

Pracownia z Analizy Numerycznej (M)

Sprawozdanie do zadania P1.9

Mateusz Łuczyński

Wrocław, 20 listopada 2022

1. Wstęp

Fizyka od lat zajmuje się badaniem kosmosu, a co za tym idzie - badaniem zależności pomiędzy ruchem różnych obiektów kosmicznych, a wielkościami opisującymi te obiekty. Jedną z ważniejszych takich zależności pozwala dla zadanego czasu t wyznaczyć współrzędne planety na jej orbicie eliptycznej:

$$(1) \quad \left(a(\cos x - e), a\sqrt{1 - e^2} \sin x \right)$$

Wielkości a , x oraz e oznaczają kolejno półosć wielką elipsy, kąt zwany *anomalią mimośrodową* i *mimośród orbity*. Związek pomiędzy anomalią mimośrodową, a mimośrodem orbity opisuje równanie Keplera

$$(2) \quad x - e \sin x = M \quad (0 < |e| < 1),$$

gdzie M to *anomalia średnia* zdefiniowana wzorem $M = 2\pi t/T$, przy czym T oznacza *okres orbitalny* (definicje tych pojęć można znaleźć w artykule [3], bądź na własną rękę w Internecie). W praktyce, wielkości e oraz M są dane, a równanie (2) przyjmuje postać równania nieliniowego ze względu na x .

Celem tego sprawozdania jest przedstawienie trzech numerycznych sposobów rozwiązywania równania Keplera, a dokładniej metodą bisekcji, specjalnie dobraną metodą iteracyjną (szerzej opisaną w rozdziale 3), a także metodą Newtona. Rozważone zostanie również zagadnienie doboru przybliżeń startowych dla tych metod.

Wszystkie pomiary zostały wykonane przy użyciu kodu zawartego w pliku `program.jl`, wykorzystując algorytmy, których implementacja znajduje się w pliku `methods.jl`. Do sprawozdania została również załączona interaktywna wersja tych programów w środowisku Jupyter (plik `program.ipynb`).

2. Pierwsze podejście

Fakt. Dla dowolnej liczby $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $-|x| \leq x \leq |x|$

Przekształcając równanie (2) otrzymujemy $x = M + e \sin x$. Korzystając z wcześniej wspomnianego faktu wprowadzamy następującą nierówność

$$M - |e| \leq M - |e \sin x| \leq M + e \sin x \leq M + |e \sin x| \leq M + |e|$$

Widać zatem, że rozwiązanie równania Keplera należy do przedziału $[M - |e|, M + |e|]$.

Można jednak otrzymać lepsze oszacowanie. Rozważmy funkcję

$$(3) \quad f(x) = x - e \sin x - M.$$

Znalezienie rozwiązania równania (2) sprowadza się do znalezienia zera funkcji f . Zakładając, że mamy do czynienia z orbitami eliptycznymi i biorąc pod uwagę jedynie pierwszą połowę ruchu obiektu po takiej orbicie, tj. przyjmując $0 \leq e \leq 1$ oraz $M \in [0, \pi]$, mamy $f(M) = -e \sin M \leq 0$ oraz $f(M + e) = e - e \sin(M + e) \geq 0$. Wiemy zatem, że ciągła funkcja f zmienia znak na przedziale $[M, M + e]$. W ten sposób otrzymujemy nowe, satysfakcjonujące szacowanie x

$$(4) \quad M \leq x \leq M + e$$

Analogiczne nierówności zachodzą również wtedy, kiedy $M \in [\pi, 2\pi]$. Szacowanie (4) przyjmuje w tym wypadku postać $M - e \leq x \leq M$. W dalszej części sprawozdania będziemy jednak bez straty ogólności rozważać jedynie pierwszy przypadek.

Znając już przedział (4), w którym znajduje się rozwiązanie równania Keplera można zastosować metodę bisekcji do znalezienia zera funkcji (3). Jako e oraz M przyjęto ich faktyczne wartości dla Ziemi, to znaczy $e = 0.0167086$ oraz $M = 0.17202124303$ (dla czasu $t = 10$). Wyniki obliczeń dla kolejnych iteracji algorytmu przedstawiono w tabeli 1.

