به نام خدا

ریاضیات گسسته

استاد سلیمان فلاح

تمرین اول

صفحه ۱۱

مسآله ۴ :

الف)

$P(10 , 4)$

ب)

یک : $c(3 , 1) * p(9 , 3)$

دو : $c(3 , 1) * c (7 , 3) * 4!$

سه : $p(10 , 4) – p(7 , 4)$

مسآله ۸ :

الف)

$12!$

ب)

$4! * 8!$

پ)

$4! * 5! * 3!$

مسآله ۹ :

الف) $12 * 8$

ب) $12 * 8 * 6 * 18$

پ) $8 * 18 * 6 * 8 * 12 * 8 *12$

مسآله ۱۰ :

$15! * 14$

کل حالت های چینش ۱۵ کتاب $15!$ است و برای هر حالت می توان یک جداکننده را بین ۱۴ فضای خالی گذاشت و به دو قفسه تقسیم کرد

مسآله ۱۵ :

در ابتدا حروف غیر از e را می چینیم و بعد e ها را در فضاهای خالی بین آن ها می چینیم پس جواب برابر است با :

$4!$

مسآله ۱۶ :

الف) 40^{25}

ب) $30^{23} * 40^{2}$

مسآله ۲۳ :

الف) $\frac{12!}{3!*2!*2!*2!}$

ب) $\frac{11!*2}{3!*2!*2!*2!}$

ج) $\frac{7!*6!}{2!*2!*3!*2!}$

مسآله ۲۴ :

$$\frac{6!}{2!2!} + \frac{6!}{2!} + \frac{6!}{2!2!}$$

به سه حالت تقسیم می کنیم :

اول اینکه عدد ۷ سمت چپ باشد و بقیه را جایگشتشان را حساب می کنیم

دوم این که عدد ۵ سمت چپ باشد و جایگشت مابقی را حساب می کنیم

سوم اینکه عدد ۶ سمت چپ باشد و جایگشت مابقی را حساب می کنیم

در نهایت همه را با هم جمع می کنیم

مسآله ۲۵ :

هر نحوه شلیک مترادف با یک ترتیب حروف r , w , g , b است که می شود

$$\frac{12!}{4! * 3! * 2! * 3!}$$

مسآله ۲۹ :

الف)

با هر حرکت مجاز تعریف شده فقط می توان یک واحد به یک مختصه اضافه کرد و اگر حرکت در جهت x را با r نشان دهیم و حرکت در جهت y با u نشان دهیم و در جهت z را با k نمایش می دهیم در این صورت این حرکات متناظر با ترتیبی از این حروف است که تعداد rها برابر است با ۲ و تعداد u ها برابر است با ۱ و تعداد k ها برابر است با ۷ که می شود

$$\frac{10!}{2!\,7!}$$

ب)

$$\frac{10!}{7!\,2!}$$

پ) اگر بخواهیم از (x1 , y1 , z1) به (x2 , y2 , z2) برویم تعداد راه ها برابر است با :

$$\frac{(|x2-x1|+|y2-y1|+|z2-z1|)!}{(|x2-x1|)! * (\,|y2-y1|)! * (|z2-z1|)!}$$

مسآله ۳۱ :

الف)

12 * 5 * 7

ب) اصل ضرب

مسآله ۳۴ :

الف) فرض کنید که kنوع شی داریم که از هر نوع ۳ شی یکسان موجود است . تعداد کل اشیا می شود n . حال اگر تعداد جایگشت های آن ها را حساب کنیم می شود : $n!/3!^{k}$ که چون تعداد جایگشت ها یک عدد صحیح است پس عبارت داده شده نیز صحیح است .

ب) فرض کنید که n , k , q اعدادی صحیح باشند به طوری که $n = qk$. آن گاه عدد $\frac{n!}{q!^{k}}$ عددی صحیح است .

مسآله ۳۸ :

الف)

کل تعداد جایگشت های این ۸ نفر !8است اما از هر ۴ حالت آن با هم یکسان در نظر گرفته می شوند که می شود 8!/4

ب)

؟

صفحه ۲۸ :

مسآله ۱ :

C(6 , 2) = 15

ab

ac

ad

ae

af

bc

bd

be

bf

cd

ce

cf

de

df

ef

مسآله ۴ :

الف)

$$2^6$$

زیرا هر نماد می توان سوراخ شود یا نشود که یعنی هر نماد دو حالت دارد .

