Zad 7.

niedziela, 4 grudnia 2022 22:28

M7.7. 1 punkt Udowodnić, że istnieje dokładnie jeden wielomian optymalny $w_n^* \in \Pi_n$ w sensie normy średniokwadratowej.

z 7.5 w_n^* jest optymalny dla $f \iff \forall w_n \ \langle f - w_n^*, w_n \rangle = 0$

$\{f_0, \dots, f_n\}$ - baza Π_n

Lemat

$\langle f - w_n^*, w_n \rangle = 0 \iff \langle f - w_n^*, f_i \rangle = 0 \ \forall i$

($\Rightarrow$) skoro dla dowolnego w_n to w szczególności dla każdego f_i

($\Leftarrow$) $w_n = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f_i$

$\langle f - w_n^*, w_n \rangle = \langle f - w_n^*, \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f_i \rangle = \sum_{i=0}^{n} \langle f - w_n^*, f_i \rangle \alpha_i \overset{\text{z zał.}}{=} 0$ $\square$

$w_n^* \in \Pi_n$, zatem $w_n^* = \sum_{i=0}^{n} \gamma_i f_i$. mamy dla ustalonego i

$0 = \langle f - w_n^*, f_i \rangle \overset{\text{z własności iloczynu skalarnego}}{=} \langle f, f_i \rangle - \langle w_n^*, f_i \rangle =$

$= \langle f, f_i \rangle - \sum_{j=0}^{n} \gamma_j \langle f_j, f_i \rangle$ zatem

jest $n+1$ takich równań (dla $i = 0 \dots n$)

$\langle f, f_i \rangle = \langle f_0, f_i \rangle \gamma_0 + \langle f_1, f_i \rangle \gamma_1 + \dots + \langle f_n, f_i \rangle \gamma_n$

przepisując na postać macierzową dostajemy

$$\begin{bmatrix} \langle f_0, f_0 \rangle & \langle f_1, f_0 \rangle & \dots & \langle f_n, f_0 \rangle \\ \langle f_0, f_1 \rangle & \langle f_1, f_1 \rangle & \dots & \langle f_n, f_1 \rangle \\ & \vdots & & \\ \langle f_0, f_n \rangle & \langle f_1, f_n \rangle & \dots & \langle f_n, f_n \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f, f_0 \rangle \\ \langle f, f_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle f, f_n \rangle \end{bmatrix}$$

w tej macierzy niezerowa

$\uparrow$

w tej macierzy niezerowa
jest tylko ~~p~~rzekątna (bo $\{f_0, \dots, f_n\}$ ortog.)

zatem dostajemy $\gamma_i = \dfrac{\langle f, f_i \rangle}{\langle f_i, f_i \rangle}$

no więc każda γ_i jest jednoznacznie wyznaczona,
zatem również $w_n^* = \sum_{i=0}^{n} \gamma_i f_i$ jest jedyny. $\square$