UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 1. stopnja

Marija Mrvar, Jure Jerman

Interval index

Projektna naloga

Mentorja: prof. dr. Riste Škrekovski,
dr. Timotej Hrga

Ljubljana, 2025

Kazalo

1 Uvod

V tem poročilu obravnavamo intervalni indeks $\mathrm{Int}(G)$, ki za graf G meri, kako "razpršene" so oznake vozlišč, ki se pojavljajo na njegovih povezavah. Višja kot je vrednost $\mathrm{Int}(G)$, bolj so sosednja vozlišča daleč narazen po svoji oznaki.

Zanimalo nas je dvoje:

1. med vsemi povezanimi grafi na n vozliščih preveriti, ali ima pot P_n največji intervalni indeks;

2. med vsemi povezanimi kubičnimi (3-regularnimi) grafi na n vozliščih poiskati graf z minimalnim in maksimalnim intervalnim indeksom ter opisati njune strukturne značilnosti.

Za izračune smo uporabili SageMath.

2 Osnovne definicije

V vseh nadaljinih definicijah predpostavimo, da je $G = (V, E)$ končen, povezan in neusmerjen graf brez večkratnih povezav in zank.

Definicija 2.1. *Za poljubni različni vozlišči $u, v \in V$ definiramo množico:*

$$I_G(u,v) = \Big\{ w \in V \mid d_G(u,w) + d_G(w,v) = d_G(u,v) \Big\}.$$

Množica $I_G(u,v)$ vsebuje vsa vozlišča, ki ležijo na vsaj eni najkrajši u–v poti v grafu G, vključno z vozliščema u in v.

Definicija 2.2. *Intervalni indeks grafa G je definiran kot*

$$\mathrm{Int}(G) = \sum_{\{u,v\} \subset V} \Big(|I_G(u,v)| - 1 \Big).$$

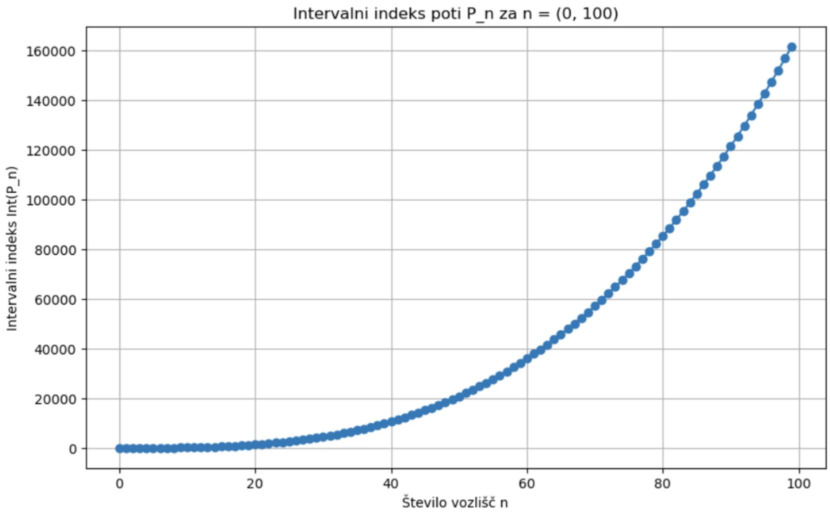
Definicija 2.3. *Graf $G = (V, E)$ je množica vozlišč $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ in množica povezav E. Pravimo, da je povezan, če med vsakima dvema vozliščema obstaja pot.*

Definicija 2.4. *Pot P_n je preprost povezan graf z n vozlišči in $n-1$ povezavami, pri čemer so vozlišča urejena v zaporedju, tako da je vsako vozlišče (razen prvega in zadnjega) povezano z natanko dvema sosedoma*

Definicija 2.5. *Graf je k-regularen, če ima vsako vozlišče stopnjo k. Za $k = 3$ govorimo o kubičnih grafih.*

3 Analiziranje intervalnega indeksa za pot P_n

Najprej smo si ogledali intervalni indeks poti in pogledali vrednosti za vse $n < 100$. Očitno je bilo da indeks raste, kar je razvidno tudi v spodnnji sliki.



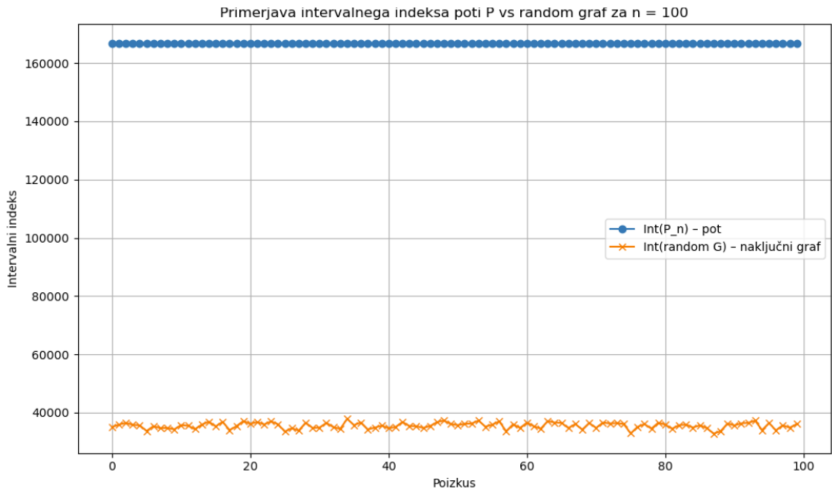
Slika 1: Rast intervalnega indeksa za pot

Primerjavo intervalnega indeksa $\mathrm{Int}(G)$ za pot P_n z drugimi grafi pa smo analizirali na dva načina, in sicer, najprej smo uprabili ukaz geng in z njim definirali funkcijo `test_path_maximal`, s katerim smo primerjali indeks poti z indeksom vseh možnih grafov na vozliščih stopnje $n \leq 9$, za večje n pa nam s tem ukazom ni uspelo pokazati, saj je bilo grafov za prveriti preveč (poizkus preverjanja za $n = 10$ je namreč trajalo 1512 min in še ni uspelo).

Tako smo za preverjanje večjih grafov ($n \geq 10$) definirali funkcijo `test_path_vs_random`, pri kateri smo uporabili ukaz graphs.RandomGNP, ki nam generira naključni graf po modelu Erdős–Rény glede na podano verjetnost, ali ustvari rob ali ne. S tem smo si tako pomagali, da smo testirali intervalni indeks poti in naključnjega grafa za $n = 100$ in v vseh primerih je imela pot tako kot prej večji indeks v vseh poskusih.

Ključni razlog, zakaj pot maksimira $\mathrm{Int}(G)$ med povezanimi grafi, je:

- da je pot edini povezani graf, kjer ni nobene "bližnjice",
- vsak par sosednjih vozlišč je v oznakah čim dlje narazen,
- dodajanje nove povezave v graf (npr. cikla) vedno povzroči nove najkraše poti.



Slika 2: Intervalni indeks poti in nakjučnega grafa za n = 100

Če povzamemo, lahko najpreprostejše rečemo, da poti maksimizirajo razdaljo med vozlišči, ker je graf kar se da "raztegnjen"v eno smer.

4 Zaključek

Pokazali smo, da ima pot P_n največji intervalni indeks med vsemi povezanimi grafi iste velikosti. Raziskali smo tudi kubične grafe in za vsako velikost določili grafa z minimalnim in maksimalnim intervalnim indeksom.

Metoda se lahko razširi tudi na druge razrede grafov, npr. regularne grafe višjih stopenj, drevesa ali naključne grafe.