INFO-F-302 : Informatique Fondamentale
Projet - Rapport

Jérôme HELLINCKX
Thomas HERMAN

19 mai 2016

1 Le problème

Le problème de base consiste à essayer d'enchâsser un ensemble de rectangles dans la surface d'un grand rectangle. Ce problème se complexifie au fil des questions posées.

2 Définitions

Quelques termes et notations utilisés dans ce rapport :

- *largeur*, la dimension verticale d'un rectangle ;
- *longueur*, la dimension horizontale d'un rectangle ;
- R le grand rectangle dans lequel les autres rectangles doivent être enchâssés ;
- $n, m \in \mathbb{N}_{>0}$ la largeur et longueur du rectangle R ;
- l'ensemble $K = \{r_1, \ldots, r_k\}$ de k rectangles r plus petits que R ;
- $\mathcal{X} : \{1, \ldots, k\} \mapsto \mathbb{N}_{>0}$, fonction nous donnant la longueur d'un rectangle ;
- $\mathcal{Y} : \{1, \ldots, k\} \mapsto \mathbb{N}_{>0}$, fonction nous donnant la largeur d'un rectangle ;
- $\mu : \{1, \ldots, k\} \mapsto \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$ fonction d'assignation d'un rectangle à une position contenue dans R tel que si $\mu(i) \mapsto (a, b)$ alors les sommets du rectangle r_i sont $(a, b), (a, \mathcal{Y}(i) + b), (\mathcal{X}(i) + a, \mathcal{Y}(i) + b), (\mathcal{X}(i) + a, b)$.

Variables booléennes utilisées :

- $\gamma_{x,y}$, vrai ssi $x \geq y$ avec $x, y \in \mathbb{N}$
- $\xi_{x,y}$, vrai ssi $x \leq y$ avec $x, y \in \mathbb{N}$
- $\lambda_{x,y}$ vrai ssi $x \neq y$ avec $x, y \in \mathbb{N}$

3 Questions

3.1 Écrire en langage mathématique les contraintes que doit satisfaire μ permettant de dire si μ est correcte

1. $\forall i \in \{1, \ldots, k\}, \mu(i) \mapsto (a, b) : a \geq 0$
2. $\forall i \in \{1, \ldots, k\}, \mu(i) \mapsto (a, b) : a + \mathcal{X}(i) \leq m$
3. $\forall i \in \{1, \ldots, k\}, \mu(i) \mapsto (a, b) : b \geq 0$
4. $\forall i \in \{1, \ldots, k\}, \mu(i) \mapsto (a, b) : b + \mathcal{Y}(i) \leq n$
5. $\forall i, j \in \{1, \ldots, k\}, \mu(i) \mapsto (a, b), \mu(j) \mapsto (e, f) : i \neq j \rightarrow a + \mathcal{X}(i) \leq e \vee a \geq e + \mathcal{X}(j) \vee b + \mathcal{Y}(i) \leq f \vee b \geq f + \mathcal{Y}(j)$

3.2 Construire une formule Φ en FNC de la logique propositionnelle

Notons que les notations (a, b) et (e, f) utilisées sont les mêmes que précédemment :

1. $C_1 = \bigwedge_{i \in K} \gamma_{a,0}$
2. $C_2 = \bigwedge_{i \in K} \xi_{a+\mathcal{X}(i),m}$
3. $C_3 = \bigwedge_{i \in K} \gamma_{b,0}$
4. $C_4 = \bigwedge_{i \in K} \xi_{b+\mathcal{Y}(i),n}$
5. $C_5 = \bigwedge_{i \in K} \bigwedge_{j \in K} \neg\delta_{i,j} \vee (\xi_{a+\mathcal{X}(i),e} \vee \gamma_{a,e+\mathcal{X}(j)} \vee \xi_{b+\mathcal{Y}(i),f} \vee \gamma_{b,f+\mathcal{Y}(j)})$

