

1 Der Begriff der Wahrscheinlichkeit

Stochastik befasst sich mit *Zufallsexperimenten*. Deren Ergebnisse sind unter „Versuchsbedingungen“ verschieden.

Beispiel 1.1. • *Kartenziehen, Würfeln, Roulette*

- *Simulation*
- *Komplexe Phänomene (zumindest approximativ): Börse, Data-Mining, Genetik, Wetter*

Ergebnisse von Zufallsexperimenten werden in *Ereignisse* zusammengefasst.

- *Ereignisraum* (Grundraum) Ω : Menge aller möglichen Ergebnisse des Zufallsexperiments
- *Elementarereignisse* ω : Elemente von Ω , also die möglichen Ergebnisse des Zufallsexperiments
- *Ereignis*: Teilmenge von Ω
- Operationen der Mengenlehre haben natürliche Interpretation in der Sprache der Ereignisse:

Durchschnitt	$A \cap B$	A und B
Vereinigung	$A \cup B$	A oder B
Komplement	A^c	Nicht A
Differenz	$A \setminus B$	A ohne B

Das Vorgehen der Stochastik zur Lösung eines Problems kann in drei Schritte unterteilt werden:

1. Man bestimmt die Wahrscheinlichkeiten gewisser Ereignisse A_i . Dabei sind Expertenwissen, Daten und Plausibilitäten wichtig.
2. Man berechnet aus den Wahrscheinlichkeiten $P(B_j)$ die Wahrscheinlichkeiten von gewissen anderen Ereignissen B_j gemäss den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitstheorie (oft vereinfachend unter Unabhängigkeitsannahme).
3. Man interpretiert die Wahrscheinlichkeiten $P(B_j)$ im Hinblick auf die Problemstellung.

Das *Bestimmen von Wahrscheinlichkeiten* (siehe Schritt 1) wird oft konkreter formalisiert.

Beispiel 1.2 (Kombinatorische Abzählung bei endlichem Ω).

Die Wahrscheinlichkeit von einem Ereignis A ist gegeben durch

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \quad \left(= \frac{\# \text{ günstige Fälle}}{\# \text{ mögliche Fälle}} \right). \quad (1.1)$$

Dies ist das Laplace-Modell. Dem Laplace-Modell liegt die uniforme Verteilung von Elementarereignissen ω zugrunde:

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|} \quad (1.2)$$

Andere Wahrscheinlichkeitsverteilungen werden mit Hilfe des Konzepts von *Zufallsvariablen* (siehe Kapitel 2) eingeführt. Es sei aber bereits hier festgehalten: die Stochastik geht weit über das Laplace-Modell hinaus. Für viele Anwendungen ist das Laplace-Modell ungeeignet.

1.1 Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten

Die drei Axiome sind:

1. $P(A) \geq 0$: Wahrscheinlichkeiten sind immer nicht-negativ.
2. $P(\Omega) = 1$: sicheres Ereignis Ω hat Wahrscheinlichkeit eins.
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) \forall$ Ereignisse A, B , die sich gegenseitig ausschliessen (d.h. $A \cup B = \emptyset$).

Weitere (abgeleitete) Regeln:

$$P(A^c) = 1 - P(A) \quad (1.3)$$

für jedes Ereignis A ,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (1.4)$$

für je zwei Ereignisse A und B ,

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) \leq P(A_1) + \dots + P(A_n) \quad (1.5)$$

für je n Ereignisse A_1, \dots, A_n

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B) \quad (1.6)$$

für je zwei Ereignisse A und B mit $A \subset B$

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B) \quad (1.7)$$

2 Zufallsvariable und Wahrscheinlichkeitsverteilung

aoeu

2.1 aoeu

aoeu

2.1.1 aoeu

aoeu din laptop isch scheisse