

UNIVERZA V LJUBLJANI  
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 1. stopnja

Marija Mrvar, Jure Jerman

# Interval index

Projektna naloga

Mentorja: prof. dr. Riste Škrekovski,  
dr. Timotej Hrga

Ljubljana, 2025

# Kazalo

1	Uvod	2
2	Osnovne definicije	2
3	Analiziranje intervalnega indeksa za pot $P_n$	3
4	Uporaba metahevrstike za iskanje ekstremov pri kubičnih grafih	5
4.1	Uporabljene opazovane lastnosti grafov . . . . .	6
4.2	Grafični prikaz grafov . . . . .	7
4.2.1	Grafa za $n = 10$ . . . . .	7
4.2.2	Grafa za $n = 16$ . . . . .	7

# 1 Uvod

V tem poročilu obravnavamo intervalni indeks  $\text{Int}(G)$ , ki za graf  $G$  meri, koliko vozlišč je vključenih na najkrajših poteh med pari vozlišč. Višja kot je vrednost  $\text{Int}(G)$ , bolj so sosednja vozlišča daleč narazen.

Zanimalo nas je dvoje:

1. med vsemi povezanimi grafi na  $n$  vozliščih testirati, ali ima pot  $P_n$  največji intervalni indeks;
2. med vsemi povezanimi kubičnimi (3-regularnimi) grafi na  $n$  vozliščih poiskati graf z minimalnim in maksimalnim intervalnim indeksom ter opisati njune strukturne značilnosti.

Za izračune smo uporabili SageMath.

## 2 Osnovne definicije

V vseh nadaljnjih definicijah predpostavimo, da je  $G = (V, E)$  končen, povezan in neusmerjen graf brez večkratnih povezav in zank.

**Definicija 2.1.** Za poljubni različni vozlišči  $u, v \in V$  definiramo množico:

$$I_G(u, v) = \{w \in V \mid d_G(u, w) + d_G(w, v) = d_G(u, v)\}.$$

Množica  $I_G(u, v)$  vsebuje vsa vozlišča, ki ležijo na vsaj eni najkrajši  $u$ - $v$  poti v grafu  $G$ , vključno z vozliščema  $u$  in  $v$ .

**Definicija 2.2.** Intervalni indeks grafa  $G$  je definiran kot

$$\text{Int}(G) = \sum_{\{u,v\} \subset V} (|I_G(u, v)| - 1).$$

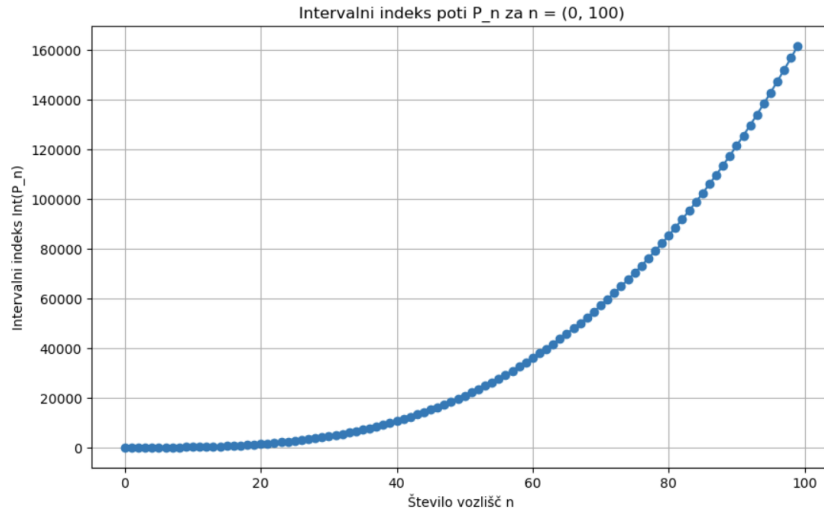
**Definicija 2.3.** Graf  $G = (V, E)$  je množica vozlišč  $V = \{1, 2, \dots, n\}$  in množica povezav  $E$ . Pravimo, da je povezan, če med vsakima dvema vozliščema obstaja pot.

**Definicija 2.4.** Pot  $P_n$  je preprost povezan graf z  $n$  vozlišči in  $n - 1$  povezavami, pri čemer so vozlišča urejena v zaporedju, tako da je vsako vozlišče (razen prvega in zadnjega) povezano z natanko dvema sosedoma

**Definicija 2.5.** Graf je  $k$ -regularen, če ima vsako vozlišče stopnjo  $k$ . Za  $k = 3$  govorimo o kubičnih grafih.

