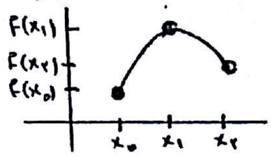
«بسمه تعالی»

«جزوه درس محاسبات عددی» استاد درس: دکتر هوشمند

«مبحث چهارم: درونیابی»

فرض کنید مقدار تابع f را در نقاط متمایز $x_0, x_1, \dots, x_n$ داریم:

نقطه	x_0	x_1	$\dots$	x_n
مقدار تابع	$f(x_0)$	$f(x_1)$		$f(x_n)$



می‌خواهیم مقدار تابع را در نقطه $x \neq x_0, \dots, x_n$ تقریب بزنیم.

درصورتی که x در فواصل بین نقاط $x_0, \dots, x_n$ باشد، این امر را درونیابی و درصورتی که x خارج از فواصل بین نقاط $x_0, \dots, x_n$ باشد، به این امر، برونیابی می‌گوییم.

پس هدف، تعیین تابع $q(x)$ است به طوری که به ازای $i=0,1,\dots,n$ ، $\underbrace{q(x_i)=f(x_i)}_{\text{شرط درونیابی}}$ داشته باشیم و به ازای سایر نقاط $x \neq x_0, \dots, x_n$ ، $q(x)$ تقریب خوبی برای $f(x)$ باشد.

چند کاربرد از درونیابی:

① فرض کنید ضابطه تابع $f(x)$ معلوم باشد. اما فرمول آن آنقدر پیچیده باشد که مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری از آن دشوار باشد. در این صورت، می‌توانیم نقاط $x_0, x_1, \dots, x_n$ را انتخاب کنیم و تابع $f(x)$ را با $q(x)$ تقریب بزنیم به طوری که به ازای $i=0,\dots,n$ ، $q(x_i)=f(x_i)$. پس به جای کارکردن با تابع $f(x)$ با تابع $q(x)$ کار کنیم.

② فرض کنید ضابطه تابع $f(x)$ معلوم نباشد و فقط مقدار تابع را در چند نقطه $x_0, x_1, \dots, x_n$ داشته باشیم و بخواهیم مقدار تقریبی تابع را در سایر نقاط حساب کنیم. به عنوان مثال، مسئله زیر را در نظر بگیرید:

موشکی از سطح زمین به طرف بالا پرتاب می‌گردد. جدول زیر سرعت موشک را برحسب مایل بر ثانیه در چند زمان مختلف نشان می‌دهد.

زمان (ثانیه)	۰	۶۰	۱۲۰	۱۸۰	۲۴۰	۳۰۰
سرعت (مایل بر ثانیه)	۰	۰/۰۸۲۴	۰/۲۷۴۷	۰/۶۵۰۲	۱/۳۸۵۱	۳/۲۲۲۹

درصورتی که رابطه سرعت و زمان در دست نباشد، چگونه می‌توان سرعت موشک را در $t=140$ تقریب زد؟

در این درس، ما روی درونیابی به کمک چندجمله‌ای ها تمرکز می‌شویم.

پس فرض کنید مقدار تابع f در $n+1$ نقطه متمایز $x_0, x_1, \dots, x_n$ به صورت زیر داده شده است:

نقطه	x_0	x_1	$\dots$	x_n
مقدار تابع	$F(x_0)$	$F(x_1)$	$\dots$	$F(x_n)$

می‌خواهیم چندجمله‌ای $P_n(x)$ به صورت

$$P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$$

را به گونه‌ای بیابیم که شرط زیر برقرار باشد:

$$P_n(x_i)=F(x_i) \qquad \forall\, i=0,1,2,\dots,n$$

$P_n(x)$ را چندجمله‌ای درونیاب می‌گوییم که حداکثر از درجه n است.

وجود و یکتایی چندجمله‌ای درونیاب:

قضیه: $n+1$ نقطه متمایز $x_0,x_1,\dots,x_n$ را در نظر بگیرید و فرض کنید مقدار f در این نقاط معلوم باشد. می‌خواهیم چندجمله‌ای درونیاب $P_n(x)=a_0+a_1x+\dots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$ را متناظر با این نقاط بیابیم.

