«بسمه تعالی»

جزوه درس «محاسبات عددی» — استاد درس: دکتر هوشمند

مبحث دوم: ریشه یابی

در این بخش، هدف حل معادله $f(x)=0$ است. به جوابهای معادله ریشه می‌گوییم. تمرکز ما روی یافتن ریشه‌های حقیقی خواهد بود.

می‌دانیم که برای حل معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ می‌توان از روش Δ استفاده کرد. همچنین معادلاتی مانند $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ به روشهای کلاسیک قابل حل هستند. اما معادلاتی مانند معادلات زیر را نمی‌توان با روشهای کلی حل کرد و لازم است از روشهای تقریبی استفاده کرد.

$$e^{-x}-\cos x=0$$

$$x^2+(1-x)^7=0$$

قبل از آنکه روشهای عددی را برای حل معادله $f(x)=0$ به کار ببریم، ابتدا لازم است درباره تعداد، نوع و محل تقریبی ریشه‌ها اطلاعاتی به دست آوریم.

چگونه تعداد و محل تقریبی ریشه‌های معادله $f(x)=0$ را تشخیص دهیم؟

روش اول: رسم نمودار

① می‌توان نمودار $y=f(x)$ را رسم کرد. محل برخورد نمودار با محور xها، محل ریشه‌ها را نشان می‌دهد.

② اگر بتوان $f(x)$ را به صورت $f_1(x)-f_2(x)$ نوشت، آنگاه محل تلاقی نمودارهای $y=f_1(x)$ و $y=f_2(x)$، ریشه $f(x)=0$ است.

روش دوم: استفاده از قضیه بولزانو

قضیه بولزانو: اگر تابع f بر بازه $[a,b]$ پیوسته و $f(a)f(b)<0$ باشد آنگاه $\alpha\in(a,b)$ وجود دارد به طوری که $f(\alpha)=0$. یعنی معادله $f(x)=0$ حداقل یک ریشه بین a و b دارد.

به منظور تعیین تعداد دقیق ریشه‌ها می‌توان از قضیه زیر کمک گرفت:

قضیه رول: اگر تابع f بر بازه $[\alpha,\beta]$ پیوسته و بر بازه (α,β) مشتق‌پذیر باشد و $f(\alpha)=f(\beta)$ آنگاه $c\in(\alpha,\beta)$ وجود دارد به طوری که $f'(c)=0$.

نتایج قضیه رول:

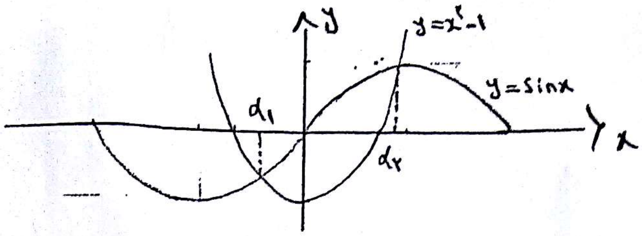
① اگر تابع پیوسته و مشتق‌پذیر f دارای n ریشه باشد مشتق آن دارای حداقل $n-1$ ریشه است و

② اگر f تابعی پیوسته و مشتق‌پذیر باشد و f' دارای n ریشه باشد آنگاه f دارای حداکثر $n+1$ ریشه است. (1)

مثال) تعداد و حدود ریشه‌های معادله $x^2-\sin x-1=0$ را هم به روش رسم نمودار و هم با بکارگیری قضایا تعیین کنید.

روش رسم

$x^2-\sin x-1=0 \Longrightarrow x^2-1=\sin x \Longrightarrow$ کافی است محل تلاقی دو نمودار $y=\sin x$ و $y=x^2-1$ را بدست آوریم.



پس دو ریشه داریم یکی در $[0,\frac{\pi}{2}]$ و دیگری در $[-\frac{\pi}{2},0]$ قرار دارد.

روش استفاده از قضایا

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=-1<0 \\ f(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi^2}{4}-2>0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ طبق قضیه بولزانو حداقل یک ریشه در بازه $(0,\frac{\pi}{2})$ داریم.

$$\left.\begin{array}{l} f(-\frac{\pi}{2})>0 \\ f(0)<0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ طبق قضیه بولزانو حداقل یک ریشه در $(-\frac{\pi}{2},0)$ داریم.

پس تا اینجا نشان دادیم تابع حداقل دو ریشه دارد. (*) در ادامه نشان می‌دهیم تابع دقیقاً دو ریشه دارد.

$f'(x)=2x-\cos x$

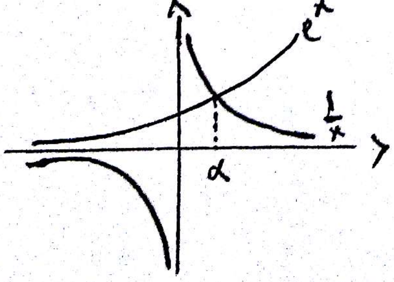
$f''(x)=2+\sin x$

$f''(x)$ فاقد ریشه است پس طبق نتیجه قضیه رول f' حداکثر یک ریشه دارد و لذا f حداکثر دو ریشه خواهد داشت. (**)

از گزاره‌های * و ** نتیجه می‌شود که f دارای دقیقاً دو ریشه است.

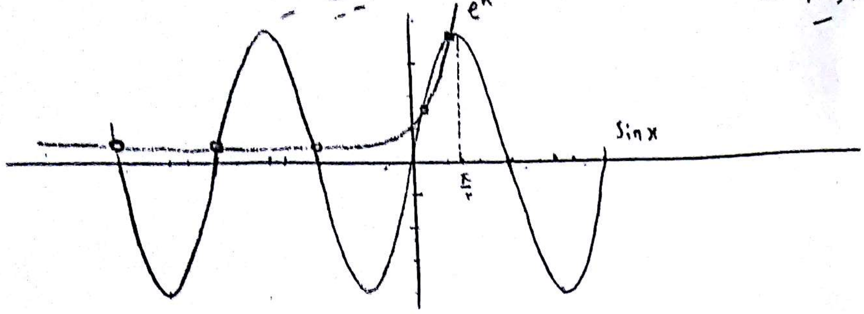
مثال) تعداد و حدود ریشه‌های معادله $xe^x-1=0$ را تعیین کنید.

$$\underbrace{xe^x-1}_{f(x)}=0 \xrightarrow{\text{صفر ریشه نیست پس می‌توانیم بر } x \text{ تقسیم کنیم}} e^x-\frac{1}{x}=0 \longrightarrow e^x=\frac{1}{x}$$



$$\left.\begin{array}{l} f(0)=-1<0 \\ f(1)=e-1>0 \end{array}\right. \Longrightarrow$$ ریشه در بازه $(0,1)$ قرار دارد.

مثال ۱) تعداد و حدود ریشه‌های معادله $4\sin x - e^x = 0$ را تعیین کنید.



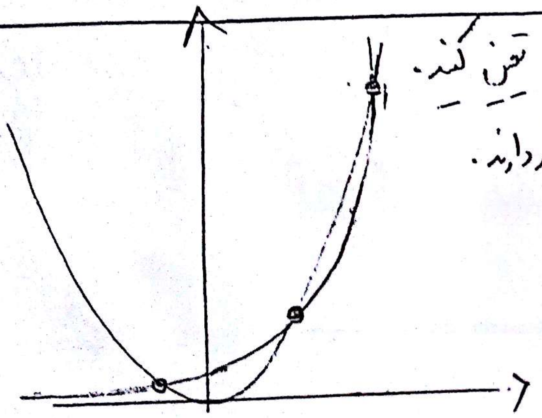
بی‌نهایت ریشه منفی و دو ریشه مثبت داریم.

$$f(0) = -1 < 0$$
$$f(\tfrac{\pi}{4}) = 4\sin\tfrac{\pi}{4} - e^{\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2} - e^{\frac{\pi}{4}} > 2\sqrt{2} - e > 0$$
$$f(\tfrac{\pi}{2}) = 4 - e^{\frac{\pi}{2}} < 4 - e^{3/2} < 0$$

پس یکی از ریشه‌های مثبت در فاصله $[0, \frac{\pi}{4}]$ و دیگری در فاصله $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ قرار دارد.

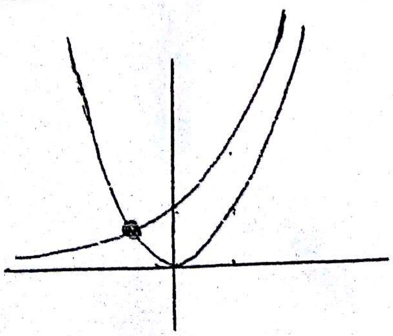
مثال ۲) تعداد و حدود ریشه‌های معادله $3x^2 - e^x = 0$ را تعیین کنید.

سه ریشه دارد که در بازه‌های $[-1,0]$ و $[0,1]$ و $[3,4]$ قرار دارند.



مثال ۳) تعداد و حدود ریشه‌های معادله $x^2 - e^x = 0$ را تعیین کنید.

فقط یک ریشه دارد که در فاصله $[-1, 0]$ قرار دارد.



