TD 2 TASD

A. Loi uniforme

Exercice 1. *Bus*

Entre 7h et 19h, un bus s'arrête tous les quarts d'heure à un certain arrêt. Un usager se présente entre 8h et 8h30 à cet arrêt, son heure exacte d'arrivée suivant une loi uniforme sur cet intervalle.
Quelle est la probabilité pour qu'il attende moins de 5mn ? Plus de 10 mn?

Exercice 2. *Dé continu*

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[a; b]$.
Trouver les valeurs de a et b afin que X ait la même espérance et la même variance qu'un lancer de dé à 7 faces (de 1 à 7).
Même question pour un dé à 6 faces (dé classique).

Exercice 3. *Indépendance*

Soient X et Y deux v.a. indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0; 1]$.

$$A = X + Y \qquad B = X - Y$$
$$C = \min(X, Y) \quad D = \max(X, Y)$$

Étudier l'indépendance deux à deux de ces quatre v.a.

Exercice 4. *D'une loi à une autre*

Soit X une v.a. suivant une loi uniforme sur $]0; 1]$. Soit $Y = -\ln(X)$.
Calculer $\mathbb{P}(Y \leq t)$. En déduire la loi de Y.

B. Loi Exponentielle

Exercice 5. *Loi géométrique et minimum*

a Soit Z une v.a. suivant une loi géométrique de raison a $(0 < a < 1)$, montrer que pour tout entier naturel on a $\mathbb{P}(Z > k) = a^k$.

b Soit X et Y deux v.a. indépendantes définies sur le même espace Ω, et telles que X (resp. Y) suit une loi géométrique de raison p (resp. q) avec $0 < p, q < 1$.
Soit T une v.a. sur Ω définie par $T = \min(X, Y)$.
Montrer que pour tout entier naturel on a

$$\mathbb{P}(T = k) = \mathbb{P}(X \geq k)\mathbb{P}(Y \geq k) - \mathbb{P}(X \geq k+1)\mathbb{P}(Y \geq k+1)$$

et que T est une loi géométrique de raison pq.

c On considère une suite X_n $(n \geq 1)$ de v.a. indépendantes de même loi géométrique de raison p, définies sur Ω. Soit T_n une v.a. sur Ω définie par $T_n = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ Montrer par récurrence sur n , que T_n suit une loi géométrique de raison p^n, et que quand n tend vers l'infini, $\mathbb{P}(T_n > 0)$ tend vers 0.

d Adapter les résultats précédents à la loi exponentielle.

Exercice 6. *Ampoules*

La durée de vie d'une ampoule électrique exprimée en **kilo heures** est une variable aléatoire dont la densité de probabilité est une fonction $f(t) = e^{-t}$ pour tout $t >= 0$ et $f(t) = 0$ pour tout $t < 0$.
Quelle est la probabilité pour que l'ampoule soit encore en vie après 2000 heures ?
Si l'on a deux (ou $n > 1$) ampoules de ce type, quelle est la probabilité pour qu'au bout de 2000 heures la moitié (au moins) soit encore en vie ?

Exercice 7. *Ping*

La durée de transmission (en secondes) d'un message reçu par un ordinateur est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 1.
Calculer la probabilité que la durée de transmission d'un message soit comprise entre 1 et 2 secondes.
Quelle est la probabilité de recevoir 10 messages et que tous ces messages prennent chacun moins de 3 secondes ? Quel est le temps moyen total (la somme des temps) pour la réception de 10 messages ?

Exercice 8. *Amnésie 2*

Montrer que la loi exponentielle est une loi sans mémoire, c'est-à-dire que pour tout s, t positifs ou nuls :

$$\mathbb{P}(X > s + t | X > s) = \mathbb{P}(X > t)$$

Là encore, la loi exponentielle continue se comporte comme la loi géométrique discrète.

Exercice 9. *Temps d'attente*

On suppose que la durée d'une conversation téléphonique suit une loi exponentielle de paramètre 1/15.
Vous arrivez à une cabine téléphonique et quelqu'un passe juste devant vous.
Quelle est la probabilité pour que vous attendiez plus de 15 minutes? Entre 10 et 20 minutes?
Sachant que vous avez déjà attendu 10 minutes, quelle est la probabilité que vous attendiez encore plus de 15 minutes ?

C. Loi normale

Exercice 10. *XXL*

On suppose que la taille en centimètres d'un humain mâle de 25 ans suit une loi aléatoire normale de paramètre $\mu = 175$ et $\sigma = 6$.
Quel est le pourcentage des hommes de 25 ans ayant une taille supérieure à 185 cm ?
Parmi les hommes mesurant plus de 180 cm quel pourcentage mesure plus de 192 cm ?

