به نام خدا

محمدمهدی آقاجانی

تمرین سوم

دکتر نیک آبادی

پاییز ۹۵

تمرین اول :

الف) اگر تعداد نواحی نقشه x باشد :

در این صورت در هر مرحله میتوان یکی از نواحی را انتخاب و یکی از ۴ رنگ را بر روی آن اعمال کرد . پس با هر رنگ کردن وارد یک حالت جدید میشویم و در واقع هر ناحیه میتواند یکی از ۵ حالت رنگ اول یا دوم یا سوم یا چهارم و یا بی رنگ را داشته باشد که ترکیب این ها یک حالت را به وجود می آورد .

اما در هر حالت میتوانیم یک ناحیه را انتخاب کنیم و یکی از ۴ رنگ را بر روی آن اعمال کنیم.

برای بدست آوردن فاکتور انشعاب هم خواهیم داشت :

$$\text{فاکتور انشعاب} = \frac{\binom{x}{0}(x-0)+\binom{x}{1}(x-1)+\binom{x}{2}(x-2)+\dots+\binom{x}{x-1}\big(x-(x-1)\big)+\binom{x}{x}(x-x)}{\underbrace{5^{x}}_{\text{تعداد کل حالات}}}$$

$$= \frac{x\left(\binom{x}{0}+\binom{x}{1}+\binom{x}{2}+\dots+\binom{x}{x}\right)-\left(\binom{x}{1}+2\binom{x}{2}+3\binom{x}{3}+\dots+x\binom{x}{x}\right)}{5^{x}}$$

$$= \frac{x2^{x}-x2^{x-1}}{5^{x}} = \frac{x\left(2^{x}-2^{x-1}\right)}{5^{x}} = \frac{x2^{x-1}}{5^{x}} = \boxed{\frac{x}{5}\times\left(\frac{2}{5}\right)^{x-1}}$$

ب) اعمال میمون عبارت است از حرکت به جلو به اندازه یک متر و یا چرخش و یا پرش .

با فرض اینکه در هر مرحله تمام کار های بالا برای میمون امکان پذیر است میتوان حد بالای ضریب انشعاب را ۳ درنظر گرفت .

ج) میزان آب در هر ظرف را یک عدد در نظر گرفته و هر حالت برابر یک سه تایی مرتب است که میزان آب در هر ظرف را نشان میدهد .

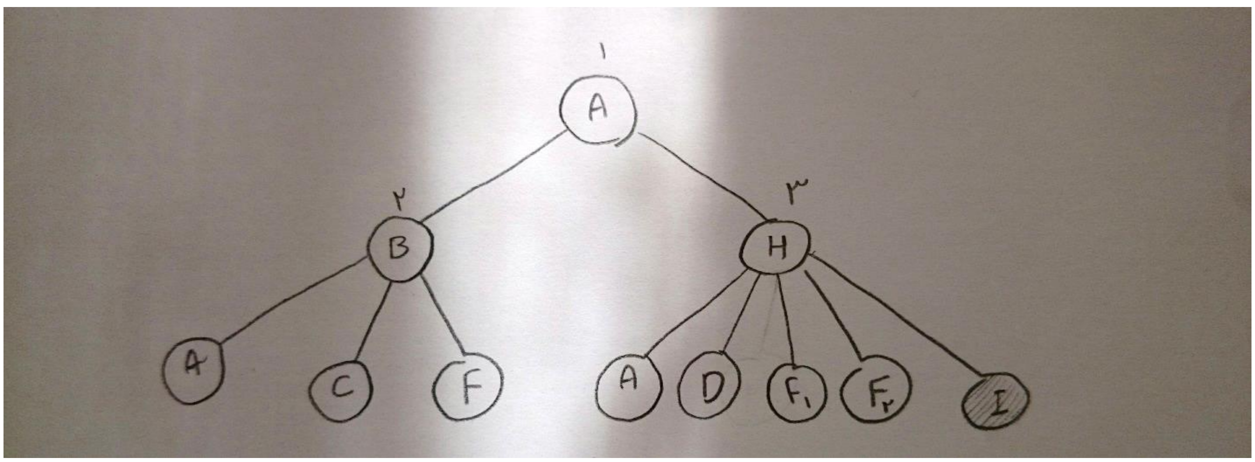
برای بدست آورن حد بالای ضریب انشعاب خواهیم داشت :

در هر مرحله میتوان یک ظرف را انتخاب کرد و آن را پر کرد یا روی زمین ریخت یا محتوای آن را در دوظرف دیگر خالی کرد پس چهار عمل با هر ظرف داریم و در کل میتوان هر یک از سه ظرف را انتخاب نمود که حد بالای ضریب انشعاب میشود ، ۱۲ .

