Zad 4.

środa, 28 grudnia 2022 02:13

$|V(G)|=n \quad |E(G)|=m$

4. Udowodnij, że jeżeli $d(G)=2$ i $\max\{\deg(v) | v \in V(G)\} = n-2$, to $m \geq 2n-4$.

Niech $x \in V(G)$ t. że $\deg(x)=n-2$. x ma zatem $n-2$ sąsiadów. Nie sąsiaduje on więc z tylko jednym wierzchołkiem. Żeby można było mówić o skończonej średnicy grafu, to musi być on spójny, zatem podłączamy wolny wierzchołek do jednego z sąsiadów x. Wtedy jednak $d(G)=3$ (wolny $\rightarrow$ sąsiad 1 $\rightarrow x \rightarrow$ sąsiad 2), zatem musimy połączyć krawędzią wolny wierzchołek z każdym sąsiadem x. Każda inna dodana krawędź pomiędzy sąsiadami x nie zmieni stopnia x ani $d(G)$, stąd $m \geq \underbrace{n-2}_{\text{sąsiedzi } x} + \underbrace{n-2}_{\text{sąsiedzi wolnego}} = 2n-4$ $\square$