روش نیوتن برای حل دستگاههای غیرخطی:

دستگاه (۱) را بار دیگر بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

با فرض آنکه $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ، برای اختصار، دستگاه فوق را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\begin{cases} f_1(X) = 0 \\ f_2(X) = 0 \\ \vdots \\ f_n(X) = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

فرض کنید $X^{(k)}$ تقریبی از جواب دستگاه (۲) باشد. توابع $f_1, f_2, \dots, f_n$ را حول $X^{(k)}$ با بسط تا درجه ۱ به صورت زیر تقریب می‌زنیم:

$$\begin{cases} f_1(X) \simeq f_1(X^{(k)}) + \nabla f_1(X^{(k)}) (X - X^{(k)}) \\ f_2(X) \simeq f_2(X^{(k)}) + \nabla f_2(X^{(k)}) (X - X^{(k)}) \\ \vdots \\ f_n(X) \simeq f_n(X^{(k)}) + \nabla f_n(X^{(k)}) (X - X^{(k)}) \end{cases}$$

یادآوری:

$$\nabla h = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} \\ \frac{\partial h}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial h}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

به جای حل دستگاه (۲) دستگاه زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} f_1(X^{(k)}) + \nabla f_1(X^{(k)})^T (X - X^{(k)}) = 0 \\ f_2(X^{(k)}) + \nabla f_2(X^{(k)})^T (X - X^{(k)}) = 0 \\ \vdots \\ f_n(X^{(k)}) + \nabla f_n(X^{(k)})^T (X - X^{(k)}) = 0 \end{cases}$$

(۷)

ابتدا به فرمول تکراری زیر می‌رسیم:

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - \underbrace{\begin{bmatrix} \nabla F_1(X^{(k)})^T \\ \nabla F_2(X^{(k)})^T \\ \vdots \\ \nabla F_n(X^{(k)})^T \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس ژاکوبین}}^{-1} \begin{bmatrix} F_1(X^{(k)}) \\ F_2(X^{(k)}) \\ \vdots \\ F_n(X^{(k)}) \end{bmatrix} \qquad k=0,1,\dots$$

فرمول فوق قابل قیاس با فرمول نیوتن است که برای یافتن ریشهٔ معادله $f(x)=0$ ارائه شد.

ثابت می‌شود که اگر نقطهٔ شروع $X^{(0)}$ به اندازهٔ کافی به جواب دستگاه یعنی $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ نزدیک باشد، دنبالهٔ فوق به $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ همگرا خواهد شد.

مثال) دستگاه غیرخطی زیر را با روش نیوتن با سه تکرار و با نقطهٔ شروع $\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0.25 \end{pmatrix}$ حل کنید.

$$\begin{cases} (x_1-1)^2 - x_2 - 0.15 = 0 \\ x_1^2 + 4x_2^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

جواب:

$$F_1(x_1, x_2) = (x_1-1)^2 - x_2 - 0.15 = 0$$
$$F_2(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_2^2 - 4 = 0$$

$$\nabla F_1^T(x_1, x_2) = [2(x_1-1) \;,\; -1]$$
$$\nabla F_2^T(x_1, x_2) = [2x_1 \;,\; 8x_2]$$

$$\text{ماتریس ژاکوبین} = \begin{bmatrix} 2(x_1-1) & -1 \\ 2x_1 & 8x_2 \end{bmatrix}$$

پس دنبالهٔ تکرار به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2(x_1^{(k)}-1) & -1 \\ 2x_1^{(k)} & 8x_2^{(k)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) \\ F_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0.25 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.906250 \\ 0.312500 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.906250 \\ 0.312500 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1.8125 & -1 \\ 3.8125 & 2.5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.008789 \\ 0.024414 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.900691 \\ 0.311214 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.900691 \\ 0.311214 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1.801381 & -1.000000 \\ 3.801381 & 2.489700 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.000031 \\ 0.000048 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.900677 \\ 0.311219 \end{bmatrix}$$

نکته: همان طور که ملاحظه می‌شود در روش نیوتن لازم است معکوس ماتریس ژاکوبین محاسبه گردد که این امر هنگامی که تعداد معادلات دستگاه زیاد باشد، از نظر محاسباتی معمولاً به صرفه نیست. در این گونه موارد، بهتر است به جای محاسبه معکوس ماتریس ژاکوبین یک دستگاه معادلات خطی حل کنیم. بدین منظور، دستگاه زیر را با بردار مجهول $h = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}$ حل می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} \nabla f_1(X^{(k)})^T \\ \nabla f_2(X^{(k)})^T \\ \vdots \\ \nabla f_n(X^{(k)})^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1^{(k)} \\ h_2^{(k)} \\ \vdots \\ h_n^{(k)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f_1(X^{(k)}) \\ f_2(X^{(k)}) \\ \vdots \\ f_n(X^{(k)}) \end{bmatrix}$$

و سپس قرار می‌دهیم $X^{(k+1)} = X^{(k)} + h^{(k)}$.

مثال) دستگاه غیرخطی زیر را با روش نیوتن با یک تکرار و با نقطه شروع $\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.5 \\ 2.2 \end{pmatrix}$ حل کنید.

$$\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 = 5 \\ x_1^2 + x_2^2 = 25 \end{cases}$$

جواب:

$$\Rightarrow \begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 - 5 = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 25 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \nabla f_1(x_1,x_2)^T = \begin{bmatrix} 2x_1 & -2x_2 \end{bmatrix} \\ \nabla f_2(x_1,x_2)^T = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

ماتریس ژاکوبین $= \begin{bmatrix} 2x_1 & -2x_2 \\ 2x_1 & 2x_2 \end{bmatrix}$

در هر تکرار از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 2x_1^{(k)} & -2x_2^{(k)} \\ 2x_1^{(k)} & 2x_2^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1^{(k)} \\ h_2^{(k)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) \\ f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1^{(k)} \\ h_2^{(k)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.5 \\ 3.2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & -6.4 \\ 7 & 6.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1^{(0)} \\ h_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.99 \\ 2.51 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} h_1^{(0)} = 0.392857 \\ h_2^{(0)} = -0.0374998 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.5 \\ 3.2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.392857 \\ -0.0374998 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.892857 \\ 3.1625 \end{bmatrix}$$

" تمرینات مبحث دستگاههای غیرخطی "

سوال ۱) دستگاه غیرخطی زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} x_1^2 - 10x_1 + x_2^2 + 8 = 0 \\ x_1 x_2^2 + x_1 - 10x_2 + 8 = 0 \end{cases}$$

حل

معادلات را به صورت زیر بازنویسی کنید و محدوده جواب را به صورت $D = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : 0 \le x_1, x_2 \le 1.5 \right\}$ در نظر بگیرید نشان دهید شرایط قضیه نقطه ثابت برقرار است و سه تکرار از روش نقطه ثابت را انجام دهید.

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{x_1^2 + x_2^2 + 8}{10} = g_1(x_1, x_2) \\ x_2 = \dfrac{x_1 x_2^2 + x_1 + 8}{10} = g_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

سوال ۲) روش نیوتن را با نقطه شروع داده شده تا دو تکرار اجرا کنید.

الف) $\begin{cases} x^2 + 0.15 = 2x + y \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0.25 \end{pmatrix}$

ب) $\begin{cases} 5x_1^2 - x_2^2 = 0 \\ x_2 - 0.25(\sin x_1 + \cos x_2) = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$