تمرین دوم :

الف) در این جست و جو به حالت نهایی I خواهد رسید زیرا هنگام ایجاد هدف بودن را چک میکند .

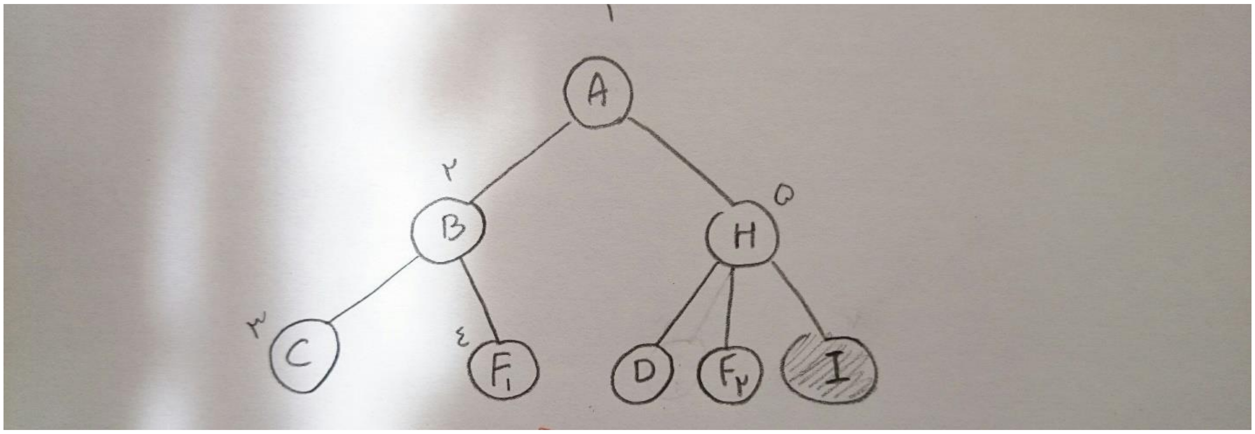
همچنین به ترتیب گره های A , B , H بسط داده می شوند :



