Zad 11.

środa, 28 grudnia 2022 01:22

11. Losujemy drzewo o wierzchołkach $\{1, 2, \ldots, n\}$ (każde drzewo jest tak samo prawdopodobne). Jakie jest prawdopodobieństwo, że wierzchołek 1 jest liściem? Do czego prawdopodobieństwo to dąży przy $n \to \infty$?

z tw. Cayleya wszystkich drzew n-wierzchołkowych jest n^{n-2}. Analogicznie wszystkich drzew $n-1$ wierzchołkowych jest $(n-1)^{n-3}$. n-wierzchołkowe drzewo, w którym 1 jest liściem możemy uzyskać doklejając 1 do dowolnego wierzchołka drzewa o wierzchołkach $\{2 \ldots n\} \to (n-1) \cdot (n-1)^{n-3} = (n-1)^{n-2}$. Prawdop. wynosi zatem $\frac{(n-1)^{n-2}}{n^{n-2}} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-2}$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-2} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1}{e} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1}{e}$$

□