

Véletlen folyamatok

Ladóczki Bence

Április 14, 2024

1 Bevezetés

Véletlen (sztochasztikus) folyamatnak nevezzük azon empirikus folyamatok matematikai absztrakcióját, amit valószínűségi törvények vezérelnek. A jelen kéziratban a véletlen folyamatok elméletének csupán egy részhalmazával foglalkozunk. A megértéshez szükség van alapvető valószínűség számítási előismeretekre.

A valószínűség számítás a mértékelmélet egy speciális tárgyalásmódja, annak egy alkalmazott ága. Elviekben van arra is lehetőség, hogy a minta-sorokat és az azokon értelmezett függvényeket a valószínűségi számítástól függetlenül tárgyaljuk és hagyományos sorokkal valamint függvényekkel foglalkozunk és a valószínűség számításra mint az eloszlások tanulmányozására tekintünk. Egy időben a matematika csak így tudta például a nagy számok erős törvényét teljesen egzakt módon értelmezni. Már azonban tudjuk, hogy erre nincs szükség és ez sok helyen túlságosan lerövidítené az anyagot és elferdítené a valóságot.

A valószínűség számítást az teszi egyedivé a matematikai területek között, hogy a legegyszerűbb törvényszerűségei is meglehetősen bonyolult matematikai törvényszerűségekből következnek, viszont a bonyolultabb eredményeket is ettől függetlenül ismerik és alkalmazzák a gyakorlatban (gondoljunk például a statisztikusokra). A valószínűség számítás valóban egzakt tárgyalásmódja ellen gyakran felhozzák azt az érvet, miszerint nincs szükség ilyen szinten belemenni a részletekbe. A könyv végére mindenki hozza meg magának a saját ítéletét.

2024. április 14.
Budapest

2 Bevezetés és Valószínűség Elméleti Alapok

A jelen kéziratban bonyolult matematikai módszerek tárházát használjuk, ettől függetlenül azonban mindig a valószínűség számítás nyelvénél segítségül hívjuk majd ki az eredményeket. Remélem, hogy azon specialisták számára akik tisztában vannak vele, hogy hogyan kell mondjuk feltételes valószínűséget vagy várható értéket számolni nem fog problémát okozni a megértés. Ebben a fejezetben a legfontosabb matematikai alapokkal ismerkedünk meg.

Amikor magasabb szintű valószínűség számítással foglalkozó könyvet szeretnénk megírni – mivel a valószínűség számítás a mértékelmélet egy ága – két választás előtt áll a szerző. Vagy hagy egy fejezetet a mértékelméletnek, vagy feltételezi, hogy az olvasó a rendelkezésre álló egyéb mértékelméleti szakkönyvekből (előadásokból) már elsajátította a szükséges előismereteket. Praktikussági okokra hivatkozván a második opciót választom, és azt tartom szem előtt, hogy itt egy olyan kézirat készül, amit a mértékelmélet alapos ismerete nélkül is lehet abszolválni. A valószínűség számítás alapvető összefüggéseit, az abban használt módszereket azonban ismertnek feltételezem.

2.1 Milyen Térben Dolgozunk?

Amióta a matematikusok a valószínűség számításra egzakt tudományra tekintenek az olyan fogalmakra mint például a *megjelenés*, *esemény*, *urna*, *kocka* és hasonló nincs többé szükség, amikor valószínűség számításról beszélünk. Ettől függetlenül, ha továbbra is használjuk ezeket, akkor az intuíció a segítségünkre lesz az elkövetkezendő diszkusziók során és analitikus módszereket dolgozhatunk majd ki, valamint új kutatási irányok nyílhatnak meg. Főként emiatt a mai napig gyakran a szóhasználat megmarad még akkor is ha tisztán elméleti valószínűség számításról beszélnek a matematikusok is.

