Zad 1.

środa, 17 maja 2023 20:03

Zadanie 1. Znajdź rozwiązania ogólne równań:

a) $y'' + y' - 2y = 0$, c) $y^{(5)} - 6y^{(4)} + 9y^{(3)} = 0$, e) $y'' - 2y' + y = 6te^t$,

b) $y^{(4)} + 4y = 0$, d) $y'' + y = 4\sin t$, f) $y'' - 5y' = 3t^2 + \sin 5t$.

d) $y'' + y = 4\sin t$

$$y'' + y = 0 \qquad r^2 + 1 = 0$$

$$r = \pm i$$

$$e^{it} = \cos t + i\sin t \Rightarrow \begin{matrix} y_1(t) = \cos t \\ y_2(t) = \sin t \end{matrix}$$

$$y(t) = c_1(t)\cos t + c_2(t)\sin t$$

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4\sin t \end{pmatrix}$$

$$c_1'\cos t + c_2'\sin t = 0 \Rightarrow c_1' = \frac{-c_2'\sin t}{\cos t}$$

$$\frac{c_2'\sin^2 t}{\cos t} + c_2'\cos t = 4\sin t$$

$$\frac{c_2'(\sin^2 t + \cos^2 t)}{\cos t} = 4\sin t$$

$$\begin{cases} c_2' = 2\sin 2t \\ c_1' = -2\sin 2t \cdot \operatorname{tg} t \end{cases}$$

gluurb, trzeba scałkować i zsumować z ogólnym jednorodnego

e) $y'' - 2y' + y = 6te^t$

ogólne jednorodnego

$$r^2 - 2r + 1 = 0 \qquad (r-1)^2 = 0$$

$c_1e^t + c_2te^t$

$r^2-2r+1=0 \qquad (r-1)^2=0$

$y_1=e^t \qquad y_2=te^t \to \tilde{y}=c_1e^t+c_2te^t$

podejrzewamy, że rozw. szczególne jest postaci $y=t^3e^t$

$y'=3t^2e^t+t^3e^t$

$y''=6te^t+3t^2e^t+3t^2e^t+t^3e^t$

$6te^t+\cancel{3t^2e^t}+\cancel{3t^2e^t}+\cancel{t^3e^t}-\cancel{6t^2e^t}-\cancel{2t^3e^t}+\cancel{t^3e^t}=$

$=6te^t$ super

rozw. ogólne:

$y(t)=t^3e^t+c_1e^t+c_2te^t$

f) $y''-5y'=3t^2+\sin 5t.$

ogólne jednorodnego

$r^2-5=0 \qquad r=\pm\sqrt{5}$

$y_1=e^{\sqrt{5}t} \qquad y_2=e^{-\sqrt{5}t} \qquad \tilde{y}=c_1e^{\sqrt{5}t}+c_2e^{-\sqrt{5}t}$

$y=c_1(t)e^{\sqrt{5}t}+c_2(t)e^{-\sqrt{5}t}$

$$\begin{pmatrix} e^{\sqrt{5}t} & e^{-\sqrt{5}t} \\ \sqrt{5}e^{\sqrt{5}t} & -\sqrt{5}e^{\sqrt{5}t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 3t^2+\sin 5t \end{pmatrix}$$

$e^{\sqrt{5}t}c_1'=-e^{-\sqrt{5}t}c_2'=-\frac{1}{e^{\sqrt{5}t}}c_2'$

$c_1'=-\frac{c_2'}{(e^{\sqrt{5}t})^2}$

$-\frac{c_2'\cdot\sqrt{5}}{e^{\sqrt{5}t}}-\sqrt{5}e^{\sqrt{5}t}c_2'=3t^2+\sin 5t$

znowu jakieś gówno