به نام خدا

تمرین دوم گسسته

استاد سلیمان فلاح

محمدمهدی آقاجانی

تمرین شماره ۲ :

الف)

$$C(22\ ,\ 3\ ) = 1540$$

ب) مجموعه S را تعداد کل جواب های صحیح معادله در نظر می گیریم که بزرگتر مساوی صفر باشند و C_i را اینگونه درنظر می گیریم که عضو X_i از ۷ بیشتر باشد و از اصل شمول و عدم شمول استفاده می کنیم :

$$1540 - 4 * c(14{,}3) + 6 * c(6{,}3) - 0 = 1540 - 1456 + 120 = 204$$

پ)

مانند بالا عمل می کنیم با این تفاوت که اول به عنصر سوم و چهارم هر کدام ۳ تا اضافه می کنیم:

$$c(16{,}3) - c(10{,}7) - c(9{,}6) - c(11{,}8) - c(10{,}7) + 1 + c(5{,}3) + c(4{,}3) + c(4{,}3) + 1 + c(5{,}3) = 560 - 120 - 84 - 165 - 120 + 1 + 10 + 4 + 4 + 1 + 10 = 101$$

تمرین شماره ۳ :

چون فقط از حروف $n\ ,\ i\ ,\ o$ دو تا داریم شرط پس جفت های متشکل از این دو را در نظر می گیریم (مانند $ni\ ,\ in\ ,\ oi\ ,\ \ldots$) و این ها را شماره گذاری می کنیم و شرط C_i را اینگونه تعریف می کنیم که جفت i ام از این حروف دوبار در ترتیب حروف کلمات ظاهر شده باشد و مجموعه S را کل ترتیب های ممکن از این حروف کلمه در نظر می گیریم که برابر است با : $\frac{11!}{2!2!2!}$

حال جواب مساله از اصل شمول می شود :

$$\frac{11!}{2!\,2!\,2!} - 6 * \frac{9!}{2!\,2!} + 6 * \frac{7!}{2!} - 0$$

تمرین شماره ۵ :

فرض کنید می خواهیم ۳۱ توپ را درون ۷ ظرف بریزیم به طوری که تعداد توپ ها در هر ظرف از صفر تا ۹ می تواند تغییر کندحال ظرف ها را از چپ به راست به ارقام X متناظر می کنیم :

$$\begin{aligned} c(37\ ,6) - 7 * c(27{,}6) + c(7{,}2) * c(17{,}6) - c(7{,}3) * c(7{,}6) \\ = 2324784 - 7 * 296010 + 21 * 12376 - 35 * 7 \\ = 2314784 - 2072070 + 259896 - 245 = 502365 \end{aligned}$$

تمرین شماره ۱۱ :

تعداد حالت های نامطلوب را منهای تعداد حالات کل می کنیم :

تعداد حالات کل برابر است با : 6^8

و جواب مساله طبق اصل شمول و عدم شمول برابر است با :

$$6^8 - 6 * 5^8 + c(6{,}2) * 4^8 - c(6{,}3) * 3^8 + c(6{,}4) * 2^8 - c(6{,}5) * 1^8$$

تمرین شماره ۱۲ :

مانند مساله قبل عمل می کنیم :

$$9*10^8-3*8*9^8+3*7*8^8-6*7^8$$

تمرین شماره ۱۶ :

مجموعه S را ۸۴ روز سپری شده در نظر می گیریم و شرط C_i را تعریف می کنیم اگر فرد i ام را دیده باشد:

$$84-7*35+c(7,2)*16-c(7,3)*8+c(7,4)*4-c(7,5)*2+c(7,6)*1-0$$
$$=84-245+336-280+140-42+7=0$$

او هیچ روزی را تنها نبوده است .

صفحه ۵۳۴ :

تمرین شماره ۳ :

الف)

مجموعه S را کل حالت های کنار هم قرار گرفتن حروف در نظر می گیریم و شرط C_i را اینگونه در نظر می گیریم که جفت i ام در کنار هم باشند آنگاه اصل شمول و عدم شمول را می نویسیم :

$$\frac{14!}{2!\,2!\,2!\,2!\,2!}-5*\frac{13!}{2!\,2!\,2!\,2!}+c(5,2)*\frac{12!}{2!\,2!\,2!}-c(5,3)*\frac{11!}{2!\,2!}+c(5,4)*\frac{10!}{2!}-c(5,5)*9!$$