Porównując otrzymane wartości z dokładnym wynikiem $x = 0.17492918103 \dots$ widać, że końcowe przybliżenia są zadowalające. Mniej zadowalająca jest jednak liczba iteracji potrzebna, by otrzymać wynik z taką dokładnością. Wiadomym faktem jest, że metoda bisekcji osiąga zbieżność na poziomie co najwyżej liniowym (każda iteracja algorytmu znajduje jedną dokładną cyfrę binarną wyniku). Skutkuje to tym, że aby wyprodukować wynik mający 11 dokładnych cyfr dziesiętnych, algorytm potrzebuje ≈ 33 iteracji (pod warunkiem, że początkowy przedział jest odpowiednio dobrany). Chcielibyśmy móc jednak znajdować rozwiązanie szybciej oraz dokładniej.

3. Drugie podejście

Rozważmy teraz specjalnie dobraną metodę iteracyjną $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, gdzie

$$(5) \quad \varphi(x_n) = e \sin x_n + M$$

Dla x spełniającego równanie (2) mamy $\varphi(x) = e \sin x + M = x$, zatem szukane rozwiązanie jest punktem stałym funkcji φ . Ponadto, pochodna φ zadana wzorem $\varphi'(x) = e \cos x$ spełnia nierówność $|\varphi'(x)| \leq e < 1$, dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$. Wiemy zatem, że φ zbiega do rozwiązania

Tabela 1: Kolejne przybliżenia x otrzymane metodą bisekcji

Iteracja	x_i	$f(x_i)$	ε_i
1	0.1803755430299526	5.36×10^{-3}	—
2	0.1761983930299526	1.25×10^{-3}	2.37×10^{-2}
3	0.1741098180299526	-8.06×10^{-4}	1.20×10^{-2}
4	0.1751541055299526	2.21×10^{-4}	5.96×10^{-3}
5	0.1746319617799526	-2.92×10^{-4}	2.99×10^{-3}
6	0.1748930336549526	-3.56×10^{-5}	1.49×10^{-3}
7	0.1750235695924526	9.28×10^{-5}	7.46×10^{-4}
8	0.1749583016237026	2.86×10^{-5}	3.73×10^{-4}
\vdots			
29	0.1749291810547883	1.69×10^{-11}	1.78×10^{-10}
30	0.1749291810392272	1.59×10^{-12}	8.90×10^{-11}
31	0.1749291810314467	-6.06×10^{-12}	4.45×10^{-11}
32	0.1749291810353369	-2.23×10^{-12}	2.22×10^{-11}

x_i – przybliżenie x dla i -tej iteracji algorytmu,
 $f(x_i)$ – wartość funkcji (3) w punkcie x_i ,
 ε_i – błąd x_i względem poprzedniego przybliżenia

równania Keplera niezależnie od wyboru przybliżenia początkowego. Sensownym jednak wydaje się przyjęcie za $x_0 = 0$, gdyż dla takiego przybliżenia w kolejnym kroku otrzymujemy $x_1 = e \sin 0 + M = M$, a z wcześniejszych rozważań wiadomo, że $x \in [M, M + e]$. Wybrane w ten sposób przybliżenie może zatem pomóc w zminimalizowaniu iteracji algorytmu potrzebnych aby uzyskać wynik na satysfakcjonującym poziomie.

