1 Der Begriff der Wahrscheinlichkeit

Stochastik befasst sich mit *Zufallsexperimenten*. Deren Ergebnisse sind unter „Versuchsbedingungen“verschieden.

Beispiel 1.1. • *Kartenziehen, Würfeln, Roulette*

- *Simulation*
- *Komplexe Phänomene (zumindest approximativ): Börse, Data-Mining, Genetik, Wetter*

Ergebnisse von Zufallsexperimenten werden in *Ereignisse* zusammengefasst.

- *Ereignisraum* (Grundraum) Ω: Menge aller möglichen Ergebnisse des Zufallsexperiments
- *Elementarereignisse* ω: Elemente von Ω, also die möglichen Ergebnisse des Zufallsexperiments
- *Ereignis*: Teilmenge von Ω
- Operationen der Mengenlehre haben natürliche Interpretation in der Sprache der Ereignisse.

Das Vorgehen der Stochastik zur Lösung eines Problems kann in drei Schritte unterteilt werden:

1. Man bestimmt die Wahrscheinlichkeiten gewisser Ereignisse A_i. Dabei sind Expertenwissen, Daten und Plausibilitäten wichtig.
2. Man berechnet aus den Wahrscheinlichkeiten $\mathrm{P}(B_j)$ die Wahrscheinlichkeiten von gewissen anderen Ereignissen B_j gemäss den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitstheorie (oft vereinfachend unter Unabhängigkeitsannahme).
3. Man interpretiert die Wahrscheinlichkeiten $\mathrm{P}(B_j)$ im Hinblick auf die Problemstellung.

Das *Bestimmen von Wahrscheinlichkeiten* (siehe Schritt 1) wird oft konkreter formalisiert.

Beispiel 1.2 (Kombinatorische Abzählung bei endlichem Ω.). *Die Wahrscheinlichkeit von einem Ereignis A ist gegeben durch*

$$\mathrm{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \quad \left(= \frac{\#\text{ güstige Fälle}}{\#\text{mögliche Fälle}}\right). \tag{1.1}$$

Dies ist das Laplace-Modell. *Dem Laplace-Modell liegt die* uniforme Verteilung *von Elemntarereignissen ω zugrunde:*

$$\mathrm{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|} \tag{1.2}$$

Andere Wahrscheinlichkeitsverteilungen werden mit Hilfe des Konzepts von *Zufallsvariablen* (siehe Kapitel 2) eingeführt. Es sei aber bereits hier festgehalten: die Stochastik geht weit über das Laplace-Modell hinaus. Für viele Anwendungen ist das Laplace-Modell ungeeignet.

1.1 Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten

Die drei Axiome sind:

1. $\mathrm{P}(A) \geq 0$: Wahrscheinlichkeiten sind immer nicht-negativ.
2. $\mathrm{P}(\Omega) = 1$: sicheres Ereignis Ω hat Wahrscheinlichkeit eins.
3. $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$ $\forall$ Ereignisse A, B, die sich gegenseitig ausschliessen (d.h. $A \cup B = \varnothing$).

Weitere (abgeleitete) Regeln:

$$\mathrm{P}(A^c) = 1 - \mathrm{P}(A) \tag{1.3}$$

für jedes Ereignis A,

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B) \tag{1.4}$$

für je zwei Ereignisse A und B,

$$\mathrm{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \leq \mathrm{P}(A_1) + \cdots + \mathrm{P}(A_n) \tag{1.5}$$

für je n Ereignisse $A_1, \ldots, A$

$$\mathrm{P}(B \setminus A) = \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A) \tag{1.6}$$

für je zwei Ereignisse A und B mit $A \subset B$

$$. \tag{1.7}$$

2 Zufallsvariable und Wahrscheinlichkeitsverteilung