Zad 12.

środa, 9 listopada 2022 22:49

12. Pokaż, że $\gcd(F_{n-1}, F_n) = 1$ (1). Udowodnij indukcyjnie, że $\gcd(F_m, F_n) = F_{\gcd(m,n)}$ (2).

(1) indukcja

$n = 1$

$gcd(F_0, F_1) = gcd(0, 1) = 1$

zał. $gcd(F_{n-1}, F_n) = 1$

$gcd(F_n, F_{n+1}) = gcd(F_n, F_{n+1} - F_n) = gcd(F_n, F_{n-1}) \overset{\text{(zał. ind.)}}{=} 1$ $\square$

(2)

znowu indukcja tym razem po n

Weźmy dowolne $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$n = 0$

$gcd(F_m, F_0) = gcd(F_m, 0) = F_m = F_{gcd(m,0)}$

$n = 1$

$gcd(F_m, 1) = 1 = F_1 = F_{gcd(m,1)}$

załóżmy $\forall k \leq n-1 \; gcd(F_m, F_k) = F_{gcd(m,k)}$.

pokażemy, że zachodzi dla n

1° $m \leq n-1$ autom. z zał.

2° $m = n$ $\quad gcd(F_m, F_n) = F_m = F_{gcd(m,n)}$

3° $m > n$

$$F_{n+1}F_m + F_n F_{m-1} = F_{m+n}$$

$m = n + r \Rightarrow r = m - n$

$F_m = F_{n+r} = F_{r+1}F_n + F_r F_{n-1}$

bo $F_{r+1}F_n$ jest wielokrotnością F_n

$gcd(F_m, F_n) = gcd(F_{r+1}F_n + F_r F_{n-1}, F_n) =$

$= gcd(F_r F_{n-1}, F_n) \underset{\substack{F_{n-1} \perp F_n \\ \text{z (1)}}}{=} gcd(F_r, F_n) = gcd(F_{m-n}, F_n) = F_{gcd(m,n)}$

widać tutaj identyczne zachowanie jak w algorytmie z odejmowaniem, tylko z (1)

zachowanie jak w algorytmie euklidesa z odejmowaniem, tylko na indeksach