Zad 11.

środa, 19 kwietnia 2023 17:45

Zadanie 11. Ustal, dla jakich wartości parametru $\lambda \in \mathbb{R}$, operator $F : C([a,b]) \to C([a,b])$ zadany wzorem

$$F(u)(x) = x + \lambda \int_a^b \sin(u(y) + x)\,\mathrm{d}y$$

jest kontrakcją.

$y, \tilde{y} \in C[a,b]$

$$|F(y)(t) - F(\tilde{y})(t)| =$$

$$= \left|\lambda \int_a^b \sin(y(s)+t) - \sin(\tilde{y}(s)+t)\, ds\right| \leq$$

z tw. o wart. średniej

$$\leq |\lambda| \int_a^b |\sin(y(s)+t) - \sin(\tilde{y}(s)+t)|\, ds \leq$$

$$\leq |\lambda| \int_a^b |y(s)+t - \tilde{y}(s)-t|\,|\cos\Theta|\, ds \leq$$

$$\leq |\lambda| \int_a^b |y(s) - \tilde{y}(s)|\, ds \leq$$

$$\leq |\lambda| \int_a^b \|y - \tilde{y}\|\, ds = |\lambda| \cdot \|y - \tilde{y}\| \cdot (b-a)$$

czyli $|\lambda| \cdot (b-a) < 1$

$$\Rightarrow |\lambda| < \frac{1}{b-a} \Rightarrow \lambda \in \left(-\frac{1}{b-a}, \frac{1}{b-a}\right)$$