الف) $P_n(x)$ حتماً وجود دارد. ب) $P_n(x)$ منحصر به فرد است.

اثبات قسمت الف) باید ضرایب $a_0,a_1,\dots,a_n$ را به گونه‌ای بیابیم که به ازای هر $i=0,\dots,n$ داشته باشیم $P_n(x_i)=F(x_i)$

$$a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\dots+a_{n-1}x_0^{n-1}+a_nx_0^n=F(x_0)$$

$$a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+\dots+a_{n-1}x_1^{n-1}+a_nx_1^n=F(x_1)$$

$$\vdots$$

$$a_0+a_1x_n+a_2x_n^2+\dots+a_{n-1}x_n^{n-1}+a_nx_n^n=F(x_n)$$

برای همه معادلات دستگاه

صورت ماتریسی معادلات فوق $\Longrightarrow$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^{n-1} & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ \vdots & & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(x_0) \\ F(x_1) \\ \vdots \\ F(x_n) \end{bmatrix}$$

ضمناً به این ماتریس، ماتریس واندرموند می‌گوییم:

با توجه به تمایز بودن x_i ها به سادگی می توان نشان داد که دترمینان ماتریس واندرموند مخالف صفر است، لذا ماتریس واندرموند وارون پذیر است و دستگاه صفحه قبل جواب منحصر به فرد دارد.

قسمت ب را می توان به طریق زیر ثابت کرد. فرض کنید چند جمله ای $P_n(x)$ منحصر به فرد نباشد و چند جمله ای $q_n(x)=b_0+b_1x+\dots+b_nx^n$ یک چند جمله ای درونیاب دیگر باشد.

تعریف می کنیم $h(x)=P_n(x)-q_n(x)$.

چون $P_n(x)$ و $q_n(x)$ حداکثر از درجه n هستند پس $h(x)$ نیز یک چند جمله ای با درجه حداکثر n است.

از طرفی داریم:
$$h(x_i)=0 \qquad \forall i=0,\dots,n$$

رابطه فوق دلالت می کند که $h(x)$ دارای $n+1$ ریشه است در حالی که چنین چیزی ممکن نیست، چون $h(x)$ یک چند جمله ای با درجه حداکثر n است، حداکثر n ریشه می تواند داشته باشد پس فرض خلف باطل است و داریم $P_n(x)=q_n(x)$.

خطای چند جمله ای درونیاب

نشان دهنده مجموعه توابعی است که مشتق تا مرتبه $(n+1)$ام آنها در بازه $[a,b]$ پیوسته است.

قضیه: اگر چند جمله ای $P_n(x)$ تابع $f\in C^{n+1}[a,b]$ را در نقاط $x_i\in[a,b]$ $(i=0,1,\dots,n)$ درونیابی کند، آنگاه به ازای هر $x\in[a,b]$، خطای درونیابی برابر است با:

$$\boxed{E(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c_x)}$$

که c_x نقطه ای است در بازه شامل نقاط x_i و x.

اثبات) فرض کنید $x\neq x_i$ (به ازای هر $i=0,\dots,n$)، برای هر $t\in[a,b]$ تعریف کنید:

$$g(t)=f(t)-P_n(t)-\left[f(x)-P_n(x)\right]\frac{(t-x_0)(t-x_1)\cdots(t-x_n)}{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}$$

داریم $g(x_i)=0$ (به ازای هر $i=0,1,\dots,n$) همچنین داریم $g(x)=0$ پس $g(t)$ در $n+2$ نقطه صفر می شود پس طبق قضیه رول، c_x در بازه شامل نقاط x_i و x وجود دارد به طوری که $g^{(n+1)}(c_x)=0$ و حکم به سادگی نتیجه می شود.

برای جزئیات بیشتر، به صفحه ۹۸ کتاب دکتر نسیجانی مراجعه کنید.