مثال) نشان دهید معادله $x\sin x - 1 = 0$ دارای بی‌نهایت ریشه حقیقی مثبت و بی‌نهایت ریشه حقیقی منفی است.

مثال) نشان دهید معادله $10xe^x - 1 = 0$ در بازه $(0, 0.1)$ دارای دقیقاً یک ریشه حقیقی است.

$$10xe^x - 1 = 0 \xrightarrow{e^x \neq 0} \underbrace{10x - e^{-x}}_{f(x)} = 0$$

از قضیه بولزانو نتیجه می‌گیریم که در $(0, 0.1)$ حداقل یک ریشه داریم و از آنجا که f' همواره مخالف صفر است از نتیجه قضیه رول استدلال می‌کنیم f حداکثر یک ریشه دارد.

مرتبه تکرار یک ریشه:

می‌گوییم α ریشه مرتبه m اُم معادله $f(x)=0$ است هرگاه $g(x)$ موجود باشد به طوریکه

$$f(x)=(x-\alpha)^m g(x) \quad , \quad g(\alpha)\neq 0$$

اگر $m=1$ ، α را ریشه ساده و اگر $m=2$ ، آن را ریشه مضاعف می‌نامیم.

در تشخیص مرتبه ریشه، می‌توان از قضیه زیر استفاده کرد:

قضیه: فرض کنید f در نقطه α ، m بار مشتق‌پذیر باشد و داشته باشیم:

$$f(\alpha)=0 \,,\quad f'(\alpha)=0 \,,\quad f''(\alpha)=0 \,,\ \dots \,,\quad f^{(m-1)}(\alpha)=0 \,,\quad f^{(m)}(\alpha)\neq 0$$

آنگاه α ریشه مرتبه m اُم معادله $f(x)=0$ است.

مثال) مرتبه ریشه $x=0$ در معادله $f(x)=x-\sin x$ چیست؟

$f(0)=0$

$f'(x)=1-\cos x \Rightarrow f'(0)=0$

$f''(x)=\sin x \Rightarrow f''(0)=0 \qquad \Rightarrow$ $x=0$ ریشه مرتبه ۳ است.

$f'''(x)=\cos x \Rightarrow f'''(0)\neq 0$

روش تنصیف یا دوبخشی (Bisection Method) برای حل معادله $f(x)=0$

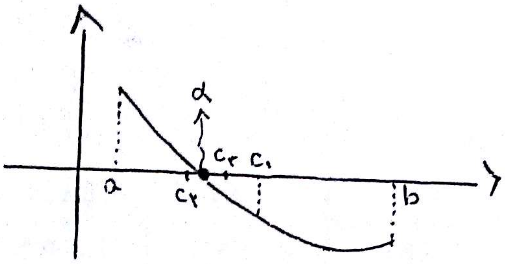
در این روش فرض می‌کنیم f بر $[a,b]$ پیوسته و $f(a)f(b)<0$ باشد.

مراحل این روش به شرح زیر است:

مرحله اول: فرض کنید n شمارنده تکرار باشد و قرار دهید $n=1$.

مرحله دوم: قرار دهید $c_n=\frac{a+b}{2}$ و $f(c_n)$ را حساب کنید.

مرحله سوم: اگر $f(c_n)=0$، متوقف گردید و c_n را به عنوان ریشه برگردانید در غیر این صورت، اگر $f(a)f(c_n)<0$ ریشه در بازه (a,c_n) قرار دارد لذا قرار دهید $b=c_n$ اما اگر $f(c_n)f(b)<0$ ریشه در بازه (c_n,b) قرار دارد لذا قرار دهید $a=c_n$. سپس به مرحله دوم بازگردید.



در این روش دنباله c_n ساخته می‌شود که به α همگراست.

شرایط توقف در روش تنصیف: فرض کنید $\varepsilon>0$ بیانگر دقت مورد نظر باشد. اگر در تکرار n ام، یکی از معیارهای زیر برقرار شود، متوقف می‌شویم و c_n را به عنوان مقدار تقریبی ریشه گزارش می‌کنیم:

① $|c_n-c_{n-1}|<\varepsilon$

② $|f(c_n)|<\varepsilon$

③ تعداد تکرارها از یک حد مشخصی بیشتر شود.

قضیه: روش تنصیف همواره همگراست و خطای آن در تکرار n ام حداکثر $\frac{b-a}{2^n}$ است.

خطای تکرار n ام برابر است با $e_n=|c_n-\alpha|$ و داریم:

$e_1<\frac{b-a}{2}$, $e_2<\frac{b-a}{2^2}$, ... , $e_n<\frac{b-a}{2^n}$

زیرا هر مرحله، خطا نصف مرحله قبل است لذا این روش همگراست.

نکته: حداکثر تعداد تکرار لازم برای رسیدن به ریشه با دقت ε ؛ باید n را طوری بیابیم که

$$\frac{b-a}{2^n}<\varepsilon \Rightarrow 2^n>\frac{b-a}{\varepsilon} \Rightarrow n\geq\left[\log_2\frac{b-a}{\varepsilon}\right]+1$$

ویژگی های روش دو بخشی:
- اجرای آن ساده است.
- همیشه همگراست.
- سرعت همگرایی روش کند است.
- برای محاسبه ریشه های با مرتبه تکرار زوج قابل استفاده نیست.

مثال) با روش تنصیف مقدار تقریبی ریشه معادله $3x - e^{-x} = 0$ را در فاصله $(0.25, 0.27)$ طوری به دست آورید که $|f(c_n)| < 0.001$.

ابتدا باید نشان دهیم که معادله روی این بازه دارای دقیقاً یک ریشه است و شرایط استفاده از روش تنصیف برقرار است.

$$f(0.25) = -0.0288$$
$$f(0.27) = 0.0466$$
$$f'(x) = 3 + e^{-x}$$ همواره مثبت است و لذا تابع صعودی است

$\Rightarrow$ با استفاده از قضایای بولزانو و رول نتیجه می‌گیریم که تابع f در $(0.25, 0.27)$ دقیقاً یک ریشه دارد.

چون می‌خواهیم خطا کمتر از 10^{-3} باشد، محاسبات میانی را با ۴ رقم اعشار انجام می‌دهیم. البته دقت کنید که این تعداد رقم اعشار برای محاسبات میانی لزوماً در هر مسأله مفید نخواهد بود و بسته به نوع مسأله ممکن است نیاز به ارقام بیشتری داشته باشیم.

n	a	b	$c_n = \frac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f(b)$	$f(c_n)$
۱	۰/۲۵	۰/۲۷	۰/۲۶	-۰/۰۲۸۸	۰/۰۴۶۶	۰/۰۰۸۹
۲	۰/۲۵	۰/۲۶	۰/۲۵۵	-۰/۰۲۸۸	۰/۰۰۸۹	-۰/۰۰۹۹
۳	۰/۲۵۵	۰/۲۶	۰/۲۵۷۵	-۰/۰۰۹۹	۰/۰۰۸۹	-۰/۰۰۰۵

چون $|f(c_3)| = 0.0005 < 0.001$ بنابراین $c_3 = 0.2575$ را به عنوان مقدار تقریبی ریشه در نظر می‌گیریم.

دقت کنید که اگر شرط توقف را $|c_n - c_{n-1}| < 0.001$ قرار می‌دادیم، در نتیجه $n=3$ شرط توقف برقرار نبود و لازم بود دو تکرار دیگر به شرح زیر انجام دهیم:

n	a	b	$c_n = \frac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f(b)$	$f(c_n)$
۴	۰/۲۵۷۵	۰/۲۶	۰/۲۵۸۸	-۰/۰۰۰۵	۰/۰۰۸۹	۰/۰۰۴۴
۵	۰/۲۵۷۵	۰/۲۵۸۸	۰/۲۵۸۲	-۰/۰۰۰۵	۰/۰۰۴۴	۰/۰۰۲۲

$|c_5 - c_4| < 10^{-3} \Rightarrow$ $c_5 = 0.2582$ را به عنوان مقدار تقریبی ریشه در نظر می‌گیریم.

مثال) با روش تنصیف، مقدار $\sqrt{2}$ را با خطای کمتر از 10^{-2} تقریب بزنید.

$\sqrt{2}$ ریشه مثبت معادله $\underbrace{x^2-2}_{f(x)}=0$ است که در فاصله $(1.4, 1.5)$ قرار دارد.

$f(1.4)=-0.04$ $f(1.5)=0.25 \longrightarrow$ شرایط استفاده از روش تنصیف برقرار است.

شرط توقف را $|c_n-c_{n-1}|<10^{-2}$ قرار می‌دهیم، و محاسبات را با سه رقم اعشار انجام می‌دهیم.

