Cours 2. Probabilités continues

A. Variables aléatoires réelles

A.1. Densité

Soit un univers Ω muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. On dit alors qu'une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *possède la densité* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ si :

$$\forall a < b \in \overline{\mathbb{R}} : \mathbb{P}(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

en particulier :

$$\mathbb{P}(-\infty < X \leq +\infty) = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$$

et

$$\mathbb{P}(X = a) = 0$$

car :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \mathbb{P}(X = a) \leq \mathbb{P}(a - \frac{1}{n} < X \leq a) = \int_{a-\frac{1}{n}}^a f(x)dx$$

Donc :

$$\forall a < b \in \overline{\mathbb{R}} : \mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

$$= \mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(a \leq X < b) = \mathbb{P}(a < X \leq b)$$

Donc aussi $\mathbb{P}(X \in D) = 0$ pour tout ensemble dénombrable D, ce qui est une différence de nature entre les probabilités discrètes et les probabilités continues.
On a aussi, en supposant f continue :

$$\forall a < a + \delta \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(a \leq X \leq a + \delta) = \int_a^{a+\delta} f(x)dx \approx f(a)\delta$$

A.2. Répartition

On appelle *fonction de répartition* d'une v.a. X la fonction $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} : F(x) = \mathbb{P}(-\infty < X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

La fonction de répartition F est une fonction croissante, continue (à gauche) qui croit de 0 à 1.

$$\forall a < b \in \overline{\mathbb{R}} : \mathbb{P}(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

Si f est continue, F est dérivable et sa dérivée est f.

A.3. Espérance

L'espérance $E(X)$ de la v.a. X, quand elle existe, est définie par :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

On a :

$$E(a) = a$$
$$E(aX) = aE(X)$$
$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

A.4. Variance

La **variance** $V(X)$ de la v.a. X, quand elle existe, est définie par :

$$V(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E(X)^2$$

B. Lois usuelles

B.1. Loi uniforme sur un intervalle

Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$, un intervalle.
Densité f :

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \; si \; x \in [a, b]$$

$$f(x) = 0 \; si \; x \notin [a, b]$$

Fonction de répartition F :

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a} \; si \; x \in [a, b]$$
$$F(x) = 0 \; si \; x < a$$
$$F(x) = 1 \; si \; x > b$$

Espérance des lois uniformes :

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

Variance des lois uniformes :

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

B.2. Loi exponentielle

Soit $\lambda > 0$
Densité f :

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \; si \; x > 0$$

$$f(x) = 0 \; si \; x < 0$$

Fonction de répartition F :

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \; si \; x > 0$$

$$F(x) = 0 \; si \; x < 0$$

Espérance des lois exponentielles :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

Variance des lois exponentielles :

$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

B.3. Loi normale ou gaussienne

$N(\mu, \sigma^2)$, avec $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}^+$.
Densité f :

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$$

Fonction de répartition F : pas d'expression simple.
Espérance des lois normales :

$$E(X) = \mu$$

Variance des lois normales :

$$V(X) = \sigma^2$$

La **loi normale centrée réduite** $N(0, 1)$.
Une v.a. X suit la loi normale $N(\mu, \sigma^2)$ si et seulement si $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $N(0, 1)$.
Donc :

$$\mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(\frac{a-\mu}{\sigma} < Y < \frac{b-\mu}{\sigma})$$