ب)

در ابتدا دو جفت حرف را به دلخواه انتخاب می کنیم که این کار را به $c(5,2)$ حالت می توان انجام داد حال باید مانند قبل مسآله را حل کنیم به طوریکه هیچ دو جفتی در کنار هم نباشند :

$$c(5,2)*(\frac{12!}{2!\,2!\,2!}-3*\frac{11!}{2!\,2!}+3*\frac{10!}{2!}-1*9!)$$

پ)

می دانیم :

$$L_m=S_m-C(m,m-1)*S_{m+1}+C(m+1,m-1)*S_{m+2}-\cdots$$

که با توجه به اینکه $m=3$ است پس :

$$L_3=C(5,3)*\frac{11!}{2!\,2!}-C(3,2)*C(5,4)*\frac{10!}{2!}+C(4\,,2\,)*C(5,5)*9!$$

تمرین شماره ۴ :

در ابتدا ۴ تا از ۷ عدد برد را انتخاب می کنیم به $C(7,4)$ روش . حال شرط C_i را اینگونه تعریف می کنیم که عضو i ام در برد نباشد در این صورت طبق اصل شمول و عدم شمول داریم :

$$4^{10}-4*3^{10}+c(4,2)*2^{10}-c(4,3)*1\text{^}10$$

برای قسمت دیگر سوال هم می توان به همین روش برای ۳ عضو برد و دو عضو برد و یک عضو برد محاسبه کرد و همه حالت ها را با هم جمع نمود .

تمرین شماره ۸ :

الف) از تعریف S , L , E مشخص است .

ب) E_{t-1} برابر است با تعداد اعضای از مجموعه اصلی که دقیقا $t-1$ شرط از t شرط را برآورده می کند . و

$$L_{t-1} = E_t + L_t$$

پ) می دانیم L_{t-1} برابر است با تعداد اعضای از S که حداقل $t-1$ شرط را برآورده می کند .حال می دانیم S_{t-1} در واقع تعداد اعضای از S را که t شرط را برآورده می کند را بیتر از یک مرتبه و $C(t,t-1)$ بار می شمرد پس :

$$L_{t-1} = S_{t-1} - C(t, t-1)S_t + S_t = S_{t-1} - C(t-1, t-2)S_T$$

ت)

$$L_m = L_{m+1} + E_m$$

ث) استقرا را روی m می بندیم و برای پابه استقرا فرض می کنیم که $m = t$ باشد و درستی پایه را در الف مشخص کردیم .برای فرض استقرا در نظر می گیریم که برای $m+1$ صحیح باشد حال اثبات می کنیم که برای m نیز درست است و برای این کار از $L_m = L_{m+1} + E_m$ استفاده می کنیم و حال تعریف E و L_m را می نویسیم و با هم جمع می کنیم و حکم نتیجه می شود

صفحه ۵۳۶ :

تمرین شماره ۴ :

تعداد کل جایگشتها برابر است با $7!$ و تعداد پریش های هفت تایی برابر است با :

$$7!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!}\right) = 1855$$

جواب مساله می شود : $5040-1855 = 3185$

تمرین شماره ۵ :

الف) تعداد توابعی که یک به یک هستند و نقاط ثابت ندارند برابر است با پریش هفت تایی که می شود : ۱۸۵۵ تا و جواب می شود :۳۱۸۵

ب) d_{32}

تمرین شماره ۸ :

الف) به هر یک از افراد یک شماره تخصیص می دهیم .برای نفر اول تمامی جایگشت های ممکن از ۴ نفر قابل احراست پس می شود $4!$ ولی نفر دوم از آنجایی که یک نفر نمی تواند همزمان با دو نفر مصاحبه شود برای مصاحبه کننده دوم هیچ یک ار افراد در زمانی که با مصاحبه کننده اول دارند مصاحبه می کنند نباید با نفر دوم مصاحبه کنند که می شود d_4 پس جواب برابر است با $d_4 * 4!$

ب)

تمرین شماره ۱۰ :

الف) تعداد کل حالت بیرون کشیدن مهره ها $n!$ است و و تعداد حالاتی که هیچ تطابقی روی ندهد d_n می باشد پس احتمال می شود

$$\frac{d_n}{n!} = (1 - 1 + \left(\frac{1}{2!}\right) - \left(\frac{1}{3!}\right) + \cdots + (-1^n) \left(\frac{1}{n!}\right))$$