ب)(c(6 , 3 باید سه نقطه را بدون ترتیب انتخاب کرد

پ)دقیقا در نیمی از حالت ها تعداد زوجی از نقاط سوراخ شده اند زیرا این سوال دقیقا شبیه این است که بگوییم تعداد زیرمجموعه ای زوج عضوی یک مجموعه ۶ عضوی

ت)c(6,4) + c(6,5) + c(6,6) که می شود ۲۲

مسآله ۶ :

$$c(n\ ,2)+c(n-1\ ,2)=\frac{n(n-1)}{2}+\frac{(n-1)(n-2)}{2}=\frac{n^2-n+n^2-3n+2}{2}=n^2-2n+1=(n-1)^2$$

مسآله ۸ :

الف)

C(13, 5) * 4 = 5148

باید هر ۵ مهره را از یک رنگ انتخاب کرده و با هم جمع کنیم

ب) تمام مهره های به شماره ۱ را بر می داریم و آن یک مهره را از بقیه مهره ها انتخاب می کنیم : ۴۸ حالت

پ) c(4 , 1) * c(13 , 4)* c(39 , 1) = 111540

در ابتدا انتخاب می کنیم از چه رنگی مهره ها همرنگ باشند و بعد چهار مهره از آن انتخاب می کنیم حال تمام مهره های به آن رنگ را کنار می گذاریم و آن یک مهره را از مابقی رنگ ها انتخاب می کنیم

ت) c(4,3) * c(4,2)=24

ث) c(4,3) * c(12,1) * c(4,2)=288

اول سه مهره از شماره یک انتخاب می کنیم و بعد شماره یک ها را کنار می گذاریم و از بین ۱۲ شماره باقی مانده انتخاب می کنیم که از کدام شماره مهره برداریم و بعد دو تا از آن شماره انتخاب می کنیم .

ج) در ابتدا دو مهره هم شماره انتخاب می کنیم : c(13,1) * c(4 , 2)

حال دو حالت پیش می آید اینکه مهره هم رنگ رنگی شبیه مهره های انتخاب شده داشته باشند یا خیر

اگر قرار باشد نداشته باشند می شود : c(2,1) * c(12 , 3)

و اگر هم داشته باشند : c(2 , 1) * c(12,2) * c(2,1) * c(10 , 1)

حال باید این دو حالت را با هم جمع کنیم :

$$c(13,1) * c(4,2) * c(2,1) * c(12,3) + c(13,1) * c(4,2) * c(2,1) * c(12,2) * c(2,1) * c(10,1) =$$
34320 + 15840 = 50160

چ)

C(4,1) * c(13,3) * c(3,2) * c(13,1) * c(13,1) = 580008

ح)

C(13,3) * c(3,2) * c(4,2) * c(4,2) * c(4,1) = 123552

مسآله ۱۳ :

الف)

C(12,3)*c(9,3)*c(6,3)*c(3,3)

ب)

C(12,4)*c(8,4) * c(4,2)*c(2,2)

مسآله ۱۴ :

الف)c(7,2)

ب) c(7,2)*4

ج) c(7,3)*2

مسآله ۲۱ :

الف)

حالت بندی می کنیم :

اگر ۱+۱+۱ را در نظر بگیریم :

$$\frac{10!}{3! * 7!}$$

دقیقا شبیه جایگشت با تکرار ۷ صفر و ۳ تا عدد یک است

/گر حالت ۱+۲ را در نظر بگیریم :

$$\frac{10!}{8!}$$

شبیه جایشگت با تکرار ۸ صفر و یک عدد دو و یک عدد یک است

اگر حالت ۳+۰ را در نظر بگیریم :

$$\frac{10!}{9!}$$

حال همه را با هم جمع می کنیم :

$$120 + 90 + 10 = 220$$

ب) حالت بندی می کنیم :

اگر ۱+۱+۱+۱ را در نظر بگیریم :

$$\frac{10!}{6!\,4!}$$

اگر ۲+۱+۱ را در نظر بگیریم :

$$\frac{10!}{2!\,7!}$$

اگر ۲+۲ را در نظر بگیریم :

$$\frac{10!}{8!\,2!}$$

اگر ۳+۱ را در نر بگیریم :

$$\frac{10!}{8!}$$

حال همه را با هم جمع می کنیم :

$$210 + 360 + 45 + 90 = 705$$

ج)؟

مسآله ۲۹ :

برای محاسبه جمع ضرایب کافی ست جای x , y, z , w عدد یک را قرار دهیم :

الف) 2^3

ب) 2^{10}

پ) 3^{10}

ت) 4^5

ث) 4^{10}

مسآله ۳۰ :

برای اثبات این تساوی یک استدلال ترکیبیاتی می آوریم :

فرض کنید می خواهید از $n+1$ نفر دو نفر را انتخاب کنید . حال این انتخاب را روی یک فرد مشخص حالت بندی کنید :

