Univers & Dés

Exercice 1. *Évènements sur 3 dés*

On jette trois dés dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

a Décrire un espace Ω des résultats élémentaires permettant de modéliser cette expérience.

b Quel est le cardinal de Ω?

c Soit A l'événement "on obtient au moins un as". Quel est le cardinal de A?

d Soit B l'événement "deux dés au moins portent le même numéro". Quel est le cardinal de B?

Exercice 2. *Ensembles d'évènements*

On considère l'épreuve aléatoire constituée par le jet de deux dés à six faces numérotées de 1 à 6, indépendants et bien équilibrés, un dé blanc et un dé noir.

a Donner trois exemples d'ensembles d'événements élémentaires Ω que l'on peut associer à cette expérience aléatoire.

b On considère l'assertion "La somme des faces supérieures des dés est supérieure ou égale à 10". Pour chacun des trois exemples d'ensembles construits dans la question précédente, est-ce un événement élémentaire? Est-ce un événement?

c On considère l'assertion "L'un au moins, des deux dés, marque 6". Mêmes questions.

Exercice 3. *Ensembles d'évènements 2*

Pour les expériences aléatoires suivantes, donner un ensemble d'événements et son cardinal.

a On lance un dé 20 fois.

b Une urne contient une boule blanche et une boule noire. On prend dans cette urne une boule au hasard, on la remet et on ajoute une boule de même couleur. On reprend une boule au hasard.

c Un étudiant fait du stop.

Exercice 4. *Loi Triangle*

On lance deux dés. Soit X la variable aléatoire égale à la somme des deux dés. Donner la loi de probabilité de X.

Exercice 5. *Indépendance*

On tire deux cartes d'un jeu de 52 cartes. Soit A l'événement "les deux cartes ont la même valeur" et B l'événement "les deux cartes ont la même couleur". Etudier l'indépendance des événements A et B dans les cas suivants :

a on remet dans le jeu la première carte avant de tirer la seconde,

b on tire les deux cartes simultanément.

Exercice 6. *RVB*

On dispose de trois dés à trois faces. Le dé rouge dispose sur ses faces des nombres $1, 6, 8$. Le dé bleu $2, 4, 9$, et le dé vert $3, 5, 7$. On lance les trois dés en même temps. Calculez les probabilités suivantes :

a le dé bleu est plus grand que le dé rouge

b le dé vert est plus grand que le dé bleu

c le dé rouge est plus grand que le dé vert

d pour chaque dé, quel est la probabilité qu'il soit le plus grand des 3 ? le plus petit ?

Combinatoire & Probabilités

Exercice 7. *Chaussettes rouges*

Un tiroir contient n chaussettes dont 3 rouges. Quelle doit être la valeur de n, pour que si l'on choisit 2 chaussettes aléatoirement, la probabilité qu'elles soient toutes les deux rouges soit le plus proche possible de $\frac{1}{2}$? et de 20% ?

Exercice 8. *Rouge ou blanc ?*

On considère trois cartes : une avec les deux faces rouges, une avec les deux faces blanches, et une avec une face rouge et une face blanche. On tire une carte au hasard. On expose une face au hasard. Elle est rouge. Parieriez-vous que la face cachée est blanche ? Pour vous aider dans votre choix :

- Déterminer l'espace de probabilité.
- Calculer la probabilité que la face cachée soit blanche sachant que la face visible est rouge.

Exercice 9. *Le trésor caché*

Un candidat à un jeu télévisé est placé devant trois portes fermées. Derrière l'une d'elles il y a un trésor. Le candidat commence par se placer devant une des trois portes, puis le présentateur (qui connaît l'emplacement du trésor) ouvre (obligatoirement) une autre porte derrière laquelle il n'y a pas de trésor.

Enfin, le candidat a le choix entre ouvrir la troisième porte (celle que le présentateur a laissée fermée) ou bien celle devant laquelle il se trouve.

Qu'a-t-il intérêt à faire ?