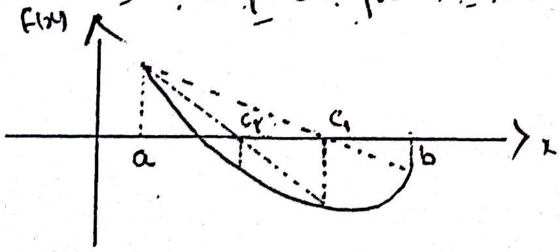
n	a	b	$c_n=\frac{a+b}{2}$	$f(a)$	$f(b)$	$f(c_n)$
۱	۱٫۴	۱٫۵	۱٫۴۵	۰٫۰۴-	۰٫۲۵	۰٫۱۰۳
۲	۱٫۴	۱٫۴۵	۱٫۴۲۵	۰٫۰۴-	۰٫۱۰۳	۰٫۰۳۱
۳	۱٫۴	۱٫۴۲۵	۱٫۴۱۳	۰٫۰۴-	۰٫۰۳۱	۰٫۰۰۳-
۴	۱٫۴۱۳	۱٫۴۲۵	۱٫۴۱۹	۰٫۰۰۳-	۰٫۰۳۱	۰٫۰۱۴

$|c_4-c_3|<10^{-2} \Rightarrow$ $c_4=1.419$ را به عنوان مقدار تقریبی ریشه در نظر می‌گیریم.

روش نابجایی (False Position Method) برای حل معادله $f(x)=0$

در این روش فرض می‌کنیم f بر $[a,b]$ پیوسته و $f(a)f(b)<0$ باشد.

طبق روش نابجایی مشابه روش تنصیف است با این تفاوت که در هر مرحله از روش تنصیف، وسط بازه را به عنوان c_n در نظر می‌گیریم اما در هر مرحله از روش نابجایی نقاط ابتدا و انتها را با یک خط به هم وصل می‌کنیم و محل برخورد این خط با محور xها را به عنوان c_n در نظر می‌گیریم. سایر مراحل مشابه روش تنصیف است.



معادله خط واصل نقاط $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$ به صورت زیر است:

$$y-f(a)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

با صفر قرار دادن y داریم:

$$c_n=\frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$$

پس مراحل روش نابجایی به شرح زیر است:

مرحله اول: فرض کنید n شمارنده تکرار باشد و قرار دهید $n=1$.

مرحله دوم: قرار دهید $c_n=\frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$ و $f(c_n)$ را حساب کنید.

مرحله سوم: اگر $f(c_n)=0$، توقف شود و c_n را به عنوان ریشه برگردانید در غیر این صورت اگر $f(a)f(c_n)<0$ قرار دهید $b=c_n$

اما اگر $f(c_n)f(b)<0$ قرار دهید $a=c_n$. سپس به مرحله دوم بازگردید.

شرط توقف را $|c_n-c_{n-1}|<\varepsilon$ یا $|f(c_n)|<\varepsilon$ یا رسیدن به یک تعداد تکرار مشخص در نظر می‌گیریم.

ویژگی‌های روش نابجایی:

- اجرای آن ساده است اما تعداد عملیاتی که در هر تکرار [برای] محاسبه c_n انجام می‌شود نسبت به روش تنصیف بیشتر است.
- همیشه همگراست و سرعت همگرایی آن از روش تنصیف معمولاً بیشتر است البته در برخی از موارد یا اگر c_n ها در یک طرف ریشه باشند ممکن است سرعت همگرایی کم شود.
- برای محاسبه ریشه‌های با مرتبه تکرار زوج قابل استفاده نیست.

مثال) با روش نابجایی تقریبی از ریشه معادله $3x - e^{-x} = 0$ را در فاصله (۰٫۲۵ , ۰٫۲۷) طوری به دست آورید که $|c_n - c_{n-1}| < 10^{-3}$.

به سادگی می‌توان نشان داد که معادله روی این بازه دارای دقیقاً یک ریشه است و شرایط استفاده از روش نابجایی برقرار است.

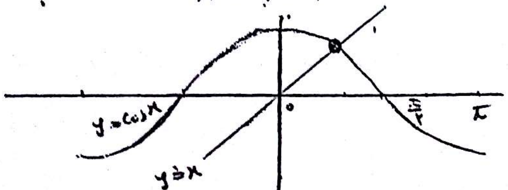
محاسبات جانبی را با دقت ۴ رقم اعشار انجام می‌دهیم.

n	a	b	$c_n = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$	$f(a)$	$f(b)$	$f(c_n)$
۱	۰٫۲۵	۰٫۲۷	۰٫۲۵۷۶	-۰٫۰۲۸۸	۰٫۰۴۶۶	-۰٫۰۰۰۱
۲	۰٫۲۵۷۶	۰٫۲۷	۰٫۲۵۷۶	-۰٫۰۰۰۱	۰٫۰۴۶۶	-۰٫۰۰۰۱

$|c_2 - c_1| < 10^{-3} \Rightarrow$ $c_2 = $ ۰٫۲۵۷۶ را به عنوان تقریبی از ریشه در نظر می‌گیریم.

مثال) با روش نابجایی تقریبی از ریشه معادله $\underbrace{x - \cos x}_{f(x)} = 0$ را با حداکثر خطای 10^{-1} به دست آورید.

ابتدا باید تعداد و حدود ریشه را تعیین کنیم.



$$\left.\begin{array}{l} f(0) = -1 < 0 \\ f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

با توجه به شکل و با توجه به قضیه بولزانو، تابع $f(x)$ روی بازه $(0, \frac{\pi}{2})$ دقیقاً یک ریشه دارد و شرایط استفاده از روش نابجایی برقرار است.

محاسبات را با دو رقم اعشار انجام می‌دهیم.

n	a	b (تقریبی از $\frac{\pi}{2}$)	$c_n = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$	$f(a)$	$f(b)$	$f(c_n)$
۱	۰	۱٫۵۷	۰٫۶۱	-۱	۱٫۵۷	-۰٫۳۹
۲	۰٫۶۱	۱٫۵۷	۰٫۸	-۰٫۳۹	۱٫۵۷	-۰٫۲۰
۳	۰٫۸	۱٫۵۷	۰٫۸۹	-۰٫۲۰	۱٫۵۷	-۰٫۱۱

$|c_3 - c_2| < 10^{-1} \Rightarrow$ $c_3 = $ ۰٫۸۹ را به عنوان تقریبی از ریشه در نظر می‌گیریم.

روش تکرار ساده یا نقطهٔ ثابت (Simple Iteration Method) برای حل معادلهٔ $f(x)=0$

قدم اول در این روش آن است که معادلهٔ $f(x)=0$ را به صورت $x=g(x)$ بنویسیم. در این صورت

$$f(\alpha)=0 \quad \overset{\text{معادل است با}}{\equiv} \quad \alpha=g(\alpha)$$

به عبارت دیگر، یافتن ریشه‌های تابع f معادل است با یافتن نقطه‌های ثابت تابع g.

نکته: معمولاً از روی معادلهٔ $f(x)=0$ به شکل‌های مختلفی می‌توان $x=g(x)$ را تشکیل داد. بدیهی‌ترین روش‌ها عبارتند از:

$$f(x)=0 \xrightarrow{\text{x را به طرفین اضافه می‌کنیم}} \underbrace{x+f(x)}_{g(x)}=x$$

$$f(x)=0 \xrightarrow{\text{ضرب طرفین در } -1} -f(x)=0 \xrightarrow{\text{اضافه کردن x به طرفین}} x-f(x)=x$$

مثال) معادلهٔ $f(x)=x^2-x-2=0$ را به صورت $x=g(x)$ بنویسید.

$$x=\underbrace{x^2-2}_{g(x)} \qquad x=\underbrace{\sqrt{x+2}}_{g(x)} \qquad x=\underbrace{-\sqrt{x+2}}_{g(x)} \qquad x=\underbrace{1+\frac{2}{x}}_{g(x)}$$

قدم دوم آن است که x_0 را به عنوان تقریبی از ریشه در نظر بگیریم و x_n ها را به صورت زیر محاسبه کنیم.

$$x_1=g(x_0)$$
$$x_2=g(x_1)$$
$$x_3=g(x_2)$$
$$\vdots$$

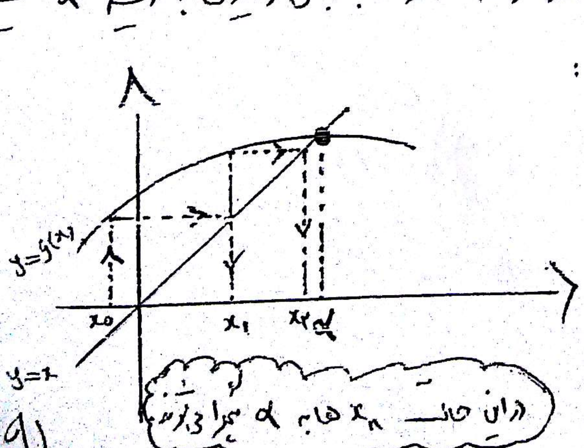
به طور کلی

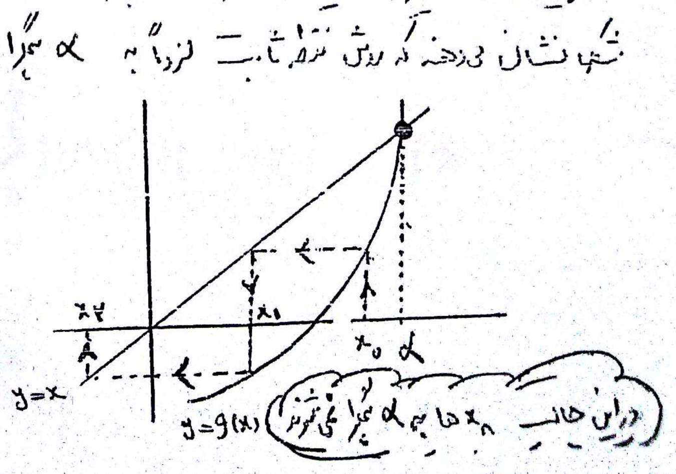
$$\boxed{x_{n+1}=g(x_n) \qquad n=0,1,2,\ldots}$$

به شرطی که تابع g و نقطهٔ اولیهٔ x_0 به طور مناسب انتخاب شده باشند، دنبالهٔ x_n ها به یکی از ریشه‌های تابع f یا به عبارت دیگر به نقطهٔ ثابت تابع g همگرا می‌شود.