A valószínűség számítás alkalmazása során a *valószínűséget* események bekövetkezésével azonosítják. Olyan kérdéseket szoktunk feltenni, hogy például mi annak a valószínűsége, hogy 5-öt dobunk egy dobókockával? Vagy ha egy részecskre Brown mozgást végez, akkor mi lesz az x irányú elmozdulás centiméterben kifejezett mérőszámának valószínűségi eloszlása t idő múlva ($x(t)$)? Az ilyen eseményekhez rendeljük a valószínűséget. Ahhoz például, hogy 5-öt dobunk egy dobókockával az $\frac{1}{6}$ valószínűséget rendeljük hozzá. Ahhoz, hogy páros számot dobunk, az $\frac{1}{2}$ valószínűséget rendeljük hozzá. Amikor Brown mozgásról beszélünk, akkor az $x(3) > 7$ eseményhez a 9. fejezetben ismertetett szabályok szerint kell valószínűséget rendelni. A kocka esetében a következő módon lehet a matematika nyelvén megfogalmazni a jelenséget. Az összes lehetséges kimenetelhez hozzárendeljük az egész számokat: $1 \dots 6$ és ezekhez a számokhoz az $\frac{1}{6}$ valószínűséget rendeljük hozzá. Ezek tetszőleges osztályához pedig az $\frac{n}{6}$ valószínűséget rendeljük hozzá. Az például hogy páros számot kapunk csak annyit jelent, hogy $n = 3$ -ra kiértékeljük a formulát és $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ kapunk valószínűségnek. Ezt a gondolatmenetet elvégezni a Brown mozgás esetére kicsivel bonyolultabb és emiatt ezt most nem tesszük meg, viszont megjegyzem itt is csupán arról van szó, hogy események matematikai absztrakciójához számokat kell rendelni. Ezentúl az események matematikai absztrakciójának egy *ponthalmazt* választunk.

A valószínűség számítás elmélete nem más mind a különböző terek mérhetőségi tulajdonságainak vizsgálata, valamint az ezeken a tereken definiált mérhető függvények analízise. A valószínűség számítás alkalmazási területeire való tekintettel hívhatjuk ezeket a tereket *mintavételi* tereknek, a mérhető halmazokat pedig *eseményeknek*, ez a megközelítés azonban nem mindig állja meg a helyét.

Most pedig egy következetes matematikai tárgyalásmód kerül bevezetésre. Feltesszük tehát, hogy egy Ω alaptérrel van dolgunk és hogy ezen a téren pon-

thalmazok vannak. Ezeket a halmazokat hívjuk majd *mérhető halmazoknak*. Feltesszük, hogy a mérhető halmazok osztálya Borel mezőt alkot, továbbá azt is megköveteljük, hogy legyen egy $\mathbf{P}\{\cdot\}$ függvény, amely minden mérhető halmazra definiálva van. Ezt hívjuk *valószínűségi mértéknek*, ami azt jelenti, hogy $\mathbf{P}\{\cdot\}$ értelmezhető minden mérhető halmazra, nem negatív és tökéletesen additív a teljes téren pedig 1-et vesz fel. A $\mathbf{P}\{\Lambda\}$ számot Λ *valószínűségének* vagy *mértékének* nevezzük. Egy ω függvény mérhetőségét hasonló módon kell megadni a mérhető halmazokkal valamint a valószínűségi mérték szerinti integrállal kifejezve. Ez az egy mérhető ϕ függvény mérhető Λ halmazok feletti integrálját jelenti:

$$\int_{\Lambda} \phi(\omega) d\mathbf{P} \quad \text{vagy} \quad \int_{\Lambda} \phi d\mathbf{P} \quad (1)$$

Egy tulajdonságra azt mondjuk hogy *majdnem mindenhol* igaz, ha Ω minden pontjára igaz kiveéve a 0 valószínűségű pontokat. Erre azt is mondhatjuk, hogy majdnem minden ω pontban igaz, vagy hogy 1 valószínűséggel igaz.

