Zad 6.

poniedziałek, 9 stycznia 2023 19:33

M10.6. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Niech $f \in C^4[a,b]$. Obliczamy wartość całki $I(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ za pomocą wzoru Simpsona, czyli kwadraturą *Newtona-Cotesa* dla $n = 2$. Udowodnić, że istnieje taka liczba $\xi \in [a,b]$, dla której

$$I(f) - Q_2^{NC}(f) = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{90}h^5 \qquad (h := (b-a)/2).$$

Twierdzenie

Reszta R_n kwadratury Newtona-Cotesa wyraża się wzorem

$$R_n(f) = \begin{cases} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\int_a^b \omega(x)\mathrm{d}x & (n = 1, 3, \ldots), \\ \frac{f^{(n+2)}(\eta)}{(n+2)!}\int_a^b x\,\omega(x)\mathrm{d}x & (n = 2, 4, \ldots), \end{cases} \tag{6}$$

gdzie $\xi, \eta \in (a,b)$.

to

$$I(f) - Q_2^{NC}(f) = R_2(f) = \frac{f^{(4)}(\eta)}{4!} \cdot \int_a^b x\,\omega(x)\,dx$$

$$\int_a^b x\,\omega(x)\,dx = \int_a^b x(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)\,dx =$$

$$= \int_a^b x(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)\,dx = \left| \begin{matrix} x = a+th \\ dx = h\,dt \end{matrix} \right| =$$

$$\int_0^2 (a+th)\,th\cdot(t-1)h\cdot(t-2)h\cdot h\,dt \qquad t(t^2-3t+2)$$

$$= h^4 \int_0^2 (a+th)(t^3-3t^2+2t)\,dt =$$

$$= h^4 \int_0^2 (at^3 - 3at^2 + 2at + t^4h - 3t^3h + 2t^2h)\,dt =$$

$$= h^4\left[\frac{at^4}{4} - \frac{3at^3}{3} + \frac{2at^2}{2} + \frac{ht^5}{5} - \frac{3ht^4}{4} + \frac{2ht^3}{3}\right]\Bigg|_{t=0}^{2} =$$

$$= h^4\left[4a - 8a + 4a + \frac{32}{5}h - 12h + \frac{16}{3}h\right] =$$

$$= h^5\left(\frac{96}{15} - \frac{180}{15} + \frac{80}{15}\right) = -h^5\frac{4}{15}$$

$$R_2(f) = -\frac{f^{(4)}(\eta)}{4!}h^5 \cdot \frac{4}{15} = -\frac{f^{(4)}(\eta)}{90}h^5$$

$\square$