Exercice 10. *À deux contre un*

Le joueur A possède deux dés à six faces, et le joueur B possède un dé à douze faces (un dodécaèdre). Le joueur qui fait le plus grand score remporte la mise (match nul si égalité). Le jeu est-il équitable ? On calculera la probabilité que A gagne et la probabilité d'avoir un match nul.

Exercice 11. *ABCDEF*

Les nouvelles plaques d'immatriculation des trotinettes sont formées de 6 lettres différentes de l'alphabet (A-Z). Chaque combinaison est équiprobable. Vous achetez une nouvelle trotinette. Quelle est la probabilité d'avoir les 6 lettres de votre plaque d'immatriculation dans l'ordre alphabétique ?

Exercice 12. *Les trois mousquetaires et D'Artagnan*

Quatre personnes ont mélangé leurs bottes dans le couloir de l'auberge. D'Artagnan se lève le premier et prend deux bottes au hasard. Calculer la probabilité que :

a les deux bottes soient les siennes.

b les deux bottes forment une paire assortie.

c les deux bottes soient pour des pieds différents.

d les deux bottes soient deux pieds droits.

e les deux bottes appartiennent à deux personnes différentes.

Exercice 13. *TGV*

Un groupe de huit voyageurs n'ayant pas réservé leur place se répartit au hasard et indépendamment les uns des autres entre les cinq voitures d'un train.

- Définir l'ensemble des événements relatifs à cette expérience aléatoire et la loi de probabilité associée.

- Quelle est la probabilité que, dans chaque voiture, se trouve au moins un des voyageurs du groupe ?
- On sait qu'il y a, dans chaque voiture, deux places libres. Quelle est la probabilité que tous les voyageurs du groupe trouvent une place assise ?

Exercice 14. *Pile Pile*

On jette n fois une pièce de monnaie et on note f_n le nombre de cas possibles où deux piles n'apparaissent pas successivement.

a Combien valent f_1 et f_2 ?

b Montrer que $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$.

c Calculer f_n et la probabilité pour que sur n lancers il y ait au moins deux piles successifs.

Exercice 15. *Impair Pile*

On lance une pièce, elle fait pile avec une probabilité p. Calculer en fonction de p et n, la probabilité p_n que sur n lancers il y ait un nombre impair de "pile" (on peut obtenir une formule simple par récurrence).

Exercice 16. *Code bancaire*

a Dans un ensemble de 66 élèves, quelle est la probabilité pour que deux élèves au moins aient le même code de carte de paiement (on suppose que toutes les suites de 4 chiffres pris dans 0, 1, ..., 9 sont équiprobables) ?

b Dans un ensemble de 66 élèves, quelle est la probabilité pour que deux élèves au moins aient le même code de carte de paiement (on suppose qu'un code de carte a au plus 2 chiffres identiques) ?

c A partir de combien de personnes cette probabilité est supérieure à 0.5 ?

d Vous faites partie de ce groupe, quelle est la probabilité pour qu'au moins une autre personne du groupe ait le même numéro de code que vous ?

e A partir de combien de personnes cette probabilité est-elle supérieure à 0.5 ?

Exercice 17. *Poker*

Au poker, on utilise un jeu de 52 cartes avec 4 couleurs de cartes (pique, trèfle, carreau, cœur). Une main comprend 5 cartes. Pour les différentes combinaisons, calculer la probabilité de l'obtenir :
Une paire, une double paire, un brelan, un full, un carré, une quinte, une couleur, une quinte flush.

Exercice 18. *Enfant unique*

Les autorités chinoises ont décrété qu'une famille ne peut avoir que deux enfants, et encore, seulement si le premier est une fille. On demande si cela peut modifier la proportion de garçons et de filles. (On fera l'hypothèse habituelle -fausse dans la pratique - que les différentes naissances dans une même famille sont indépendantes les unes des autres, et que la probabilité d'avoir un garçon est la même à chaque naissance.)