Do testów przyjęto identyczne wartości e oraz M jak w przypadku metody bisekcji. Wyniki przedstawiono w tabeli 2. Na pierwszy rzut oka widać, że algorytm wykorzystujący metodę (5) potrzebował zdecydowanie mniejszej ilości iteracji od tego korzystającego z metody bisekcji. Mianowicie wynik z dokładnością do 11 cyfr znaczących otrzymany został już w kroku szóstym, natomiast kolejne dwie iteracje zwiększyły tą dokładność do cyfr czternastu. Analizując wykładniki potęg stojących przy błędach względnych kolejnych przybliżeń można zauważyć, że każdy krok metody znajduje średnio dwie nowe cyfry dokładne. Ponownie mamy zatem do czynienia ze zbieżnością liniową, ale lepszą niż w przypadku metody bisekcji. Okazuje się jednak, że liczbę iteracji można zmniejszyć jeszcze bardziej.

Tabela 2: Kolejne przybliżenia x otrzymane metodą (5) dla $x_0 = 0$

Iteracja	x_i	$f(x_i)$	ε_i
1	0.1720212430299526	-2.86×10^{-3}	—
2	0.1748813227385751	-4.71×10^{-5}	1.64×10^{-2}
3	0.1749283935925948	-7.74×10^{-7}	2.69×10^{-4}
4	0.1749291680812959	-1.27×10^{-8}	4.43×10^{-6}
5	0.1749291808244301	-2.10×10^{-10}	7.28×10^{-8}
6	0.1749291810341007	-3.45×10^{-12}	1.20×10^{-9}
7	0.1749291810375505	-5.68×10^{-14}	1.97×10^{-11}
8	0.1749291810376073	-9.16×10^{-16}	3.24×10^{-13}

x_i – przybliżenie x dla i -tej iteracji algorytmu,
 $f(x_i)$ – wartość funkcji (3) w punkcie x_i ,
 ε_i – błąd x_i względem poprzedniego przybliżenia

4. Finalne podejście

Jedną z najpopularniejszych metod rozwiązywania równań nieliniowych jest zdecydowanie metoda Newtona (zwana również metodą Newtona-Raphsona), która dla zadanej funkcji f , jej pochodnej f' oraz przybliżenia początkowego x_0 , konstruuje kolejne przybliżenia miejsca zerowego tej funkcji ze wzoru

$$(6) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Nic nie stoi zatem na przeszkodzie, żeby zastosować ją również do znalezienia rozwiązania równania Keplera. Mamy $f(x_n) = x_n - e \sin x_n - M$, $f'(x_n) = 1 - e \cos x_n$. Pozostaje jedynie ustalić dobre przybliżenie startowe x_0 .

Okazuje się, że dobrego kandydata na punkt x_0 można wytypować wykorzystując pewną prostą obserwację. Rozważmy prostą przechodzącą przez punkty $f(M)$ oraz $f(M + e)$. Korzystając z szacowań wyprowadzonych w rozdziale 2 dotyczących wartości funkcji f w tych punktach wiemy, że tak zadana prosta musi przeciąć oś x w jakimś miejscu, które oznaczmy jako x_0 . Tangens kąta α pomiędzy osią x , a odcinkiem łączącym punkty $f(M)$ i $f(M + e)$ można wyrazić na dwa równoważne sposoby

$$(7) \quad \tan \alpha = \frac{f(M + e) - f(M)}{(M + e) - M} = \frac{0 - f(M)}{x_0 - M}$$

Rozpisując wartości funkcji f z jej definicji oraz przekształcając w prosty sposób równanie (7) otrzymujemy zatem przybliżenie początkowe

