詳解製作：林煜家老師　　校稿：陳瑋岳老師

110 年大學學科能力測驗
數學科參考詳解

《單一選擇題》

1. 設 $A=\begin{bmatrix}1&2\\0&3\end{bmatrix}$。若 $A^4=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$，則 $a+b+c+d$ 之值為下列哪一個選項？
(1)158　(2)162　(3)166　(4)170　(5)174

【答】(2)

【解】$A^2=A\cdot A=\begin{bmatrix}1&2\\0&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&2\\0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&8\\0&9\end{bmatrix}$，$A^4=A^2\cdot A^2=\begin{bmatrix}1&8\\0&9\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&8\\0&9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&80\\0&81\end{bmatrix}$

因此 $a+b+c+d=1+80+0+81=162$，故選(2)

《另解》

令 $I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}0&2\\0&2\end{bmatrix}$ $\Rightarrow B^2=\begin{bmatrix}0&2\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&2\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&4\\0&4\end{bmatrix}=2B$，

$B^3=B^2\times B=2B\times B=2B^2=4B$，$B^4=B^2\times B^2=2B\times 2B=4B^2=8B$

則 $A^4=(I+B)^4=I+4B+6B^2+4B^3+B^4=I+4B+12B+16B+8B=I+40B=\begin{bmatrix}1&80\\0&81\end{bmatrix}$

因此 $a+b+c+d=1+80+0+81=162$，故選(2)

2. 五項實數數列 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 的每一項都大於1，且每相鄰的兩項中，都有一數是另一數的兩倍。若 $a_1=\log_{10}36$，則 a_5 有多少種可能的值？
(1)3　(2)4　(3)5　(4)7　(5)8

【答】(1)

【解】依題意，每項「$\times 2$」或「$\div 2$」後可得下一項，而 a_1 到 a_5 需經過四次的運算

又 $a_1=\log_{10}36=2\log 6$，且 $0<\log 6<1$

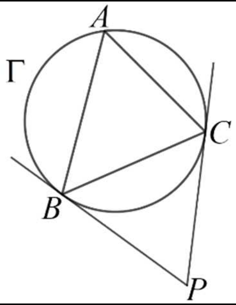
因此，運算「$\times 2$」的次數不得低於「$\div 2$」的次數(因為 $2\log 6\div 2=\log 6<1$，不符合題意)

所以 a_5 的值可為 a_1 經過「四次 $\times 2$」、「三次 $\times 2$，一次 $\div 2$」、「兩次 $\times 2$，兩次 $\div 2$」，共3種可能值

且其「$\times 2$」與「$\div 2$」互換後的運算結果相同，故不須討論排列結果

故選(1)

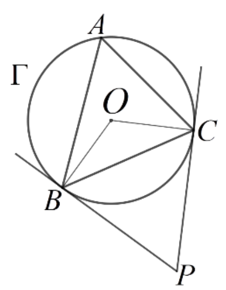
3. 如圖，ΔABC 為銳角三角形，P 為 ΔABC 外接圓 Γ 外的一點，且 $\overline{PB}$ 與 $\overline{PC}$ 都與圓 Γ 相切。設 $\angle BPC=\theta$，試問 $\cos A$ 的值為下列哪一個選項？



(1) $\sin 2\theta$　(2) $\dfrac{\sin\theta}{2}$　(3) $\sin\dfrac{\theta}{2}$
(4) $\dfrac{\cos\theta}{2}$　(5) $\cos\dfrac{\theta}{2}$

【答】(3)

【解】分別作過 B 且垂直 $\overline{PB}$、過 C 且垂直 $\overline{PC}$ 的兩直線，其交點為圓心 O 點



$\because \overline{OB}\perp\overline{BP}$ 且 $\overline{OC}\perp\overline{CP}$ 且 $\angle BPC=\theta$　$\therefore \angle BOC=180^\circ-\theta$

而圓周角 $\angle A$ 為圓心角 $\angle BOC$ 的一半，因此 $\angle A=\dfrac{180^\circ-\theta}{2}=90^\circ-\dfrac{\theta}{2}$

由角度換算公式(餘角關係)，得：$\cos A=\cos(90^\circ-\dfrac{\theta}{2})=\sin\dfrac{\theta}{2}$

故選(3)

4. 設 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 都是平面上不為零的向量。若 $2\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}$ 所張成的三角形面積為6，則 $3\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}$ 所張成的三角形面積為下列哪一個選項？
(1)8　(2)9　(3)12　(4)13.5　(5)16

【答】(5)

【解】設 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$，

依題意，$2\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=(2a_1+b_1,2a_2+b_2)$ 與 $\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}=(a_1+2b_1,a_2+2b_2)$ 所張成的三角形面積為6

得：$\frac{1}{2}\cdot\left|\begin{vmatrix}2a_1+b_1 & 2a_2+b_2\\ a_1+2b_1 & a_2+2b_2\end{vmatrix}\right|=6 \overset{第二列\times(-2)加到第一列}{\Rightarrow} \left|\begin{vmatrix}-3b_1 & -3b_2\\ a_1+2b_1 & a_2+2b_2\end{vmatrix}\right|=12$