ب)وقتی یک تطابق روی می دهد در واقع می توان آن مهره را حذف نمود و از شماره مابقی مهره های بعد از آن یک واحد کم کرد پس جواب می شود :

$$\frac{d_{n-1}}{n!}$$

پ)اول از اصلل متمم استفاده می کنیم: تعداد حالت هایی که حداقل یک تطابق روی دهد : $n! - \ d_n$

حال احتمال ی شود :

$$\frac{n! - d_n}{n!} = 1 - \frac{d_n}{n!}$$

ت)

$$\frac{d_{n-r}}{n!}$$

تمرین شماره ۱۱ :

الف) از اصل متمم استفاده می کنیم . تعداد کل حال ها می شو د $10!^2$پس جواب برابر است با $10!^2 - 1$

ب) $(d_{10})^2$

تمرین شماره ۱۲ :

الف) در ابتدا برای درس اول می توان دانش آموزان را بدون محدودیت روی صندلی ها نشاند که می شود $12!$ حال برای چینش ساعت دوم درس در واقع به ازای هر حالت نشستن دانش آموزان یک مساله پریش رخ می دهد پس جواب سوال می شود $12! * d_{12}$

ب)در ابتدا باید آن شش دانش آموز را انتخاب کنیم $c(12,6)$ حال در ساعت اول همه می توانند بدون محدودیت بنشینند که می شود$12!$ و در ساعت بعد آن شش دانش آموز باید سر جای خود بنشینند و بقیه هیچ یک نباید سر جایش باشد که یک مساله پریش ۶ تایی رخ می دهد که جواب سوال می شود :

$$c(12,6) * 12! * d_6$$

تمرین شماره ۱۳ :

در ابتدا این تساوی را به شکل زیر در می آوریم :

$$n! = c(n,n)d_0 + c(n,n-1)d_1 + \cdots + c(n,0)d_n$$

برای اینکه جایشگت های n شی را حساب کینم در واقع دو حالت می توانیم آن را بشماریم یکی همان روش متداول است که به ما جواب $n!$ را می دهد.حالت دوم این است که بر روی اینکه چه تعداد از اشیا سر جای خود هستند حالت بندی کنیم :

اگر همه اشیا سرجای خود باشند جواب d_0 می باشد که در جمله اول تساوی ظاهر شده .اگر $n-1$ شی سر جای خود باشند اول باید آن $n-1$ شی را انتخاب کنیم و بعد آن یک شی پریش یک تایی میشود که برابر صفر است .اگر قرار باشد $n-2$ شی سر جای خود باشند باید اول آنها را انتخاب کنیم و بعد آن دو شی باقی مانده در واقع تشکیل یک پریش دوتایی می دهند و برابر می شود با d_2 که در جمله سوم مشهود است و همین طور تا آخر ادامه می دهیم .

تمرین شماره ۱۴ :

الف) از اصل شمول و عدم شمول استفاده می کنیم و در واقع مجموعه S را مجموعه کل حالات جایگشت ها در نظر می گیریم و شرط C_i را اینگونه در نظر می گیریم که الگوی iام رخ دهد :

$$n! - (n-1) * (n-1)! + c(n-1\,, 2\,) * (n-2)! - c(n-1\,, 3) * (n-3)!$$

صفحه ۵۴۸ :

تمرین شماره ۲ :

چون اعداد شش رقمی و کوچکتر را می خواهد در واقع مساله به دنبال تعداد جواب های معادله زیر است :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 37$$

البته به شرطی که هیچ یک از آنها بزرگتر از ۹ نباشد که از اصل شمول و عدم شمول استفاده می کنیم :

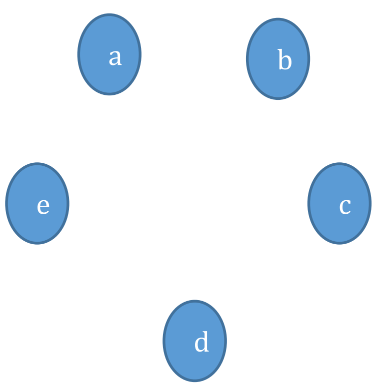
$$\frac{42!}{37!\,5!} - 6 * \frac{32!}{27!\,5!} + c(6,2) * \frac{22!}{17!\,5!} - c(6,3) * \frac{12!}{7!\,5!}$$

تمرین شماره ۵ :

؟

تمرین شماره ۶ :

