1 Der Begriff der Wahrscheinlichkeit

Stochastik befasst sich mit *Zufallsexperimenten*. Deren Ergebnisse sind unter „Versuchsbedingungen“verschieden.

Bsp.

- *Kartenziehen, Würfeln, Roulette*
- *Simulation*
- *Komplexe Phänomene (zumindest approximativ): Börse, Data-Mining, Genetik, Wetter*

Ergebnisse von Zufallsexperimenten werden in *Ereignisse* zusammengefasst.

- *Ereignisraum* (Grundraum) Ω: Menge aller möglichen Ergebnisse des Zufallsexperiments
- *Elementarereignisse* ω: Elemente von Ω, also die möglichen Ergebnisse des Zufallsexperiments
- *Ereignis*: Teilmenge von Ω
- Operationen der Mengenlehre haben natürliche Interpretation in der Sprache der Ereignisse:

Durchschnitt	$A \cap B$	A **und** B
Vereinigung	$A \cup B$	A **oder** B
Komplement	A^c	**Nicht** A
Differenz	$A \setminus B$	A **ohne** B

Das Vorgehen der Stochastik zur Lösung eines Problems kann in drei Schritte unterteilt werden:

1. Man bestimmt die Wahrscheinlichkeiten gewisser Ereignisse A_i. Dabei sind Expertenwissen, Daten und Plausibilitäten wichtig.
2. Man berechnet aus den Wahrscheinlichkeiten $\mathcal{P}(B_j)$ die Wahrscheinlichkeiten von gewissen anderen Ereignissen B_j gemäss den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitstheorie (oft vereinfachend unter Unabhängigkeitsannahme).
3. Man interpretiert die Wahrscheinlichkeiten $\mathcal{P}(B_j)$ im Hinblick auf die Problemstellung.

Das *Bestimmen von Wahrscheinlichkeiten* (siehe Schritt 1) wird oft konkreter formalisiert.

Bsp. (Laplace-Modell)
Die Wahrscheinlichkeit von einem Ereignis A ist gegeben durch

$$\mathcal{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \quad \left(= \frac{\#\ \textit{günstige Fälle}}{\#\textit{mögliche Fälle}}\right). \tag{1.1}$$

Dem Laplace-Modell liegt die uniforme Verteilung *von Elemntarereignissen ω zugrunde:*

$$\mathcal{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|} \tag{1.2}$$

Andere Wahrscheinlichkeitsverteilungen werden mit Hilfe des Konzepts von *Zufallsvariablen* (siehe Kapitel 3) eingeführt. Es sei aber bereits hier festgehalten: die Stochastik geht weit über das Laplace-Modell hinaus. Für viele Anwendungen ist das Laplace-Modell ungeeignet.

1.1 Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten

Die drei Axiome sind:

(A1) $\mathcal{P}(A) \geq 0$: Wahrscheinlichkeiten sind immer nicht-negativ.

(A2) $\mathcal{P}(\Omega) = 1$: sicheres Ereignis Ω hat Wahrscheinlichkeit eins.

(A3) $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B)$ $\forall$ Ereignisse A, B, die sich gegenseitig ausschliessen (d.h. $A \cup B = \varnothing$).

Weitere (abgeleitete) Regeln:

$$\mathcal{P}(A^c) = 1 - \mathcal{P}(A) \tag{1.3}$$

für jedes Ereignis A,

$$\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(A \cap B) \tag{1.4}$$

für je zwei Ereignisse A und B,

$$\mathcal{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n) \leq \mathcal{P}(A_1) + \dots + \mathcal{P}(A_n) \tag{1.5}$$

für je n Ereignisse $A_1, \dots, A$

$$\mathcal{P}(B \setminus A) = \mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(A) \tag{1.6}$$

für je zwei Ereignisse A und B mit $A \subset B$.