پس مسیر پیدا شده خواهد بود : A , H , I

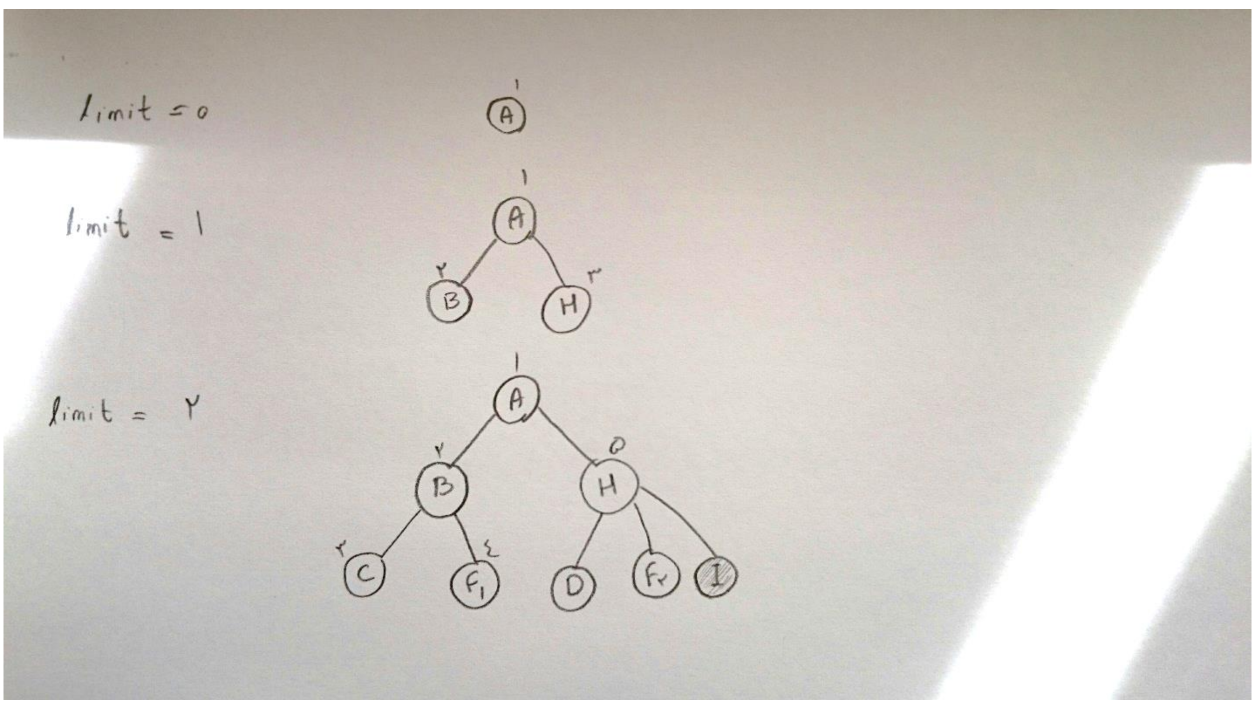
ب) در این حالت جست و جو در حلقه بی نهایت می افتد زیرا اول A را مشاهده میکند و بعد B را مشاهده میکند و دوباره چون درختی ست A را فرزند B میداند و به سراغ A میرود و این کار تا بی نهایت ادامه پیدا میکند

ج) با توجه به اینکه عمق محدود شده مشکل حلقه بی نهایت نیز رفع شده است . درخت گسترش داده شده مانند زیر است و ترتیب گسترش گره ها به صورت A , B , C , F۱ , H است. که به گره هدف I میرسد .



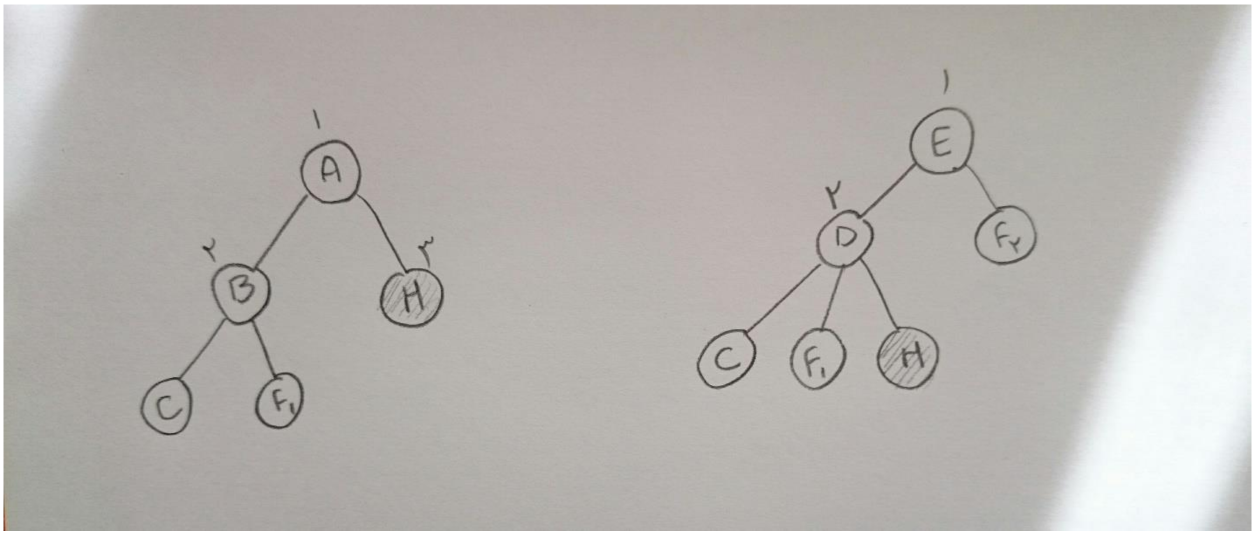
پس مسیر پیدا شده خواهد بود : A , H , I

د) در این روش باز هم گره هدف I **دیده میشود . ترتیب گسترش راس ها به صورت :** A , A , B , H , A , B , C, F_1 ,H **میباشد که با توجه به اینکه هنگام ایجاد هدف بودن را چک میکند وقتی به گسترش راس** H **میرسد گره** I **رویت میشود و کار به اتمام میرسد :**