قبلاً نشان دادیم که برای محاسبهٔ چندجمله‌ای درونیاب می‌توان از دستگاهی که ماتریس ضرایب آن، ماتریس واندرموند است، استفاده کرد. (اثبات قسمت الف قضیه صفحه ۲ را ببینید) اما این روش از نظر محاسباتی معقول به صرفه نیست. لذا در ادامه، دو روش دیگر (روش درونیابی لاگرانژ و روش درونیابی نیوتن) را شرح می‌دهیم. دقت کنید که چون چندجمله‌ای درونیاب $P_n(x)$ منحصر به فرد است، نتیجهٔ همهٔ روشها یکسان است و تفاوت آنها در حجم محاسباتشان است.

روش درونیابی لاگرانژ

$n+1$ نقطهٔ متمایز $x_0, x_1, \dots, x_n$ را در نظر بگیرید و فرض کنید مقدار f در این نقاط معلوم باشد. برای یافتن چندجمله‌ای درونیاب $P_n(x)$، چندجمله‌ای‌های لاگرانژ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} \qquad \forall\, i=0,1,\dots,n$$

به ازای هر i، $L_i(x)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ n است و واضح است که

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases} \qquad \forall\, i,j=0,1,\dots,n$$

پس از تشکیل چندجمله‌ای‌های لاگرانژ، چندجمله‌ای درونیاب به صورت زیر خواهد بود:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)$$

واضح است که $P_n(x)$ یک چندجمله‌ای با درجهٔ حداکثر n است که برای آن شرط $P_n(x_i)=f(x_i)$ به ازای $i=0,1,\dots,n$ برقرار است.

مثال) مقادیر تابع f به صورت جدول زیر داده شده است. چندجمله‌ای درونیاب این تابع را به دست آورده و به کمک آن $f(7)$ را تقریب بزنید.

	x_0	x_1	x_2	x_3
x_i	۱	۲	۴	۸
$f(x_i)$	۱	۳	۷	۱۱

جواب) چند جمله‌ای های لاگرانژ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}=\frac{(x-2)(x-4)(x-8)}{(1-2)(1-4)(1-8)}=\frac{(x-2)(x-4)(x-8)}{-21}$$

$$L_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}=\frac{(x-1)(x-4)(x-8)}{(2-1)(2-4)(2-8)}=\frac{(x-1)(x-4)(x-8)}{12}$$

$$L_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}=\frac{(x-1)(x-2)(x-8)}{(4-1)(4-2)(4-8)}=\frac{(x-1)(x-2)(x-8)}{-24}$$

$$L_3(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(8-1)(8-2)(8-4)}=\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{168}$$

بنابراین

$$P_3(x)=\sum_{i=0}^{3} f(x_i)L_i(x)=L_0(x)+3L_1(x)+7L_2(x)+11L_3(x)$$

$$\Rightarrow \quad P_3(7)=10.185714$$

حال) چند جمله‌ای $P_2(x)$ از درجه ۲ را چنان بیابید که مقادیرش در سه نقطه ۰ و $\frac{1}{6}$ و $\frac{1}{2}$ با مقادیر تابع $f(x)=\sin\pi x$ در این نقاط برابر باشد. اگر قرار دهیم $E(x)=P_2(x)-f(x)$ کران بالایی برای خطای $E(x)$ به دست آورید.

	x_0	x_1	x_2
x_i	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
$f(x_i)$	0	$\frac{1}{2}$	1

جواب)

چند جمله‌ای های لاگرانژ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$L_0(x)=\frac{(x-\frac{1}{6})(x-\frac{1}{2})}{(0-\frac{1}{6})(0-\frac{1}{2})}=12x^2-8x+1$$

$$L_1(x)=\frac{(x-0)(x-\frac{1}{2})}{(\frac{1}{6}-0)(\frac{1}{6}-\frac{1}{2})}=-18x^2+9x$$

$$L_2(x)=\frac{(x-0)(x-\frac{1}{6})}{(\frac{1}{2}-0)(\frac{1}{2}-\frac{1}{6})}=6x^2-x$$

$$P_2(x)=0\,L_0(x)+\frac{1}{2}L_1(x)+L_2(x)=-3x^2+\frac{7}{2}x$$

$$E(x)=\frac{(x-0)(x-\frac{1}{6})(x-\frac{1}{2})}{3!}f'''(c_x) \qquad \text{که } c_x\in[0,\tfrac{1}{2}]$$

