Zad 6.

poniedziałek, 27 lutego 2023 20:10

6. (2pkt) Pokaż, w jaki sposób algorytm "macierzowy" obliczania n-tej liczby Fibonacciego można uogólnić na inne ciągi, w których kolejne elementy definiowane są liniową kombinacją skończonej liczby elementów wcześniejszych. Następnie uogólnij swoje rozwiązanie na przypadek, w którym n-ty element ciągu definiowany jest jako suma kombinacji liniowej skończonej liczby elementów wcześniejszych oraz wielomianu zmiennej n.

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n = 1 \cdot f_{n+1} + 1 \cdot f_n$$

$$A \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_{n+2} \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{n-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix}$$

1) $$x_{n+k+1} = \alpha_0 x_n + \alpha_1 x_{n+1} + \ldots + \alpha_k x_{n+k}$$

$$A \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ \vdots \\ x_{n+k+1} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_k \end{pmatrix}$$

dla $n > k$

$$A^{n-k} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n-k} \\ x_{n-k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

2) $$x_{n+k+1} = \alpha_0 x_n + \ldots + \alpha_k x_{n+k} + W(n+k+1)$$

$$W(n+k+1) = \beta_0 + \beta_1 (n+k+1) + \beta_2 (n+k+1)^2 + \ldots + \beta_m (n+k+1)^m$$

$$A \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+k} \\ 1 \\ n+k+1 \\ (n+k+1)^2 \\ \vdots \\ (n+k+1)^m \end{pmatrix} \qquad A = \left(\begin{array}{cccccc|ccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & & & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & & & & & \\ & & & \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & & & & & \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_k & \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_m \\ & & & & & & \binom{0}{0} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ & & 0 & & & & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & 0 & \ldots & 0 \\ & & & & & & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & \ldots & 0 \\ & & & & & & \binom{m}{0} & \binom{m}{1} & \binom{m}{2} & \ldots & \binom{m}{m} \end{array}\right)$$

$$\| $$

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+k+1} \\ 1 \\ n+k+2 \\ (n+k+2)^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ x_{n+k+1} \\ 1 \\ (n+k+2)^2 \\ \vdots \\ (n+k+2)^m \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 1 \\ n+k+2 \\ (n+k+2)^2 \end{matrix}$$

$$(n+k+1)^m \longmapsto (n+k+2)^m$$

$$(n+k+2)^m = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} (n+k+1)^i$$

$$\parallel$$

$$(n+k+1)+1$$

$$(n+k+2)^2 = \sum_{i=0}^{2} \binom{2}{i} (n+k+1)^i = \binom{2}{0} \cdot 1 + \binom{2}{1}(n+k+1)^1 + \binom{2}{2}(n+k+1)^2$$

$$B \begin{pmatrix} 1 \\ n+k+1 \\ \vdots \\ (n+k+1)^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ n+k+2 \\ \vdots \\ (n+k+2)^m \end{pmatrix}$$

dla $n > k$

$$A^{n-k} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 1 \\ k+1 \\ \vdots \\ (k+1)^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n-k} \\ x_{n-k+1} \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \\ (n+1) \\ \vdots \\ (n+1)^m \end{pmatrix}$$