پس مسیر پیدا شده خواهد بود : A , H , I

د) در این روش از سمت حالت اولیه A ابتدا گره های A , B گسترش داده میشوند همچنین از سمت E گره های E , D گسترش داده میشوند و هنگام گسترش H از سمت A این گره در سمت دیگر مشاهده میشود و جست و جو به پایان میرسد .



پس مسیر پیدا شده خواهد بود : A , H , D , E

تمرین سوم :

الف)

- IDA* **: دقیقا همانند الگوریتم افزایش تدریجی عمق است با این تفاوت که در هر مرحله به جای افزایش عمق ، f را افزایش میدهیم . این الگوریتم در حالیکه هزینه ها مقادیر حقیقی داشته باشند به مشکل برمیخورد .**
- RBFS **: در واقع همان جست و جوی اول بهترین است که به صورت عمقی یک مسیر را طی میکند و در هر مرحله هزینه بهترین مسیر جایگزین را نگه داری میکند . در صورتی که هزینه مسیر فعلی از هزینه یکی از مسیر های جایگزین بیشتر شود به عقب برگشته و مسیر مورد نظر را پیدا میکند. از مشکلات این روش تولید کردن مکرر برخی از گره هاست.**
- SMA* **: در این الگوریتم که همان** A* **است گره های تولید شده تا زمانی که حافظه جا داشته باشد نگه داری میشوند و از ان به بعد بدترین گره حذف میشود.**

ب) در ابتدا فرض کنید که خانه های جدول را به صورت زیر شماره گذاری کرده ایم :

۰	۱	۲	۳	۴
۵	۶	۷	۸	۹
۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴
۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹
۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴

این شماره گذاری بر اساس مختصات x , y هر خانه صورت گرفته است. حال سه تابع شهودی زیر را ارایه میکنیم :

بهترین : مجموع سطر و ستون باقی مانده تا خانه هدف

این تابع از رابطه زیر بدست می آید :

$$h(n) = 8 - (n\%5) - [\frac{n}{5}]$$

برای اثبات ، کافی ست اثبات کنیم سازگار است زیرا قابل قبول بودن نیز اثبات می شود :

باید اثبات کنیم $\longrightarrow$ $h(n) \le C(n,a,n') + h(n')$

* با توجه به مجاور بودن خانه ها و هزینه برابر ۱، همواره $C(n,a,n')$ برابر ۱ خواهد بود. پس:
* برای خانه مجاور باید عدد خانه را ۱± یا ۵± کنیم (از ۱- و ۵- صرف نظر می کنیم زیرا بدیهی می باشد).

$$\cancel{8} - (n\%5) - \lfloor n/5 \rfloor \le 1 + \cancel{8} - ((n+1)\%5) - \left\lfloor \frac{n+1}{5} \right\rfloor$$

$$\hookrightarrow -(\cancel{n\%5}) - \lfloor n/5 \rfloor \le \cancel{1} - (\cancel{n\%5}) \cancel{-1} - \left\lfloor \frac{n+1}{5} \right\rfloor$$

* با توجه به هم ردیف بودن خانه n و $n+1$ پس $\lfloor n/5 \rfloor = \left\lfloor \frac{n+1}{5} \right\rfloor$ می باشد

حال ۵+ را اثبات می کنیم:

$$\cancel{8} - (\cancel{n\%5}) - \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor \le 1 + \cancel{8} - ((n+\cancel{5})\%5) - \left\lfloor \frac{n+5}{5} \right\rfloor$$

$$\hookrightarrow -\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor \le \cancel{1} - \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor \cancel{-1} \Rightarrow \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor$$

پس تابع شهودی، سازگار است.