معیار توقف در این روش، مشابه روش‌های قبل، برقراری $|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon$ یا $|f(x_n)|<\varepsilon$ یا رسیدن به بیشترین تعداد تکرار مجاز است.

در هر یک از شکل‌های زیر فرض کنید معادلهٔ $f(x)=0$ به صورت $x=g(x)$ نوشته شده و ما به دنبال رسیدن به ریشهٔ α هستیم. شکل‌ها نشان می‌دهند که روش نقطهٔ ثابت لزوماً به α همگرا نمی‌گردد:





g و x_0 در چه شرایطی صدق کنند تا مطمئن باشیم دنباله $x_{n+1} = g(x_n)$ همگراست؟

قضیه (شرط کافی برای همگرایی روش تکرار ساده):

فرض کنید تابع $g(x)$ روی بازه $[a,b]$ پیوسته باشد و به ازای هر $x \in [a,b]$ داشته باشیم $a \leq g(x) \leq b$.

همچنین، فرض کنید تابع $g(x)$ روی $[a,b]$ مشتق پذیر باشد و عددی مانند $0 < \rho < 1$ موجود باشد به طوری که

$$\forall x \in [a,b] \qquad |g'(x)| < \rho \qquad (1)$$

آنگاه داریم:

الف) معادله $x = g(x)$ در فاصله $[a,b]$ دارای جواب منحصر به فرد α است.

ب) به ازای هر تقریب اولیه x_0 در $[a,b]$، دنباله $x_{n+1} = g(x_n)$ به α همگراست.

اثبات) تعریف می‌کنیم $h(x) = g(x) - x$ داریم $h(a) \geq 0$, $h(b) \leq 0$ و لذا قضیه بولزانو ایجاب می‌کند که $\alpha \in [a,b]$ وجود دارد که $h(\alpha) = 0$ و لذا $g(\alpha) = \alpha$. اکنون نشان می‌دهیم ریشه α منحصر به فرد است. برهان خلف فرض کنید چنین نباشد و جواب $\beta \in [a,b]$ وجود داشته باشد به طوری که $g(\beta) = \beta$. تابع g روی $[\alpha, \beta]$ پیوسته و روی (α, β) مشتق پذیر است و طبق قضیه مقدار میانگین $c \in (\alpha, \beta)$ وجود دارد به طوری که

چون $g(\alpha) = \alpha$, $g(\beta) = \beta$، داریم:

$$g'(c) = \frac{g(\beta) - g(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

$$g'(c) = 1 \longrightarrow |g'(x)| < 1$$
این با رابطه (1) که $|g'(x)| < 1$
تناقض دارد. پس $\alpha = \beta$

اکنون به اثبات قسمت ب می‌پردازیم:

به ازای هر $u, v \in [a,b]$ که $u < v$ تابع g روی $[u,v]$ پیوسته و روی (u,v) مشتق پذیر است و لذا طبق قضیه مقدار میانگین با توجه به رابطه (1) می‌توان نتیجه گرفت:

$$|g(v) - g(u)| < \rho |v - u| \qquad (2)$$

داریم:

از (2)

$$|x_n - \alpha| = |g(x_{n-1}) - g(\alpha)| < \rho |x_{n-1} - \alpha|$$

با تکرار روند فوق به رابطه زیر می‌رسیم:

$$|x_n - \alpha| < \rho^n |x_0 - \alpha|$$

چون $0 < \rho < 1$، سمت راست رابطه فوق، وقتی $n \to \infty$ به صفر میل می‌کند و بنابراین می‌توان نتیجه گرفت $x_n \to \alpha$.

نکته: شرایط قضیه بیکل، شرایط کافی هستند. وقتی می‌خواهیم معادله $f(x)=0$ را با روش نقطه ثابت حل کنیم، ابتدا رابطه $x=g(x)$ را تشکیل می‌دهیم و شرایط قضیه را بررسی می‌کنیم. اگر $g(x)$ در شرایط قضیه صدق کند با انتخاب x_0، مقادیر x_n را محاسبه می‌کنیم اما اگر $g(x)$ حداقل یکی از شرایط را نداشت، g دیگری را انتخاب می‌کنیم.

مثال) برای تعیین تقریبی ریشه معادله $f(x)=3xe^{x}-1$ که در فاصله $(0,1)$ قرار دارد، از روش تکرار ساده استفاده کنید. قرار دهید $x_0=0.5$ و محاسبات را تا جایی ادامه دهید که به دقت 10^{-3} برسید.

$$3xe^{x}-1=0$$

$$x=\frac{1}{3e^{x}} \Rightarrow x=\underbrace{\frac{e^{-x}}{3}}_{g(x)}$$

تابع g روی $[0,1]$ پیوسته است. از طرف دیگر اگر $0<x<1$، داریم:

$$-1<-x<0$$

e^{x} صعودی است

$$e^{-1}<e^{-x}<e^{0}$$

$$\underbrace{\frac{e^{-1}}{3}}_{\simeq 0.12}<\frac{e^{-x}}{3}<\underbrace{\frac{1}{3}}_{\simeq 0.33} \quad ① \Rightarrow \quad \forall\, 0<x<1 \quad 0<g(x)<1$$

از طرف دیگر $g'(x)=\frac{-e^{-x}}{3}$ و اگر $x\in(0,1)$، داریم:

$$|g'(x)|=\frac{e^{-x}}{3}<1$$

با توجه به رابطه ①

پس شرایط قضیه برقرار است و از دنباله $x_{n+1}=\frac{e^{-x_n}}{3}$ برای تعیین ریشه استفاده می‌کنیم با فرض $x_0=0.5$

$$x_0=0.5$$

$$x_1=\frac{e^{-x_0}}{3}=\frac{e^{-0.5}}{3}=0.2022$$

$$x_2=\frac{e^{-x_1}}{3}=\frac{e^{-0.2022}}{3}=0.2723$$

$$x_3=\frac{e^{-x_2}}{3}=\frac{e^{-0.2723}}{3}=0.2539$$

$$x_4=\frac{e^{-x_3}}{3}=\frac{e^{-0.2539}}{3}=0.2586$$

$$x_5=\frac{e^{-x_4}}{3}=\frac{e^{-0.2586}}{3}=0.2574$$

$$x_6=\frac{e^{-x_5}}{3}=\frac{e^{-0.2574}}{3}=0.2577$$

محاسبات با دقت 10^{-4} انجام شده است.

$$|x_6-x_5|=0.0003<10^{-3} \Rightarrow$$

$x=0.2577$ را به عنوان تقریب ریشه در نظر می‌گیریم.

(11)

Scanned by CamScanner

مثال) در صفحه ۳ نشان دادیم که معادله $f(x)=3x^2-e^x=0$ سه ریشه دارد که در بازه‌های $[-1,0]$، $[0,1]$ و $[3,4]$ قرار دارند. با استفاده از روش تکرار ساده و با انتخاب g ی مناسب هرکدام از ریشه‌ها را با دقت 10^{-2} بیابید.

می‌خواهیم معادله $f(x)=0$ را به صورت $x=g(x)$ بنویسیم.

$x=\sqrt{\frac{e^x}{3}} \longrightarrow$ اگر بخواهیم مثبت باشد نقطه به ریشه مثبت همگرا می‌شود.

$x=-\sqrt{\frac{e^x}{3}} \longrightarrow$ اگر بخواهیم منفی باشد، نقطه به ریشه منفی همگرا می‌گردد.

$x=\ln(3x^2)$

از رابطه اول $x=\sqrt{\frac{e^x}{3}}$ برای تعیین ریشه داخل بازه $[0,1]$ استفاده می‌کنیم. پس ابتدا نشان می‌دهیم $g_1(x)=\sqrt{\frac{e^x}{3}}$ در شرایط قضیه صدق می‌کند. اولاً g_1 روی $[0,1]$ پیوسته است. ثانیاً اگر $0\leq x\leq 1$ داریم:

$$1\leq e^x\leq e \Rightarrow \frac{1}{3}\leq\frac{e^x}{3}\leq\frac{e}{3} \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{3}}\leq\sqrt{\frac{e^x}{3}}\leq\sqrt{\frac{e}{3}} \Rightarrow 0<g_1(x)<1$$

$$g_1'(x)=\frac{\sqrt{e^x}}{2\sqrt{3}} \xrightarrow{\text{با روش فوق می‌توان نشان داد که}} |g'(x)|<1$$

پس شرایط قضیه برقرار است. نقطه شروع را $x_0=0.5$ در نظر می‌گیریم.