$\overset{\substack{第一列提出(-3)\\再提到絕對值外,變為正數}}{\Rightarrow} 3\cdot\left|\begin{vmatrix}b_1 & b_2\\ a_1+2b_1 & a_2+2b_2\end{vmatrix}\right|=12 \overset{第一列\times(-2)加到第二列}{\Rightarrow} \left|\begin{vmatrix}b_1 & b_2\\ a_1 & a_2\end{vmatrix}\right|=4$

所求 $=3\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=(3a_1+b_1,3a_2+b_2)$ 與 $\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}=(a_1+3b_1,a_2+3b_2)$ 所張成的三角形面積

$=\frac{1}{2}\cdot\left|\begin{vmatrix}3a_1+b_1 & 3a_2+b_2\\ a_1+3b_1 & a_2+3b_2\end{vmatrix}\right| \overset{第二列\times(-3)加到第一列}{=} \frac{1}{2}\cdot\left|\begin{vmatrix}-8b_1 & -8b_2\\ a_1+3b_1 & a_2+3b_2\end{vmatrix}\right|$

$\overset{\substack{第一列提出(-8)\\再提到絕對值外,變為正數}}{=} \frac{1}{2}\times 8\cdot\left|\begin{vmatrix}b_1 & b_2\\ a_1+3b_1 & a_2+3b_2\end{vmatrix}\right| \overset{第一列\times(-3)加到第二列}{=} 4\cdot\left|\begin{vmatrix}b_1 & b_2\\ a_1 & a_2\end{vmatrix}\right|=4\times4=16$，故選(5)

5. 設 $f(x)$ 為實係數三次多項式函數，滿足 $(x+1)f(x)$ 除以 x^3+2 的餘式為 $x+2$。若 $f(0)=4$，則 $f(2)$ 的值為下列哪一個選項？
(1)8　(2)10　(3)15　(4)18　(5)20

【答】(4)

【解】$\because f(x)$ 為三次多項式函數　$\therefore (x+1)f(x)$ 為四次多項式函數，

因此 $(x+1)f(x)$ 除以 x^3+2 的商可設為一次多項式

利用除法原理，設 $(x+1)f(x)=(x^3+2)(ax+b)+x+2$，

$\Rightarrow\begin{cases}x=0\text{ 代入，得：}f(0)=2(b)+2\\ x=-1\text{ 代入，得：}0=1\cdot(-a+b)+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2b+2=4\\ -a+b=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\ b=1\end{cases}$

因此 $(x+1)f(x)=(x^3+2)\cdot(2x+1)+x+2$，令 $x=2$ 代入，得 $3f(2)=10\times5+4 \Rightarrow f(2)=\frac{54}{3}=18$

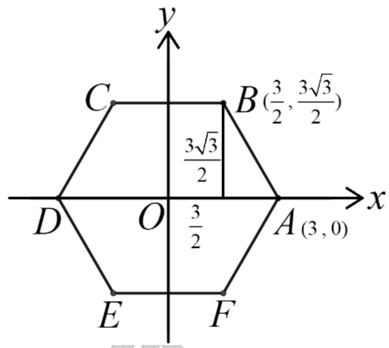
故選(4)

6. 坐標平面上有一邊長為3的正六邊形 $ABCDEF$，其中 $A(3,0)$，$D(-3,0)$。試問橢圓 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{7}=1$ 與正六邊形 $ABCDEF$ 有多少個交點？
(1)0　(2)2　(3)4　(4)6　(5)8

【答】(5)

【解】由 $A(3,0)$，$D(-3,0)$，可令正六邊形頂點為逆時針繞，

如右圖，B 點在第一象限，可得 $B(\dfrac{3}{2},\dfrac{3\sqrt{3}}{2})$



由橢圓方程式可知，中心在原點 O，長軸在 x 軸上，短軸在 y 軸上

且 $a=4$，$b=\sqrt{7}\approx 2.646$，可推斷以下事情：

橢圓在 x 軸正向的長軸頂點為 $(4,0)\Rightarrow$ 在 A 點右方

$\overline{BC}$ 與 x 軸距離為 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\approx\dfrac{3\times 1.732}{2}=3\times 0.866=2.598$，

而橢圓在 y 軸正向的短軸頂點為 $(0,\sqrt{7})\approx(0,2.646)$ $\Rightarrow$ 在 $\overline{BC}$ 上方

將 B 點代入橢圓得：$\dfrac{9}{64}+\dfrac{27}{28}>1$ $\Rightarrow B$ 點在橢圓外，

[亦可由橢圓知 $c=\sqrt{16-7}=3$，A,D 為焦點，得 $\overline{BA}+\overline{BD}=3+3\sqrt{3}>8=2a$，表 B 點在橢圓外]

因此橢圓與正六邊形在第一象限有兩個交點，利用對稱概念，四個象限共有8個交點，故選(5)

《多重選擇題》

7. 心理學家找了1000位受試者進行暗室實驗，每位受試者都要觀看及辨識6、8、9三張數字卡，發現將實際數字看成某個數字的機率如下表：

看成數字 / 實際數字	6	8	9	其他
6	0.4	0.3	0.2	0.1
8	0.3	0.4	0.1	0.2
9	0.2	0.2	0.5	0.1

例如：實際數字6被看成6、8、9的機率分別為0.4、0.3、0.2，而被看成其他數字的機率是0.1。根據上述實驗結果，試選出正確的選項。

(1)如果實際數字是8，則至少有一半的可能性會被看成是8

(2)如果實際數字是6，則有六成的可能性會被看成不是6

(3)在6、8、9三數字中，被誤認的可能性以9最低

(4)如果被看成的數字是6，則實際上就是6的可能性不到一半

(5)如果被看成的數字是9，則實際上就是9可能性超過 $\dfrac{2}{3}$

【答】(2)(3)(4)

