به نام خدا

محمد مهدی آقاجانی

تمارین استقرا

استاد سلیمان فلاح

گسسته

صفحه ۲۱۹ :

سوال ۱)

پ)باید اثبات کنیم :

$$\sum_{1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n+1}{n+2}$$

$$\sum_{1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$
$$= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{\mathrm{n}+1}{\mathrm{n}+2}$$

سوال۲)

پ)

باید اثبات کنیم :

$$\sum_{1}^{n+1} i(i!) = (n+2)! - 1$$

$$\sum_{1}^{n+1} i(i!) = \sum_{1}^{n} i(i!) + (n+1)(n+1)!$$
$$= (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)!$$
$$= (n+2)! - 1$$

سوال ۳)

الف)

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 123 = 123 * \frac{124}{2}$$

ب)

سوال ۸)

الف)

$$\begin{aligned}(\cos x + i \sin x)^2 \\ &= \cos^2 x + i^2 \sin^2 x + 2 \cos x \ \ i \sin x \\ &= \cos^2 x - \sin^2 x + 2 \cos x \, i \sin x \\ &= \cos 2x + i \sin 2x\end{aligned}$$

ب)

باید ثابت کنیم

$$(\cos x + i \sin x\ )^{n+1} = \cos(n+1)x + i \sin(n+1)x$$

با استقرا ثابت کنیم :

$$\begin{aligned}(\cos x + i \sin x)^{n+1} \\ &= (\cos x + i \sin x)^n (\cos x + i \sin x)\end{aligned}$$

سوال ۱۶)

فرمول کلی :

$$(n^2+1)+(n^2+2)+\cdots+(n+1)^2=n^3+(n+1)^3$$

به عبارت دیگر :

$$\sum_{i=1}^{2n+1} n^2+i=n^3+(n+1)^3$$

از استقرا روی n استفاده می کنیم :

می دانیم :

$$\sum_{i=1}^{2k+1} k^2+i=k^3+(k+1)^3$$

حال :

$$\sum_{i=1}^{2k+3} (k+1)^2 + i = (k+1)^3 + (k+2)^3$$

$$= \sum_{1}^{2k+3} k^2 + 2k + 1 + i$$

$$= \sum_{1}^{2k+3} k^2 + i + \sum_{i=1}^{2k+3} 2k + 1$$

$$= k^3 + (k+1)^3 + (2k+1)(2k+3) + k^2$$
$$+ 2k + 2 + k^2 + 2k + 3$$
$$= (k+1)^3 + (k+2)^3$$

سوال ۱۸)

فرض کنید عناصر S را به دو زیر مجموعه 2^{n-1} تایی تقسیم کردیم

طبق فرض استقرا می توان آن ها را با حداکثر $(n-1)2^{n-1}$ حرکت مرتب کرد.

حال طبق لم داده شده حداکثر حرکات مورد نیاز $(n-1)2^n - 1$است که از عدد داده شده در سوال کمتر است.

سوال ۱۹)

الف) در صورت سوال $\sin x$ را ضرب و تقسیم می کنیم و با سینوس نصف کمان اثبات می کنیم .

ب)

فرض :

$$\cos x + \cos 3x + \cdots + \cos(2n-1)x = \frac{\sin 2nx}{2^n \sin x}$$

اثبات می کنیم :

$$\cos x + \cos 3x + \cdots + \cos(2n+1)x = \frac{\sin 2(n+1)x}{2^{n+1} \sin x}$$

$$\cos x + \cos 3x + \cdots + \cos(2n+1)x$$
$$= \frac{\sin 2nx}{2^n \sin x} + \cos(2n+1)x =$$

سوال ۲۰)

سوال ۲۴)

الف)

$$a_3 = 3\ , a_4 = 5, a_6 = 8, a_7 = 13$$

ب)

فرض داریم :

$$a_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$$

اثبات می کنیم :

$$a_{n+1} < \left(\frac{7}{4}\right)^{n+1}$$

$$a_n < \left(\frac{7}{4}\right)^{n} \ , a_{n-1} < \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1}$$

$$a_n + a_{n-1} < \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{7}{4}\right)$$

$$a_n + a_{n-1} < \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} \left(\frac{11}{4}\right) < \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} \left(\frac{49}{16}\right)$$

$$a_{n+1} < \left(\frac{7}{4}\right)^{n+1}$$

صفحه ۲۳۲

سوال ۱)

