

Zad 6.

niedziela, 4 grudnia 2022 22:19

M7.6. 0,5 punktu Wykazać, że jeśli $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ jest układem ortogonalnym w przestrzeni $C_p(a, b)$, to elementy f_1, f_2, \dots, f_m są liniowo niezależne.

zakładamy, że $\{f_1, \dots, f_m\}$ - układ ortogonalny

rozważmy kombinacje liniowe

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_m f_m = 0$$

chcemy pokazać, że $\alpha_i = 0 \quad \forall i = 1 \dots m$

lemat. $\langle x, 0 \rangle = 0$

$$\langle x, 0 \rangle = \langle x, 0+0 \rangle = \langle x, 0 \rangle + \langle x, 0 \rangle$$

$$\langle x, 0 \rangle = 2 \langle x, 0 \rangle \Rightarrow \langle x, 0 \rangle = 0 \quad \square$$

mamy dla dowolnego $i = 1 \dots m$

$$0 = \langle f_i, 0 \rangle = \langle f_i, \sum_{i=1}^m \alpha_i f_i \rangle = \sum_{i=1}^m \alpha_j \langle f_i, f_j \rangle = \alpha_i \underbrace{\langle f_i, f_i \rangle}_{\neq 0}$$

$\langle f_i, f_j \rangle = 0 \quad i \neq j$

czyli $\alpha_i = 0 \quad \forall i = 1 \dots m \quad \square$