حالت میانی : فاصله اقلیدوسی تا هدف

این تابع از رابطه زیر بدست می آید :

فاصله طولی تا هدف را a و عرضی تا هدف را b مینامیم . پس خواهیم داشت :

$$h(n) = \sqrt{a^{۲} + b^{۲}}$$

بدیهی ست در این حالت a , b بر حسب n بدست خواهند آمد.همانند قبلی اثبات میکنیم که سازگار است :

$h(n) \le C(n, a, n') + h(n')$

* برای خانه‌های مجاور عقبی و بالایی به علت بدیهی بودن اثبات نمی‌کنیم ولی برای خانه جلویی (+۱) داریم:

چون یک خانه به جلو رفتیم پس b یکی کم شده:

$$\sqrt{a^2+b^2} \le 1+\sqrt{a^2+(b-1)^2} \Rightarrow \underbrace{\sqrt{a^2+b^2}-1}_{\text{همواره مثبت}} \le \sqrt{a^2+b^2+1-2b}$$

$$\xRightarrow{\text{به توان ۲}} \cancel{1}+\cancel{a^2}+\cancel{b^2}-2\sqrt{a^2+b^2} \le \cancel{a^2}+\cancel{b^2}+\cancel{1}-2b \Rightarrow \cancel{2}\sqrt{a^2+b^2} \ge \cancel{2}b$$

$$\xRightarrow{\text{توان ۲}} a^2+b^2 \ge b^2 \checkmark$$

حال برای یک خانه به پایین (+۵) اثبات می‌کنیم:

چون یکی به پایین رفته‌ایم a یکی کم شده:

$$\sqrt{a^2+b^2} \le 1+\sqrt{(a-1)^2+b^2} \Rightarrow \sqrt{a^2+b^2}-1 \le \sqrt{a^2+b^2+1-2a}$$

$$\xRightarrow{\text{توان ۲}} \cancel{a^2}+\cancel{b^2}+\cancel{1}-2\sqrt{a^2+b^2} \le \cancel{a^2}+\cancel{b^2}+\cancel{1}-2a \Rightarrow \cancel{2}a \le \cancel{2}\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\xRightarrow{\text{توان ۲}} a^2 \le a^2+b^2 \checkmark$$

پس سازگار است.

حالت بدترین : پیمودن فاصله قطری تا رسیدن به سطر و ستون آخر و بعد پیمودن فاصله مستقیم تا هدف

این تابع از رابطه زیر بدست می آید :

$$j \geq i \qquad h(n) = ۴ - (n\%5) + (n\%6)$$

$$i > j \qquad h(n) = ۱۰ - \left[\frac{n}{۵}\right] - (n\%6)$$

برای این رابطه نیز باید اثبات کنیم که سازگار است . که همانند بالا اثبات میشود!

ج)

تمرین چهارم :

الف) سازگار است در نتیجه قابل قبول نیز هست زیرا :

- چون h_i ها سازگارند خواهیم داشت :

$$h_i(n) \leqslant C(n, a, n') + h_i(n')$$

اگر تابع شهودی ما $\max\{h_1, \dots, h_k\}$ باشد ← اثبات می کنیم :

$$\underbrace{\max\{h_1(n), \dots, h_k(n)\}}_{h_l(n)} \leqslant C(n, a, n') + \underbrace{\max\{h_1(n'), \dots, h_k(n')\}}_{h_j(n')}$$

