Zad 6.

poniedziałek, 30 stycznia 2023 19:59

M13.6. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Załóżmy, że wszystkie wartości własne λ_i macierzy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ są rzeczywiste i spełniają nierówności

$$0 < \alpha \leqslant \lambda_i \leqslant \beta \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Wykazać, że metoda iteracyjna Richardsona

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = (I - \tau A)\boldsymbol{x}^{(k)} + \tau \boldsymbol{b} \qquad (k \geqslant 0),$$

zastosowana do rozwiązania układu równań liniowych $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, jest zbieżna, jeśli $0 < \tau < 2/\beta$.

$$x^{(k+1)} = (I - \tau A)x^{(k)} + \tau b$$ macierz iteracji

λ - dowolna wart. wł. A $\qquad Av = \lambda v$

v - wektor wł. odpowiadający λ

macierz $I - \tau A$ ma wartość własną $1 - \tau\lambda$ dla tego samego v, bo

$$(I - \tau A)v = Iv - \tau A v = v - \lambda\tau v = (1 - \tau\lambda)v$$

dalej, chcemy pokazać, że promień spektralny macierzy $I - \tau A$ spełnia

$$|\varrho(I - \tau A)| < 1$$

(wtedy metoda iteracyjna zbieżna)

mamy $\quad 0 < \alpha \leq \lambda \leq \beta$

$$\Downarrow$$

$$\tau\alpha \leq \tau\lambda \leq \tau\beta$$

$$\Downarrow$$

$$-1 < 1 - \tau\alpha \leq 1 - \tau\lambda \leq 1 - \tau\beta < 1$$

bo $\tau\alpha < \frac{2}{\beta}\cdot\beta = 2$ $\qquad$ bo $\tau\beta > 0$

czyli $\quad |1 - \tau\lambda| < 1$