Zad 9.

poniedziałek, 5 grudnia 2022 22:19

9. Niech c_n oznacza liczbę ciągów n znaków ze zbioru $\{0, 1, 2\}$ nie zawierających dwóch sąsiednich jedynek ani dwóch sąsiednich dwójek. Ułóż zależność rekurencyjną i rozwiąż ją wyznaczając jawny wzór na c_n.

poprawne ciągi zakończone $\longrightarrow$ jedynką $- j_n$, dwójką $- d_n$, zerem $- z_n$. mamy

$$j_{n+1} = d_n + z_n, \quad d_{n+1} = j_n + z_n, \quad z_{n+1} = j_n + d_n + z_n$$

ponadto $c_{n+1} = j_{n+1} + d_{n+1} + z_{n+1} = \underbrace{d_n + z_n + j_n}_{c_n} + z_n + \underbrace{j_n + d_n + z_n}_{c_n} =$

$= 2c_n + z_n =$

$= 2c_n + j_{n-1} + d_{n-1} + z_{n-1} = 2c_n + c_{n-1}$

$$c_{n+1} = 2c_n + c_{n-1}$$

$$c_{n+1} - c_{n-1} - 2c_n = 0$$

$$c_{n+2} - 2c_{n+1} - c_n = 0$$

$$(E^2 - 2E - 1)\langle c_n \rangle = \langle 0 \rangle$$

$$\Delta = 4 + 4 = 8 \qquad E_1 = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2} \qquad E_2 = 1 + \sqrt{2}$$

czyli $c_n = \alpha(1-\sqrt{2})^n + \beta(1+\sqrt{2})^n$

mamy $c_0 = 1, \quad c_1 = 3$

$$\begin{cases} 1 = \alpha + \beta \\ 3 = \alpha(1-\sqrt{2}) + \beta(1+\sqrt{2}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1-\sqrt{2}) = \alpha(1-\sqrt{2}) + \beta(1-\sqrt{2}) \\ 3 = \alpha(1-\sqrt{2}) + \beta(1+\sqrt{2}) \end{cases}$$

$$2 + \sqrt{2} = \beta(1 + \sqrt{2} - 1 + \sqrt{2})$$

$$2 + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}\,\beta$$

$$\beta = \frac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}+2}{4} = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$$

$$\alpha = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$$

$(1-\sqrt{2})^{n+1} \qquad (1+\sqrt{2})^{n+1}$

$$\alpha = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$$

zatem $\quad c_n = \frac{(1-\sqrt{2})^{n+1}}{2} + \frac{(1+\sqrt{2})^{n+1}}{2}$