UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 1. stopnja

Marija Mrvar, Jure Jerman

Interval index

Projektna naloga

Mentorja: prof. dr. Riste Škrekovski,
dr. Timotej Hrga

Ljubljana, 2025

Kazalo

1 Uvod

V tem poročilu obravnavamo intervalni indeks $\mathrm{Int}(G)$, ki za graf G meri, kako "razpršene" so oznake vozlišč, ki se pojavljajo na njegovih povezavah. Višja kot je vrednost $\mathrm{Int}(G)$, bolj so sosednja vozlišča daleč narazen po svoji oznaki.

Zanimalo nas je dvoje:

1. med vsemi povezanimi grafi na n vozliščih preveriti, ali ima pot P_n največji intervalni indeks;

2. med vsemi povezanimi kubičnimi (3-regularnimi) grafi na n vozliščih poiskati graf z minimalnim in maksimalnim intervalnim indeksom ter opisati njune strukturne značilnosti.

Za izračune smo uporabili SageMath.

2 Osnovne definicije

V vseh nadaljinih definicijah predpostavimo, da je $G = (V, E)$ končen, povezan in neusmerjen graf brez večkratnih povezav in zank.

Definicija 2.1. *Za poljubni različni vozlišči $u, v \in V$ definiramo množico:*

$$I_G(u, v) = \Big\{w \in V \mid d_G(u, w) + d_G(w, v) = d_G(u, v)\Big\}.$$

Množica $I_G(u, v)$ vsebuje vsa vozlišča, ki ležijo na vsaj eni najkrajši u–v poti v grafu G, vključno z vozliščema u in v.

Definicija 2.2. *Intervalni indeks grafa G je definiran kot*

$$\mathrm{Int}(G) = \sum_{\{u,v\} \subset V} \Big(|I_G(u, v)| - 1\Big).$$

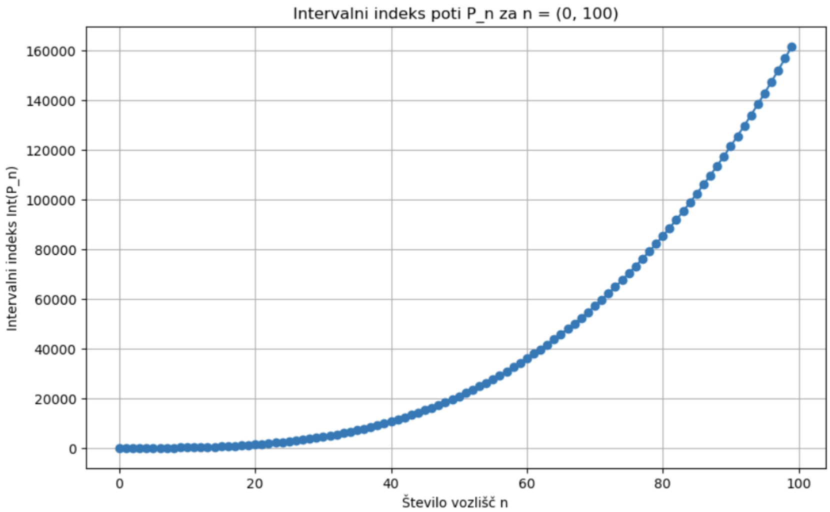
Definicija 2.3. *Graf $G = (V, E)$ je množica vozlišč $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ in množica povezav E. Pravimo, da je povezan, če med vsakima dvema vozliščema obstaja pot.*

Definicija 2.4. *Pot P_n je preprost povezan graf z n vozlišči in $n-1$ povezavami, pri čemer so vozlišča urejena v zaporedju, tako da je vsako vozlišče (razen prvega in zadnjega) povezano z natanko dvema sosedoma*

Definicija 2.5. *Graf je k-regularen, če ima vsako vozlišče stopnjo k. Za $k = 3$ govorimo o kubičnih grafih.*

3 Analiziranje intervalnega indeksa za pot P_n

Najprej smo si ogledali intervalni indeks poti in pogledali vrednosti za vse $n < 100$. Očitno je bilo da indeks raste, kar je razvidno tudi v spodnnji sliki.