$x_0=0.5$

$x_1=g_1(x_0)=\sqrt{\frac{e^{0.5}}{3}}=0.741$

$x_2=g_1(x_1)=\sqrt{\frac{e^{0.741}}{3}}=0.826$

$x_3=g_1(x_2)=\sqrt{\frac{e^{0.826}}{3}}=0.877$

$x_4=g_1(x_3)=\sqrt{\frac{e^{0.877}}{3}}=0.895$

$x_5=g_1(x_4)=\sqrt{\frac{e^{0.895}}{3}}=0.903$

$x_6=g_1(x_5)=\sqrt{\frac{e^{0.903}}{3}}=0.906 \qquad |x_6-x_5|<10^{-2}$

پس $x_6=0.906$ را به عنوان تقریب ریشه در نظر می‌گیریم.

از رابطه دوم $x=\ln(3x^2)$ برای تعیین ریشه داخل بازه $[3,4]$ استفاده می‌کنیم. پس ابتدا نشان می‌دهیم $g_2(x)=\ln(3x^2)$ در شرایط قضیه صدق می‌کند. اولاً g_2 روی $[3,4]$ پیوسته است. ثانیاً اگر $3\leq x\leq 4$ داریم:

$$3\leq x\leq 4 \Rightarrow 9\leq x^2\leq 16 \Rightarrow 27\leq 3x^2\leq 48 \qquad 3.29\leq\ln(3x^2)\leq 3.87 \Rightarrow 3<g_2(x)<4$$

$$g_2'(x)=\frac{2}{x} \Rightarrow \forall x\in(3,4)\ ,\ |g_2'(x)|<1$$

پس شرایط قضیه برقرار است. نقطه شروع را $x_0=3.5$ در نظر می‌گیریم.

$x_0=3.5$

$x_1=g_2(x_0)=\ln(3(3.5)^2)=3.604$

$x_2=g_2(x_1)=3.663$

$x_3=g_2(x_2)=3.695$

$x_4=g(x_3)=3.713$

$x_5=g(x_4)=3.722$

$x_6=g(x_5)=3.727 \Rightarrow$ $x_6=3.727$ را به عنوان تقریب ریشه در نظر می‌گیریم.

به طور مشابه، از رابطه $x=-\sqrt{\frac{e^x}{3}}$ استفاده کنید و ریشه داخل بازه $[-1,0]$ را به دست آورید.

مرتبه همگرایی یک روش

در حل معادله $f(x)=0$ فرض کنید x_n دنباله‌ای باشد که به وسیله یکی از روشهای عددی ساخته شده و فرض کنید x_n به ریشه α همگرا باشد. می‌گوییم مرتبه همگرایی روش برابر با عدد مثبت p است هرگاه

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|^p} = c \neq 0$$

یا به عبارت دیگر

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{(e_n)^p} = c \neq 0$$

یا

$$e_{n+1} \simeq c\, e_n^p$$

هر چه مرتبه همگرایی روش بالاتر باشد، روش سریعتر است. به عبارت دیگر اگر $p=1$ باشد می‌گوییم روش دارای سرعت خطی است.

مثال) نشان دهید سرعت همگرایی روش تنصیف خطی است.

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{\frac{(b-a)}{2^{n+1}}}{\frac{(b-a)}{2^n}} = \frac{1}{2} \neq 0$$

پس اگر قرار دهیم $p=1$ داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{(e_n)^p} = \frac{1}{2} \neq 0$$

بنابراین روش تنصیف دارای مرتبه همگرایی یک است.

نکته: مرتبه همگرایی روش تکرار ساده به $g(x)$ بستگی دارد.

فرض کنید معادله $f(x)=0$ را به صورت $x=g(x)$ نوشته باشیم و دنباله $x_{n+1}=g(x_n)$ به ریشه α همگرا باشد آنگاه اگر $g'(\alpha)\neq 0$ مرتبه همگرایی روش برابر با یک است و اگر

$$g'(\alpha)=0 \quad g''(\alpha)=0,\ \dots,\ g^{(m-1)}(\alpha)=0, \quad g^{(m)}(\alpha)\neq 0$$

آنگاه، مرتبه همگرایی روش برابر با m است.

اثبات) بسط تیلور تابع $g(x)$ حول α به صورت زیر است:

$$g(x) = g(\alpha) + \underbrace{(x-\alpha)g'(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^2}{2!}g''(\alpha) + \dots + \frac{(x-\alpha)^{m-1}}{(m-1)!}g^{(m-1)}(\alpha)}_{=0} + \frac{(x-\alpha)^m}{m!}g^{(m)}(\xi) \quad (\xi \text{ بین } x \text{ و } \alpha)$$

$$\Rightarrow g(x_n) = g(\alpha) + \frac{(x_n-\alpha)^m}{m!}g^{(m)}(\xi_n) \quad (\xi_n \text{ بین } x_n \text{ و } \alpha \text{ است})$$

$$\xrightarrow[g(\alpha)=\alpha]{g(x_n)=x_{n+1}} x_{n+1}-\alpha = \frac{(x_n-\alpha)^m}{m!}g^{(m)}(\xi_n) \Rightarrow \frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|^m} = \left|\frac{g^{(m)}(\xi_n)}{m!}\right|$$

پس مرتبه همگرایی روش برابر با m است.

مثال) دنباله $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{2}{x_n}\right)$ را در نظر بگیرید. نشان دهید برای $x_0\in[1,2]$ دنباله داده شده همگراست و حد آن را محاسبه کنید. همچنین درجه همگرایی آن را با ذکر دلیل تعیین کنید.

در واقع دنباله فوق بر اساس رابطه $x=\frac{1}{2}\left(x+\frac{2}{x}\right)$ نوشته شده پس $\frac{1}{2}\left(x+\frac{2}{x}\right)$ نقش $g(x)$ را دارد و کافی است نشان دهیم شرایط قضیه برای $g(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{2}{x}\right)$ برقرار است.

$g(x)$ روی $[1,2]$ پیوسته است. همچنین داریم:

$$g'(x)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{x^2}\right)=0 \Rightarrow \frac{x^2-2}{2x^2}=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$$

$g'(x)$	$+$	$-\sqrt{2}$	$-$	$\sqrt{2}$	$+$

پس می‌توان گفت $g(x)$ روی $[1,\sqrt{2}]$ نزولی و روی $[\sqrt{2},2]$ صعودی است و لذا داریم:

$g(1)=1{,}5 \qquad g(\sqrt{2})=1{,}4 \qquad g(2)=1{,}5$

پس می‌توان نتیجه گرفت که

$$\forall x\in[1,2] \qquad 1\leqslant g(x)\leqslant 2$$

از طرف دیگر

$$g'(x)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{x^2}\right) \Rightarrow \underbrace{\forall x\in[1,2] \qquad |g'(x)|<1}$$

از صعودی بودن تابع g' و مقدار $g'(1)$ و $g'(2)$ این نتیجه بدست می‌آید.

پس شرایط قضیه برقرار است. برای محاسبه حد می‌توان روش نقطه ثابت را با یک نقطه شروع اجرا کرد و یا اینکه می‌توان گفت اگر حد دنباله برابر L باشد با حدگیری از طرفین $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{2}{x_n}\right)$ داریم:

$$L=\frac{1}{2}\left(L+\frac{2}{L}\right) \qquad \frac{1}{2}L=\frac{1}{L} \Rightarrow L=\sqrt{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} g'(\sqrt{2})=0 \\ g''(x)=\frac{2}{x^3} \qquad g''(\sqrt{2})\neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

درجه همگرایی برابر با ۲ است.

Scanned by CamScanner

روش نیوتن - رافسون (Newton - Raphson Method) برای حل معادله $f(x)=0$:

این روش یکی از معروفترین روشهای ریشه یابی است. فرض کنید x_0 یک تخمین اولیه نزدیک به ریشه α باشد. خط مماس بر نمودار را در نقطه $(x_0, f(x_0))$ رسم می‌کنیم تا محور xها را در نقطه x_1 قطع کند. معادله خط مماس به صورت زیر است:

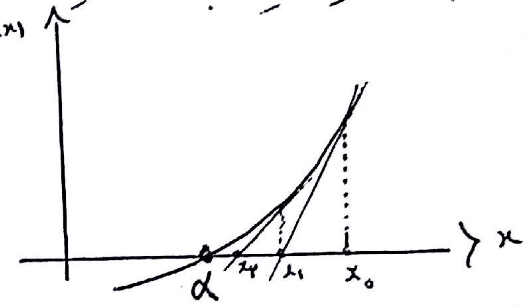
$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \xrightarrow{y=0} x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

حال x_1 را به عنوان تقریب ریشه در نظر می‌گیریم و مجدداً خط مماس بر نمودار را در نقطه $(x_1, f(x_1))$ رسم می‌کنیم تا محور xها را در نقطه x_2 قطع کند. معادله خط مماس به صورت زیر است:

