Zad 4

poniedziałek, 24 października 2022 11:33

M3.4. 1 punkt Które z ciągów: $\frac{1}{n^2}, \frac{1}{2^{2^n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{e^n}, \frac{1}{n^n}$ są zbieżne kwadratowo? Odpowiedź uzasadnij.

Definicja

Niech ciąg a_k będzie zbieżny do g. Jeśli istnieją takie liczby rzeczywiste p i C ($C > 0$), że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1} - g|}{|a_n - g|^p} = C,$$

to p nazywamy **wykładnikiem zbieżności ciągu**, a C – **stałą asymptotyczną błędu**.

to p nazywamy **wykładnikiem zbieżności ciągu**, a C – **stałą asymptotyczną błędu**. Dla $p = 1$ oraz $0 < C < 1$ zbieżność jest **liniowa**, dla $p = 2$ – **kwadratowa**, dla $p = 3$ – **sześcienna**.

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{1}{(n+1)^2}\right|}{\left|\frac{1}{n^2}\right|^2} =$ $\qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

$= \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^4}} = \frac{n^4}{(n+1)^2} = \frac{n^4}{n^2+2n+1} = \frac{n^2}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} = \inf$ $\qquad \frac{1}{n^2}$ nie zbiega kwadratowo

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{2^n}} = 0$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^{2^{n+1}}}}{\left(\frac{1}{2^{2^n}}\right)^2} = \frac{1}{2^{2^{n+1}}} \cdot \left(2^{2^n}\right)^2 = \frac{2^{2^n \cdot 2}}{2^{2^{n+1}}} = \frac{2^{2^{n+1}}}{2^{2^{n+1}}} = 1$

$\frac{1}{2^{2^n}}$ zbiega kwadratowo

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{\sqrt{n+1}} = \frac{n}{n\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} = \infty$

0

nie zbiega kwadratowo

d) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^n} = 0$

$\lim \frac{\frac{1}{e^{n+1}}}{\ldots} = \frac{1}{\ldots} \cdot e^{2n} = \frac{e^{2n}}{\ldots} = e^{n-1} \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{e^{n+1}}}{\left(\frac{1}{e^n}\right)^2} = \frac{1}{e^{n+1}} \cdot e^{2n} = \frac{e^{2n}}{e^{n+1}} = e^{n-1} \to \infty$$

nie zbiega kwadratowo

e) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^{(n+1)}}}{\left(\frac{1}{n^n}\right)^2} = \frac{n^{2n}}{(n+1)^{(n+1)}} = \frac{n^{n+1} \cdot n^{n-1}}{(n+1)^{(n+1)}} =$$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \cdot n^{n-1} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot n^{n-1} = e n^{n-1} \to \infty$$

nie zbiega kwadratowo