Exercice 19. *S.A.V*

Un marchand vend des articles dont 30% proviennent d'un fournisseur A et 70% d'un fournisseur B. On sait que 6% de la production de A est défectueuse, contre 3% seulement pour la production de B. Un client achète un article. Calculer

a La probabilité que cet article soit défectueux.

b Sachant que cet article est défectueux, la probabilité qu'il provienne de B.

Exercice 20. *Fiabilité d'un test*

Un laboratoire pharmaceutique vend un test avec la notice suivante : si vous êtes malade, alors le test est positif avec probabilité α (α est **la sensibilité** du test), si vous êtes sain, alors le test est positif avec probabilité β ($1-\beta$ est **la spécificité** du test).

Sachant qu'en moyenne il y a une probabilité d'être malade égale à τ, calculer en fonction de α, β et τ

- la probabilité d'un faux positif.
- la probabilité d'un faux négatif.
- Application numérique : $\alpha = 98\%$, $\beta = 3\%$, $\tau = \frac{1}{1000}$
- discuter les résultats.

Exercice 21. *Fille ou Garçon ?*

On suppose que l'on a autant de chance d'avoir une fille ou un garçon à la naissance. Votre voisin de palier vous dit qu'il a deux enfants.

a Quelle est la probabilité qu'il ait au moins un garçon ?

b Quelle est la probabilité qu'il ait un garçon, sachant que l'aînée est une fille ?

c Quelle est la probabilité qu'il ait un garçon, sachant qu'il a au moins une fille ?

d Vous téléphonez à votre voisin. Une fille décroche le téléphone. Vous savez que dans les familles avec un garçon et une fille, la fille décroche le téléphone avec la probabilité p, quelle est la probabilité que votre voisin ait un garçon ?

e Vous sonnez à la porte de votre voisin. Une fille ouvre la porte. Sachant que l'aîné(e) ouvre la porte avec probabilité p, et ce indépendamment de la répartition de la famille, quelle est la probabilité que votre voisin ait un garçon ?

Exercice 22. *Le jeu du 35*

On lance 5 billes dans 3 trous. Chaque bille est indépendante des autres et a autant de chance d'arriver dans l'un des trois trous. Le gain du joueur est le suivant : soit n_1 le nombre de billes dans le trou qui a le plus de bille, n_3 le nombre de billes dans le trou qui a le moins de bille. Alors le gain est :

$$2.n_1 - n_3 - 5$$

a Montrer qu'il n'existe que 5 configurations finales dans ce jeu.

b Calculer pour chaque fin possible le gain du joueur et la probabilité de cet évènement.

c Calculer l'espérance du gain et expliquer s'il est intéressant de jouer à ce jeu ou non.

Exercice 23. *Espérance d'absence*

On dispose de m dés identiques à n faces numérotées de 1 à n. Chaque face est équiprobable. On lance tous ces dés. Soit X, le nombre de numéros entre 1 et n qui n'apparaissent sur aucun dé. Calculer $E(X)$.

Soit Y, le nombre de numéros entre 1 et n qui apparaissent sur exactement un seul dé. Calculer $E(Y)$

Exercice 24. *As placé*

Un jeu de 52 cartes est placé devant vous. Vous savez que la $16^{\text{ème}}$ carte est un as. Quel est la probabilité que la carte du dessus soit aussi un as ?

Binomiales

Exercice 25. *lois binomiales*

Démontrer que l'espérance de la loi binomiale $B(n,p)$ est $E(B(n,p)) = np$. et que la variance de cette loi est

$$V(B(n,p)) = np(1-p)$$

Exercice 26. *Médicament mortel*

Un médicament est susceptible de provoquer des accidents allergiques chez un patient sur 100.
Quelle est la probabilité d'observer au moins un accident allergique dans une clientèle comportant 70 patients traités par ce médicament ?

