Zad 4.

środa, 28 grudnia 2022 17:15

M9.4. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Niech dla $f \in C[a,b]$ istnieją wszystkie pochodne i niech $|f^{(k)}(x)| > 0$ dla każdego $x \in [a,b]$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Wykazać, że dla każdego $n \geqslant 0$ zachodzi wówczas nierówność $E_n(f) > E_{n+1}(f)$.

$$\Pi_n \subseteq \Pi_{n+1} \implies \underbrace{E_n(f)}_{= \inf_{w \in \Pi_n} \|f-w\|} \geq \underbrace{E_{n+1}(f)}_{= \inf_{w \in \Pi_{n+1}} \|f-w\|}$$

chcemy zatem pokazać, że $E_n(f) \neq E_{n+1}(f)$

nie wprost $E_n(f) = E_{n+1}(f)$

wtedy n-ty wielomian optymalny w_n^* jest równocześnie $n+1$-szym wielomianem optymalnym (dla f)

istnieje zatem alternans $n+3$ punktowy $x_0, \ldots, x_{n+2}$

Rozważmy $r(x) = f(x) - w_n^*(x)$

$r(x)$ ma $\geqslant n+2$ miejsc zerowych (bo w punktach alternansu są znaki na zmianę)

dalej z tw. o wartości średniej

$r'(x)$ ma $\geqslant n+1$ msc. zerowych

$r''(x)$ ma $\geqslant n$ — " —

$\vdots$

$r^{(n+1)}(x)$ ma $\geqslant 1$ zero (ozn. α)

mamy zatem

$$r^{(n+1)}(\alpha) = f^{(n+1)}(\alpha) - \underbrace{w_n^{*(n+1)}(\alpha)}_{\equiv 0, \text{ bo } w_n^* \in \Pi_n} = f^{(n+1)}(\alpha) = 0$$

ale $|f^{(n+1)}(x)| > 0 \ \forall x$

$\lightning$