Zad 3

poniedziałek, 21 listopada 2022 21:32

3. Sprawdzić czy następujące działanie $*$ na danym zbiorze A jest łączne, przemienne i czy ma element neutralny. Sprawdzić też, czy $(A, *)$ jest grupą.

(i) $A = \mathbb{Q}$; $a * b = \frac{a+b}{2}$.
(ii) $A = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$; $a * b = \frac{a}{b}$.
(iii) $A = \mathbb{R}$; $x * y = x + y + 2$.
(iv) $A = \mathbb{N}$; $m * n = \min(m, n)$.
(v) $A = \mathbb{N}$; $m * n = \max(m, n)$.
(vi) $A = \mathbb{N}$; $m * n = m$.
(vii) $A = \mathbb{N}$; $m * n = 2^{m+n}$.
(viii) $A = \mathbb{Z}$; $m * n = m - n$.
(ix) A to płaszczyzna; $P * Q$ to środek odcinka o końcach P, Q.

Definicja 2.1 *Zbiór G, w którym określone jest działanie $\circ$, nazywamy grupą, jeśli spełnione są następujące warunki:*
(1) działanie $\circ$ jest łączne,
(2) w G istnieje element neutralny względem działania $\circ$,
(3) dla każdego $g \in G$, istnieje w G element odwrotny do g względem działania $\circ$.

(i) $a, b, c \in \mathbb{Q}$

$$(a * b) * c = \frac{a+b}{2} * c = \frac{\frac{a+b}{2} + c}{2} = \frac{a+b+2c}{4}$$

$$a * (b * c) = \frac{2a+b+c}{4}$$

kontrprzykład $a=4$ $b=0$ $c=0$

$$\frac{a+b+2c}{4} = 1 \neq \frac{2a+b+c}{4} = 2$$

czyli nie jest łączne
$\Downarrow$
$(\mathbb{Q}, *)$ nie jest grupą

jest przemienne, bo $+$ jest w $\mathbb{Q}$

nie ma elementu neutralnego, bo dla $a \neq b$

$$a = a * e = e * a = \frac{a+e}{2} \Rightarrow e = a \neq b = e \Leftarrow \frac{b+e}{2} = e * b = b * e = b$$

(vii) (vii) $A = \mathbb{N}$; $m * n = 2^{m+n}$.

$a, b, c \in \mathbb{N}$

$$(a * b) * c = 2^{a+b} * c = 2^{2^{a+b} + c}$$

$$a * (b * c) = 2^{a + 2^{b+c}}$$

kontrprzykład $a = 0$ $b = c = 1$

$a*(b*c) = 2$

kontrprzykład $a=0 \quad b=c=1$

$2^{2^{a+b}+c} = 8 \neq 2^{a+2^{b+c}} = 16$ nie łączne

$m*n = 2^{m+n} = 2^{n+m} = n*m$ przemienne

nie ma elementu neutralnego

$a = a*e = 2^{a+e} \quad \log_2 a = a+e \quad e = \log_2 a - a < 0$

nie grupa

(VIII) (viii) $A = \mathbb{Z}$; $m * n = m - n$.

$(a*b)*c = (a-b)*c = a-b-c$

$a*(b*c) = a*(b-c) = a-b+c$

$a=b=0 \quad c=1$

$a-b-c=-1 \neq a-b+c=1$ nie łączne

$a*b = a-b$

$b*a = b-a$

$a=0 \quad b=1$

$a-b = -1 \neq 1 = b-a$ nie przemienne

tylko prawostronny element neutralny $e=0$

$a*e = a-0 = a$

$e*a = e-a = a \Rightarrow e=2a \neq 2b = e \Leftarrow b = e-b = e*b$

dla $a \neq b$

nie jest grupą

(V) (v) $A = \mathbb{N}$; $m * n = \max(m, n)$.

$a,b \in \mathbb{N} \quad$ b.s.o $\quad a \leq b$

$\max(a,b) = b = \max(b,a)$ przemienne

$a,b,c \in \mathbb{N}$

$\max(\max(a,b),c) = \max(a,c) = \max(a,\max(b,c))$

łączne

$e=0$ bo $\max(0,0)=0$, a dla $n>0$

$\max(n,0) = \max(0,n) = n$

czyli jest element neutralny

$a \in \mathbb{N}$

$e = a * a^{-1} = \max(a, a^{-1}) = 0$ czyli tylko $a=0$ ma swój element odwrotny $a^{-1}=0$

$\Downarrow$

$a=0 \wedge a^{-1}=0$

$(\mathbb{N}, *)$ nie jest grupą