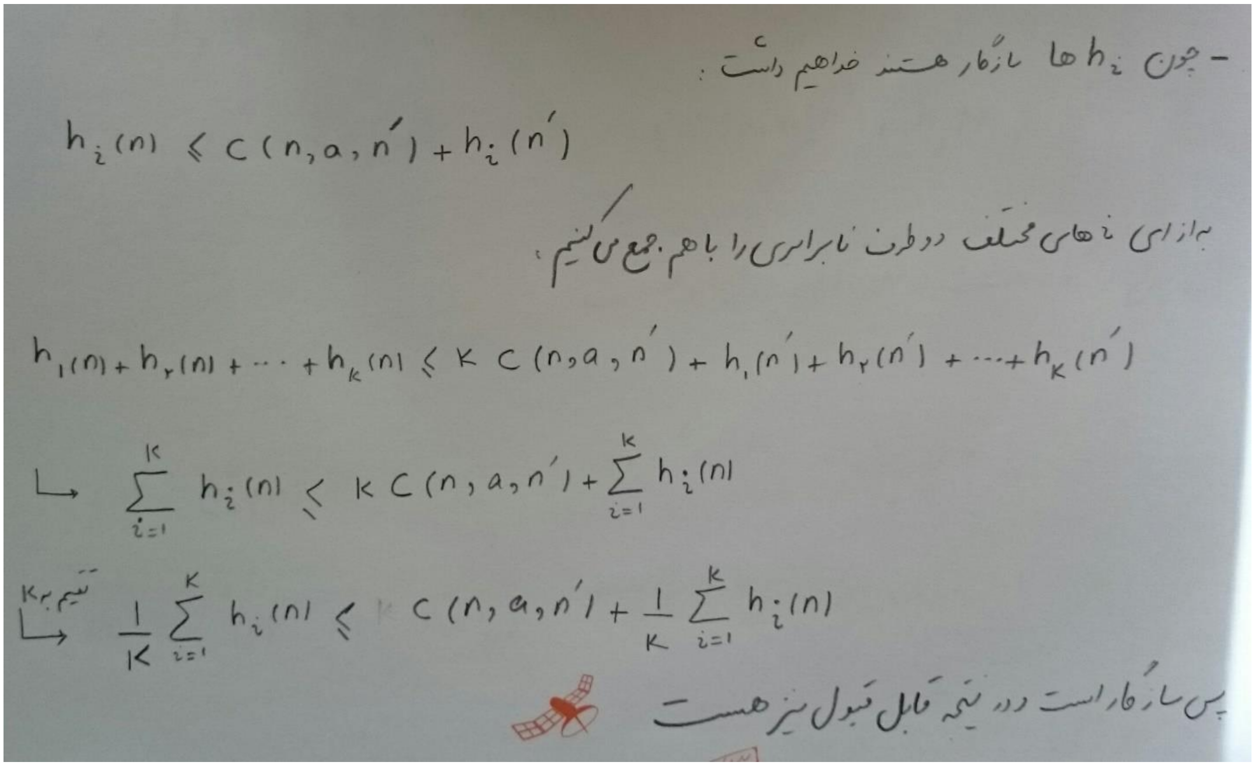
$$\xrightarrow{\text{می دانیم}} \quad h_l(n) \leqslant C(n, a, n') + h_l(n')$$

$$\xrightarrow{\text{از طرفی}} \quad h_j(n') > h_l(n') \implies h_l(n) \leqslant C(n, a, n') + h_j(n')$$

max هست

← پس سازگار هست در نتیجه قابل قبول نیز هست.

ب) سازگار هست در نتیجه قابل قبول نیز هست :


- چون h_i ها سازگار هستند خواهیم داشت :

$$h_i(n) \leq C(n, a, n') + h_i(n')$$

به ازای i های مختلف دو طرف نابرابری را با هم جمع می کنیم :

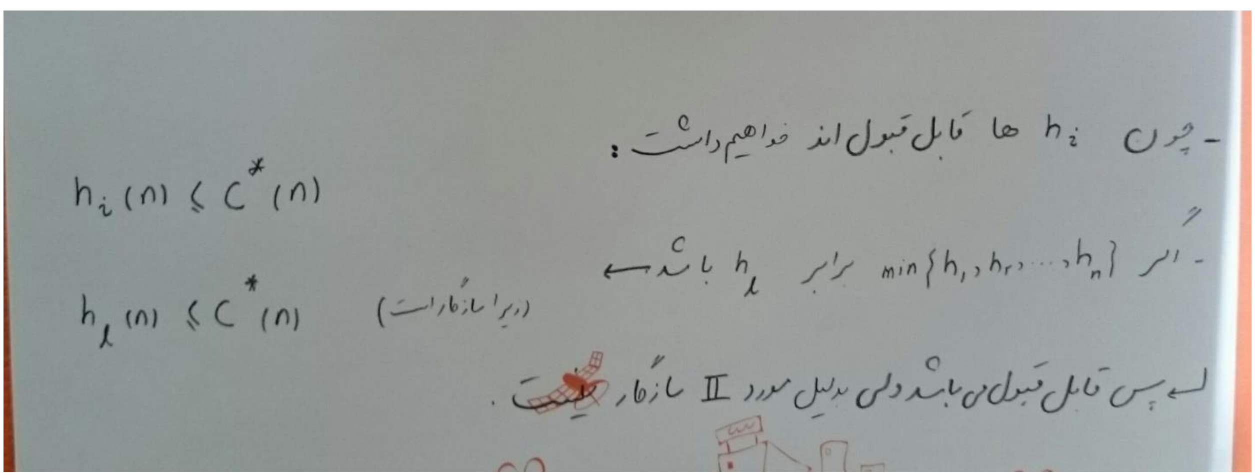
$$h_1(n) + h_2(n) + \cdots + h_k(n) \leq k\, C(n, a, n') + h_1(n') + h_2(n') + \cdots + h_k(n')$$