Exercice 27. *Les 5 filles de Mrs Bennet*

Supposons que la probabilité qu'un enfant soit de sexe féminin est 0.4. Quelle est la probabilité d'avoir, parmi 5 enfants, au moins un garcon et au moins une fille ?

Exercice 28. *Pixel mort ou vivant*

Un écran d'ordinateur est formé de pixels. Il comporte 768 lignes de 1024 pixels.
On utilise un procédé de fabrication qui assure que les pixels sont indépendants et que chacun n'a qu'une probabilité 9.10^{-7} d'être inutilisable. Quelle est la loi du nombre X de pixels grillés sur l'écran et son espérance ?

Exercice 29. *Les dés font la paire*

Un joueur lance deux dés dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On suppose que les dés sont non-truqués et donc que pour chaque dé, toutes les faces ont la même probabilité d'apparition. Le joueur suit les règles suivantes:
- Si les deux dés donnent le même numéro alors le joueur perd 10 points
- Si les deux dès donnent deux numéros de parités différentes alors il perd 5 points
- Dans les autres cas il gagne 15 points.

a Le joueur joue une partie et on note X la variable aléatoire correspondant au nombre de points obtenus.
Déterminez la loi de probabilité de X puis calculez l'espérance de X.

b Le joueur effectue 10 parties de suites. Les résultats des parties sont indépendants les uns des autres. On appelle alors Y la variable aléatoire égale au nombre de fois que le joueur gagne 15 points.
Expliquez pourquoi Y suit une loi binomiale. Quels sont les paramètres de Y ?
Quelle est la probabilité que le joueur gagne au moins une fois 15 points ?
Combien de fois le joueur peut-il espérer gagner 15 points ?

c Le joueur joue n parties de suite. Quelle est la probabilité qu'il gagne au moins une fois 15 points ?
A partir de quelle valeur de n sa probabilité de gagner au moins une fois 15 points est strictement supérieure à 0,9999 ?

Exercice 30. *Robot fiable*

Pour construire un robot, un étudiant de Polytech a besoin de 12 circuits intégrés identiques R2D2. Chaque circuit intégré a 5% de chance d'être défectueux. Combien (au minimum) de circuits cet étudiant doit-il acheter pour être certain (à 90%) d'avoir au moins 12 circuits intégrés sans défauts ?

Exercice 31. *Rouge ou Bleu*

On commence le jeu avec un sac contenant une boule rouge et une boule bleue. À chaque étape on tire au hasard une boule (puis on la remet dans le sac).

a Quelle est la probabilité d'obtenir p boules rouges sur n tirages consécutifs ?

b Quelle est la probabilité d'obtenir p boules rouges sur n tirages consécutifs, sachant qu'entre chaque tirage, on ajoute en plus une boule de la couleur qui vient d'être tirée ?

c On peut également essayer de calculer cette probabilité quand on ajoute, entre chaque tirage, une boule de la couleur qui ne vient pas d'être tirée, mais c'est beaucoup plus difficile (faire le calcul pour $n \leq 6$).

Poisson

Exercice 32. *Lois de Poisson*

Une variable aléatoire discrète X à valeur entière est dite de Poisson de paramètre λ s'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que

$$\forall i \geq 0 : \mathbb{P}(X = i) = e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda^i}{i!}\right)$$

Vérifier que toute loi de Poisson est bien une loi de probabilité.
Vérifier que l'espérance de la loi de Poisson de paramètre λ est $E(P_\lambda) = \lambda$.
Vérifier que la variance de la loi de Poisson de paramètre λ est $V(P_\lambda) = \lambda$.
Cette loi intervient dans des processus aléatoires dont les éventualités sont faiblement probables et survenant indépendamment les unes des autres : cas des phénomènes accidentels, des anomalies diverses, des problèmes d'encombrement ("files d'attente"), des ruptures de stocks, etc.

Exercice 33. *Low cost*

On suppose que le nombre de vols survenant quotidiennement dans une grande surface suit une loi de Poisson de paramètre 3.
Quelle est la probabilité pour qu'il survienne au moins 3 vols un jour donné ?