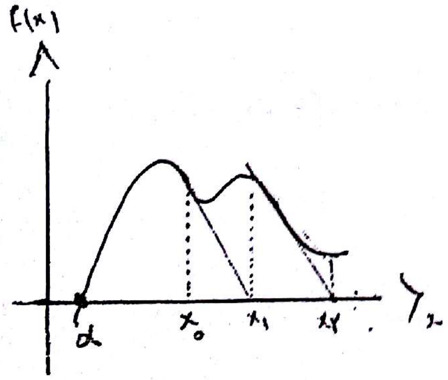
$$y-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1) \xrightarrow{y=0} x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

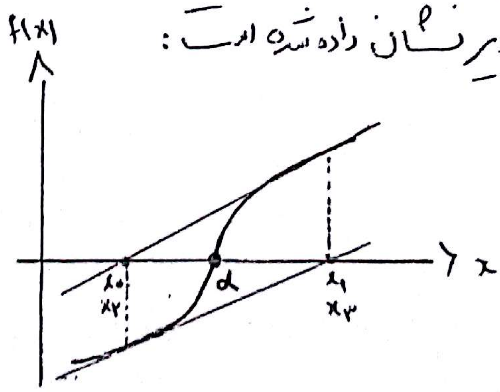
با ادامه این فرایند، دنباله روش نیوتن-رافسون ایجاد می‌شود،

$$\boxed{x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad n=0,1,2,\dots}$$



نکته: دنباله حاصل از روش نیوتن ممکن است واگرا باشد، یا ممکن است در یک دور نوسانی قرار گیرد. این موضوع در شکل‌های زیر نشان داده شده است:





نکته مهم: روش نیوتن، همان روش نقطه ثابت است که در آن

$$g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$x_{n+1}=g(x_n) \qquad n=0,1,\dots$$

$f(x)=0$

$\frac{f(x)}{f'(x)}=0$

$-\frac{f(x)}{f'(x)}=0$

$x-\frac{f(x)}{f'(x)}=x$

قضیه (همگرایی روش نیوتن)

فرض کنید $f \in C^2[a,b]$، فرض کنید $\alpha \in [a,b]$ ریشه معادله $f(x)=0$ باشد.
در این صورت $\delta > 0$ وجود دارد به طوری که تابع $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ روی بازه $[\alpha-\delta, \alpha+\delta]$ در شرایط قضیه صفحه ۱۰ صدق می‌کند و بنابراین به ازای هر تقریب اولیه $x_0 \in [\alpha-\delta, \alpha+\delta]$، دنباله $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ به α همگرا است.

اثبات: به صفحه ۵۶ از کتاب «آنالیز عددی مقدماتی» تألیف دکتر رفسنجانی مراجعه کنید.

قضیه فوق بیان می‌کند که اگر x_0 به اندازه کافی به ریشه α نزدیک باشد، روش نیوتن همگرا می‌شود.

مثال ۱) کوچکترین ریشه مثبت معادله زیر را با روش نیوتن - رافسون بیابید.

$$e^{-x} = \cos x$$

با رسم نمودارهای $y=e^{-x}$ و $y=\cos x$ معلوم می‌شود که معادله دارای بی‌شمار ریشه مثبت است که کوچکترین ریشه مثبت در بازه $[0, \frac{\pi}{2}]$ قرار دارد. تعریف می‌کنیم:

$$f(x)=e^{-x}-\cos x$$

$$f'(x)=-e^{-x}+\sin x \quad \Rightarrow \quad x_{n+1}=x_n-\frac{e^{-x_n}-\cos x_n}{-e^{-x_n}+\sin x_n}$$

ϵ را 10^{-4} در نظر می‌گیریم و شرط توقف را $|x_{n+1}-x_n|<\epsilon$ قرار می‌دهیم. با انتخاب نقطه اولیه $x_0=1$ داریم: محاسبات فوق را تا ۶ رقم اعشار انجام می‌دهیم.

$$x_1 = 1.364075$$
$$x_2 = 1.294423$$
$$x_3 = 1.292697$$
$$x_4 = 1.292696 \quad \Rightarrow \quad |x_4-x_3| = 10^{-6} < 10^{-4}$$

پس $x_4=1.292696$ را به عنوان تقریبی از ریشه در نظر می‌گیریم.

قضیه (مرتبه همگرایی روش نیوتن): فرض کنید تقریب اولیه x_0 به اندازه کافی به ریشه α نزدیک و لذا روش نیوتن همگرا باشد.

الف) اگر α ریشه ساده معادله $f(x)=0$ باشد (یعنی $f(\alpha)=0$ و $f'(\alpha)\neq 0$) آنگاه مرتبه همگرایی روش نیوتن حداقل ۲ است.

ب) اگر α ریشه مرتبه m ام معادله $f(x)=0$ باشد (یعنی $f(\alpha)=f'(\alpha)=\cdots=f^{(m-1)}(\alpha)=0$ و $f^{(m)}(\alpha)\neq 0$) و $m>1$ آنگاه مرتبه همگرایی روش نیوتن، یک است یعنی همگرایی خطی دارد.

اثبات الف) گفتیم که روش نیوتن همان روش نقطه ثابت است که در آن $g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$. لذا داریم:

$$g'(x)=1-\frac{(f'(x))^2-f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}=\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{g'(\alpha)=0}$$

$$g''(x)=\frac{(f'(x))^3f''(x)+f(x)(f'(x))^2f'''(x)-2f(x)f'(x)(f''(x))^2}{(f'(x))^4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{g''(\alpha)=\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}}$$

بنابراین از نکته ص ۱۳ نتیجه می‌شود که مرتبه همگرایی، حداقل برابر با ۲ است.

اثبات ب) چون α ریشه مرتبه m ام $(m>1)$ برای تابع $f(x)$ است. می‌توان $f(x)$ را به صورت زیر نوشت:

$$f(x) = (x-\alpha)^m \, h(x) \qquad \text{به طوریکه } h(\alpha) \neq 0$$

مجدداً می‌توان گفت که روش نیوتن بحال روش نقطه ثابت است که در آن

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$\Rightarrow \quad g(x) = x - \frac{(x-\alpha)^m h(x)}{m(x-\alpha)^{m-1} h(x) + (x-\alpha)^m h'(x)}$$

$$\Rightarrow \quad g(x) = x - \frac{(x-\alpha)\, h(x)}{m\, h(x) + (x-\alpha)\, h'(x)}$$

$$g'(x) = 1 - \frac{\left[h(x) + (x-\alpha) h'(x)\right]\left[m\, h(x) + (x-\alpha) h'(x)\right] - \left[m h'(x) + h'(x) + (x-\alpha) h''(x)\right]\left[(x-\alpha) h(x)\right]}{\left[m\, h(x) + (x-\alpha)\, h'(x)\right]^2}$$

از قضیه ص ۱۳ نتیجه می‌شود که مرتبه همگرایی برابر با یک است.

$$g'(\alpha) = 1 - \frac{1}{m} \neq 0 \quad \Rightarrow$$

روش نیوتن - رافسون اصلاح شده:

دیدیم که وقتی α ریشه مرتبه m ام $(m>1)$ برای معادله $f(x)=0$ باشد، مرتبه همگرایی روش نیوتن یک است. لذا برای بهبود سرعت همگرایی، در حالتی که α ریشه مرتبه m ام $(m>1)$ است می‌توان از فرمولهای زیر استفاده کرد:

اولین روش اصلاح شده نیوتن:

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - m\,\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

دومین روش اصلاح شده نیوتن:

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f^{(m-1)}(x_n)}{f^{(m)}(x_n)}}$$

قضیه: مرتبهٔ همگرایی اولین روش اصلاح شده نیوتن، حداقل برابر ۲ است.

اثبات) چون α ریشهٔ مرتبهٔ mام ($m>1$) برای تابع $f(x)$ است، می‌توان $f(x)$ را به صورت زیر نوشت:

$$f(x) = (x-\alpha)^m h(x)$$

شرط: $h(\alpha) \neq 0$

فرمول $x_{n+1} = x_n - m\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ همان روش نقطهٔ ثابت است که در آن

$$g(x) = x - m\frac{f(x)}{f'(x)}$$

و توان ثابت کرد که اگر x_0 به اندازهٔ کافی به ریشهٔ α نزدیک باشد، $x_{n+1} = g(x_n)$ همگرا می‌شود. لذا از فرض همگرایی به تعیین مرتبهٔ همگرایی می‌پردازیم.

$$\Rightarrow g(x) = x - m\frac{(x-\alpha)h(x)}{mh(x)+(x-\alpha)h'(x)}$$

$$\Rightarrow g'(x) = 1 - m\frac{[h(x)+(x-\alpha)h'(x)][mh(x)+(x-\alpha)h'(x)] - [mh'(x)+h'(x)+(x-\alpha)h''(x)][(x-\alpha)h(x)]}{[mh(x)+(x-\alpha)h'(x)]^2}$$

$$\Rightarrow g'(\alpha) = 0 \Rightarrow$$

از قضیه صفحه ۱۳ نتیجه می‌گیرد که مرتبهٔ همگرایی حداقل برابر با ۲ است

قضیه: مرتبهٔ همگرایی دومین روش اصلاح شدهٔ نیوتن حداقل برابر ۲ است.

