Zad 4.

sobota, 29 października 2022 15:09

M4.4. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech α będzie punktem stałym przekształcenia $\phi \in C^{p+1}(\mathcal{J})$, gdzie $\mathcal{J} := (\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ jest pewnym otoczeniem punktu α oraz $p \geqslant 1$. Udowodnić, że jeśli $\phi^{(i)}(\alpha) = 0$ dla $i = 1, 2, \ldots, p$ oraz $\phi^{(p+1)}(\alpha) \neq 0$, to metoda iteracyjna

$$x_{k+1} = \phi(x_k)$$

jest metodą rzędu $p + 1$ oraz

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^{p+1}} = \frac{\phi^{(p+1)}(\alpha)}{(p + 1)!}.$$

$$x_{k+1} = \varphi(x_k) = \varphi(\alpha) + \frac{\varphi'(\alpha)}{1!}(x_k - \alpha) + \frac{\varphi''(\alpha)}{2!}(x_k-\alpha)^2 + \ldots + $$
$$+ \frac{\varphi^{(p)}(\alpha)}{p!}(x_k - \alpha)^p + \frac{\varphi^{(p+1)}(\varepsilon_k)}{(p+1)!}(x_k-\alpha)^{(p+1)}$$

gdzie bez straty ogólności $\varepsilon_k \in [x_k, \alpha]$

$\varphi(\alpha) = \alpha$ bo metoda ma być zbieżna (i z resztą jest bo $\varphi'(\alpha) = 0 \Rightarrow |\varphi'(\alpha)| < 1$ w otoczeniu α)

wszystkie pochodne $\varphi^{(i)}(\alpha) = 0$ dla $i = 1 .. p$
więc mamy

$$x_{k+1} = \alpha + \frac{\varphi^{(p+1)}(\varepsilon_k)}{(p+1)!}(x_k - \alpha)^{(p+1)}$$

$$\frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^{p+1}} = \frac{\varphi^{(p+1)}(\varepsilon_k)}{(p+1)!}$$

wiemy, że $x_k \to \alpha$
zatem $\varepsilon_k \to \alpha$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k-\alpha)^{(p+1)}} = \frac{\varphi^{(p+1)}(\alpha)}{(p+1)!} \neq 0$$

zatem granica istnieje (po prawej jest jakaś liczba)

$\varphi(x_k)$ jest rzędu $\Leftarrow$ i jest > 0

$\varphi(x_k)$ jest rzędu $\Leftarrow$ i jest >0
$p+1$

$\square$