الف)

$$c_1 = 7 \, , c_n = c_{n-1} + 7$$

ب)

$$c_1 = 7 \, , c_n = 7 * c_{n-1}$$

پ)

$$c_1 = 10 \, , c_n = c_{n-1} + 3$$

ت)

$$c_1 = 3\,, c_n = c_{n-1} + 11$$

ج)

$$c_1 = 1\,, c_n = \ c_{n-1} + 2n - 1$$

سوال ۴)

الف)

فرض داریم :

$$!\,(p_1 || p_2 || \dots || p_n) \Leftrightarrow \,!\,p_1 \&\& !\,p_2 \dots \&\& !\,p_n$$

اثبات می کنیم :

$$!\,(p_1 || p_2 || \dots || p_{n+1}) \Leftrightarrow \,!\,p_1 \&\& !\,p_2 \dots \&\& !\,p_{n+1}$$

جمله اول و دوم را یک گزاره می گیریم :

$$!\,(p_1 || p_2 || \dots || p_{n+1}) \\ \Leftrightarrow \,!\,(p_1 || p_2) \&\& !\,p_3 \&\& !\,p_4 \&\& \dots \&\& !\,p_{n+1}$$

طبق استقرای قوی :

$$!\,(p_1 || p_2) \&\& !\,p_3 \&\& !\,p_4 \&\& \dots \&\& !\,p_{n+1} \\ \Leftrightarrow \,!\,p_1 \&\& !\,p_2 \dots \&\& !\,p_{n+1}$$

سوال ۸)

الف)

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + x_{n+1}$$

ب)

اعداد x_1 تا x_{r-1} را یک عدد در نظر می گیریم.و عدد x_r یک عدد . در این صورت طبق فرض سوال داریم :

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_r) + (x_{r+1} + \cdots + x_n)$$
$$= (x_1 + \cdots + x_{r-1}) + (x_r + \cdots + x_n)$$

و همین طور تک تک اعضای پرانتز سمت چپ را به سمت راست می فرستیم .

سوال ۱۰)

طبق فرض استقرا داریم :

$$|x_1 + \ x_2 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$$

حال شروع به اثبات می کنیم :

$$|x_1 + \ x_2 + \cdots + x_{n+1}|$$
$$\leq \ |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n + x_{n+1}|$$
$$\leq \ |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_{n+1}|$$

سوال ۱۲)

از استقرای قوی استفاده می کنیم : طبق فرض داریم :

$$0 \leq \ a_n \leq 1$$

حال داریم :

$$a_{n+1} = \frac{a_n + (n-1)a_{n-1}}{n}$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{n} + \frac{n-1}{n} a_{n-1}$$

$$0 \le \frac{a_n}{n} \le \frac{1}{n} \ , 0 \le \frac{n-1}{n} a_{n-1} \le \frac{n-1}{n}$$

جمع دو طرف رابطه

سوال ۱۴)

طبق فرض داریم :

$$\sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$$

حال اثبات می کنیم :

$$\sum_{i=0}^{n+1} F_i = F_{n+1} + \sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+1} + F_{n+2} - 1$$
$$= F_{n+3} - 1$$

صفحه ۲۶۸ :

سوال ۴)

الف)

طبق فرض داریم

$$5 | (n^5 - n)$$

حال اثبات می کنیم :

$$5|\ ((n+1)^5 - n - 1)$$

$$5|($$

سوال ۶)

فرمولی را برای آن حدس می زنیم :

$$s_n = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

حال اثبات می کنیم :

$$s_{n+1} = 1 - \frac{1}{(n+2)!}$$

$$s_{n+1} = \boldsymbol{s_n + \frac{n+1}{(n+2)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!} + \frac{n+1}{(n+2)!}}$$

$$\boldsymbol{= 1 - \frac{1}{(n+2)!}}$$

سوال ۹)

طبق فرض استقرا داریم :

$$\boldsymbol{3|\ 2^{2n+1} + 1}$$

حال اثبات می کنیم :

$$\boldsymbol{2^{2n+3} + 1 = 4 * 2^{2n+1} + 1}$$

می دانیم 2^{2n+1} به پیمانه ۳ برابر دو بوده (طبق فرض) . پس عبارت بالا به پیمانه ۳ برابر ۹ است یعنی به ۳ بخش پذیر است .