### 3 Analiziranje intervalnega indeksa za pot $P_n$

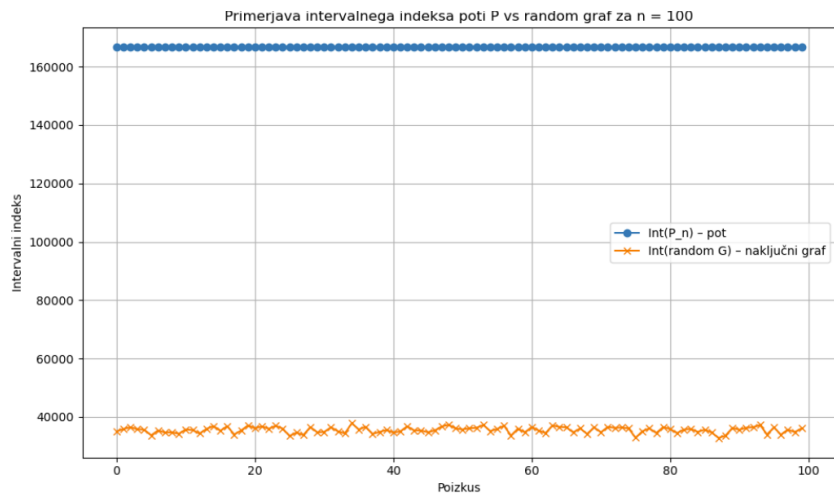
Najprej smo si ogledali intervalni indeks poti in pogledali vrednosti za vse  $n < 100$ . Očitno je bilo da indeks raste, kar je razvidno tudi v spodnji sliki.



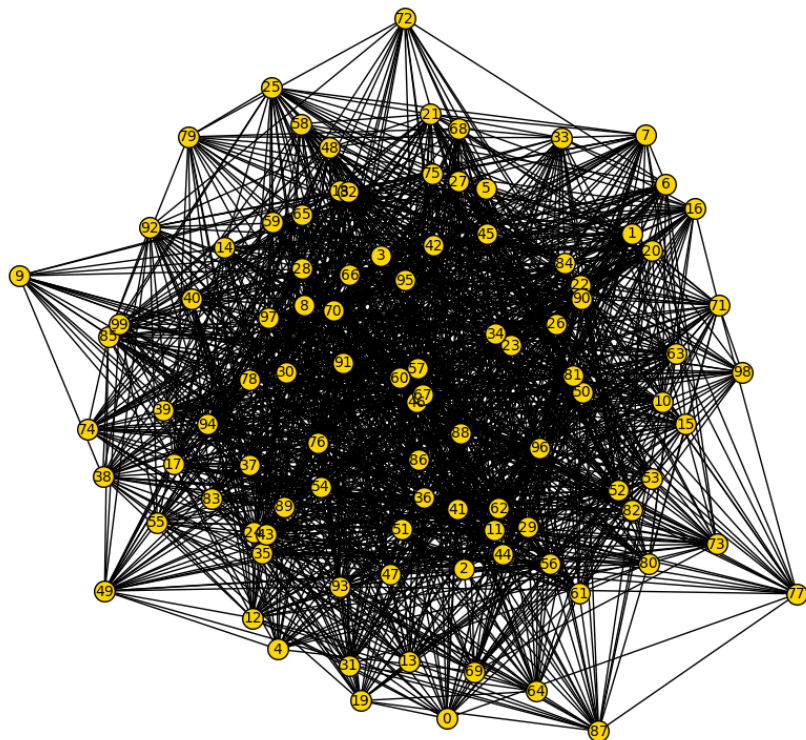
Slika 1: Rast intervalnega indeksa za pot

Primerjavo intervalnega indeksa  $\text{Int}(G)$  za pot  $P_n$  z drugimi grafi pa smo analizirali na dva načina, in sicer, najprej smo uprabili ukaz `geng` in z njim definirali funkcijo `test_path_maximal`, s katerim smo primerjali indeks poti z indeksom vseh možnih grafov na vozliščih stopnje  $n \leq 9$ , za večje  $n$  pa nam s tem ukazom ni uspelo pokazati, saj je bilo grafov za prveriti preveč (poizkus preverjanja za  $n = 10$  je namreč trajalo 1512 min in še ni uspelo).

Tako smo za preverjanje večjih grafov ( $n \geq 10$ ) definirali funkcijo `test_path_vs_random`, pri kateri smo uporabili ukaz `graphs.RandomGNP`, ki nam generira naključni graf po modelu Erdős–Rényi glede na podano verjetnost, ali ustvari rob ali ne. S tem smo si tako pomagali, da smo testirali intervalni indeks poti in naključnjega grafa za  $n = 100$  in v vseh primerih je imela pot tako kot prej večji indeks v vseh poskusih.



Slika 2: Intervalni indeks poti in naključnega grafa za  $n = 100$



Slika 3: Naključni graf z največjim intervalnim indkesom za  $n = 100$

Ključni razlog, zakaj pot maksimira  $\text{Int}(G)$  med povezanimi grafi, je:

- da je pot edini povezani graf, kjer ni nobene "bližnjice",
- vsak par sosednjih vozlišč je čim dlje narazen,
- dodajanje nove povezave v graf (npr. cikla) vedno povzroči nove najkrajše poti.

Če povzamemo, lahko najpreprostejše rečemo, da poti maksimizirajo razdaljo med vozlišči, ker je graf kar se da "raztegnjen" v eno smer in je tako med vozlišči kar se da velika razdalja.