Nézzük például azt az esetet, amikor egyszer dobunk a dobókockával. Ebben az esetben az Ω tér az $1 \dots 6$ számokból áll. Egy j pontot azzal az eseménnyel azonosítjuk, amikor j -t dobunk a kockával. Ebben az esetben minden Ω halmaz mérhető és minden halmazhoz a benne lévő pontok számának az $\frac{1}{6}$ -át rendeljük hozzá. Így joggal beszélhetünk egy mintavételi térről, hiszen a tér pontjai és a lehetséges események között egyértelmű megfeleltetést tudunk felállítani. Most tekintsük ugyanezen kísérlet egy más matematikai modelljét. Ezen alkalommal az Ω térbe vegyük bele az összes valós számot és a kockával való dobásból származó eseményekhez rendeljük azokat a számokat a térből, mint az előbb. Más szabályt ne állítsunk fel. Ebben az esetben is minden Ω pont halmaz mérhető és minden halmaz mértéke $\frac{1}{6}$ -a annak, hogy hány egész szám kerül bele az $1 \dots 6$ intervallumból. A matematikai modell, amit így kapunk majdnem teljesen ugyan az, mint az előző esetben, azonban a mintavételi tér elnevezés kicsit kevésbé praktikus, hiszen így már nehezebb megfeleltetni minden pontot egy valós eseménnyel. Végezetül tekintsünk egy harmadik felállást, amikor is az Ω tér az $[1, 7)$ félig nyílt intervallumon található összes számból áll. Most feltessük meg a $[j, j+1)$ intervallumot annak az eseménynek, amikor j -t dobunk. Ebben az esetben a mérhető pontok halmazán intervallumokat ($[j, j+1)$), vagy ezek unióját értjük. És bármely mérhető halmaz mértéke megegyezik az intervallumok darabszámának $\frac{1}{6}$ -ával. Ezt a modellt nyilván ugyanolyan jól lehet használni mint az előző kettőt, azonban a mintatér elnevezés itt sem állja meg a helyét. Nyilván nem utasíthatjuk vissza ezt az okfejtést, mondván hogy a modell túl bonyolult. A feleslegesen bonyolult modellek még a gyakorlati alkalmazásokban sem söpörhetőek le az asztalról. A matematikai modell felállításának módja attól függ, hogy milyen paramétereket veszünk alapul. Az első modellben konkrétan a dobások kimenetelét vettük alapul. Azonban ha a dobókockára úgy tekintünk, mint egy fizikai objektum, ami az euklidészi térben mozog valamilyen sebességgel, akkor a 2 oldalának hely és sebesség vektorai egyértelmű meghatározzák a dobás kimenetelét (12 paraméter). Az Ω térnek tehát természetes módon választhatnánk a 12 darab kiindulási hely és

sebesség komponenseket. Az Ω tér egy pontja tehát egyértelműen meg fogja határozni a dobás kimenetelét. Jelöljük Λ_j -vel azokat a pontokat a térben, amik végül majd j dobást eredményeznek. Az előző gondolatmenet alapján minden Λ_j halmazhoz $\frac{1}{6}$ valószínűséget kell rendelnünk. Csupán ennyi tudásra van szükségünk az Ω térről, ha csak a dobás kimenetelére vagyunk kíváncsiak. Ez a modell nagyon hasonlít az előbbiekben ismertetett harmadik modellre. Arról van szó tehát, hogy mind az elméleti, mind a gyakorlati tárgyalásmódok során, megválaszthatjuk az Ω teret olyan kritériumok alapján, ami egyszerűsíti a kezelést (hogy lehessen mondjuk mintavételi térnek nevezni), azonban ez a kritérium pont az azt követő levezetésekben fog elveszni, amikor is valószínűségi eloszlásokat hozunk ki a kezdeti felállásból. Pontosan emiatt az Ω térrel kapcsolatban nem kötünk ki semmi olyat, ami a $\mathbf{P}\{\Lambda\}$ halmazfüggvény létezéséből implicit módon ne következne. A $\mathbf{P}\{\Lambda\}$ létezéséből ugyan következik, hogy az Ω tér nem lehet üres, de ennél többet nem várunk el az Ω tértől. A továbbiakban az Ω tér alatt egy absztrakt teret értünk. Amikor konkretizáljuk a teret, akkor az Ω térnek az $0 \leq x \leq 1$ intervallumot választjuk. Ez lehet továbbá az összes véges vagy végtelen valós értékű függvénye a t változónak, ahol $-\infty < t < \infty$, vagy a véges sík is akár. Ami valamelyest a valószínűség számítással kapcsolatos, az az, hogy a $\mathbf{P}\{\Lambda\}$ függvénytől megköveteljük a normalizálási feltételt, avagy $\mathbf{P}\{\Lambda\} = 1$. Ha elrugaszkodunk a valószínűség számítástól, akkor nem is mindig kell megkövetelni, hogy a halmazfüggvények véges értékek legyenek, ha pedig végesek, akkor arra sincs feltétlenül szükség, hogy a $\mathbf{P}\{\Lambda\} = 1$ feltétel teljesüljön.