اگر آن فرد جزو دو نفر نباشد می شود $c(n,2)$ و اگر هم باشد می شود $c(n,1)$ که می شود n

مسآله ۳۴ :

این مجموع همان بسط دو جمله ای عدد $1 , 2$ می باشد در نتیجه مجموع می شود $(1+2)^n = 3^n$

صفحه ۴۱

مسآله ۱ :

الف)

توزیع n شی یکسان بین r شخص

C(14,10) = 1001

ب) c(9,5) = 126

پ) c(12 , 8)

در ابتدا دو سکه را به کودک بزرگ می دهیم و بعد بقیه را بین کودکان توزیع می کنیم

مسآله ۷ :

الف)

C(35 , 3) = 6545

ب)

C(31,3) = 4495

پ)در ابتدا به مقدار x1 , x2 ۵ تا اضافه می کنیم و به مقدار x3 , x4 نیز ۷ تا اضافه می کنیم حال باید ۸ تای باقیمانده را بین چهار x تقسیم کرد که می شود :

C(11,3) = 165

ت) فقط یک حالت چون همه باید ۸ تا باشند

ث)به جای x_iعبارت y_i-2 را قرار می دهیم آن گاه معادله تبدیل می شود به :

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 40$$

که تعداد جواب های این معادله طبق بالا برابر است با : *c(43 ,3) = 12341*

ج)چون برای همه شرط بزرگتر از صفر بودن مطرح است در ابتدا به همه یکی می دهیم و معادله تبدیل می شود به :

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 36$$

حال از اصل متمم استفاده می کنیم و به *y4* تعداد ۲۵ تا می دهیم تا در مجموع *x4* ۲۶ تا شود و معادله به این تبدیل می شود :

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 11$$

که تعداد جواب های آن طبق بالا می شود :*c(14,3) = 364*

تعداد کل جواب ها برابر بود با : *c(39 , 3) = 9139*

پس تعداد جواب های مسآله برابر است با : *9139 – 364 = 8775*

مسآله ۱۰ :

دقیقا شبیه تعداد جواب های این معادله ست :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 82$$

که می شود : *c(87 , 5) = 36949857*

مساله ۱۱ :

الف)

برابر تعداد جواب های معادله زیر اعداد هم ارز پنج رقمی اند :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} = 5$$

که می شود: *c(14,5) = 2002*

حال ار اصل متمم استفاده می کنیم :

$$10^5 - 2002$$

ب)

مسآله ۱۲ :

تا معادله را به معادله زیر تبدیل می کنیم :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + y_1 = 39$$

الف) حال می شود*c(44 , 5) = 1086008*

ب) تبدیل می شود به :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + y_1 = 54$$

می شود :*c(59 , 5) = 5006386*

مسآله ۱۴ :

الف) طبق فرمول می شود :

$$\frac{8!}{2!\,4!} * 9 * 16$$

ب) جمله متمایز از تمایز بین توان های عبارات بدست می آید و می دانیم مجموع توان های آن ها برابر ۸ است پس برابر تعداد جواب های این معادله ست :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 8$$

که می شود : *c(12,4) = 495*

مسآله ۱۵ :

اول فرض می کنیم کتاب ها یکسان است می شود : *c(23,3) = 1771*

حالا در هر حالت یک جایگشت را حساب می کنیم : *1771*24!*

مسآله ۲۰ :

الف)

اول جواب معادله اولی می شود : *c(8,2) = 36*

مجموع مابقی جملات باید ۳۱ باشد پس *c(34,3) = 5984*

جواب سوال می شود : ۵۹۸۴ * ۳۶

ب)

*C(5,2) * c(34,3)*

مسآله ۲۱ :

یک روش از پایین به بالا را در پیش می گیریم :

داخلی ترین حلقه به تعداد زیر اجرا می شود :

$$\sum_{1}^{k} m = \frac{k(k+1)}{2}$$

حال خودk دارای حلقه است پس به تعداد زیر اجرا می شود :

$$\sum_{1}^{j} \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}(\frac{j(j+1)(2j+1)}{6} + \frac{j(j+1)}{2})$$

و خود j نیز دارای حلقه است :

$$\sum_{1}^{i} \frac{1}{2}(\frac{j(j+1)(2j+1)}{6} + \frac{j(j+1)}{2})$$

مسآله ۲۶ :

در ابتدا فرض کنید که این اشیا یکسان هستند که می شود : *c(n+r-1 , r-1)*

حال باید تمام جایشگت های این ظروف را حساب کنیم که می شود : *n!c(n+r-1 , r-1) = p (n+r-1 , r-1)*

مسآله ۲۷ :

الف)