【解】(1)實際是8，看成是8的機率為0.4 $\Rightarrow$ 未達一半

(2)實際是6，看成「不是6」的機率為 $0.3+0.2+0.1=0.6$ $\Rightarrow$ 為六成

(3)數字6的誤認機率 $=0.3+0.2+0.1=0.6$，數字8的誤認機率 $=0.3+0.1+0.2=0.6$

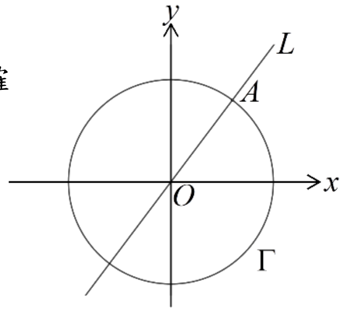
數字9的誤認機率 $=0.2+0.2+0.1=0.5$ $\Rightarrow$ 數字9被誤認的機率最低

(4) $P(\text{實際是6}\,|\,\text{看成是6})=\dfrac{P(\text{看成是6}\cap\text{實際是6})}{P(\text{看成是6})}=\dfrac{\frac{1}{3}\times 0.4}{\frac{1}{3}\times 0.4+\frac{1}{3}\times 0.3+\frac{1}{3}\times 0.2}=\dfrac{4}{9}<\dfrac{1}{2}$

(5) $P(\text{實際是9}\,|\,\text{看成是9})=\dfrac{P(\text{看成是9}\cap\text{實際是9})}{P(\text{看成是9})}=\dfrac{\frac{1}{3}\times 0.5}{\frac{1}{3}\times 0.2+\frac{1}{3}\times 0.1+\frac{1}{3}\times 0.5}=\dfrac{5}{8}=0.625<\dfrac{2}{3}$

故選(2)(3)(4)

8. 如圖，L 為坐標平面上通過原點 O 的直線，Γ 是以 O 為圓心的圓，且 L 與 Γ 有一個交點 $A(3,4)$。已知 B,C 為 Γ 上的相異兩點滿足 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OA}$。試選出正確的選項。



(1) L 與 Γ 的另一個交點為 $(-4,-3)$
(2) 直線 BC 的斜率為 $\dfrac{3}{4}$
(3) $\angle AOC=60°$
(4) ΔABC 的面積為 $\dfrac{25\sqrt{3}}{2}$
(5) B 與 C 在同一象限內

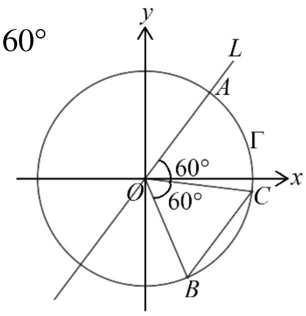
【答】(3)(5)

【解】圓 Γ 半徑 $=\overline{OA}=\sqrt{(3-0)^2+(4-0)^2}=5$

(1) 另一個交點為 A 對原點 O 作對稱，得交點為 $(-3,-4)$

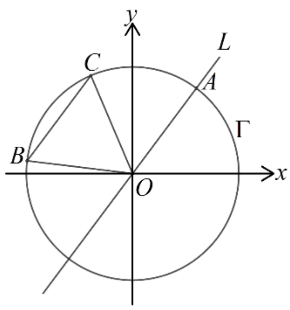
(2) $\because \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OA}=(3,4)$　　$\therefore$ 直線 BC 的斜率為 $\dfrac{y\text{分量}}{x\text{分量}}=\dfrac{4}{3}$

(3) 依題意，L 與直線 BC 平行，且 $\overline{BC}=|\overrightarrow{OA}|=5$，
表示直線 BC 與圓 Γ 所截弦長為 5，又 $\overline{OB}=\overline{OC}=r=5$
則 ΔOBC 為正三角形，利用平行線內錯角相等性質：$\angle AOC=\angle OCB=60°$



(4) 點 A 到直線 BC 的距離 $=$ 點 O 到直線 BC 的距離
因此 ΔABC 面積 $=$ 正三角形 OBC 面積 $=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 5^2=\dfrac{25\sqrt{3}}{4}$

(5) $m_L=\dfrac{4}{3}$，表示 L 與 x 軸正向夾角為 θ，且 $\tan\theta=\dfrac{4}{3}$
$\because \tan 30°<\tan\theta=\dfrac{3}{4}<\tan 60°$　　$\therefore 30°<\theta<60°$
$\Rightarrow -90°<\theta-120°<\theta-60°<0°$ 且 $90°<\theta+60°<\theta+120°<180°$
表示：「B,C 同在第四象限」或「B,C 同在第二象限」
示意圖可如右圖表示。



故選(3)(5)