اثبات: اگر α ریشهٔ مرتبهٔ mام ($m>1$) برای تابع $f(x)$ باشد، آنگاه α ریشهٔ مرتبهٔ یک (ریشهٔ ساده) برای تابع $R(x) = f^{(m-1)}(x)$ است. پس به جای آنکه روش نیوتن را برای حل معادلهٔ $f(x)=0$ اعمال کنیم، می‌توانیم آن را برای حل معادلهٔ $R(x)=0$ به کار بریم.

$$R(x)(x) = 0$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{R(x_n)}{R'(x_n)}$$

$$\Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{f^{(m-1)}(x_n)}{f^{(m)}(x_n)}$$

و چون α ریشهٔ ساده برای $R(x)$ است پس طبق قضیه صفحه ۱۷، مرتبهٔ همگرایی فرمول فوق حداقل برابر با ۲ است.

نکته: در عمل مقدار α را نمی‌دانیم. پس اگر بخواهیم از فرمول‌های اصلاح شده نیوتن استفاده کنیم، مقدار m را چگونه تشخیص دهیم؟ می‌توان ثابت کرد که اگر ترتیب اولیهٔ x_0 به گونه‌ای انتخاب شده باشد که دنبالهٔ نیوتن $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ به ریشهٔ α همگرا باشد، آنگاه داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{x_n - x_{n-1}} = 1 - \frac{1}{m}$$

«اثبات این موضوع در تمرین‌ها مطرح شده است.»

لذا وقتی ریشه α را می‌دانیم و می‌خواهیم مرتبه آن را حدس بزنیم، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱- x_0 را به عنوان تخمین مناسبی از ریشه در نظر می‌گیریم به طوری که دنباله نیوتن همگرا باشد.

۲- x_1 و x_2 و x_3 را با توجه به دنباله نیوتن به دست می‌آوریم.

۳- مقادیر $\frac{x_2-x_1}{x_1-x_0}$ و $\frac{x_3-x_2}{x_2-x_1}$ را حساب می‌کنیم تا ببینیم به چه عددی همگرا می‌شوند. (ممکن است برای تشخیص اینکه $\frac{x_{k+1}-x_k}{x_k-x_{k-1}}$ به چه عددی همگرا می‌شود لازم باشد در گام ۲، جملات بیشتری را حساب کنیم)

۴- با توجه به اینکه عبارات فوق باید به عدد $1-\frac{1}{m}$ همگرا شوند، مقدار m را حساب می‌کنیم.

۵- اگر $m=1$ باشد، با همان دنباله نیوتن روند را ادامه می‌دهیم و اگر $m>1$ باشد، از فرمول‌های اصلاح شده برای ادامه روند استفاده می‌کنیم.

مثال) با روش نیوتن اصلاح شده، تنها ریشه معادله $\cos x = x^2+1$ را با تقریب اولیه $x_0=0.5$ به گونه‌ای تقریب بزنید که $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-4}$.

اگر $y=x^2$ و $y=\cos x$ را رسم کنیم، می‌توان نتیجه گرفت که $x=0$ تنها ریشه معادله است. به علاوه داریم:

$$f(x) = \cos x - x^2 - 1$$
$$f'(x) = -\sin x - 2x$$
$$f''(x) = -\cos x - 2$$

$f'(0)=0$ ، $f''(0)\neq 0 \Rightarrow$ $x=0$ ریشه مرتبه دوم معادله است. پس باید از فرمول اصلاح شده $x_{n+1} = x_n - 2\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ استفاده کنیم.

اما فرض کنید اطلاعات داخل ابر فوق را نداشته باشیم و بخواهیم m را حدس بزنیم. فرمول نیوتن به صورت زیر است:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\cos x - x^2 - 1}{-\sin x - 2x}$$

$x_0 = 0.5$ و $x_1 = 0.248269$ ، $x_2 = 0.123922$ ، $x_3 = 0.061935$

$$\frac{x_2-x_1}{x_1-x_0} = 0.4940 \rightarrow 0.5$$

$$\frac{x_3-x_2}{x_2-x_1} = 0.49985$$

پس $1-\frac{1}{m} = 0.5$ پس $m=2$. پس ادامه روند را با فرمول زیر دنبال می‌کنیم:

$$x_{n+1} = x_n - 2\times\frac{\cos x - x^2 - 1}{-\sin x - 2x}$$

لذا داریم:

$x_5 = -0.000007$

$x_4 = -0.000007$

نکته: یکی از مشکلات روش نیوتن، مربوط به یافتن تقریب اولیه x_0 است. این مشکل را می‌توان با تلفیق روش نیوتن با یک روش همیشه همگرا مثل روش تنصیف برطرف کرد. به این صورت که ابتدا با روش تنصیف تقریب اولیه را بهتر کرد و سپس از روش نیوتن استفاده کرد.

مشکل دیگر روش نیوتن آن است که در هر مرحله به محاسبه دو تابع نیاز دارد: f و f'. این امر حجم محاسبات را افزایش می‌دهد ضمن آنکه ممکن است محاسبه مشتق پیچیده باشد. روش وتری که در ادامه معرفی می‌کنیم، به جای محاسبه مشتق تقریبی از آن را به کار می‌برد.

روش وتری (Secant Method) برای حل معادله $f(x)=0$

در فرمول روش نیوتن، می‌توان $f'(x_n)$ را به صورت زیر تقریب زد:

$$f'(x_n) \simeq \frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

اگر از این تقریب در فرمول روش نیوتن استفاده کنیم، داریم:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{f(x_n)}{\dfrac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}}$$

$$= x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n)-f(x_{n-1})} = \frac{x_{n-1}f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$$

$$\boxed{x_{n+1} = \frac{x_{n-1}f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n)-f(x_{n-1})} \qquad n=1,2,\dots}$$

دقت کنید که در روش وتری به دو تقریب اولیه x_0 و x_1 نیاز داریم.

مثال) با استفاده از روش وتری تقریبی برای $\sqrt{2}$ به دست آورید. از $x_0=1$ و $x_1=2$ به عنوان تقریب اولیه استفاده کنید و شرط توقف را $|x_{n+1}-x_n|<10^{-3}$ قرار دهید.

هدف آن است که ریشه مثبت معادله $x^2-2=0$ را بیابیم. جدول متناظر را تشکیل می‌دهیم. محاسبات را تا ۶ رقم اعشار انجام می‌دهیم.

x_i	$f(x_i) = x_i^2 - 2$
1	-1
2	2
$\dfrac{(1)(2) - (2)(-1)}{2 - (-1)} = \dfrac{4}{3} = 1.333333$	-0.222223
$\dfrac{2(-0.222223) - (1.333333)(2)}{-0.222223 - 2} = 1.400000$	-0.04
$\dfrac{(1.333333)(-0.04) - (1.4)(-0.222223)}{-0.04 - (-0.222223)} = 1.414634$	0.001189
$\dfrac{(1.4)(0.001189) - (1.414634)(-0.04)}{0.001189 - (-0.04)} = 1.414212$	-0.000004

پس $x_5 = 1.414212$ را به عنوان تقریبی از ریشه در نظر می‌گیریم.

قضیه (همگرایی روش وتری)

روش وتری همگرایی تضمین شده ندارد. اما اگر α ریشه معادله $f(x)=0$ باشد و f و f' و f'' در یک همسایگی α مانند I پیوسته باشند و به ازای هر $x \in I$ داشته باشیم $f'(x) \neq 0$، آنگاه چنانچه تقریب‌های اولیه x_0 و x_1 به اندازه کافی نزدیک به α انتخاب شوند دنباله روش وتری به ریشه α همگراست و مرتبه همگرایی $\underbrace{p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}_{\text{عدد طلایی}} \simeq 1.6$ است.

۳، ۶، ۱۰، ۱۲، ۱۶، ۲۴

«تمرینات مبحث ریشه یابی»

سوال ۱) تقریبی برای $\sqrt{13}$ با روش تنصیف با سه تکرار بیابید.

سوال ۲) فرض کنید معادله $f(x)=0$ ریشه‌ای در بازه $[-2,2]$ داشته باشد. اگر بخواهیم روش تنصیف را برای حل این معادله به کار ببریم، حداقل تعداد تکرارهای لازم برای داشتن خطای مطلق حداکثر به اندازه ۰/۰۰۱ چیست؟

سوال ۳) فرض کنید عدد ۲ تقریبی اولیه به عدد $\sqrt[5]{26}$ باشد. مطلوب است تقریب بعدی

الف) با روش نیوتن - رافسون

ب) با روش وتری هرگاه تقریب دیگر عدد ۳ باشد.

سوال ۴) تقریبی برای جواب معادله $x-\cos x=0$ به وسیله روش نیوتن - رافسون با سه تکرار با شروع از $x_0=\frac{\pi}{5}$ بیابید.

سوال ۵) نشان دهید معادله x^2 [illegible] $x+2=0$ روی بازه $[-2.5,-1.5]$ دارای یک ریشه است.
سپس، روش نقطه ثابت را برای یافتن این ریشه به کار ببرید و شرط توقف را $|x_{n+1}-x_n|<10^{-2}$ قرار دهید.

راهنمایی: معادله را به صورت $x=\frac{2}{x}-1$ در نظر بگیرید و نشان دهید $g(x)=\frac{2}{x}-1$ شرایط قضیه نقطه ثابت را دارد.