در ابتدا به همه ظرف ها یک شی اختصاص می دهیم و *m-n* شی باقی مانده را توزیع می کنیم

صفحه ۴۸ :

مسآله ۲ :

الف) ۹*۵

ب) ۵*۴*۴*۴*۴*۴*۴*۴*۴*۴

برای تنظیم اولی ۵ حالت وجود دارد ولی برای بقیه چون با قبلی نباید یکی باشد ۴ حالت وجود دارد

مسآله ۴ :

الف) c(25,2) * c(25,2) * c(25,2)

ب) اصل شمول و عدم شمول

مسآله ۵ :

الف)

ب) P(34 , 25)

مسآله ۶ :

می خواهیم در واقع ۴۵ حرف ر و ۱۵ حرف پ را دنبال هم قرار دهیم به طوریکه هیچ دو حرف پ متوالی نباشند .اول حروف ر را می گذاریم که به یک حالت امکان پذیر است حال در فضای مابین هر حرف ر حروف پ را قرار می دهیم :

C(46,15)

مسآله ۸ :

اول ارقام ۱ را در نظر نمی گیریم در این صورت باید دنباله ای n-r رقمی از سه رقم ۰ و ۲ و ۳و بسازیم که می شود 3^{n-r} . حال فضای بین هر یک از این ارقام را یک ظرف تصور می کنیم که باید تعداد ۱ های درون آن مشخص شود که می شود تعداد جواب های معادله زیر :

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-r+1} = r$$

که برابر است با c(n,r)

و جواب می شود $c(n,r)*3^{n-r}$

مسآله ۱۱ :

الف) 5+1+4+2=12

ب)1*5+5*4+5*2+1*4+1*2+4*2=5+20+10+4+2+8=49

مسآله ۱۵ :

الف) ۱)

حالت بندی می کنیم :

اگر چهار تا مثبت :۱ حالت

اگر دوتا مثبت : c(4,2)*c(4,2)

اگر هیچ مثبت : ۱ حالت

جواب : 1+1+36=38

الف)۲)

مثل قسمت قبل حالت بندی می کنیم :

C(7,3) = 35

C(5,2)*c(5,2) = 100

C(7,3) = 35

جواب : 35+100+35 = 170

مسأله ۱۹ :

الف)

$$\frac{10!}{2}$$

زیرا می توان جایگشت آن هار ا در نظر گرفت با توجه به این که از هر دو جایگشت یکی را باید بشماریم

ب)؟

مسآله ۲۰ :

الف)

در ابتدا تعداد جواب های معادله اول را بدست می اوریم و بعد از معادله دوم x1 , x2 ,x3 را حذف و ۶ تا کم می کنیم و تعداد جواب های معادله باقی مانده را در تعداد جواب های معادله اول ضرب می کنیم :

C(8,2) * c(10,1) = 360

ب)؟

مسآله ۲۳ :

در ابتدا k تا ۱ را درون یک بلوک می گذاریم حال r تا صفر را در یک ردیف می گذاریم . مابین این r صفر r+1 فضا وجود دارد یکی از این ها را انتخاب می کنیم و بلوک را درون آن می گذاریم که این کار به r+1 روش امکان پذیر است حال مابقی این فضا ها را شبیه یک ظرف در نظر می گیریم که می خواهیم درون آن n-k رقم ۱ بریزیم و این کار به c(n-k+r-1 , n-k) امکان پذیر است که جواب نهایی ضرب این دو است .

مسآله ۲۴ :

در ابتدا r تا از این n شی را به c(n,r) روش انتخاب می کنیم حال تعداد جایگشت های این ها r! است ولی هر r جایگشت که از دروان هم حاصل می شوند با هم یکی هستند پس باید تقسیم بر r بکنیم

جواب می شود :c(n,r) * (r-1)!

مسآله ۳۳ :

حرکات را دنباله ای از r و u در نظر می گیریم که می شود :c(11 , 4) = 330

مسآله ۳۴ :

الف و ب)

چون ۶ حرکت به سمت بالا و ۱ حرکت به سمت پایین می خواهیم پس : c(7,1) = 7

پ) از اصل متمم استفاده می کنیم :

تعداد کل مسیر ها :c(7,3) = 35

تعداد مسیرهای نامطلوب : 7تا

جواب : 35 – 7 = 28

ث) این مسآله را تبدیل به یک جدول مختصات می کنیم به گونه ای که می خواهیم از مبدا شروع به حرکت کرده و اگر نفر اول رای آورد به سمت بالا می رویم و اگر رای نفر دوم از صندوق خارج شد به سمت پایین می رویم و شرط مسآله این می شود که هیچ گاه خط y=0 را رد نکنیم