Foglalkozzunk a továbbiakban megint a dobókockával való dobással, hiszen ezen a példán keresztül érthetjük meg miért is olyan praktikus az alaptérként szorzatteret választani. Ha végtelenszer eldobjuk a dobókockát a következő módon könnyen definiálhatunk alapteret. Az Ω térben legyen minden ω pont egy sorozat: ξ_1, ξ_2, \dots , ahol minden ξ_i egy egész lehet az $1 \dots 6$ intervallumból. Az Ω tér egy pontja tehát lehet egy olyan sorozat, ami akkor valósul meg, amikor a dobókockát végtelenszer eldobjuk. Ebben az esetben azonosíthatjuk az összes olyan sor osztályát, ami mondjuk j -vel kezdődik. Ezen sorok osztályához az $\frac{1}{6}$ valószínűséget rendelhetjük hozzá és így az egyszeri dobókocka dobás egy másik matematikai modelljét kapjuk meg. Az ilyen jellegű megválasztásban az a szerencsés, hogy ezt a modellt ki lehet bővíteni tetszőleges számú dobásra ha az osztályokat a j_1, \dots, j_n -el kezdődő sorokból képezzük és ezekhez rendeljük azt az eseményt, miszerint az első n dobás során pontosan j_1, \dots, j_n -et kapunk. Ezen sorok osztályához (Ω halmaz) az $(\frac{1}{6})^n$ valószínűséget rendelhetjük hozzá. Valamennyire igazuk lehet azoknak akik azt, mondják, hogy a végtelen darabszámú kísérletet a gyakorlatban sosem végzünk el, azonban a gyakran még a legegyszerűbb esetben sem tudjuk kikerülni a végtelen sorok tárgyalását. Például ha analizálni szeretnénk azt az eseményt, amikor valami először következik be, mondjuk először hatot dobunk a kockával, akkor ezt csak végtelen sorokon értelmezett mintatérén tudjuk megtenni, hiszen azt a számot, ami ahhoz kell, hogy valami megtörténjen nem tudjuk alulról becsülni mielőtt elvégeznénk a kísérletet. Ez a szám az Ω téren egy nem korlátolt függvény. Az előző példában az Ω tér szorzattér és végtelen sok faktortere van, ezek pedig

mind hat pontot tartalmaznak.

Az Ω téren értelmezhetünk feltételeket, ezeket C -vel jelöljük és az $\{C\}$ jelölést használjuk majd azokra a pontokra, amik kielégíti az Ω téren a C feltételt. Például ha X lineáris halmaz és ha x egy ω függvény, akkor $\{x(\omega) \in X\}$ egy olyan ω halmaz, amelyen $x(\omega)$ egy szám az X halmazból.