$$\hookrightarrow \sum_{i=1}^{k} h_i(n) \leq k\, C(n, a, n') + \sum_{i=1}^{k} h_i(n)$$

$$\xrightarrow{\text{تقسیم بر } k} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} h_i(n) \leq C(n, a, n') + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} h_i(n)$$

پس سازگار است و در نتیجه قابل قبول نیز هست

ج) قابل قبول هست ولی سازگار نیست :


- چون h_i ها قابل قبول اند خواهیم داشت :

$$h_i(n) \leq C^*(n)$$

- اگر $\min\{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ برابر h_l باشد ⟵

$h_l(n) \leq C^*(n)$ (زیرا سازگار است)

⟵ پس قابل قبول می باشد ولی بدلیل مورد II سازگار نیست .

تمرین پنجم :

الف) صحیح: استقرا میزنیم بر روی تعداد گام رسیدن به هدف از هر گره .

میدانیم برا گره هدف این موضوع برقرار است برای گره هایی که کوتاهترین مسیرشان با یک گام به هدف میرسد نیز برقرار است زیرا :

$$h(n) \leq c(n\ ,a\ ,n') + h(n')$$

در این حالت h(n′) برابر صفر است و در نتیجه قابل قبول بودن برای این دسته از گره ها اثبات میشود حال فرض میکنیم که قضیه برای گره های با کوتاهترین مسیر که k گام دارد درست باشد حال برای گره هایی که کوتاهترین مسیرشان با k+۱ گام است اثبات میکنیم :

$$h(n) \leq c(n, a, n') + h(n')$$

میدانیم h(n′) کوچکتر از c*(n′) است (طبق فرض استقرا) پس خواهیم داشت :

$$h(n) \leq c(n, a, n') + c^*(n') = c^*(n)$$

پس هر تابع سازگاری قابل قبول نیز هست .

ب) غلط است

ج) غلط است . بهینه نیز هست . (اثبات در اسلاید ها هست (اسلاید ۴۳) و در کلاس نیز انجام شده است)

د) غلط . نه بهینه است و نه کامل . فرض کنید راس مبدا مجاور دو راس باشد که یکی دقیقا نزدیک هدف است ولی مانعی باعث شده که به هدف راه نداشته باشد و به راس دیگری که بسیار از هدف دور است و مستقیم به آن راه دارد ، راه داشته باشد . ولی راس دیگر مجاور راس شروع فاصله مستقیم بیشتری تا هدف دارد و بعد مستقیم به هدف وصل است . در این صورت این الگوریتم راس اول را بسط میدهد و به مانع میخورد و مجبور است آن مانع را دور بزند و هزینه را افزایش میدهد(همچنین وقتی کامل نیست بهینه هم نیست زیرا یعنی وقتی جوابی وجود دارد ممکن است فاصله را بینهایت (یعنی مسیری پیدا نکند) برگرداند)

ه) درست است . کامل است زیرا تمام مسیر ها از مبدا را به ترتیب هزینه چک میکند و بهینه است زیرا هر گاه به راسی رسید که قبلا در f وجود دارد و اگر هزینه کمتر بود آن را به روز رسانی میکند.

د) بله کامل نیست . زیرا ممکن است جواب در عمقی بیشتر از محدوده عمق تعیین شده باشد