w punkcie (u, v) jest różny od zera.

M4.6. $\boxed{\text{1,5 punktu}}$ $\boxed{\text{Włącz komputer}}$ Rozważmy wielomian

$$w(z) = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + 5z^4.$$

Zastosować metodę Bairstowa do znalezienia wszystkich pierwiastków wielomianu w. Za przybliżenia początkowe należy przyjąć $u = 0.1$ i $v = 0.1$, a następnie wykonać maksymalnie 10 iteracji w arytmetyce 128 bitowej. Podać uzyskane czynniki kwadratowe, w postaci $z^2 - uz - v$, przez które dzieli się wielomian w. Podać przybliżenia otrzymanych pierwiastków z dokładnością do 16 cyfr dziesiętnych. Porównać otrzymane wyniki z tym, co daje metoda `roots` z pakietu `Polynomials` albo z metodami z pakietu `PolynomialRoots`.

M4.7. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Rozważyć uogólnienie metody siecznych, w którym do wyznaczenia przybliżenia x_{k+1} korzysta się z trzech poprzednich przybliżeń x_k, x_{k-1}, x_{k-2}. Wyprowadzić wzory na metodę iteracyjną korzystającą z odwrotnej interpolacji (wielomianem st. $\leqslant 2$).
Wskazówka: odwrotna interpolacja oznacza tyle, że zmienia się znaczenie osi $Ox \leftrightarrow Oy$.

M4.8. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Zaprogramować w języku Julia metodę Steffensena

$$c_{n+1} = c_n - \frac{[f(c_n)]^2}{f[c_n + f(c_n)] - f(c_n)},$$

a następnie zastosować ją do znalezienia pierwiastka równania

$$e^{-x} - \sin x = 0.$$

Zastosować arytmetykę wysokiej precyzji (np. $t \geqslant 128$), aby móc podać eksperymentalną wartość wykładnika zbieżności (lokalnej?) tej metody.

27 października 2022 r.

Rafał Nowak