Zad 9.

wtorek, 10 stycznia 2023 15:40

9. Pokaż, że każdy turniej zawiera (skierowaną) drogę Hamiltona tzn. przechodzącą wszystkie wierzchołki.

indukcja po liczbie wierzchołków

$n=1$ $n=2$ $n=3$

dla $n \leq 3$ wszystkie możliwe turnieje w oczywisty sposób posiadają drogi hamiltona

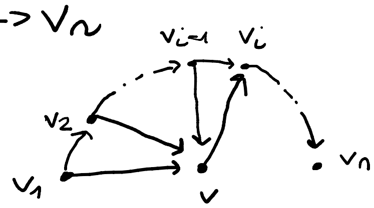
załóżmy, że dowolny wzięty n wierzchołkowy turniej jest półhamiltonowski. Pokażemy, że $n+1$ wierzchołkowy turniej G też taki jest

weźmy wierzchołek $v \in V(G)$ i rozważmy turniej otrzymany prez usunięcie go z G wraz z krawędziami do niego incydentnymi.

Taki turniej z założenia posiada drogę hamiltona $v_1 \to v_2 \to \dots \to v_n$

1) $(v, v_1) \in E(G)$

wtedy szukaną drogą w grafie $n+1$ wierzchołkowym jest $v \to v_1 \to v_2 \to \dots \to v_n$



2) $(v, v_1) \notin E(G)$

wtedy $(v_1, v) \in E(G)$

2.1) Jeżeli $\exists i$ $1 < i \leq n$ t. że $(v, v_i) \in E(G)$ to możemy wziąć najmniejsze takie i. Wtedy szukana droga przyjmie następującą postać $(\forall j < i \ (v_j, v) \in E(G))$

rysunek poglądowy

$$v_1 \to v_2 \to \dots \to v_{i-1} \to v \to v_i \to \dots \to v_n$$

2.2) Jeżeli i z (2.1) nie istnieje to droga wygląda tak

$$v_1 \to v_2 \to \dots \to v_n \to v$$

$\square$