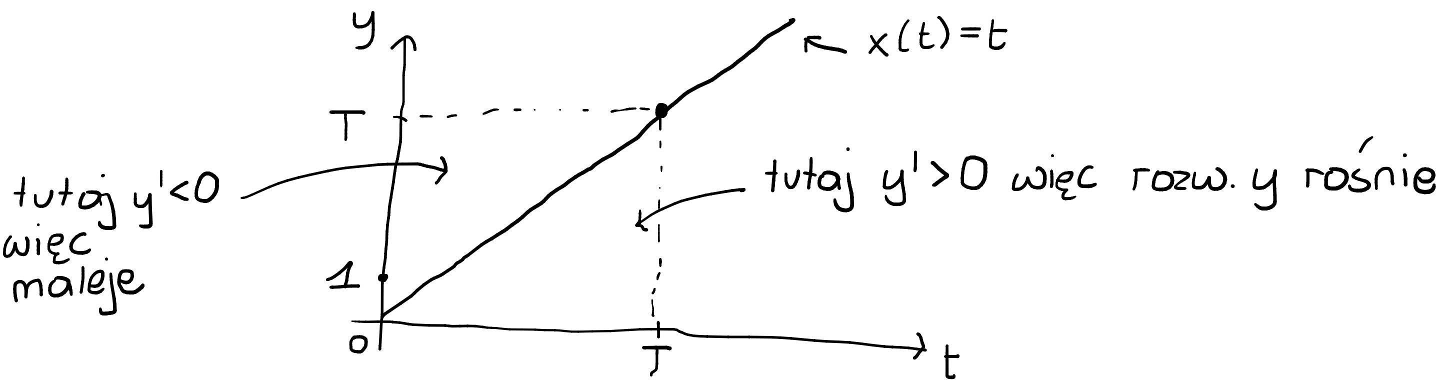
Zad 2.

środa, 19 kwietnia 2023 18:45

Zadanie 2. Udowodnij, że poniższe równania uzupełnione warunkiem początkowym $x(0) = 1$ mają rozwiązanie dla wszystkich $t \geq 0$:
a) $x' = t^3 - x^3$, b) $x' = tx + e^{-x}$.

a) $t_0 = 0$ $y_0 = 1$ $f(t,y) = t^3 - y^3$

$\frac{\partial f}{\partial y} = -3y^2 \leftarrow$ ciągła



widać zatem, że dla ustalonego przedziału $[0,T)$ rozw są ograniczone, nie uciekną w $\pm\infty$

spełnione jest zatem oszacowanie a priori $\Rightarrow$ rozw. istnieje dla wszystkich $t \geq t_0 = 0$

b) $y' = ty + e^{-y}$

znowu wszystko ciągłe, z (P-L) bierzemy rozw istniejące na $[0,T]$

szukamy ograniczenia na y z obu stron

1) $y' > 0$, bo $y(0) = 1 > 0$ więc na początku rozw. musi rosnąć i

początku rozw. musi rosnąć i prawa strona już zawsze będzie dodatnia

$$\Downarrow$$

$$y > 0 \quad \forall t \geq t_0 = 0$$

2) $$y' = ty + e^{-y} \leq ty + 1$$

rozwiązujemy $y' = ty + 1$

$$y' - ty = 1 \quad / \cdot e^{-\int_0^t s\,ds} = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$\left(ye^{-\frac{t^2}{2}}\right)' = e^{-\frac{t^2}{2}} \quad / \int_0^t ds$$

$$ye^{-\frac{t^2}{2}} - 1 = \int_0^t e^{-\frac{s^2}{2}} ds$$

$$\tilde{y} = e^{\frac{t^2}{2}} \left[1 + \int_0^t e^{-\frac{s^2}{2}} ds \right]$$

to jest ograniczone dla $t > 0$

zatem $y \leq \tilde{y}$

teza z tw. o przedłużaniu $\square$