$$(8) \quad x_0 = M + \frac{e \sin M}{1 - \sin(M + e) + \sin M}.$$

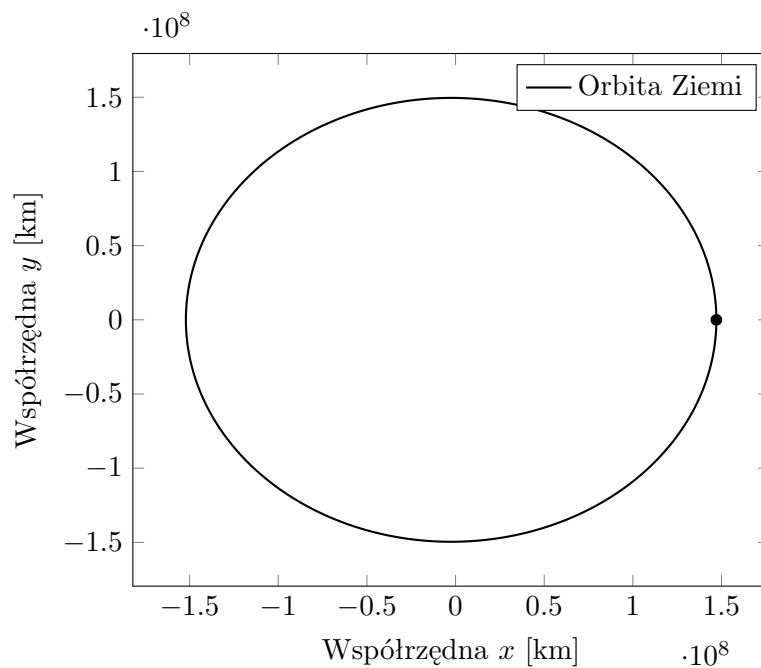
Przeprowadzając eksperymenty numeryczne dla tak wybranego przybliżenia okazuje się, że metoda Newtona zwraca wynik z ogromną dokładnością po wykonaniu zaledwie jednej iteracji. Dla porównania, metoda z rozdziału 3 dla tego samego przybliżenia x_0 wciąż potrzebuje ≈ 5 iteracji do wyliczenia wyniku z taką precyzją.

Biorąc średnią ilość iteracji algorytmu potrzebnych do uzyskania dokładności rzędu 10^{-16} , dla kolejnych wartości $M \in [0, \pi]$ i różnych ekscentryczności otrzymujemy ≈ 2.57 iteracji dla $e = 0.01$. Wartość ta zwiększa się do ≈ 6 iteracji dla dużych e (w tym przypadku $e = 0.9$). Metoda (5) dla tych samych e i tej samej dokładności potrzebuje odpowiednio ≈ 6.9 oraz ≈ 71.8 iteracji. Metoda bisekcji natomiast, ≈ 46.07 i, co zaskakujące, ≈ 52.17 iteracji. Widać zatem, że metoda Newtona przeważa nad pozostałymi zarówno dla małych jak i dużych wartości e . Widać także, że metoda z rozdziału 3 zaczyna być bardzo niestabilna dla dużych ekscentryczności, podczas gdy w metodzie bisekcji takie zjawisko nie występuje.

5. Podsumowanie

Przeprowadzając eksperymenty numeryczne i analizując wydajność rozważonych trzech metod okazało się, że spośród nich najlepsza do rozwiązywania równania Keplera jest metoda Newtona. Testy wykazały, iż zwraca ona wynik w najmniejszej ilości iteracji, jednocześnie zapewniając jego największą dokładność. Eksperymenty dla różnych wartości wejściowych pokazały również, że pomimo lepszych wyników dla małych danych, metoda (5) wypada gorzej od metody bisekcji dla dużych e .

Nawiązując do wstępu sprawozdania, rysunek 5 przedstawia orbitę Ziemi. Została ona nakreślona w dwuwymiarowym układzie współrzędnych (przyjmujemy, że Słońce znajduje się w punkcie $(0, 0)$), korzystając ze wzoru (1) dla wartości x znalezionych przy użyciu metody Newtona i odpowiadających kolejnym wartościom M z przedziału $[0, 2\pi]$. Zaznaczona została również pozycja Ziemi na początku roku, tzn. kiedy $t = 0$.



Literatura

- [1] R. Esmaelzadeh, H. Ghadiri, Appropriate Starter for Solving the Kepler's Equation, International Journal of Computer Applications 89 (2014), 31–38.
- [2] G. R. Smith, A simple, efficient starting value for the iterative solution of Kepler's equation, Celestial Mechanics 19 (1979), 163–166.
- [3] G. Łukaszewicz, Równanie Keplera w “Principiach Newtona”, pismo “Delta” (październik 2021), ISSN 0137–3005