9. 某村的村長選舉設有兩個投票所。已知兩位候選人在各投票所得到的有效票數比例如下表(廢票不列入計算)：

	甲候選人	乙候選人
第一投票所	40%	60%
第二投票所	55%	45%

假設第一投票所與第二投票所的有效票數分別為 x 與 y (其中 $x>0, y>0$)，且以總得票數較高者為當選人。根據上述表格，試選出正確的選項。

(1)當有效票數的總和 $x+y$ 已知時，就可決定當選人

(2)當 $x:y$ 的比值小於 $\frac{1}{2}$ 時，就可決定當選人

(3)當 $x>y$ 時，就可決定當選人

(4)當甲候選人在第一投票所的有效票數比在第二投票所的有效票數多時，就可決定當選人

(5)當乙候選人在第二投票所的有效票數比在第一投票所的有效票數多時，就可決定當選人

【答】(2)(3)(4)

【解】甲候選人得票數：$40\%\cdot x+55\%\cdot y=0.4x+0.55y$

乙候選人得票數：$60\%\cdot x+45\%\cdot y=0.6x+0.45y$

甲候選人要當選 $\Leftrightarrow 0.4x+0.55y>0.6x+0.45y \Leftrightarrow 0.2x<0.1y \Leftrightarrow 2x<y \Leftrightarrow \frac{x}{y}<\frac{1}{2}$

乙候選人要當選 $\Leftrightarrow 0.4x+0.55y<0.6x+0.45y \Leftrightarrow 0.2x>0.1y \Leftrightarrow 2x>y \Leftrightarrow \frac{x}{y}>\frac{1}{2}$

(1)無法確定

(2)當 $\frac{x}{y}<\frac{1}{2}$ 時，表示甲候選人當選

(3)當 $x>y$ 時，可知：$\frac{x}{y}>1>\frac{1}{2}$，即 $\frac{x}{y}>\frac{1}{2}$，表示乙候選人當選

(4) $0.4x>0.55y \Rightarrow \frac{x}{y}>\frac{0.4}{0.55} \Rightarrow \frac{x}{y}>\frac{8}{11}>\frac{1}{2}$，即 $\frac{x}{y}>\frac{1}{2}$，表示乙候選人當選

(5) $0.45y>0.6x \Rightarrow \frac{x}{y}<\frac{0.45}{0.6} \Rightarrow \frac{x}{y}<\frac{3}{4}$，無法保證誰會當選

故選(2)(3)(4)

10. 在 ΔABC 中，已經知道 $\overline{AB}=4$ 和 $\overline{AC}=6$，此時尚不足以確定 ΔABC 的形狀與大小。但是，只要再知道某些條件(例如：再知道 $\overline{BC}$ 的長度)，就可確定 ΔABC 唯一的形狀與大小。試選出正確的選項。
(1)如果再知道 $\cos A$ 的值，就可確定 ΔABC 唯一的形狀與大小
(2)如果再知道 $\cos B$ 的值，就可確定 ΔABC 唯一的形狀與大小
(3)如果再知道 $\cos C$ 的值，就可確定 ΔABC 唯一的形狀與大小
(4)如果再知道 ΔABC 的面積，就可確定 ΔABC 唯一的形狀與大小
(5)如果再知道 ΔABC 的外接圓半徑，就可確定 ΔABC 唯一的形狀與大小

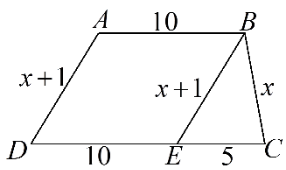
【答】(1)(2)

【解】依題意可知，$\overline{AC}>\overline{AB}\ \Rightarrow \angle B>\angle C$
(1)由餘弦定理可保證確定第三邊長度
(2)①若 $\cos B>0$，則 $\angle B$、$\angle C$ 均為銳角 $\Rightarrow \cos B>0$，$\sin B>0$
此時可由正弦定理 $\dfrac{\overline{AB}}{\sin C}=\dfrac{\overline{AC}}{\sin B}$ 確定 $\sin C$ 之值，亦可得知 $\cos C>0$
當 $\cos B,\sin B,\cos C,\sin C$ 之值確定，則 $\cos A$ 亦可保證確定
②若 $\cos B<0$，則 $\angle B$ 為鈍角、$\angle C$ 為銳角，顯然地，鈍角三角形必唯一確定
(3) $\because \angle C<\angle B\quad \therefore \angle C$ 不可能為鈍角 $\Rightarrow \angle C$ 必定為銳角
但此時 $\angle B$ 可為鈍角或是銳角，三角形並非唯一確定形狀
(4)知道三角形 ΔABC 的面積，表示知道 $\sin A$ 之值，但無法保證 $\angle A$ 是銳角或鈍角
(5)知道外接圓半徑，可確定 $\sin B$ 與 $\sin C$，
但 $\cos B$ 可正、可負，故不能保證確定 $\angle B$ 是銳角或鈍角
故選(1)(2)

11. 平面上有一梯形 $ABCD$，其上底 $\overline{AB}=10$、下底 $\overline{CD}=15$，且腰長 $\overline{AD}=\overline{BC}+1$。試選出正確的選項。
(1) $\angle A>\angle B$
(2) $\angle B+\angle D<180^\circ$
(3) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}<0$
(4) $\overline{BC}$ 的長可能是 2
(5) $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}<30$

【答】(1)(2)(5)