$f(x)=\sin\pi x \qquad f'(x)=\pi\cos\pi x \qquad f''(x)=-\pi^2\sin\pi x \qquad f'''(x)=-\pi^3\cos\pi x$

$$|E(x)|=\frac{|x(x-\frac{1}{6})(x-\frac{1}{2})|}{6}\left|-\pi^3\cos(\pi c_x)\right|\leqslant\frac{\pi^3}{6}\max_{0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}}\left|x(x-\tfrac{1}{6})(x-\tfrac{1}{2})\right|$$

قرار می‌دهیم $g(x)=x(x-\frac{1}{6})(x-\frac{1}{2})$ پس

$$g(x)=x^3-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{12}x$$

$$g'(x)=3x^2-\frac{4}{3}x+\frac{1}{12}=0 \Rightarrow \begin{cases}\alpha_1=0.36920841 & g(\alpha_1)=-0.00978041\\ \alpha_2=0.07523603 & g(\alpha_2)=0.0029219\end{cases}$$

$$\Rightarrow \max\left|x(x-\tfrac{1}{6})(x-\tfrac{1}{2})\right|\leqslant 0.01$$

$$\Rightarrow |E(x)|\leqslant\frac{\pi^3}{6}\times 0.01=\frac{\pi^3}{600}$$

مشکلات روش درون‌یابی لاگرانژ:

① محاسبهٔ چند جمله‌ای های $L_i(x)$ سخت است.

② از روی درجهٔ چند جمله‌ای های $L_i(x)$ نمی‌توان به درجهٔ چند جمله‌ای درون‌یاب پی برد.

③ اگر یک نقطه به مجموعهٔ نقاط $(x_0,f(x_0)),\dots,(x_n,f(x_n))$ اضافه شود، محاسبات قبلی دیگر قابل استفاده نیست و باید همهٔ محاسبات را مجدداً از ابتدا انجام داد.

بررسی چند مثال اثباتی:

مثال ۱) $n+1$ نقطهٔ $(x_0,f(x_0)),(x_1,f(x_1)),\dots,(x_n,f(x_n))$ مفروضند. اگر تابع f یک چند جمله‌ای از درجهٔ k باشد، $k\leqslant n$، آنگاه نشان دهید چند جمله‌ای درون‌یاب $P_n(x)$ با تابع $f(x)$ برابر است.

جواب: با توجه به فرمول خطا می‌توان نوشت:

$$E(x)=f(x)-P_n(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c_x)$$

اما چون f چند جمله‌ای درجهٔ k است، $k\leqslant n$ پس به ازای هر x داریم $f^{(n+1)}(x)=0$ پس

$$E(x)=0 \Rightarrow \boxed{P_n(x)=f(x)}$$

مثال۲) نشان دهید $\boxed{\sum_{i=0}^{n} L_i(x) = 1}$ سپس این را به خاطر بسپارید.

جواب) تعریف می‌کنیم $F(x)=1$ پس به ازای نقاط $x_0, x_1, \dots, x_n$ داریم

$$F(x_i)=1 \qquad \forall\, i=0,1,\dots,n$$

چون F یک چندجمله‌ای از درجه صفر است پس چندجمله‌ای درونیاب آن با خودش برابر است و داریم:

$$P_n(x) = F(x) = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n} F(x_i)\, L_i(x) = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n} L_i(x) = 1$$

Scanned by CamScanner

روش درونیابی نیوتن:

قبل از شرح این روش، لازم است تفاضلات تقسیم شده نیوتن را معرفی کنیم. بدین منظور n+1 نقطه $x_n, \dots, x_1, x_0$ را در نظر بگیرید و فرض کنید مقدار تابع f در این نقاط معلوم باشد:

