Zad 3.

środa, 28 grudnia 2022 01:47

3. *Średnicą* $d(G)$ grafu G nazywamy maksymalną odległość między wierzchołkami grafu, to znaczy $d(G) = \max\{d(x,y) | x, y \in V(G)\}$. Udowodnij, że jeżeli $d(G) > 3$, to $d(\bar{G}) < 3$.

Załóżmy, że $d(G)>3$ (wiemy wtedy, że $|V(G)| \geqslant 4$)

Weźmy dowolne $a,b \in V(G)$

1° $\{a,b\} \notin E(G)$

wtedy $\{a,b\} \in E(\bar{G}) \Rightarrow d_{\bar{G}}(a,b) = 1 < 3$

2° $\{a,b\} \in E(G)$

wiemy, że $\forall x \in V \setminus \{a,b\}$ $\{a,x\} \notin E(G) \vee \{x,b\} \notin E(G)$

(inaczej $d(G)=2$ z dowolności a i b)

Weźmy dowolnego $x \in V(G)$

2.1° $\{a,x\} \notin E(G) \wedge \{x,b\} \notin E(G)$

wtedy $\{a,x\} \in E(\bar{G}) \wedge \{x,b\} \in E(\bar{G})$

$\Downarrow$

$d_{\bar{G}}(a,b) = 2 \Rightarrow d(\bar{G}) = 2 < 3$

2.2° $\{a,x\} \in E(G) \wedge \{x,b\} \notin E(G)$

z dowolności wierzchołków mamy wtedy

$d(G) = 1$ ↯

(z a da się przejść do b i dowolnego x w jednym kroku)

2.3° $\{a,x\} \notin E(G) \wedge \{x,b\} \in E(G)$

analogicznie do 2.2°

widać zatem, że $d(\bar{G}) = 1$ albo $d(\bar{G}) = 2$

$\square$