【解】設 $\overline{BC}=x$，則 $\overline{AD}=x+1$，在 $\overline{CD}$ 上找一點 E，使得 $\overline{BE}=x+1$，如右圖



(1)若為等腰梯形，則 $\angle A=\angle B$，但由題意知：$\overline{AD}>\overline{BC}$，因此 $\angle A>\angle B$
(2) $\angle B+\angle D<\angle A+\angle D=180^\circ\ \Rightarrow \angle B+\angle D<180^\circ$，
(3) $\cos C=\dfrac{x^2+5^2-(x+1)^2}{2\cdot x\cdot 5}=\dfrac{x^2+25-(x^2+2x+1)}{10x}=\dfrac{24-2x}{10x}=\dfrac{12-x}{5x}$
當 $12-x<0$，即 $x>12$ 時，使得 $\angle C$ 為鈍角
此時 $\angle ABC$ 為銳角，$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cos\angle ABC>0$
(4)在 ΔBCE 中，利用兩邊之和大於第三邊可知：$x+1+x>5\ \Rightarrow 2x>4\ \Rightarrow x>2\quad \therefore \overline{BC}>2$
(5)由(3)可知：$\cos C=\dfrac{12-x}{5x}$，
$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}=|\overrightarrow{CB}|\cdot|\overrightarrow{CD}|\cdot\cos C=x\cdot 15\cdot\left(\dfrac{12-x}{5x}\right)=3(12-x)$
由(4)可知 $x>2\ \Rightarrow -x<-2\ \Rightarrow 12-x<10\ \Rightarrow 3(12-x)<30$，因此 $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}<30$
故選(1)(2)(5)

12. 設 $P(X)$ 表示事件 X 發生的機率，而 $P(X\,|\,Y)$ 表示在事件 Y 發生的條件下，事件 X 發生的機率。今有2顆黑球、2顆白球、3顆紅球共7顆大小相同的球排成一列。設事件 A 為2顆黑球相鄰的事件，事件 B 為2顆黑球不相鄰的事件，而事件 C 為任2顆紅球都不相鄰的事件。試選出正確的選項。
(1) $P(A)>P(B)$
(2) $P(C)=\dfrac{2}{7}$
(3) $2P(C\,|\,A)+5P(C\,|\,B)<2$
(4) $P(C\,|\,A)>0.2$
(5) $P(C\,|\,B)>0.3$

【答】(2)(5)

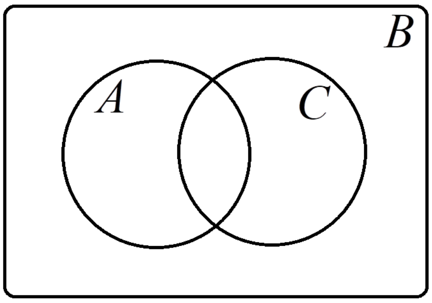
【解】令此七顆球為 $B_1, B_2, W_1, W_2, R_1, R_2, R_3$，

(1) $P(A)=P(\text{兩顆黑球綁在一起排列})=\dfrac{6!\times 2!}{7!}=\dfrac{2}{7}$，$P(B)=1-P(A)=\dfrac{5}{7}$　$\therefore P(A)<P(B)$

(2) $P(C)=P(\text{紅球插空隙})=\dfrac{4!\times C_3^5\times 3!}{7!}=\dfrac{2}{7}$

(3) $P(C\,|\,A)=\dfrac{P(A\cap C)}{P(A)}=\dfrac{P(\text{兩顆黑球綁在一起排列}\cap\text{紅球插空隙})}{P(\text{兩顆黑球綁在一起排列})}=\dfrac{\frac{3!\times 2!\times C_3^4\times 3!}{7!}}{\frac{2}{7}}=\dfrac{1}{5}$

$P(C\,|\,B)=\dfrac{P(C\cap B)}{P(B)}=\dfrac{P(C)-P(A\cap C)}{P(B)}=\dfrac{\frac{2}{7}-\frac{2}{35}}{\frac{5}{7}}=\dfrac{8}{25}$



得 $2P(C\,|\,A)+5P(C\,|\,B)=2\times\dfrac{1}{5}+5\times\dfrac{8}{25}=\dfrac{2}{5}+\dfrac{8}{5}=2$

《另解》

$\because A, B$ 為樣本空間的一組分割

$\therefore P(C)=P(A\cap C)+P(B\cap C)\quad\Rightarrow\dfrac{2}{7}=P(A)\times P(C\,|\,A)+P(B)\times P(C\,|\,B)$

$\Rightarrow\dfrac{2}{7}=\dfrac{2}{7}\times P(C\,|\,A)+\dfrac{5}{7}\times P(C\,|\,B)\ \Rightarrow 2P(C\,|\,A)+5P(C\,|\,B)=2$

(4) $P(C\,|\,A)=\dfrac{1}{5}=0.2$

(5) $P(C\,|\,B)=\dfrac{8}{25}=0.32>0.3$

故選(2)(5)

13. 設多項式函數 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，其中 a,b,c 均為有理數。試選出正確的選項。