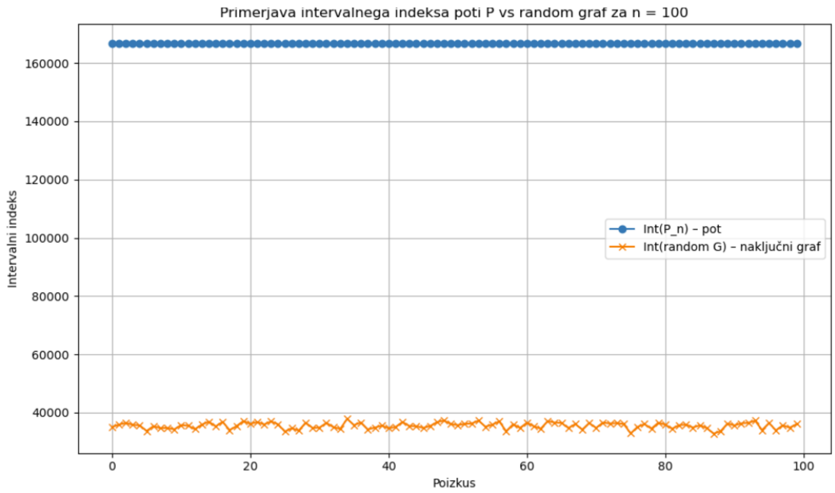
Slika 1: Rast intervalnega indeksa za pot

Primerjavo intervalnega indeksa $\mathrm{Int}(G)$ za pot P_n z drugimi grafi pa smo analizirali na dva načina, in sicer, najprej smo uprabili ukaz geng in z njim definirali funkcijo `test_path_maximal`, s katerim smo primerjali indeks poti z indeksom vseh možnih grafov na vozliščih stopnje $n \leq 9$, za večje n pa nam s tem ukazom ni uspelo pokazati, saj je bilo grafov za prveriti preveč (poizkus preverjanja za $n = 10$ je namreč trajalo 1512 min in še ni uspelo).

Tako smo za preverjanje večjih grafov ($n \geq 10$) definirali funkcijo `test_path_vs_random`, pri kateri smo uporabili ukaz graphs.RandomGNP, ki nam generira naključni graf po modelu Erdős–Rény glede na podano verjetnost, ali ustvari rob ali ne. S tem smo si tako pomagali, da smo testirali intervalni indeks poti in naključnjega grafa za $n = 100$ in v vseh primerih je imela pot tako kot prej večji indeks v vseh poskusih.

Ključni razlog, zakaj pot maksimira $\mathrm{Int}(G)$ med povezanimi grafi, je:

- da je pot edini povezani graf, kjer ni nobene "bližnjice",
- vsak par sosednjih vozlišč je v oznakah čim dlje narazen,
- dodajanje nove povezave v graf (npr. cikla) vedno povzroči nove najkrajše poti.



Slika 2: Intervalni indeks poti in nakjučnega grafa za n = 100

Če povzamemo, lahko najpreprostejše rečemo, da poti maksimizirajo razdaljo med vozlišči, ker je graf kar se da "raztegnjen"v eno smer.

4 Metahevristika za iskanje ekstremov pri kubičnih grafih

Ker je število povezanih kubičnih grafov na n vozliščih za $n > 10$ že zelo veliko, smo uporabili metahevristiko — splošno strategijo za iskanje dobrih (ne nujno optimalnih) rešitev v zelo velikih iskalnih prostorih.

Izbrali smo eno najpreprostejših in najučinkovitejših metahevristik: **Hill-Climbing**. Algoritem deluje tako:

1. Začnemo z naključnim povezanim kubičnim grafom S.
2. V vsakem koraku naredimo majhno naključno spremembo ("tweak"): v našem primeru izberemo dva disjunktna roba in ju zamenjamo na enega od dveh možnih načinov (t.i. *double edge swap*).
3. Pomembno: sprememba mora ohraniti 3-regularnost grafa, zato vedno preverimo stopnje vseh vozlišč in sprejmemo samo veljavne zamenjave.
4. Če ima novi graf večji (ali manjši) intervalni indeks kot trenutni, ga obdržimo in nadaljujemo iz njega.
5. Postopek ponavljamo več tisočkrat ali dokler se vrednost ne izboljša več.

