Zad 1

poniedziałek, 21 listopada 2022 10:39

M6.1. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Uzasadnić następujący *algorytm Clenshawa* obliczania wartości wielomianu

$$w(x) = \tfrac{1}{2}c_0T_0(x) + c_1T_1(x) + c_2T_2(x) + \ldots + c_nT_n(x)$$

w punkcie x ($c_0, c_1, \ldots, c_n$ są danymi stałymi). Określamy pomocniczo wielkości $B_0, B_1, \ldots, B_{n+2}$ wzorami

$$B_{n+2} := B_{n+1} := 0;$$
$$B_k := 2xB_{k+1} - B_{k+2} + c_k \qquad (k = n, n-1, \ldots, 0).$$

Wówczas $w(x) = \frac{1}{2}(B_0 - B_2)$.

$$c_k = B_k - 2xB_{k+1} + B_{k+2}$$

$$w(x) = \sum_{k=0}^{n}{}' c_k T_k(x) = \sum_{k=0}^{n}{}' (B_k - 2xB_{k+1} + B_{k+2}) T_k(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}{}' B_k T_k(x) - 2x \sum_{k=0}^{n}{}' B_{k+1} T_k(x) + \sum_{k=0}^{n}{}' B_{k+2} T_k(x) =$$

$$= \sum_{k=2}^{n} B_k T_k(x) + \tfrac{1}{2} B_0 T_0(x) + B_1 T_1(x)$$

$$- 2x \sum_{k=1}^{n}{}' B_k T_{k-1}(x) + \sum_{k=2}^{n}{}' B_k T_{k-2}(x) =$$

$$= \sum_{k=2}^{n} B_k T_k(x) - 2x \sum_{k=2}^{n} B_k T_{k-1}(x) + \sum_{k=2}^{n}{}' B_k T_{k-2}(x)$$

$$+ \tfrac{1}{2} B_0 T_0(x) + B_1 T_1(x) - 2x \cdot \tfrac{1}{2} B_1 T_0(x)$$

$$- \tfrac{1}{2} B_2 T_0(x) =$$

$$T_k(x) = 2xT_{k-1} - T_{k-2}$$

$$T_k(x) - 2xT_{k-1} + T_{k-2} = 0$$

$$\sum_{k=2}^{n} B_k \left[T_k(x) - 2xT_{k-1}(x) + T_{k-2}(x) \right]$$

$$+ \tfrac{1}{2} B_0 + xB_1 - xB_1 - \tfrac{1}{2} B_2 =$$

$$= \tfrac{1}{2}(B_0 - B_2)$$

$\square$