La mise en FNC complète de Φ est donc

$$\bigwedge_{i \in K} \left[\bigwedge_{j \in K} \left[\neg\delta_{i,j} \vee \xi_{a+\mathcal{X}(i),c}\ lor \gamma_{a,c+\mathcal{X}(j)} \vee \xi_{b+\mathcal{Y}(i),d} \vee \gamma_{b,d+\mathcal{Y}(j)} \right] \wedge \gamma_{a,0} \wedge \xi_{a+\mathcal{X}(i),m} \wedge \gamma_{b,0} \wedge \xi_{b+\mathcal{Y}(i),n} \right]$$

3.3 Implémentation et tests

Montrer des résultats, expliquer l'implémentation vite fait

3.4 Calculer la plus petite dimension du carré R admettant une solution

Est-ce qu'on reçoit un n en entrée ? Si oui, recherche dichotomique, si non on prend n = dim r1 +dim r2 tel que r1 et r2 sont les plus grands rectangles de K ?

3.5 Calculer la plus petite dimension du carré R avec r_i de dimension $i \times i$ $\forall i \leq n$

Même chose que question précédente ...

3.6 Ajout d'une troisième dimension

Par soucis de compréhension, notons tout d'abord le développement de la fonction d'assignation $\mu : \{1, \ldots, k\} \mapsto \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, h\}$ et donc nous utiliserons $\mu(i) \mapsto (a, b, c)$ et $\mu(j) \mapsto (d, e, f)$. Nous appliquons ensuite le même raisonnement que celui utilisé pour déterminer les contraintes en deux dimensions. Nous considérons dans un premier temps la contrainte triviale qui sert à border la hauteur des rectangles $\{r_1, \ldots, r_k\}$ entre 0 et la hauteur h de R :

$$C_6 = \bigwedge_{i \in K} \gamma_{c,0}$$
$$C_7 = \bigwedge_{i \in K} \xi_{c+\mathcal{Z}(i),h}$$

Dans un second temps, nous adaptons C_5 définie lors de la construction de Φ précédente en remarquant que si un rectangle r_1 se trouve *plus haut* ou *plus bas* qu'un rectangle r_2, r_1 et r_2 ne se superposent pas. Répétons que cette observation est directement déduite de C_5 qui devient alors :

$$C_5 = \bigwedge_{i \in K} \bigwedge_{j \in K} \neg\delta_{i,j} \vee \xi_{a+\mathcal{X}(i),e} \vee \gamma_{a,e+\mathcal{X}(j)} \vee \xi_{b+\mathcal{Y}(i),f} \vee \gamma_{b,f+\mathcal{Y}(j)} \vee \xi_{c+\mathcal{Z}(i),g} \vee \gamma_{c,g+\mathcal{Z}(j)}$$

3.7 Ajout de contraintes qui ne fassent pas flotter les parallélépipèdes

Pour qu'un parallélépipède i ne flotte pas, il faut que sa composante c assignée par $\mu(i) \mapsto (a,b,c)$ vale soit 0, soit $g + \mathcal{Z}(j)$ où j est un autre parallélépipède qui lui ne flotte pas et g la composante g de j assignée par $\mu(j) \mapsto (e,f,g)$:

$$C_8 = \bigwedge_{i \in K} \left[\bigvee_{j \in K} \left[\neg \delta_{c,g+\mathcal{Z}(j)} \right] \vee \neg \delta_{c,0} \right]$$

3.8 Solution avec pivot

3.9 Minimum de p unités de contact entre les rectangles et les bords de R

Il est nécessaire de d'abord déterminer si un rectangle r_i touche un des bords du rectangle R, c'est-à-dire si un de ses côtés touche un bord de R. Nous obtenons donc que r_i touche R si $\forall i \in \{1, \ldots, k\}, \mu(i) \mapsto (a,b) : (a = 0)(\vee a + \mathcal{X}(i) = m) \vee (b = 0) \vee (b + \mathcal{Y}(i) = n)$. Il faut ensuite faire le somme de chaque côté de r_i qui touche un bord de R (si nous posons qu'une unité p vaut 1). Pour traduire cette contrainte en FNC, nous définissons la variable $\omega_{i,p}$ qui est vrai ssi les rectangles $\{r_1, \ldots, r_i\} \subseteq K$ au minimum p unités de contact avec les bords de R :

$$C_9 = \bigwedge_{i \in K}$$

3.10 Utilisation du mode MAX-SAT pour maximiser le contact entre rectangles et les bords de R