تفاضلات تقسیم شده مرتبهٔ صفر:

$$F[x_i] = F(x_i)$$

تفاضلات تقسیم شده مرتبهٔ اول:

$$F[x_i, x_j] = \frac{F[x_j] - F[x_i]}{x_j - x_i}$$

تفاضلات تقسیم شده مرتبهٔ دوم:

$$F[x_i, x_j, x_k] = \frac{F[x_j, x_k] - F[x_i, x_j]}{x_k - x_i}$$

تفاضلات تقسیم شده مرتبهٔ nام:

$$F[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - F[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_{n-1}}$$

در روش درونیابی نیوتن برای تعیین چندجمله‌ای درونیاب $P_n(x)$ ابتدا جدول تفاضلات تقسیم شده را تشکیل می‌دهیم. این جدول برای $n=3$ و نقاط x_3, x_2, x_1, x_0 در ادامه آمده است:

x_i	$f(x_i)$ تفاضلات مرتبهٔ صفر	تفاضلات تقسیم شده مرتبه اول	تفاضلات تقسیم شده مرتبه دوم	تفاضلات تقسیم شده مرتبه سوم
x_0	$f(x_0)$			
		$f[x_0,x_1]=\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$		
x_1	$f(x_1)$		$f[x_0,x_1,x_2]=\dfrac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_1}$	
		$f[x_1,x_2]=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$
x_2	$f(x_2)$		$f[x_1,x_2,x_3]=\dfrac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$	
		$f[x_2,x_3]=\dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$		
x_3	$f(x_3)$			

برای جدول فوق، چندجمله‌ای درونیاب $P_3(x)$ به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$P_3(x)=f(x_0)+(x-x_0)f[x_0,x_1]+(x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2]$$
$$+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)f[x_0,x_1,x_2,x_3]$$

در حالت کلی، چندجمله‌ای درونیاب $P_n(x)$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P_n(x)=f(x_0)+(x-x_0)f[x_0,x_1]+(x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2]$$
$$+\cdots+(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})f[x_0,x_1,\ldots,x_n]$$

مثال) با فرض آن که

$\log 5=0.69897$ $\log 6=0.77815$ $\log 8=0.90309$ $\log 9=0.95424$

با استفاده از روش نیوتن چندجمله‌ای درونیاب را بیابید و بر اساس آن $\log 7$ را تقریب بزنید و کران بالایی برای خطا به دست آورید.

جواب ب) جدول تفاضلات تقسیم شده را بصورت زیر تشکیل میدهیم:

x_i	$f(x_i)$	تفاضلات مرتبه اول	تفاضلات مرتبه دوم	تفاضلات مرتبه سوم
$x_0=5$	0.69897			
		$\frac{0.77815-0.69897}{1}=0.07918$		
$x_1=6$	0.77815		$\frac{0.06247-0.07918}{8-5}=-0.00557$	
		$\frac{0.90309-0.77815}{2}=0.06247$		$\frac{-0.00377+0.00557}{9-5}=0.00045$
$x_2=8$	0.90309		$\frac{0.05115-0.06247}{9-6}=-0.00377$	
		$\frac{0.95424-0.90309}{1}=0.05115$		
$x_3=9$	0.95424			

$$P_3(x)=0.69897+(x-5)(0.07918)+(x-5)(x-6)(-0.00557)+(x-5)(x-6)(x-8)(0.00045)$$

$$\Rightarrow \log 7 \simeq P_3(7)=0.84529$$

با توجه به فرمول خطا داریم:

$$E(7)=\frac{(7-5)(7-6)(7-8)(7-9)}{4!}f^{(4)}(c_x) \qquad c_x\in[5,9]$$

$$f(x)=\log x=\frac{\ln x}{\ln 10} \qquad f'(x)=\frac{1}{(\ln 10)x} \qquad f''(x)=\frac{-1}{(\ln 10)x^2}$$

$$f'''(x)=\frac{2}{(\ln 10)x^3} \qquad f^{(4)}(x)=\frac{-6}{(\ln 10)x^4}$$

$$\Rightarrow E(7)\leqslant(0.144429)\max_{5\leq x\leq 9}\frac{1}{x^4}=\underbrace{0.000069486}_{\text{کران بالای خطا}}$$

