Zad 4.

niedziela, 4 grudnia 2022 22:08

M7.4. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Udowodnić twierdzenie Pitagorasa, tzn. jeśli $\{f_0, f_1, \dots, f_1\}$ jest układem ortogonalnym, to

$$\Big\|\sum_{j=0}^{n} c_j f_j\Big\|_2^2 = \sum_{j=0}^{n} |c_j|^2 \|f_j\|_2^2.$$

$\langle ax, y\rangle = a\langle x, y\rangle$
własność iloczynu skalarnego
$\langle x, ay\rangle = \bar{a}\langle x, y\rangle$
w zespolonym

$$\Big\|\sum_{j=0}^{n} c_j f_j\Big\|^2 = \Big\langle \sum_{j=0}^{n} c_j f_j, \sum_{i=0} c_i f_i \Big\rangle =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} c_j \Big\langle f_j, \sum_{i=0}^{n} c_i f_i \Big\rangle = \sum_{j=0}^{n} c_j \cdot \sum_{i=0}^{n} \bar{c_i} \langle f_j, f_i\rangle$$

$\langle f_j, f_i\rangle = 0$ dla $j \neq i$ (bo $\{f_0, f_1, \dots, f_n\}$ układ ortogonalny)

$\langle f_j, f_j\rangle \neq 0$

$$= \sum_{j=0}^{n} c_j \cdot \bar{c_j} \underbrace{\langle f_j, f_j\rangle}_{= \|f_j\|^2} = \sum_{j=0}^{n} |c_j|^2 \|f_j\|^2 \quad \square$$

Kwadrat modułu liczby z jest równy iloczynowi liczby z i jej sprzężenia:

$$|z|^2 = z \cdot \overline{z}$$