

Interval index

Marija Mrvar in Jure Jerman
Projektna naloga

November 2025

1 Uvod in definicije

Naj bo $G = (V, E)$ končen, povezan in neusmerjen graf brez večkratnih povezav in zank.

Definicija 1.1. Za poljubni različni vozlišči $u, v \in V$ definiramo množico:

$$I_G(u, v) = \{w \in V \mid d_G(u, w) + d_G(w, v) = d_G(u, v)\}.$$

Množica $I_G(u, v)$ vsebuje vsa vozlišča, ki ležijo na vsaj eni najkrajši u - v poti v grafu G , vključno z vozliščema u in v .

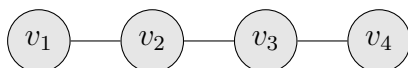
Definicija 1.2. Intervalni indeks grafa G je definiran kot

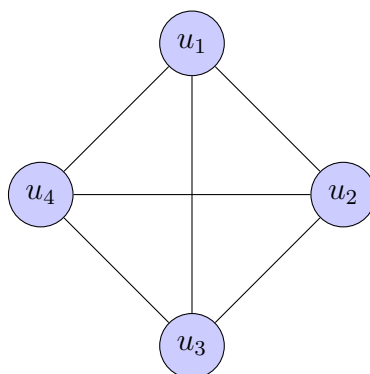
$$\text{Int}(G) = \sum_{\{u,v\} \subset V} (|I_G(u, v)| - 1).$$

Grafi, na katere se bomo osredotočili sta:

- Pot P_n , ki je preprost povezan graf z n vozlišči in $n - 1$ povezavami, pri čemer so vozlišča urejena v zaporedju, tako da je vsako vozlišče (razen prvega in zadnjega) povezano z natanko dvema sosedoma
- Poln graf K_n , ki je preprost neusmerjen graf, v katerem je vsako vozlišče povezano z vsakim drugim vozliščem z natanko eno povezavo.

2 Primera poti in polnega grafa





3 Cilji

Najprej se bomo osredotočili na manjše grafe, potem pa sklepali na večje grafe, pri tem pa bomo predvsem želeli:

1. Dokazati, da med vsemi grafi z n vozlišči intervalni indeks $\text{Int}(G)$ maksimizira pot P_n .
2. Med vsemi povezanimi kubičnimi (3-regularnimi) grafi na n vozliščih poiskati:
 - graf z minimalno vrednostjo $\text{Int}(G)$,
 - graf z maksimalno vrednostjo $\text{Int}(G)$,

ter opisati strukturne lastnosti teh ekstremalnih grafov (premer, število najkrajših poti, itd.).