

Zad 6.

poniedziałek, 28 listopada 2022 23:04

6. W pokoju stoi 5 komód – każda ma 4 szuflady. Na ile sposobów można w tych szufladach rozmieścić n przedmiotów tak, by żadna z komód nie była pusta.

wszystkich rozłożeń jest 20^n

Niech A_i oznacza zbiór takich rozłożeń, że i -ta komoda jest pusta. Wtedy

$$\forall i \quad |A_i| = 16^n$$

← i -ta komoda pusta, wsadzamy n przedmiotów do 16 pozostałych szuflad

$$\forall i \neq j \quad |A_i \cap A_j| = 12^n \quad \leftarrow \text{wsadzamy do 12 szuflad}$$

⋮

$$|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_5| = 0 \quad (\text{każda komoda jest pusta})$$

z zasady włączeń i wyłączeń

$$|\bigcup_{i=1}^5 A_i| = 5 \cdot 16^n - \binom{5}{2} 12^n + \binom{5}{3} 8^n - \binom{5}{4} 4^n + 0$$

$$\text{wynik: } 20^n - 5 \cdot 16^n + \binom{5}{2} 12^n - \binom{5}{3} 8^n + \binom{5}{4} 4^n =$$

$$= 20^n + \sum_{i=1}^5 \binom{5}{i} (-1)^i (20 - 4i)^n$$