اما اگر $\log 7$ را با ماشین حساب محاسبه کنیم و تا ۵ رقم اعشار گرد کنیم مقدار واقعی خطا تقریبا برابر است با:

$$E(7)=\log 7-P_3(7)=0.84510-0.84529=-0.00019$$

بررسی چند نکته:

نکته ۱) قبلاً گفتیم که یکی از مشکلات روش لاگرانژ این است که اگر یک نقطه به مجموعه نقاط $(x_0,f(x_0)),\dots,(x_n,f(x_n))$ اضافه شود، محاسبات قبلی دیگر قابل استفاده نیست و باید همه محاسبات را مجدداً از ابتدا انجام داد اما در مورد روش نیوتن چنین نیست و چنانچه نقاط جدیدی اضافه شوند، محاسبات قبلی قابل استفاده‌اند. در این خصوص به مثال زیر توجه کنید:

مثال) $P_2(x)=x^2+x+2$ چندجمله‌ای درونیاب متناظر با نقاط جدول زیر است:

x_i	$f(x_i)$	مرتبهٔ اول	مرتبهٔ دوم
-2	4		
0	2	-1	
2	8	3	1

دو نقطه جدید $(-1,-1)$ و $(1,1)$ را به مجموعه نقاط بیافزایید و چندجمله‌ای درونیاب را محاسبه کنید.

جواب: محاسبات جدول فوق همچنان قابل استفاده‌اند و تنها کافی است نقاط جدید را به انتهای جدول اضافه کنیم.
در جدول زیر خطوط ---- مرز محاسبات قبلی و محاسبات جدید را نشان می‌دهند.

x_i	$f(x_i)$	مرتبهٔ اول	مرتبهٔ دوم	مرتبهٔ سوم	مرتبهٔ چهارم
-2	4				
0	2	-1			
2	8	3	1		
-1	-1	3	0	-1	
1	1	1	2	2	1

لذا، می‌توان گفت:

$$P_4(x)=P_2(x)+(x+2)(x)(x-2)(-1)+(x+2)(x)(x-2)(x+1)(1)$$

نکته ۲) اگر همهٔ درایه‌های ستون kام جدول تفاضلات تقسیم شده نیوتن، یک عدد ثابت و ناصفر باشند، آنگاه چندجمله‌ای درونیاب از درجه k می‌باشد.

نکته ۱۳) با استفاده از استقرا می‌توان نشان داد:

$$f[x_0,x_1,\dots,x_n]=\sum_{i=0}^{n}\frac{f(x_i)}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(x_i-x_j)} \qquad (1)$$

این نکته را به خاطر بسپارید

رابطه‌ی فوق دلالت دارد که:

ترتیب قرار گرفتن نقاط در تفاضلات تقسیم شده اهمیتی ندارد. به عنوان مثال داریم:

$$f[x_0,x_1]=f[x_1,x_0]$$

$$f[x_0,x_1,x_2]=f[x_1,x_0,x_2]=f[x_1,x_2,x_0]=f[x_2,x_0,x_1]=f[x_2,x_1,x_0]=f[x_0,x_2,x_1]$$

و در حالت کلی می‌توان گفت:

$$f[x_0,x_1,\dots,x_k]=f[x_{i_0},x_{i_1},\dots,x_{i_k}]$$

که $i_0,i_1,\dots,i_k$ یک جایگشت دلخواه از اعداد صحیح $\{0,1,\dots,k\}$ می‌باشند.

اثبات) به ازای $n=1$ حکم برقرار است زیرا

$$f[x_0,x_1]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)}-\frac{f(x_0)}{(x_1-x_0)}=\frac{f(x_1)}{x_1-x_0}+\frac{f(x_0)}{x_0-x_1}$$

فرض می‌کنیم به ازای $n=k$ حکم برقرار باشد:

$$f[x_0,x_1,\dots,x_k]=\sum_{i=0}^{k}\frac{f(x_i)}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{k}(x_i-x_j)}$$

نشان می‌دهیم:

$$f[x_0,x_1,\dots,x_k,x_{k+1}]=\sum_{i=0}^{k+1}\frac{f(x_i)}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{k}(x_i-x_j)}$$

$$f[x_0,x_1,\dots,x_k,x_{k+1}]=\frac{f[x_1,\dots,x_{k+1}]-f[x_0,\dots,x_k]}{x_{k+1}-x_0}$$

