

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 1. stopnja

Marija Mrvar, Jure Jerman

Interval index

Projektna naloga

Mentorja: prof. dr. Riste Škrekovski,
dr. Timotej Hrga

Ljubljana, 2025

Kazalo

1	Uvod	2
2	Osnovne definicije	2
3	Analiziranje intervalnega indeksa za pot P_n	3
4	Zaključek	4

1 Uvod

V tem poročilu obravnavamo intervalni indeks $\text{Int}(G)$, ki za graf G meri, kako “razpršene” so oznake vozlišč, ki se pojavljajo na njegovih povezavah. Višja kot je vrednost $\text{Int}(G)$, bolj so sosednja vozlišča daleč narazen po svoji oznaki.

Zanimalo nas je dvoje:

1. med vsemi povezanimi grafi na n vozliščih preveriti, ali ima pot P_n največji intervalni indeks;
2. med vsemi povezanimi kubičnimi (3-regularnimi) grafi na n vozliščih poiskati graf z minimalnim in maksimalnim intervalnim indeksom ter opisati njune strukturne značilnosti.

Za izračune smo uporabili SageMath.

2 Osnovne definicije

V vseh nadaljinih definicijah predpostavimo, da je $G = (V, E)$ končen, povezan in neusmerjen graf brez večkratnih povezav in zank.

Definicija 2.1. Za poljubni različni vozlišči $u, v \in V$ definiramo množico:

$$I_G(u, v) = \left\{ w \in V \mid d_G(u, w) + d_G(w, v) = d_G(u, v) \right\}.$$

Množica $I_G(u, v)$ vsebuje vsa vozlišča, ki ležijo na vsaj eni najkrajši $u-v$ poti v grafu G , vključno z vozliščema u in v .

Definicija 2.2. Intervalni indeks grafa G je definiran kot

$$\text{Int}(G) = \sum_{\{u,v\} \subset V} (|I_G(u, v)| - 1).$$

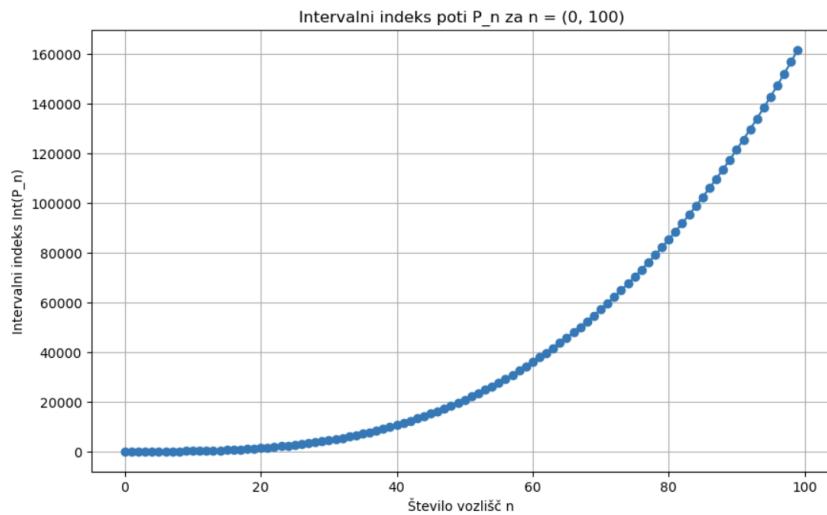
Definicija 2.3. Graf $G = (V, E)$ je množica vozlišč $V = \{1, 2, \dots, n\}$ in množica povezav E . Pravimo, da je povezan, če med vsakima dvema vozliščema obstaja pot.

Definicija 2.4. Pot P_n je preprost povezan graf z n vozlišči in $n - 1$ povezavami, pri čemer so vozlišča urejena v zaporedju, tako da je vsako vozlišče (razen prvega in zadnjega) povezano z natanko dvema sosedoma

Definicija 2.5. Graf je k -regularen, če ima vsako vozlišče stopnjo k . Za $k = 3$ govorimo o kubičnih grafih.

3 Analiziranje intervalnega indeksa za pot P_n

Najprej smo si ogledali intervalni indeks poti in pogledali vrednosti za vse $n < 100$. Očitno je bilo da indeks raste, kar je razvidno tudi v spodnji sliki.



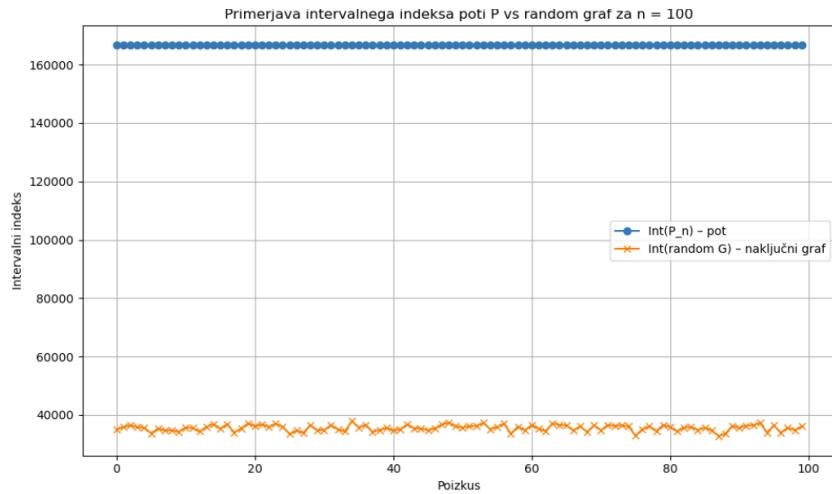
Slika 1: Rast intervalnega indeksa za pot

Primerjavo intervalnega indeksa $\text{Int}(G)$ za pot P_n z drugimi grafi pa smo analizirali na dva načina, in sicer, najprej smo uprabili ukaz `geng` in z njim definirali funkcijo `test_path_maximal`, s katerim smo primerjali indeks poti z indeksom vseh možnih grafov na vozliščih stopnje $n \leq 9$, za večje n pa nam s tem ukazom ni uspelo pokazati, saj je bilo grafov za prveriti preveč (poizkus preverjanja za $n = 10$ je namreč trajalo 1512 min in še ni uspelo).

Tako smo za preverjanje večjih grafov ($n \geq 10$) definirali funkcijo `test_path_vs_random`, pri kateri smo uporabili ukaz `graphs.RandomGNP`, ki nam generira naključni graf po modelu Erdős–Rény glede na podano verjetnost, ali ustvari rob ali ne. S tem smo si tako pomagali, da smo testirali intervalni indeks poti in naključnjega grafa za $n = 100$ in v vseh primerih je imela pot tako kot prej večji indeks v vseh poskusih.

Ključni razlog, zakaj pot maksimira $\text{Int}(G)$ med povezanimi grafi, je:

- da je pot edini povezani graf, kjer ni nobene "bližnjice",
- vsak par sosednjih vozlišč je v oznakah čim dlje narazen,
- dodajanje nove povezave v graf (npr. cikla) vedno povzroči nove najkraše poti.



Slika 2: Intervalni indeks poti in naključnega grafa za $n = 100$

Če povzamemo, lahko najpreprostejše rečemo, da poti maksimizirajo razdaljo med vozlišči, ker je graf kar se da "raztegnjen" v eno smer.

4 Zaključek

Pokazali smo, da ima pot P_n največji intervalni indeks med vsemi povezanimi grafi iste velikosti.

Literatura

- [1] S. LUKE, Essentials of Metaheuristics, Lulu.com, second ed., 2013.