Cours 3. Approximations et Convergences

A. Inégalités

A.1. Inégalité de Markov

Si X est une variable aléatoire positive ou nulle dont l'espérance existe, alors pour tout $y > 0$, on a

$$\mathbb{P}(X \geq y) \leq \frac{E(X)}{y}$$

Preuve :

$$E(X) = \int_0^\infty t.f_X(t)dt \geq \int_y^\infty t.f_X(t)dt \geq \int_y^\infty y.f_X(t)dt = y.\mathbb{P}(X \geq y)$$

On ne peut améliorer cette inégalité car elle est atteinte par exemple pour X constante et $y = E(X)$.

A.2. Inégalité de Tchebychev

Si X est une variable aléatoire ayant une variance finie, alors pour tout $t > 0$ on a :

$$\mathbb{P}\big(|X - E(X)| \geq t\big) \leq \frac{V(X)}{t^2}$$

Ce résultat très général est peu précis. Il est une conséquence de l'inégalité de Markov :
Soit $Y = (X - E(X))^2$. Alors on applique l'inégalité de Markov sur Y, en utilisant $E(Y) = V(X)$ et on obtient l'inégalité de Tchebychev pour X.
Cette inégalité vous assure d'être proche de la moyenne. Ainsi pour toute variable aléatoire X d'espérance μ et d'écart-type σ on a :

$$\mathbb{P}(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \geq \frac{3}{4}$$

B. Loi des grands nombres

B.1. Loi faible

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite infinie de v.a. indépendantes et de même loi, et possédant une variance. Alors, pour tout nombre $\epsilon > 0$ fixé on a

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|E(X_1) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right| \geq \epsilon\right) = 0$$

L'idée intuitive est que si on mesure une même quantité aléatoire au cours d'une suite d'expériences indépendantes, alors la moyenne arithmétique des valeurs observées, c'est-à-dire la fréquence expérimentalement mesurée va converger (au sens précisé par ce théorème) vers l'espérance.
C'est une conséquence direct de l'inégalité de Tchebychev.

B.2. Théorème central limite

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires **indépendantes** de même loi, d'espérance μ et de variance σ^2 finies. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad S_n = \sum_{i=1}^n X_i \qquad Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

La loi de Z_n converge vers la loi normale $N(0,1)$, c'est-à-dire que pour tout $a < b$:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(a < Z_n < b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Ce théorème établit que la somme d'un grand nombre de variables aléatoires indépendantes et de même loi quelconque suit approximativement une loi normale.

B.3. Généralisation

Cette partie est facultative.
La loi normale apparaît naturellement dans de nombreuses situations naturelles. C'est une conséquence du théorème centrale limite et de ses généralisations. Il existe un certain nombre de généralisations où l'on n'a pas besoin que les X_i suivent la même loi. Nous vous en proposons une ici.
Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires **indépendantes**, d'espérance μ_i et de variance σ_i^2 finies.
Soit $m_n = \sum_{i=1}^n \mu_i$, $s_n^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$ et $r_n^3 = \sum_{i=1}^n E(|X_i - \mu_i|^3)$.
La condition de Lyapounov est la suivante :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{s_n} = 0$$

Si cette condition est remplie, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad S_n = \sum_{i=1}^n X_i \qquad Z_n = \frac{S_n - m_n}{s_n}$$

Et la loi de Z_n converge vers la loi normale $N(0,1)$.

La condition de Lyapounov peut sembler difficile à vérifier, mais on peut remarquer que si les variables X_i sont toutes définies sur un intervalle fini $[a, b]$, cette condition est **automatiquement vraie**. Ainsi le théorème centrale limite est vérifié dans ce cas, même si chaque X_i suit une loi différente des autres.

C. Lois de probabilité : Rappels

C.1. Loi uniforme

Cette loi modélise des expériences dont les résultats sont équiprobables.