سوال ۶) دنباله تکراری $x_{n+1}=\frac{1}{10}\cos x_n$ را در نظر بگیرید. نشان دهید این دنباله برای هر تقریب اولیه x_0 همگراست.

راهنمایی: قرار دهید $g(x)=\frac{1}{10}\cos x$ و نشان دهید $g(x)$ شرایط نقطه ثابت را دارد.

سوال ۷) تقریبی از ریشه معادله $f(x)=1+x^2-\cos^2 x=0$ را با روش نیوتن با $x_0=1.5$ به گونه‌ای به دست آورید که $|x_n-x_{n-1}|<10^{-4}$.

سوال ۸) عدد $\alpha=\frac{1}{2}$ یک ریشه معادله $4x^3+8x^2-11x+3=0$ است. اگر دنباله حاصل از روش تکراری نیوتن، برای تقریب این ریشه همگرا باشد، مرتبه همگرایی آن را بیابید.

سؤال ۹) معادله $2x = 7 + \ln(x)$ را در نظر بگیرید. ابتدا بازه‌ای به طول 0.5 بیابید که شامل ریشه بزرگتر معادله باشد، سپس به روش نقطه ثابت تقریبی از ریشه را حساب کنید.

---

* سؤال ۱۰) با روش نیوتن - رافسون، تقریبی از معکوس عدد 7 را با نقطه شروع $x_0 = 0.125$ تا ۴ تکرار حساب کنید.

راهنمایی: قرار دهید $f(x) = \frac{1}{x} - 7$

سؤال ۱۱) معادله $4x^2 - e^{-x} = 0$ در بازه $[-1, 0]$ مفروض است. با روش تکرار ساده و انتخاب $g(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{e^{-x}}$ و $x_0 = -0.5$، ریشه معادله را طوری تقریب بزنید که $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-4}$. بررسی مناسب بودن g الزامی است.

سؤال ۱۲) $x = 0$ ریشه مرتبه چندم معادله $x - \ln(x+1) = 0$ است؟
با روش نیوتن اصلاح شده، این ریشه را با تقریب اولیه $x_0 = 0.1$ به گونه‌ای تقریب بزنید که $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-4}$.

سؤال ۱۳) با فرض آنکه دنباله $x_{n+1} = \frac{x_n^3 + 3ax_n}{3x_n^2 + a}$ به عددی مثبت همگراست،

الف) حد دنباله را بیابید.

ب) با محاسبه حد $\lim_{n \to \infty} \frac{x_{n+1} - \sqrt{a}}{(x_n - \sqrt{a})^3}$ نشان دهید مرتبه همگرایی برابر با ۳ است.

سؤال ۱۴) دنباله زیر را در نظر بگیرید و فرض کنید $x_0 > 0$.

$$x_{n+1} = \frac{1}{\beta} e^{-x_n^4}$$

نشان دهید یک شرط کافی برای همگرایی دنباله به صورت زیر است:

$$\beta > 4\left(\frac{3}{4e}\right)^{3/4}$$

راهنمایی: β را به گونه‌ای بیابید که $\max_{x>0} |g(x)| < 1$

سوال ۱۵) فرض کنید $k>1$ عددی طبیعی و a یک عدد حقیقی مثبت باشد. همچنین فرض کنید دنباله $\{x_n\}$ که از رابطه زیر بدست می‌آید، به عددی غیرصفر همگرا باشد.

$$x_{n+1}=\frac{x_n^k+kax_n}{kx_n^{k-1}+a} \qquad n=0,1,2,\dots$$

الف) حد دنباله $\{x_n\}$ را بدست آورید.

ب) k را چنان تعیین کنید که مرتبه همگرایی دنباله $\{x_n\}$ حداقل ۳ باشد.

سوال ۱۶) دنباله تکراری زیر را در نظر بگیرید. نشان دهید که این دنباله به ازای هر تقریب اولیه $x_0>1$ به $\sqrt{2}$ همگراست.

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{2}{x_n}\right) \qquad n=0,1,2,\dots$$

سوال ۱۷) معادله $f(x)=x^3-x-1=0$ در بازه $[1,2]$ دارای یک ریشه است. با روش تکرار ساده و انتخاب $g(x)=\sqrt[3]{x+1}$ و $x_0=1.2$ ریشه معادله را طوری تقریب بزنید که $|x_n-x_{n-1}|<10^{-4}$.

بررسی مناسب بودن g الزامی است.

سوال ۱۸) با روش تکرار نقطه ثابت، نشان دهید مقدار $A=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\dots}}}$ برابر با ۲ است.

راهنمایی: از $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$ و $x_0=0$ استفاده کنید.

سوال ۱۹) با روش تکرار نقطه ثابت مقدار عبارت زیر را بیابید.

$$A=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\dots}}}$$

سوال ۲۰) اولین ریشه مثبت معادله $e^{-x}-\cos x=0$ را با روش تکرار نقطه ثابت بدست آورید.

سوال ۲۱) با روش تکرار ساده، ریشه معادله $x-\tan x=0$ را روی بازه $[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$ بیابید.

راهنمایی: $g(x)=\tan x$ مناسب نیست چون در شرایط قضیه نقطه ثابت صدق نمی‌کند.
اما می‌توانیم از طرفین $x=\tan x$ وارون بگیریم که در این صورت با توجه به اینکه $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$ داریم:

$$\tan^{-1}x = x-\pi$$

$$x=\underbrace{\tan^{-1}x+\pi}_{g(x)}$$

سوال ۲۲) معادله $x^2-\tan x+1=0$ مفروض است. اولاً بازه‌ای را که کوچکترین ریشه مثبت معادله را در بر دارد، مشخص کنید. ثانیاً این ریشه را با روش نقطه ثابت و با شرط توقف $|x_n-x_{n-1}|<10^{-3}$ بیابید.

سوال ۲۳) معادله $f(x)=x^2-3x+e^x-2=0$ دارای دو ریشه است. یکی مثبت و دیگری منفی. ریشه منفی را با روش تکرار نقطه ثابت به دست آورید.

سوال ۲۴) معادله $f(x)=\cos x(1-\sin x)=0$ مفروض است.

الف) نشان دهید $x=\frac{\pi}{2}$ ریشه معادله و درجه تکرار آن ۳ است.

ب) این ریشه را با روش نیوتن-رافسون اصلاح شده با نقطه شروع $x_0=1.5$ بیابید.

سوال ۲۵) معادله $f(x)=ax^3+bx^2+x-2=0$ مفروض است.

الف) a و b را طوری بیابید که $x=1$ ریشه مضاعف معادله فوق باشد.

ب) این ریشه را با استفاده از روش نیوتن اصلاح شده با دقت 10^{-4} به دست آورید.

سوال ۲۶) با روش نیوتن-رافسون نشان دهید دنباله زیر به $\sqrt[3]{a}$ همگرا است.

$$x_{n+1}=\frac{2x_n^3+a}{3x_n^2} \qquad n=0,1,2,\dots$$

سوال ۲۷) با تبدیل معادله $x^2-5=0$ به مسأله نقطه ثابت

$$x = \underbrace{x + c(x^2-5)}_{=g(x)}$$

ثابت c را طوری بیابید که دنباله $x_{n+1}=x_n+c(x_n^2-5)$ به $\sqrt{5}$ همگرا شود.

سوال ۲۸)

الف) فرض کنید α ریشه تکرار m ام معادله $f(x)=0$ باشد و فرض کنید x_0 به گونه‌ای انتخاب شود که دنباله نیوتن $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ به ریشه α همگرا است. ثابت کنید

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-\alpha}{x_n-\alpha}=1-\frac{1}{m}$$

راهنمایی:

$$f(x)=(x-\alpha)^m h(x) \quad : h(\alpha)\neq 0$$

$$\Rightarrow x_{n+1}=x_n-\frac{(x_n-\alpha)^m h(x_n)}{m(x_n-\alpha)^{m-1}h(x_n)+(x_n-\alpha)^m h'(x_n)}$$

از طرفین α را کم می‌کنیم:

$$x_{n+1}-\alpha=x_n-\alpha-\frac{(x_n-\alpha)^m h(x_n)}{m(x_n-\alpha)^{m-1}h(x_n)+(x_n-\alpha)^m h'(x_n)}$$

$$\frac{x_{n+1}-\alpha}{x_n-\alpha}=1-\frac{h(x_n)}{m\,h(x_n)+(x_n-\alpha)h'(x_n)}$$

حال از طرفین حد بگیرید.

ب) با توجه به قسمت (الف) نشان دهید

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{x_n-x_{n-1}}=1-\frac{1}{m}$$

راهنمایی:

در صورت و مخرج α را اضافه و کم کنید.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{x_n-x_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-\alpha-(x_n-\alpha)}{x_n-\alpha-(x_{n-1}-\alpha)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x_{n+1}-\alpha}{x_n-\alpha}-1}{1-\frac{x_{n-1}-\alpha}{x_n-\alpha}}$$

با توجه به الف

$$=\frac{\cancel{1}-\frac{1}{m}\cancel{-1}}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{m}}}=\frac{m-1}{m}=1-\frac{1}{m}$$