Exercice 34. *Somme*

Soit X une variable aléatoire selon une loi de Poisson de paramètre λ et Y une variable aléatoire selon une loi de Poisson de paramètre μ. X et Y sont indépendantes. Soit $Z = X + Y$. Quelle est la loi de Z ?

Exercice 35. *Allo ?*

Un central téléphonique possède L lignes. On estime à 1200 le nombre de personnes susceptibles d'appeler le standard sur une journée de 8 heures, la durée des appels étant de deux minutes en moyenne.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes en train de téléphoner à un instant donné.
On suppose $L = 3$, calculer la probabilité d'encombrement à un instant donné, à savoir $\mathbb{P}(X > L)$.
Quelle doit être la valeur minimale de L pour qu'à un instant donné, la probabilité d'encombrement ne dépasse pas 0,1.

Exercice 36. *Accidents du travail*

On a répertorié dans une usine le nombre d'accidents mineurs subis par le personnel dans une journée de travail sur une période de 200 jours. Ces accidents sont survenus indépendamment les uns des autres. Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

Nombre d'accidents	0	1	2	3	4	5
Nombre de jours	86	82	22	7	2	1

a Quel est le nombre moyen d'accidents par jour ?

b On ajuste cette distribution par une distribution de Poisson. Justifier cette décision et donner la loi exacte.

c Comparer avec un ajustement par une binomiale (on peut considèrer chaque accident comme une expérience indépendante avec une certaine probabilité d'arriver à un jour donné). Pour effectuer les comparaisons, donner, pour chaque valeur de 0 à 5 du nombre d'accidents par jour, la valeur théorique donnée par chacune des lois. Interpréter les résultats en les comparant à la réalité.

Lois Géométriques

Exercice 37. *Lois géométriques*

Une variable aléatoire discrète X à valeur entière est dite géométrique de paramètre p ($p \in [0,1]$), si

$$\forall n \geq 1 : \mathbb{P}(X = n) = (1-p)^{n-1}p$$

Vérifier que toute loi géométrique est bien une loi de probabilité.

Vérifier que l'espérance et la variance de la loi géométrique de paramètre p sont

$$E(G_p) = \frac{1}{p} \qquad V(G_p) = \frac{1-p}{p^2}$$

Cas typique : on exécute une série d'épreuves indépendantes ayant chacune probabilité p de réussite et l'expérience s'arrête au premier succès.

Exercice 38. *À programmer*

On lance une pièce et on s'arrête dès que l'on a obtenu 2 "pile" consécutifs, on s'intéresse au nombre moyen n_{PP} de lancers nécessaires pour obtenir 2 "pile" consécutifs. Dans une autre expérience de lancers de pièce, on s'arrête dès que l'on a obtenu "pile" suivi de "face", et on s'intéresse au nombre moyen n_{PF} de lancers nécessaires pour obtenir cette séquence "pile" suivi de "face". Il s'agit de constater par programme que n_{PP} et n_{PF} sont deux entiers simples.

Trouver un court raisonnement pour démontrer ces résultats en utilisant les propriétés de la loi géométrique.

Exercice 39. *Tenacité*

On lance un dé à 6 faces jusqu'à obtenir un 1.

Quel est le nombre moyen de lancers ?

Quelle est la probabilité d'obtenir un 1 en moins de 6 lancers ?

Exercice 40. *Amnésie*

Soit X une variable aléatoire discrète qui suit une loi géométrique. Montrer que

$$\forall n, k \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(\{X = n+k\}/\{X > k\}) = \mathbb{P}(X = n)$$

Exercice 41. *Maximum*

Chacune des k urnes, numérotées de 1 à k, contient n boules identiques numérotées de 1 à n. On extrait une boule de chaque urne et on note par X_i le numéro de la boule tirée de l'urne i.

On pose

$$M = \max_{1 \leq i \leq k} X_i$$

Donner la fonction de répartition de M.