Még nem tettük fel, hogy az alap valószínűségi mérték teljes. Arról van szó, hogy ha Λ_0 mérhető és mértéke 0 és ha $\Lambda \supset \Lambda_0$ részhalmaza, attól még nem kell, hogy Λ mérhető legyen. Ha ezt le szeretnénk fordítani a valószínűség számítás nyelvére, azt mondhatjuk, hogy ha van két eseményünk, Λ és Λ_0 és Λ bekövetkeztéből következik Λ_0 , akkor:

$$\mathbf{P}\{\Lambda_0\} = 0 \quad , \quad (2)$$

és ettől függetlenül Λ valószínűsége nem biztos, hogy értelmezett. Nyilván, ha $\mathbf{P}\{\Lambda\}$ értelmezett, akkor az 0. Egy matematikus számára ez a tulajdonság zavaró lehet ha meg szeretné magának tartani a valószínűség intuitív értelmezését. Itt tehát két választás előtt állunk, vagy módosítjuk intuíciónkat vagy megváltoztatjuk a matematikát. A választás nem túl fontos, azonban ha nagyon ragaszkodunk az intuíciónkhoz, akkor könnyen átdefiniálhatjuk fogalmainkat. Valójában a valószínűségi mértéket könnyedén teljessé lehet tenni ha az ω halmazok osztályát némileg kibővítjük. Ettől függetlenül, most azonban mégis tegyük inkább fel, hogy a valószínűségi mérték, amivel ezentúl dolgozni fogunk teljes.

2.2 Valószínűségi Változók és Eloszlások

Egy valós x függvényt egy ω ponttérén valós *valószínűségi változónak* nevezzük ha az ω halmazokon létezik valószínűségi mérték és egy tetszőleges λ valós számhoz az $x(\omega) \leq \lambda$ egyenlőtlenség bekorlátozza az ω halmazt és így is mérhető halmazt kapunk. Ebből következő módon:

$$F(\lambda) = \mathbf{P}\{x(\omega) \leq \lambda\} \quad (3)$$

létezik tetszőleges valós λ -ra. A matematika nyelvét használva ezt úgy is mondhatjuk, hogy egy (valós) valószínűségi változó tulajdonképp nem más, mint egy (valós) mérhető függvény. Egy komplex valószínűségi változó pedig egy ω függvény, aminek a valós és a képzetes részei mérhetőek. Mostantól, ha mást nem állítunk, mindig fel fogjuk tenni, hogy ha esetleg több valószínűségi változóról lenne szó, akkor a valószínűségi változókat mindig ugyanazon ω téren fogjuk értelmezni. A matematikusok egy része már a mértékelmélet megjelenése előtt is foglalkozott valószínűségi változókkal, viszont akkor még nem volt tudatosítva hogy tulajdonképp mérhető függvények tulajdonságait vizsgálják. Az akkori tisztán valószínűség számítási nyelvezetet át lehet fordítani a mai mértékelméleti nyelvezetre. Ezek mellett meg fogjuk tartani a klasszikus valószínűség számítási terminusokat is, hiszen az alkalmazások során ez segítség lehet. Az analízisben gyakran praktikus lehet ugyanazt az a jelölést használni a függvényre, valamint a felvett értékére az értelmezési tartományában és ez a kétértelműség gyakran ki is fizetődik. Sok esetben azonban ennél pontosabban kell eljárunk. A

függvényeket általában egy betűvel fogjuk jelölni és más jelölést fogunk alkalmazni a függvény értékére az adott pontban. Így tehát az $x(\omega)$ alatt az x függvény értékét értjük az ω pontban. Gyakran, amikor célszerű, akkor az x függvényt az $x(\cdot)$ jellel jelöljük majd.

Az (3)-ben definiált F függvényt az x valószínűségi változó *eloszlásfüggvényének* hívjuk.

- 3 A Véletlen Folyamatok Definíciója**
- 4 Folyamatok Kölcsönösen Független Valószínűségi Változókkal**
- 5 Folyamatok Kölcsönösen Korrelálatlan vagy Ortogonális Valószínűségi Változókkal**
- 6 Diszkrét Paraméterű Markov Folyamatok**
- 7 Folytonos Paraméterű Markov Folyamatok**
- 8 Martingálok**
- 9 Független Növekményű Folyamatok**
- 10 Ortogonális Növekményű Folyamatok**
- 11 Diszkrét Paraméterű Stacionárius Folyamatok**
- 12 Folytonos Paraméterű Stacionárius Folyamatok**
- 13 Lineáris Legkisebb Négyzetes Predikció — Stacionárius Tág Értelmű Folyamatok**