## 4 Uporaba metahevrstike za iskanje ekstremov pri kubičnih grafih

Ker je število povezanih kubičnih grafov na  $n$  vozliščih za  $n > 10$  že zelo veliko, smo uporabili metahevrstiko za iskanje dobrih (ne nujno optimalnih) rešitev v zelo velikih iskalnih prostorih.

Izbrali smo eno najpreprostejših metahevrstik: **Hill-Climbing**. Algoritem deluje tako:

1. Začnemo z naključnim povezanim kubičnim grafom  $S$ .
2. V vsakem koraku naredimo majhno naključno spremembo ("tweak"): v našem primeru izberemo dva disjunktna roba in ju zamenjamo na enega od dveh možnih načinov (t.i. double edge swap).
3. Pomembno: sprememba mora ohraniti 3-regularnost grafa, zato vedno preverimo stopnje vseh vozlišč in sprejmemo samo veljavne zamenjave.
4. Če ima novi graf večji (ali manjši) intervalni indeks kot trenutni, ga obdržimo in nadaljujemo iz njega.
5. Postopek ponavljamo več tisočkrat, da dobimo čim boljše rezultate.

Za majhne  $n \leq 10$  smo kljub temu izvedli celoten pregled vseh kubičnih grafov z funkcijo `sistematicni_kubicni`. Za večje  $n > 10$  pa smo uporabili zgornjo metahevrstiko z večjimi ponovitvami z funkcijo `metahevrstika_kubicni`.

## 4.1 Uporabljene opazovane lastnosti grafov

Za vsak ekstremni graf (z minimalnim oz. maksimalnim  $\text{Int}(G)$ ) smo izračunali:

- premer grafa oz. diameter (najdaljša možna razdalja med dvema vozliščema),
- radij oz. radius (dolžina najdaljše najkrajše poti od  $v$  do katerega koli drugega vozlišča v grafu),
- obseg oz. girth (dolžina najmanjšega cikla ),
- bipartitnost oz. dvodelnost (razdelitev vozlišč v dve neodvisni, disjunktni množici),
- število robov,
- število vozlišč,
- hamiltonovost

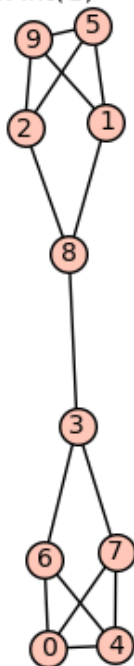
Naredili smo analizo za vse kubične grafe za  $n < 27$ . Pri tem pa smo ugotovili naslednje:

- Grafi z najmanjšim intervalnim indeksom so imeli majhen premer in velik obseg. Prav tako se je izkazalo tudi, da je bilo med njimi veliko grafov Hamiltonovih.
- Grafi z največjim indeksom imajo večji premer in strukturo, imajo pa za razliko od tistih z manjšim indeksom, manjši obseg. Grafi so izgledali tudi precej simetrično in "podolgovati", nekoliko so spominjali na poti  $P_n$ . Zato je tudi logično, da zaradi večje razdlje med vozlišči, imajo večji intervalni indeks.

## 4.2 Grafični prikaz grafov

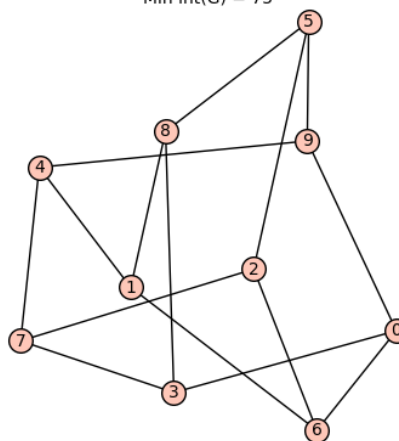
### 4.2.1 Grafa za $n = 10$

Max Int(G) = 139



Slika 4: Maksimalni indeks

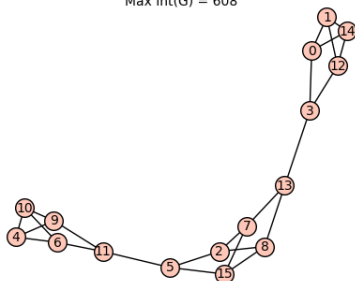
Min Int(G) = 75



Slika 5: Minimalni indeks

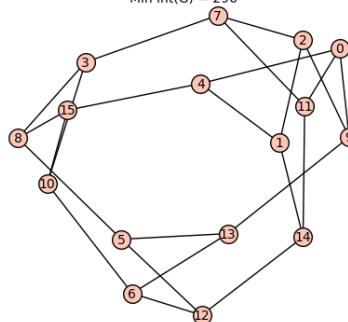
### 4.2.2 Grafa za $n = 16$

Max Int(G) = 608



Slika 6: Maksimalni indkes

Min Int(G) = 296



Slika 7: Minimalni indeks



## Literatura

- [1] [networkx.algorithms.swap.double\\_edge\\_swap](#) (NetworkX 3.6.1 documentation).
- [2] S. LUKE, [Essentials of Metaheuristics](#), Lulu.com, second ed., 2013.