از فرض استقرا

$$=\frac{\sum\limits_{i=1}^{k+1}\dfrac{f(x_i)}{\prod\limits_{j=1,\,j\neq i}^{k+1}(x_i-x_j)}-\sum\limits_{i=0}^{k}\dfrac{f(x_i)}{\prod\limits_{j=0,\,j\neq i}^{k}(x_i-x_j)}}{x_{k+1}-x_0}$$

(۱۲)

$$= \frac{F(x_0)}{(x_0-x_1)\cdots(x_0-x_{k+1})} + \frac{F(x_{k+1})}{(x_{k+1}-x_0)(x_{k+1}-x_1)\cdots(x_{k+1}-x_k)} + \sum_{i=1}^{k}\left[\frac{F(x_i)}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k+1}(x_i-x_j)} - \frac{F(x_i)}{\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{k}(x_i-x_j)}\right]$$

مخرج مشترک بگیرید و حکم اثبات کنید.

نکته ۴) نمایش جدول تفاضلات تقسیم شده برای $n=4$ و نقاط x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 در زیر آمده است:

x_i	$F(x_i)$	مرتبه اول	مرتبه دوم	مرتبه سوم	مرتبه چهارم
x_0	$F(x_0)$				
x_1	$F(x_1)$	$F[x_0, x_1]$			
x_2	$F(x_2)$	$F[x_1, x_2]$	$F[x_0, x_1, x_2]$		
x_3	$F(x_3)$	$F[x_2, x_3]$	$F[x_1, x_2, x_3]$	$F[x_0, x_1, x_2, x_3]$	
x_4	$F(x_4)$	$F[x_3, x_4]$	$F[x_2, x_3, x_4]$	$F[x_1, x_2, x_3, x_4]$	$F[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$

مثلاً گفتیم که چند جمله‌ای درونیاب حاصل با نقاط فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$P_4(x) = F(x_0) + (x-x_0)F[x_0, x_1] + (x-x_0)(x-x_1)F[x_0, x_1, x_2] + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)F[x_0, x_1, x_2, x_3]$$
$$+ (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)F[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$$

چند جمله‌ای درونیاب را به صورت زیر نیز می‌توان بیان کرد:

$$P_4(x) = F(x_4) + (x-x_4)F[x_3, x_4] + (x-x_4)(x-x_3)F[x_2, x_3, x_4]$$
$$+ (x-x_4)(x-x_3)(x-x_2)F[x_1, x_2, x_3, x_4]$$
$$+ (x-x_4)(x-x_3)(x-x_2)(x-x_1)F[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$$

لذا می‌توان نتیجه گرفت که در حالت کلی $P_n(x)$ را به دو روش زیر می‌توان محاسبه کرد:

$\boxed{1}$

$$P_n(x)=f(x_0)+(x-x_0)f[x_0,x_1]+(x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2]+\dots+$$
$$+(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})f[x_0,x_1,x_2,\dots,x_n]$$

$\boxed{2}$

$$P_n(x)=f(x_n)+(x-x_n)f[x_{n-1},x_n]+(x-x_n)(x-x_{n-1})f[x_{n-2},x_{n-1},x_n]$$
$$+\dots+(x-x_n)(x-x_{n-1})\cdots(x-x_1)f[x_0,x_1,\dots,x_n]$$

نکته ۵: توضیح مختصری در خصوص نحوه‌ی شیوه محاسبه تفاضلات تقسیم شده در روش نیوتن

ایده اصلی پشت روش نیوتن آن است که چند جمله‌ای درونیاب $P_n(x)$ که نقاط $(x_0,f(x_0)),\dots,(x_n,f(x_n))$ را درونیابی می‌کند، به صورت بازگشتی برحسب چند جمله‌ای درونیاب $P_{n-1}(x)$ که نقاط $(x_0,f(x_0)),\dots,(x_{n-1},f(x_{n-1}))$ را درونیابی می‌کند، محاسبه گردد.

