Zad 6.

wtorek, 24 stycznia 2023 21:01

M12.6. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Wykazać, że macierzowa *norma spektralna*, indukowana przez normę euklidesową wektorów $\|\cdot\|_2$, wyraża się wzorem

$$\|A\|_2 = \sqrt{\varrho(A^TA)},$$

gdzie *promień spektralny* $\varrho(A^TA)$ macierzy A^TA jest z definicji jej największą wartością własną.

$$\|A\|_2 := \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \sup_{\|y\|=1} \|Ay\|_2$$

$$\|Ay\|_2^2 = \langle Ay, Ay\rangle = \langle A^TAy, y\rangle$$

A^TA - macierz symetryczna (bo $(A^TA)^T = A^TA$)

z tw. spektralnego A^TA ma n wartości własnych $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ i n odpowiadającym im ortogonalnych wektorów własnych v_i

$\{v_n\}$ - baza ortonormalna $\mathbb{R}^n$

dla uproszczenia, legalne

zatem $y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$

z liniowości

dalej $\langle A^TAy, y\rangle = \langle A^TA(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i), \sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i\rangle =$

$= \langle \sum_{i=1}^{n}\alpha_i [A^TAv_i], \sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\lambda_i v_i, \sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i\rangle =$

v_i - wektor własny A^TA

$\{v_n\}$ - ortogonalne

$\|v_i\|_2 = 1$

$= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\lambda_i \cdot \sum_{j=1}^{n}\alpha_j \langle v_i, v_j\rangle = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\lambda_i\langle v_i, v_i\rangle = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\lambda_i \leq$

$\leq \lambda_1 \cdot \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2 \overset{(*)}{=} \lambda_1$

tw. pitagorasa

$(*)$ $\|y\|_2 = 1 = \|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2 \underbrace{\|v_i\|_2^2}_{=1}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2 = 1$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = 1$$

mamy oszacowanie z góry, trzeba wskazać y dla którego zachodzi równość

$y := v_1$, $\|y\|_2 = 1$, wtedy

$$\langle A^TAv_1, v_1\rangle = \langle \lambda_1 v_1, v_1\rangle = \lambda_1 \overset{1}{\overset{\shortparallel}{\langle v_1, v_1\rangle}} = \lambda_1$$

zatem $\sup\limits_{\|y\|_2=1} \|Ay\|_2 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{\varrho(A^TA)}$ $\square$