Zad 3.

poniedziałek, 16 stycznia 2023 20:05

M11.3. 2 punkty

a) Stosując złożony wzór Simpsona S_n z odpowiednio dobranym n obliczyć przybliżoną wartość całki $\int_0^\pi \sin x \, dx$ z błędem $\leqslant 2 \cdot 10^{-5}$.

b) Jaka wartość n gwarantuje uzyskanie tak dokładnego wyniku, jeśli zamiast wzoru S_n użyjemy złożonego wzoru trapezów T_n?

a)

$$-\frac{1}{180}h^4(b-a)f^{(4)}(\xi), = \text{błąd } S_n$$

$$f(x) = \sin x = f^{(4)}(x) \qquad h = \frac{\pi - 0}{n} \qquad (b-a) = \pi - 0$$

$$-\frac{1}{180}\left(\frac{\pi}{n}\right)^4 \cdot \pi \cdot \sin\eta \leqslant 2 \cdot 10^{-5}$$

$$\frac{\pi^5}{180} \cdot \frac{1}{n^4} \cdot \sin\eta \geqslant -2 \cdot 10^{-5}$$

$$-2 \cdot 10^{-5} \cdot n^4 \leqslant \frac{\pi^5 \sin(\eta)}{180}$$

$$n^4 \geqslant -\frac{\pi^5 \sin(\eta)}{2 \cdot 10^{-5} \cdot 180} \Rightarrow n^4 \geqslant \frac{\pi^5}{2 \cdot 10^{-5} \cdot 180} \approx 191262$$

$$\sqrt[4]{191262} \approx 21 \Rightarrow n \geqslant 22$$

$$\int_0^\pi \sin(x)\, dx \approx 2.000004631498475$$

https://www.emathhelp.net/calculators/calculus-2/simpsons-rule-calculator/

$$\int_0^\pi \sin(x)\, dx = -\cos\pi + \cos 0 = -(-1) + 1 = 2$$

czyli błąd się zgadza

b)

$$-(b-a)\frac{h^2}{12}f''(\xi). = \text{błąd } T_n$$

$$-\pi\frac{\pi^2}{12n^2}(-\sin\eta) = \frac{\pi^3}{12n^2}\sin\eta \leqslant 2 \cdot 10^{-5}$$

$$\frac{\pi^3}{12} \cdot \sin\eta_i \frac{1}{2 \cdot 10^{-5}} \leq \frac{\pi^3}{24 \cdot 10^{-5}} \leq n^2$$

$$n^2 \geq 129193 \qquad \sqrt{129193} \approx 359{,}4$$

$$n \geq 360$$

troszke dużo