Loi uniforme discrète entre 1 et n	Loi uniforme continue
$p(X=i)=\frac{1}{n} \qquad 1 \le i \le n$	$f(x)=\frac{1}{b-a} \qquad x \in [a,b]$
$E(X)=\frac{n+1}{2} \qquad V(X)=\frac{n^2-1}{12}$	$E(X)=\frac{a+b}{2} \qquad V(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$
$p(X \le i)=\frac{i}{n}$	$p(X \le x)=F(x)=\frac{x-a}{b-a}$

C.2. Loi géomètrique & exponentielle

Ces lois modélisent le temps nécessaire pour arriver à un succés.

Loi géométrique	Loi exponentielle
Loi géométrique $\mathcal{G}$ de paramètre $0 < p \le 1$	Loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$
$p(X=i)=p\cdot(1-p)^{i-1} \qquad i \ge 1$	$f(x)=\lambda\cdot e^{-\lambda\cdot x}$
$E(X)=\frac{1}{p} \qquad V(X)=\frac{1-p}{p^2}$	$E(X)=\frac{1}{\lambda} \qquad V(X)=\frac{1}{\lambda^2}$
$p(X \le i)=1-(1-p)^i$	$p(X \le x)=F(x)=1-e^{-\lambda\cdot x}$

On parle parfois de loi géométrique de raison q. Elle est alors de paramètre $p=1-q$.
Ce sont des lois sans mémoire : $p(X \ge (x+k) \mid X \ge k)=p(X \ge x)$
Ce sont des lois stables par minimum. Soient X et Y des variables indépendantes, alors :

- Si X de loi $\mathcal{G}$ de raison p et Y de loi $\mathcal{G}$ de raison q, alors $\min(X,Y)$ est de loi $\mathcal{G}$ de raison pq.
- Si X de loi $\mathcal{E}(\lambda)$ et Y de loi $\mathcal{E}(\mu)$, alors $\min(X,Y)$ est de loi $\mathcal{E}(\lambda+\mu)$.

C.3. Loi binomiale, Poisson & normale

Ces lois modélisent le nombre d'expériences réussies ou le résultat d'une expérience dépendant de nombreux paramètres. La loi de Poissonest une approximation de la loi binomiale pour n grand, p petit et espérance connue.
Ces lois n'ont pas de fonctions de répartion simple à calculer avec les fonctions usuelles.

Loi binomiale et Poisson	Loi normale
Loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$	Loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$
$p(X=i)=C_n^i\cdot p^i\cdot(1-p)^{n-i} \qquad 0 \le i \le n$	$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2}$
$E(X)=n\cdot p \qquad V(X)=n\cdot p\cdot(1-p)$	$E(X)=\mu \qquad V(X)=\sigma^2$
$p(X \le i)=\sum_{j=0}^{i}p(X=j)$ pas de formule simplifiée	$p(X < x)=F(x)=$ voir les tables de la loi normale
Loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$	On se ramène toujours à la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$ en considérant $Y=\frac{X-\mu}{\sigma}$, pour calculer $F(x)$, car f s'intègre dans une fonction qui ne s'exprime pas avec les fonctions usuelles.
$p(X=i)=e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^i}{i!} \qquad i \ge 0$	Pour la loi normale centrée réduite, la fonction de répartition vérifie $F(-x)=1-F(x)$.
$E(X)=\lambda \qquad V(X)=\lambda$	

Ce sont des lois additives. Soient X et Y des variables indépendantes, alors :

- Si X de loi $\mathcal{B}(n,p)$ et Y de loi $\mathcal{B}(m,p)$, alors $X+Y$ est de loi $\mathcal{B}(m+n,p)$
- Si X de loi $\mathcal{P}(\lambda)$ et Y de loi $\mathcal{P}(\lambda')$, alors $X+Y$ est de loi $\mathcal{P}(\lambda+\lambda')$
- Si X de loi $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ et Y de loi $\mathcal{N}(\nu,\tau^2)$, alors $X+Y$ est de loi $\mathcal{N}(\mu+\nu,\sigma^2+\tau^2)$