Zad 7.

wtorek, 24 stycznia 2023 18:16

M12.7. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wykazać, że dla każdego $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ zachodzą nierówności

a) $\|\boldsymbol{x}\|_\infty \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_1 \leqslant n\|\boldsymbol{x}\|_\infty;$

b) $\|\boldsymbol{x}\|_\infty \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_2 \leqslant \sqrt{n}\|\boldsymbol{x}\|_\infty;$

c) $\frac{1}{\sqrt{n}}\|\boldsymbol{x}\|_1 \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_2 \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_1.$

a) $\|x\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n} |x_i| \qquad \|x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$

w tej sumie występuje $\max\limits_{1\le i\le n} |x_i|$ więc $\|x\|_\infty \le \|x\|_1$

z drugiej strony niech

b.s.o $\|x\|_\infty = |x_1|$. wtedy

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i| \le \sum_{i=1}^{n}|x_1| = n|x_1| = n\|x\|_\infty$$

$\square$

b) znowu b.s.o $\max\limits_{1\le i\le n}|x_i| = |x_1|$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_1^2} = \sqrt{n\cdot x_1^2} = \sqrt{n}\cdot|x_1| = \sqrt{n}\cdot\|x\|_\infty$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \ge \sqrt{x_1^2} = |x_1| = \|x\|_\infty$$

$\square$

c) $$\frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_1 = \underbrace{\sum_{i=1}^{n}|x_i| \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}}_{\ge 0} \overset{?}{\le} \underbrace{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}_{\ge 0} = \|x\|_2$$

podnosimy do kwadratu

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|\right)^2 \cdot \frac{1}{n} \overset{?}{\le} \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$x_1 = \max\limits_{1\le i\le n}|x_i|$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|\right)^2 \cdot \frac{1}{n} \le n\cdot\frac{1}{n}\cdot|x_1|^2 = x_1^2 \le \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

więc $\frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_1 \le \|x\|_2$

więc $\frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_1 \leq \|x\|_2$

$$\underbrace{\|x\|_2}_{\geq 0} \overset{?}{\leq} \underbrace{\|x\|_1}_{\geq 0}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \overset{?}{\leq} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 + \underbrace{\dots}_{\geq 0}$$

$\square$