(1)函數 $y=f(x)$ 與拋物線 $y=x^2+100$ 的圖形可能沒有交點

(2)若 $f(0)f(1)<0<f(0)f(2)$，則方程式 $f(x)=0$ 必有三個相異實根

(3)若 $1+3i$ 是方程式 $f(x)=0$ 的複數根，則方程式 $f(x)=0$ 有一個有理根

(4)存在有理數 a,b,c 使得 $f(1),f(2),f(3),f(4)$ 依序形成等差數列

(5)存在有理數 a,b,c 使得 $f(1),f(2),f(3),f(4)$ 依序形成等比數列

【答】(2)(3)(5)

【解】(1)判斷兩圖形有沒有交點，可判斷方程式 $x^3+ax^2+bx+c=x^2+100$ 是否有實根

因為方程式為實係數三次(奇數次)方程式，根據虛根成對定理可知，不可能三個均為虛根

$\Rightarrow$ 必至少有一實根，表示函數 $y=f(x)$ 與拋物線 $y=x^2+100$ 至少有一個交點

(2)①若 $f(0)>0$，則 $f(1)<0$ 且 $f(2)>0$，利用勘根定理：在 $(0,1)$ 與 $(1,2)$ 之間各至少有一實根

②若 $f(0)<0$，則 $f(1)>0$ 且 $f(2)<0$，利用勘根定理：在 $(0,1)$ 與 $(1,2)$ 之間各至少有一實根

利用上述討論，不論哪一種情況，方程式 $f(x)=0$ 均至少有兩實根，

而根據虛根成對定理，第三個根不可能為虛根，因此必定為實根

故方程式 $f(x)=0$ 必定有三個相異實根。

(3)由虛根成對定理知：$1-3i$ 為另一個複數根，設第三根為 k

因此 $f(x)=\big(x-(1+3i)\big)\big(x-(1-3i)\big)\big(x-k\big)=(x^2-2x+10)(x-k)$ $\Rightarrow$ 展開後，常數項為 $-10k$

與題意比較得：$-10k=c$ $\Rightarrow k=\dfrac{c}{-10}$　$\because c$ 為有理數　$\therefore$ 由有理數的封閉性知：k 為有理數

故方程式 $f(x)=0$ 的根為：兩個複數根(虛根)，以及一個有理根

(4)(5) $f(1)=a+b+c+1$

$f(2)=4a+2b+c+8$

$f(3)=9a+3b+c+27$

$f(4)=16a+4b+c+64$

若為等差，則 $\begin{cases}f(2)-f(1)=f(3)-f(2)\\ f(3)-f(2)=f(4)-f(3)\end{cases}$ $\Rightarrow\begin{cases}3a+b+7=5a+b+19\\ 5a+b+19=7a+b+37\end{cases}$ $\Rightarrow\begin{cases}2a=-12\\ 2a=-18\end{cases}$，矛盾

若為等比，先設 $a=0$ $\Rightarrow\begin{cases}\big(f(2)\big)^2=f(1)\cdot f(3)\\ \big(f(3)\big)^2=f(2)\cdot f(4)\end{cases}$ $\Rightarrow\begin{cases}(2b+c+8)^2=(b+c+1)(3b+c+27)\\ (3b+c+27)^2=(2b+c+8)(4b+c+64)\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}b^2+2b=12c-37\\ b^2+2b=18c-217\end{cases}$ $\Rightarrow 12c-37=18c-217$ $\Rightarrow 6c=180$ $\Rightarrow c=30$

代回 $b^2+2b=12c-37$ 得：$b^2+2b=323$ $\Rightarrow(b-17)(b+19)=0$

$\Rightarrow b=17$ 或 $b=-19$(不合，會使得 $f(2)=f(3)=0$)，故若取 $a=0$、$b=17$、$c=30$，

可使得 $f(1),f(2),f(3),f(4)$ 形成等比數列　$\Rightarrow$ 數列為 $48,72,108,162$，公比為 $\dfrac{3}{2}$

(4)(5)《另解》

若 $f(1),f(2),f(3),f(4)$ 要為等差數列，則 $(1,f(1)),(2,f(2)),(3,f(3)),(4,f(4))$ 必須在某一直線(一次函數的圖形)上，而一次函數與三次函數不可能同時交於四點，

因此 $f(1),f(2),f(3),f(4)$ 不可能為<u>等差數列</u>

若 $f(1),f(2),f(3),f(4)$ 要為等比數列，則 $(1,f(1)),(2,f(2)),(3,f(3)),(4,f(4))$ 必須在某一指數函數($y=a_1r^{x-1}$)的圖形上，而指數函數與三次函數有可能同時交於四點，

因此 $f(1),f(2),f(3),f(4)$ 有可能為<u>等比數列</u>，且只要取適當有理數 r，利用高斯消去法

解 $\begin{cases}a+b+c+1=a_1\\ 4a+2b+c+8=a_1r\\ 9a+3b+c+27=a_1r^2\\ 16a+4b+c+64=a_1r^3\end{cases}$ 必可得有理數 a,b,c,a_1 的值。例：取 $r=2$，