1.2 Unabhängigkeit von Ereignissen

Wenn zwischen zwei Ereignissen A und B kein kausaler Zusammenhang besteht (d.h. es gibt keine gemeinsamen Ursachen oder Ausschliessungen), dann werden sie *unabhängig* genannt, genauer: Zwei Ereignisse A und B heissen (*stochastisch*) *unabhängig* wenn für jedes $k \leq n$ und all $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ gilt

$$\mathcal{P}(A_{i_1} \cap \dots \cup A_{i_k}) = \mathcal{P}(A_{i_1}) \cdots \mathcal{P}(A_{i_k}).$$

1.3 Interpretation von Wahrscheinlichkeiten

Die beiden wichtigsten Interpretationen sind:

- frequentistisch: „Idealisierung der relative Häufigkeiten bei vielen unabhängigen Wiederholungen“
- subjektive: „Mass für den Glauben, dass ein Ereignis eintreten wird“(Bayes'sch)

======= kk

2 Zufallsvariable und Wahrschein-lichkeitsverteilung

aoeu

2.1 aoeu

aoeu

2.1.1 aoeu

aoeu din laptop isch scheisse

3 Zufallsvariable und Wahrscheinlichkeitsverteilung

Ergebnisse eines physikalischen Versuchs (Zufallsexperiment) sind oft Zahlen (Messungen). Diese werden als Beobachtung von so genannten Zufallsvariablen interpertiert, d.h. beobachtet wird nicht das ω welches bei einem Zufallsexperiment herauskommnt, sondern die Werte aller beobachtetetn Zufallsvariablen.

3.1 Definition einer Zufallsvariablen

Eine Zufallsvariable X ist ein Zuffalsexperiment mit möglichen Werten in $\mathbb{R}$, bzw. in einer Teilmenge von $\mathbb{R}$, z.B. $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, \ldots\}$. Deren Wert ist im Voraus nicht bekannt, sondern hängt vom Ergebnis eines Zufallsexperiments ab. Mathematisch ist eine Zufallsvariable einfach nur eine Abbildung von Ω nach $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} X : \Omega &\to \mathbb{R}, \\ \omega &\mapsto X(\omega). \end{aligned}$$

Das heisst wenn das Ergebnis ω herauskommt, nimmt die Zufallsvariable den Wert $X(\omega)$ an.

Bsp. (Wert einer zuf. gez. Jasskarte.)
Sei $\Omega = \{Jasskarten\}$; ein $\omega \in \Omega$ ist z.B. ein Schilten-As; Zufallsvariable X:

$$\begin{aligned} \textit{As irgendeiner Farbe} &\mapsto 11 \\ \textit{König irgendeiner Farbe} &\mapsto 4 \\ \text{„}\textit{Brettchen} \text{“}\textit{irgendeiner Farbe} &\mapsto 0. \end{aligned}$$

3.2 Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\mathbb{R}$

Eine Zufallsvariable X legt eine Wahrscheinlichkeit Q auf $\mathbb{R}$ fest, die segenannte *Verteilung* von X:

$$\begin{aligned} Q(B) &= \mathcal{P}\Big(\big\{\omega; X(\omega) \in B\big\}\Big) \\ &= \mathcal{P}(X \in B) \end{aligned}$$

Bsp. (Wert einer zuf. gez. Jk. Forts.)
In obigem Beispiel ist beispielsweise

$$\begin{aligned} Q(11) &= \mathcal{P}(\textit{As irgendeiner Farbe}) \\ &= \frac{4}{36}. \end{aligned}$$

Die *kumulative Verteilungsfunktion* ist definiert als

$$\begin{aligned} F(b) &= \mathcal{P}(X \le b) \\ &= Q\big((-\infty, b]\big). \end{aligned}$$

Sie enthält dieselbe Information wie die Verteilung $Q(\cdot)$, ist aber einfacher darzustellen. Die Umkehrung der Verteilungsfunktion stellen di esogenannten Quantile dar, für $\alpha \in (0, 1)$ ist das *α-Quantil von X* definiert als das kleinste $x \in \mathbb{R}$ für welches $F(x) \ge \alpha$ gilt, also

$$\begin{aligned} q_\alpha &:= q(\alpha) \\ &:= \min\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \ge \alpha\} \end{aligned}$$

Es gilt

$$F(q_\alpha)$$

bzw. äquivalent dazu

$$q_\alpha = F^{-1}(\alpha).$$

Das $\frac{1}{2}$-Quantil von X heisst auch *Median von X*.