Exercice 11. *OS*

L'intervalle de temps exprimé en heures entre deux redémarrages (intempestifs) d'une certaine machine ayant un certain système d'exploitation suit une loi normale de paramètre $\mu = 3$, $\sigma = 2$.
On démarre un TD de 2 heures dans une salle où il y a 20 machines (on suppose qu'on a rebooté toutes les machines en début de TD).
Quelle est la probabilité pour que le TD puisse se terminer sans qu'il y ait de redémarrage ?
En moyenne, combien y a-t-il de redémarrages dans un tel TD ?

Exercice 12. *Marathon de New-York*

Au marathon de New York 2000, 29 327 coureurs ont terminé. On suppose que le temps de parcours d'un coureur peut être approximé par une loi normale.

a Sachant que le 10 000e arrivant a mis 4h01′ et que le 1000e a mis 3h08′, quelles sont la moyenne m et l'écart-type sigma des temps de parcours ?

b Si vous aviez terminé en 3h48', quel aurait été votre classement ?

Exercice 13. *Bonnes notes*

Lors d'un examen, la note X a suivi une loi normale $\mathcal{N}(\mu = 8,5; V = 4)$.

a Quelle est la proportion d'étudiants ayant la moyenne ?

b On veut améliorer les notes à l'aide d'une transformation affine $Y = aX + b$ (la variable Y désignant la nouvelle note). Déterminer a et b pour que 50% des étudiants aient la moyenne et que 75% des étudiants aient une note supérieure ou égale à 8.

Exercice 14. *Centré réduit*

a Exprimer à l'aide de la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée normée $\mathcal{N}(0,1)$, la probabilité pour qu'une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$ soit dans un intervalle centré sur la moyenne μ et de longueur $2\lambda\sigma$ où λ est un réel positif quelconque.

b Avec une précision de 0,5%, quelle est la probabilité pour qu'une variable aléatoire loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$ soit dans l'intervalle $[\mu-\sigma, \mu+\sigma]$?

Exercice 15. *Ameublement*

Une entreprise vend deux types de meubles M_1 et M_2, respectivement 419 euros et 509 euros l'unité.

On désigne pour X (respectivement Y) la variable aléatoire qui, à un mois tiré au hasard dans une longue période, représente la demande en meuble M_1 (resp. M_2) au cours de ce mois et qui suit la loi normale $\mathcal{N}(85, \sigma = 15)$ (resp. $\mathcal{N}(52, \sigma = 8)$).

On suppose que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

a Calculer la probabilité d'avoir les évènements suivants :

- on vendra au plus 80 meubles M_1
- on vendra au plus 70 meubles M_2

b Quelles sont les probabilités des évènements suivants:

- il y aura rupture de stock en meubles M_1 (Stock 100)
- il y aura rupture de stock en meubles M_2 (Stock 70)
- il y aura au moins une rupture de stock (en M_1 ou M_2)

c Exprimer (en euros) le chiffre d'affaire Z du mois en fonction de X et Y

d Calculer l'espérance mathématique de Z

e Un mois donné est dit rentable si le chiffre d'affaire de ce mois dépasse 70 000 euros. Quelle est la probabilité qu'un mois donné soit rentable?

f On note R le nombre de mois rentables d'un semestre,et on suppose l'indépendance entre les événements"rentable ou non rentable" des mois successifs. Quelle loi suit R ?

g Quelle est la probabilité que sur les 6 mois d'un semestre, on en ait au moins deux rentables?

Exercice 16. *Contrôle technique*

Le contrôle du poids (en grammes) des pièces fabriquées par une même machine permet de conclure que ces poids suivent une loi normale de moyenne 462 et de variance 2,89.

a Quelle est la probabilité pour que le poids d'une pièce soit inférieur à 465,06 grammes?

b Quelle est la probabilité pour que le poids d'une pièce dépasse 463,989 grammes ?

Exercice 17. *Médiane*

La médiane d'une variable aléatoire continue ayant une fonction de répartition F est la valeur m telle que $F(m) = \frac{1}{2}$. Donnez une interprétation de cette valeur.

Déterminez m si X est

- Uniformément distribuée sur $[a,b]$
- Normale de paramètre μ, σ
- Exponentielle de paramètre λ

Exercice 18. *Problème de taille*

En syldavie, la répartition des tailles des habitants (adultes) suit une loi normale, pour les hommes comme pour les femmes. Pour les hommes, la moyenne des taille est 180cm, et 160cm pour les femmes. Sachant que si on choisit au hasard un homme et une femme dans cette population, on a exactement 2.275% de chance que la femme soit plus grande que l'homme et 65% de chance que l'homme soit plus grand de 10% que la femme (le ratio des deux tailles est plus grand que 1.1), retrouvez les écarts-type des tailles des hommes et des femmes.