Zad 1.

poniedziałek, 30 stycznia 2023 19:07

M13.1. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech dla $p \in \{1, 2, \infty\}$ symbol $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}_+$ oznacza normę macierzy indukowaną przez p-tą normę wektorową. Wykazać, że dla dowolnych macierzy $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zachodzi nierówność

$$\|AB\|_p \leqslant \|A\|_p \|B\|_p.$$

$$\|A\|_p \overset{\text{def.}}{=} \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} \leq \|A\|_p$$

$$\Downarrow$$

$$\|Ax\|_p \leq \|A\|_p \cdot \|x\|_p$$

w szczególności

$$\|A(Bx)\|_p \leq \|A\|_p \cdot \|Bx\|_p \leq \|A\|_p \cdot \|B\|_p \cdot \|x\|_p$$

czyli $\displaystyle \sup_{x\neq 0} \frac{\|ABx\|_p}{\|x\|_p} \leq \|A\|_p \cdot \|B\|_p$

$$\|$$

$$\|AB\|_p \qquad \square$$