則 $a=-3,b=8,c=0,a_1=6$

《選填題》

A. 某機器貓從數線上原點位置朝數線的正向移動，其移動方式如下：以8秒為一週期，每一週期先以每秒4單位長等速度移動6秒，再休息2秒。如此繼續下去，則此機器貓在開始移動後＿⑭⑮＿秒會抵達數線上坐標為116的位置。

【解】因為每8秒會移動 $4\times6=24$ 單位長

且 $\dfrac{116}{24}=4\cdots20$，表示會經過4次週期後，再移動20單位長，

而20單位長即為5秒的移動距離

因此所求 $=4\times8+5=37$ 秒

B. 坐標空間中有兩條直線 L_1, L_2 與一平面 E，其中直線 $L_1:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z}{-5}$，而 L_2 的參數式為 $\begin{cases}x=1\\y=1+2t\\z=1+3t\end{cases}$（$t$ 為實數）。若 L_1 落在 E 上，且 L_2 與 E 不相交，則 E 的方程式為＿$x-$⑯$y+$⑰$z=$⑱＿。

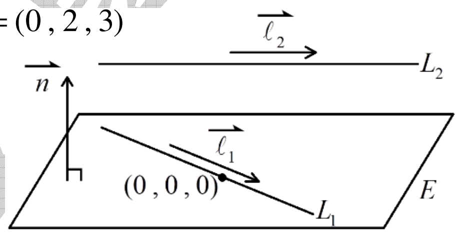
【答】$x-6y+4z=0$

【解】取 L_1 的方向向量為 $\overrightarrow{\ell_1}=(2,-3,-5)$，取 L_2 的方向向量為 $\overrightarrow{\ell_2}=(0,2,3)$

設平面 E 的法向量為 $\overrightarrow{n}$

$\because L_1$ 在平面 E 上　$\therefore \overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{\ell_1}$

$\because L_2$ 與平面 E 沒有交點　$\therefore L_2$ 與平面 E 平行 $\Rightarrow \overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{\ell_2}$



因此 $\overrightarrow{n}\,//\,(\overrightarrow{\ell_1}\times\overrightarrow{\ell_2})=(2,-3,-5)\times(0,2,3)=\left(\begin{vmatrix}-3&-5\\2&3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-5&2\\3&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2&-3\\0&2\end{vmatrix}\right)=(1,-6,4)$

取 $\overrightarrow{n}=(1,-6,4)$，且易知 L_1 上有一點 $(0,0,0)$，由 L_1 在平面 E 上可知，$(0,0,0)$ 在平面 E 上

故平面 E 的方程式為 $x-6y+4z\overset{(0,0,0)}{=}0\Rightarrow x-6y+4z=0$

C. 從1,2,3,4,5,6,7,8,9這九個數中任意取出三個相異的數，每數被取出的機率皆相等，則三數乘積是一完全平方數的機率為 $\dfrac{⑲}{⑳㉑}$。（化成最簡分數）

【解】挑出三個相異數字的方法數 $=C^9_3=\dfrac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$

欲找三數乘積為完全平方數，將數字先做分類：

完全平方數者：1、4、9

2的冪次方(不含1)：2、$\boxed{4}$、8

3的冪次方(不含1)：3、$\boxed{9}$

同為2與3的倍數：6

其他：5、7 $\rightarrow$ 選到此兩數之一，無法湊成完全平方數，故不可選擇

觀察：

2×8 為完全平方數，此時可任意挑一個完全平方數與其搭配，方法數：3種

6提供一個因數2、3，此時找3與其搭配，再找2或8與其搭配，亦可湊成完全平方數，方法數：2種

三個數字均為完全平方數，方法數：1種

共有 $3+2+1=6$ 種

故所求機率為 $\dfrac{6}{84}=\dfrac{1}{14}$

D. 在坐標平面上，Γ 是邊長為 4 的正方形，其中心位在點 $(1,1)$，且各邊與坐標軸平行。已知函數 $y=a\times 2^x$ 的圖形與 Γ 相交，其中 a 為實數，則 a 的最大可能範圍為 ＿㉒㉓ $\le a\le$ ㉔＿。

【解】因為邊長為是 4，所以邊長的一半為 2，

$\Rightarrow$ 正方形的四個頂點為 $(1+2,1+2),(1+2,1-2),(1-2,1+2),(1-2,1-2)$

$\Rightarrow (3,3),(3,-1),(-1,3),(-1,-1)$

若 $a>0$，則 $y=a\times 2^x$ 的圖形為**嚴格遞增**函數，且當 a 越大，會交於 y 軸正向的越上方

$\Rightarrow$ 此時，當 $y=a\times 2^x$ 碰到正方形的頂點 $(-1,\ 3)$ 時，會使得 a 有最大值

$\Rightarrow 3=a\times 2^{-1}\ \Rightarrow a=6$，表示 a 的最大值為 6

若 $a<0$，則 $y=a\times 2^x$ 的圖形為**嚴格遞減**函數，且當 a 越小，會交於 y 軸負向的越下方

$\Rightarrow$ 此時，當 $y=a\times 2^x$ 碰到正方形的頂點 $(-1,-1)$ 時，會使得 a 有最小值

$\Rightarrow -1=a\times 2^{-1}\ \Rightarrow a=-2$，表示 a 的最小值為 -2

綜合上述，a 的範圍為 $-2\le a\le 6$

E. 將 $\left(\sqrt[3]{49}\right)^{100}$ 寫成科學記號 $\left(\sqrt[3]{49}\right)^{100}=a\times 10^n$，其中 $1\le a<10$，且 n 為正整數。若 a 的整數部分為 m，則數對 $(m,n)=$ ＿(㉕,㉖㉗)＿。

