Zad 10.

niedziela, 5 marca 2023 20:08

10. (**Z** 2pkt)[1] Ułóż algorytm dla następującego problemu:

PROBLEM.[2]
dane: $n, m \in \mathcal{N}$
wynik: wartość współczynnika przy x^2 (wzięta modulo m) wielomianu $\underbrace{(...((x-2)^2-2)^2...-2)^2}_{n \text{ razy}}$ „$W_n(x)$"

Czy widzisz zastosowanie metody użytej w szybkim algorytmie obliczania n-tej liczby Fibonacciego do rozwiązania tego problemu?

$$W_{n+1}(x) = (W_n(x)-2)^2 \qquad W_1(x) = (x-2)^2 = x^2-4x+4$$

$$W_{n+1}(x) = [W_n(x)]^2 - 4W_n(x) + 4$$

interesują nas współczynniki przy x^0, x^1, x^2

wsp. przy x^2 dla W_{n+1}

$$x_{2,n+1} = x_{1,n}^2 + 2x_{0,n} \cdot x_{2,n} - 4x_{2,n}$$

zauważamy, że $\forall n \; x_{0,n} = 4$

zatem

$$x_{2,n+1} = x_{1,n}^2 + 4x_{2,n}$$

$$x_{1,n+1} = 2x_{0,n} \cdot x_{1,n} - 4x_{1,n} = 4x_{1,n} \qquad x_{1,1} = -4$$

więc $x_{1,n} = -4^n$

dalej $x_n \equiv x_{2,n}$

$$x_{n+1} = (-4^n)^2 + 4x_n = 16^n + 4x_n$$

metoda anihilatorów (można też metodą macierzy jak z fibonaccim)

$$E\langle x_n\rangle - 4\langle x_n\rangle = \langle 16^n\rangle$$

$$(E-4)(E-16)\langle x_n\rangle = \langle 0\rangle$$

$$x_n = \alpha 4^n + \beta 16^n$$

dla $x_1 = 1$, $x_2 = 16 + 4 = 20$

$$\begin{cases} 4\alpha + 16\beta = 1 \\ 16\alpha + 256\beta = 20 \end{cases}$$

$$256\beta - 64\beta = -16$$

$$192\beta = -16$$

$$\beta = -\frac{1}{12}$$

$$4\alpha - \frac{4}{3} = 1 \quad 4\alpha = \frac{7}{3} \quad \alpha = \frac{7}{12}$$

$$\begin{cases} \beta = -\frac{1}{12} \\ \alpha = \frac{7}{12} \end{cases}$$

$$x_n = \frac{7}{12} \cdot 4^n - \frac{1}{12} \cdot 16^n$$

przy szybkim potęgowaniu 4^n i 16^n można brać modulo m