Zad 7.

poniedziałek, 30 stycznia 2023 20:12

M13.7. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wykazać, że jeśli A jest *macierzą ze ściśle dominującą przekątną*, tj.

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

to $\|B_J\|_\infty < 1$ i metoda Jacobiego jest zbieżna.

$$Ax = b$$

$$(L+D+U)x = b$$

$$Dx = -(L+U)x + b$$

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(L+U)x^{(k)} + D^{-1}b$$

$$B_J = -D^{-1}(L+U) = [b_{ij}]$$

$$[b_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} & \cdots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \frac{a_{23}}{a_{22}} & \ddots & \frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ & & \vdots & & \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \frac{a_{n3}}{a_{nn}} & & 0 \end{bmatrix}$$

$L+U$ ma zera na przekątnej i a_{ij} na swoich miejscach, $D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & & & \\ & \frac{1}{a_{22}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix}$ więc jak

mnożymy to dzielimy wiersze przez a_{ii}

dalej $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| = \frac{\sum_{j\neq i} |a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1$

bo A z dominującą wierszowo przekątną

$$\Downarrow$$

$$\|B_J\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| < 1$$

więc metoda jest zbieżna $\square$

więc metoda jest zbieżna □

[(13.1) $\Rightarrow$ $\|B_J(x-\tilde{x})\|_\infty \leq \|B_J\|_\infty \|x-\tilde{x}\|_\infty$, czyli
z tw. Banacha o kontrakcji
jeśli $\|B_J\|_\infty < 1$ to zbiega]