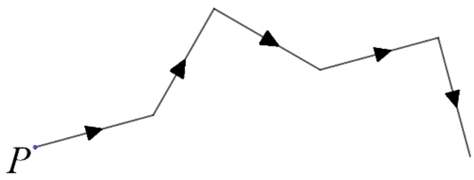
【答】：$(2,56)$

【解】$\log\left(\sqrt[3]{49}\right)^{100}=\log(7^{\frac{2}{3}})^{100}=\log 7^{\frac{200}{3}}=\dfrac{200}{3}\times\log 7\approx\dfrac{200}{3}\times 0.8451=56.34$

$=56+0.34=\log 10^{56}+\log 2.\square=\log\left(2.\square\times 10^{56}\right)$

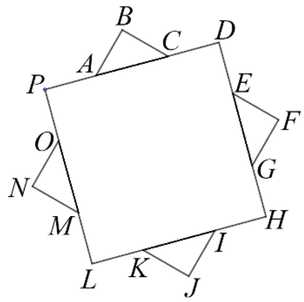
因此 $\left(\sqrt[3]{49}\right)^{100}=2.\square\times 10^{56}$，可知：$m=2$，$n=56$，故數對 $(m,n)=(2,56)$

F. 如圖，機器人在地面上從一點 P 出發，按照以下規則移動：先朝某方向前進一公尺後，依前進方向逆時針旋轉 45°，朝新方向前進一公尺後，依前進方向順時針旋轉 90°；再朝新方向前進一公尺後，依前進方向逆時針旋轉 45°；再朝新方向前進一公尺後，依前進方向順時針旋轉 90°，……，以此類推。已知機器人移動的路徑會形成一個封閉區域，則此封閉區域的面積為 ＿㉘ + ㉙$\sqrt{㉚}$＿ 平方公尺。(化成最簡根式)



【答】$8+4\sqrt{2}$

【解】依題意將此封閉圖形畫出如右，形成 16 邊形



分別連接線段 $\overline{AC}$、$\overline{EG}$、$\overline{IK}$、$\overline{MO}$，

可知所求 = 正方形 $PDHL$ 面積 $+4\times$(腰長為 1 的等腰直角三角形面積)

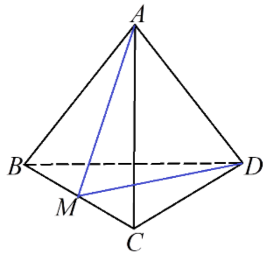
又 $\overline{AC}=\overline{EG}=\overline{IK}=\overline{MO}=\sqrt{2}$，因此正方形 $PDHL$ 的邊長為 $2+\sqrt{2}$

故所求 $=(2+\sqrt{2})^2+4\times(\dfrac{1}{2}\times 1\times 1)$

$=(6+4\sqrt{2})+2=8+4\sqrt{2}$

G. 在四面體 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AD}=4\sqrt{6}$，$\overline{BD}=\overline{CD}=8$，且 $\cos\angle BAC=\dfrac{1}{3}$，則點 D 到平面 ABC 的距離為 ㉛$\sqrt{㉜}$ 。(化成最簡根式)

【答】$4\sqrt{2}$



【解】依題意畫出右圖，

$\because \Delta ABC$ 與 ΔDBC 均為等腰三角形

$\therefore$ 找 $\overline{BC}$ 中點為 M，則 $\overline{AM}\perp\overline{BC}$ 且 $\overline{DM}\perp\overline{BC}$

① $\overline{BC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\cos\angle BAC}=\sqrt{96+96-2\times 96\times\dfrac{1}{3}}=\sqrt{128}=8\sqrt{2}$

② $\overline{BM}=\dfrac{1}{2}\overline{BC}=4\sqrt{2}$，則 $\overline{AM}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BM}^2}=\sqrt{96-32}=8$

③ $\overline{DM}=\sqrt{\overline{DB}^2-\overline{BM}^2}=\sqrt{64-32}=4\sqrt{2}$

所求為 D 點到平面 ABC 的距離，即作點 D 在 $\overline{AM}$ 上的高

觀察得知：$\overline{AM}=8$，$\overline{DM}=4\sqrt{2}$，$\overline{AD}=4\sqrt{6}$，滿足：$8^2+(4\sqrt{2})^2=(4\sqrt{6})^2$

因此 $\angle AMD=90^\circ$，所求即為 $\overline{DM}=4\sqrt{2}$

《另解》

由餘弦定理知：$\overline{BC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\cos\angle BAC}=8\sqrt{2}$

$\because \Delta BCD$ 三邊長為 $8,8,8\sqrt{2}$　$\therefore \Delta BCD$ 為等腰直角三角形

又 $\because \overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AD}$　$\therefore$「A 點在 ΔBCD 所在平面之垂足」到 B,C,D 三點等距離

$\Rightarrow$「A 點在 ΔBCD 所在平面之垂足」即為 ΔBCD 的外心

$\Rightarrow$「A 點在 ΔBCD 所在平面之垂足」為 $\overline{BC}$ 的中點

$\Rightarrow$「ΔABC 所在之平面」與「ΔBCD 所在之平面」垂直

$\Rightarrow D$ 點到 ΔABC 所在平面之距離 $=\dfrac{1}{2}\overline{BC}=4\sqrt{2}$