Za majhne $n \leq 10$ smo kljub temu izvedli celoten pregled vseh kubičnih grafov z funkcijo `sistematicni_kubicni`, Za večje $n > 10$ pa smo uporabili zgornjo metahevristiko z večimi ponovitvami z funkcijo `metahevristika_kubicni`.

4.1 Uporabljene opazovane lastnosti grafov

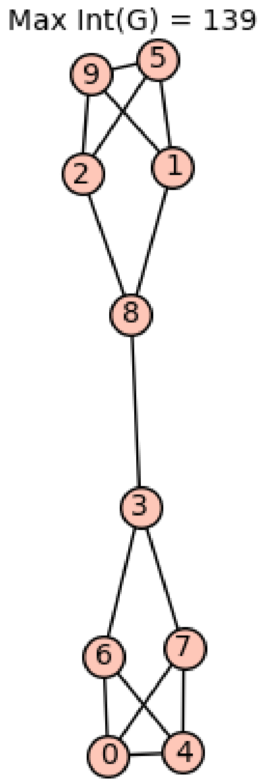
Za vsak ekstremni graf (z minimalnim oz. maksimalnim $\mathrm{Int}(G)$) smo izračunali:

- premer grafa ozdiameter,
- radij oz. radius,
- obseg oz. girth,
- bipartitnost oz. dvodelnost,
- število robov,
- število vozlišč
- Hamiltonovost.

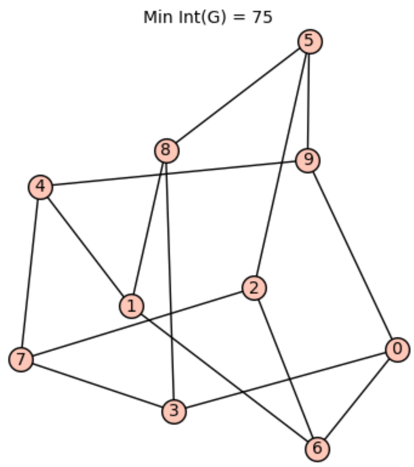
4.2 Ključne ugotovitve

- Grafi z najmanjšim intervalnim indeksom imajo praviloma majhen premer. Izkazalo se je tudi, da je bilo veliko grafov Hamiltonovih.
- Grafi z največjim indeksom imajo večji premer in strukturo, imajo pa za razliko od tistih z manjšim indeksom, manjši obseg. Grafi so izgledali tudi precej simetrično.

4.2.1 Grafa za $n = 10$

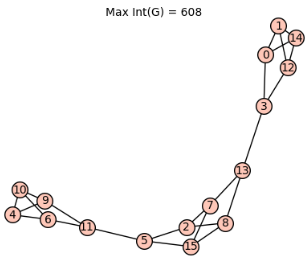


Slika 3: Graf za $n = 10$ z maksimalnem indeksom

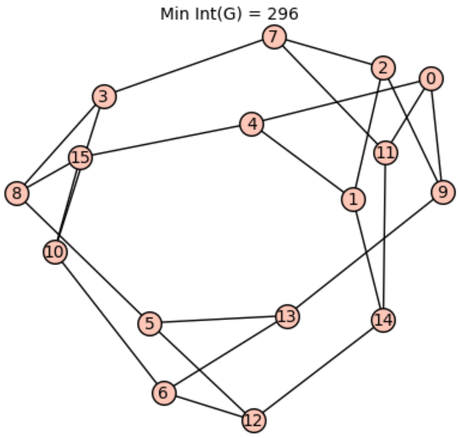


Slika 4: Graf za $n = 10$ z minimalnem indeksom

4.2.2 Grafa za $n = 16$



Slika 5: Graf za $n = 16$ z maksimalnem indeksom



Slika 6: Graf za $n = 16$ z minimalnem indeksom

Literatura

[1] networkx.algorithms.swap.double_edge_swap (NetworkX 3.6.1 documentation).

[2] S. Luke, Essentials of Metaheuristics, Lulu.com, second ed., 2013.