الف) مساله را به دو حالت تقسیم می کنیم



حالت ۱ : اگر c و e همرنگ باشند

در این صورت برای انتخاب رنگ آنها k حالت وجود دارد و برای رنگ d، k-1 حالت وجود دارد .برای رنگ b، k-1 حالت وجود دارد و برای رنگ a، k-2حالت وجود دارد پس در این صورت جواب می شود :

$$k * (k-1) * (k-1) * (k-2)$$

حالت ۲ : اگر c و e رنگ های متفاوت داشته باشند

در این حالت برای رنگ c ، k حالت و برای رنگ e، k-1 حالت وجود دارد .در این صورت برای رنگ d، k-2 حالت وجود دارد

حال برای رنگb دوباره حالت بندی می کنیم

1) اگر رنگb با e یکسان باشد :یک حالت برای b وجود دارد و به طور قطع رنگ آن با c یکی نیست چون فرض کردیم c و e متفاوت هستند در این صورت برای a ، k-1 حالت وجود دارد و جواب این قسمت می شود :

$$k * (k-1) * (k-2) * (k-1)$$

2) اگر رنگ b با e متفاوت باشد : در این صورت برای b ، k-2 حالت وجود دارد و برای a نیز k-2حالت وجود دارد و جواب این قسمت می شود :

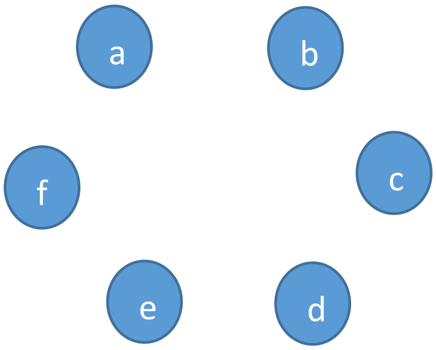
$$k * (k-1) * (k-2) * (k-2) * (k-2)$$

در نهایت جواب مساله برابر مجموع این حالت هاست :

$$k * (k-1)^2 * (k-2) + k * (k-1)^2 * (k-2) + k * (k-1) * (k-2)^3$$
$$= k * (k-1) * (k-2)(\,k-1 + k-1 + (k-2)^2)$$

ب) با یک رنگ و دو رنگ به وضوح نمی توان این کار را انجام داد ولی با ۳ رنگ می شود به این صورت که a را با رنگ ۱ و b را با رنگ ۲ و c را با رنگ ۱ و d را با رنگ ۲ و e را با رنگ ۳ رنگ آمیزی کرد

پ) برای این کار ابتدا مساله را به دو حالت تقسیم می کنیم



حالت ۱ : اگر راس های b,f رنگ متفاوتی داشته باشند .

در این صورت این حالت شبیه همان حالت قبلی با پنج دیوار می باشد و راس a می تواند k-2 رنگ اختیار کند:

$$k*(k-1)*(k-2)^2*(2k-2+(k-2)^2$$

حالت ۲ :اگر راس های b,f رنگ یکسانی داشته باشند :

در این صورت روی راس d حالت بندی می کنیم :

۱) اگر راس d همرنگ f,b باشد در این صورت برای راس های b , f , d ، k حالت وجود دارد و برای c و e و a هر کدام k-1 حالت وجود دارد
۲) اگر راس d همرنگ b,f نباشد در این صورت برای راس های b,f ، k حالت وجود دارد و برای d ،k-1 حالت وجود دارد و برای e,c ، k-2 حالت وجود دارد و برای a ، k-1 حالت وجود دارد

در نتیجه در کل داریم :

$$k*(k-1)*(k-2)^2*(2k-2+(k-2)^2)+k^3*(k-1)^3+k^2*(k-1)^2*(k-2)^2$$

از فرمول بالا معلوم است که برای حالت ۶ دیوار k می تواند ۲ باشد .

تمرین شماره ۸ :

با توجه به فرمول زیر :

$$E_m = S_m - C(m+1,1)*S_{m+1} + C(m+2,2)*S_{m+2} + \cdots$$

می توان شروط c_i را اینگونه فرض کرد مه در ظرف iام دقیقا r تا از اشیا ریخته شود و بعد با محاسبه s و جایگذاری آن در رابطه و خارج کردن عواملی که به i وابسته نیستند حکم را نتیجه گرفت

تمرین ۱۱ :

الف) c(n,m) * c(n-m , r-m)

ب)؟