به عبارت بهتر، این رابطه بازگشتی باید به صورت زیر ساخته شود:

$$P_n(x)=P_{n-1}(x)+\underbrace{S(x)}_{\text{یک چند جمله‌ای از درجه حداکثر } n}$$

با توجه به اینکه $P_n(x)$ و $P_{n-1}(x)$ نقاط $(x_0,f(x_0)),(x_1,f(x_1)),\dots,(x_{n-1},f(x_{n-1}))$ را درونیابی می‌کنند داریم

$$P_n(x_i)-P_{n-1}(x_i)=0 \qquad \forall i=0,1,\dots,n-1$$

پس نتیجه می‌شود که باید $x_0,\dots,x_{n-1}$ ریشه‌های $S(x)$ باشند پس داریم

$$S(x)=\underbrace{a_n}_{\text{یک ضریب}}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

$$P_0(x) = f(x_0)$$

طبق رابطه بازگشتی $\longrightarrow$ $P_1(x) = P_0(x) + a_1(x - x_0)$

از اینکه $P_1(x_1)=f(x_1)$ $\longrightarrow$ $a_1 = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f[x_0, x_1]$

$$\longrightarrow P_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

طبق رابطه بازگشتی $\longrightarrow$ $P_2(x) = P_1(x) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$

از اینکه $P_2(x_2)=f(x_2)$ $\longrightarrow$ $a_2 = \dfrac{P_2(x_2) - P_1(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$

$$= \frac{f(x_2) - f(x_0) - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$= \frac{f(x_2) - f(x_1) + f(x_1) - f(x_0) - \dfrac{(f(x_1) - f(x_0))}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$= \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} + \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_2 - x_1} - \dfrac{(f(x_1) - f(x_0))}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_1)}(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)}$$

$$= \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

$$= f[x_0, x_1, x_2]$$

Scanned by CamScanner

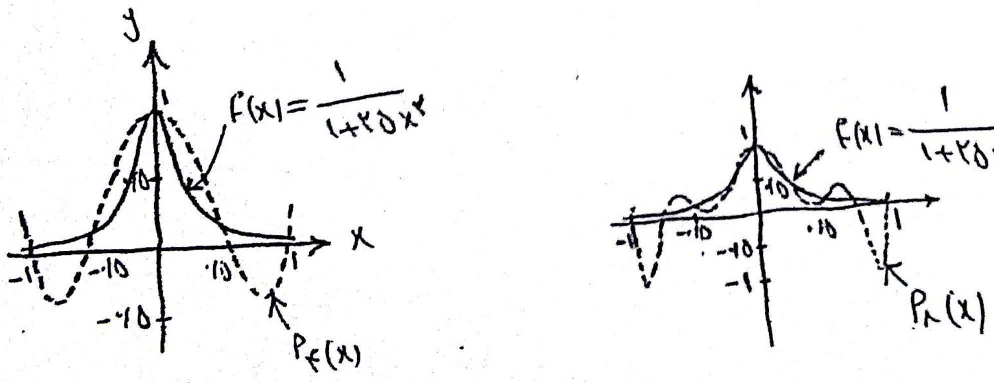
یکی از سؤالهای مهم آن است که اگر بخواهیم به کمک درون‌یابی، تابع $f(x)$ را روی $[a,b]$ با یک چندجمله‌ای تقریب بزنیم، آیا افزایش تعداد نقاط درون‌یابی منجر به کاهش خطا می‌شود؟ یعنی آیا می‌توان گفت هرچه تعداد نقاط درون‌یابی را افزایش دهیم، به تقریب بهتری می‌رسیم؟

در حالت کلی، جواب منفی است، توابعی وجود دارند که برای آنها دنباله $P_n(x)$ با افزایش n به $f(x)$ همگرا نمی‌شود. در این خصوص به مثال زیر توجه کنید:

مثال رانگ: تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x)=\frac{1}{1+25x^2} \qquad x\in[-5,5]$$

چندجمله‌ای درون‌یاب $P_4(x)$ و $P_8(x)$ مبتنی بر نقاط متساوی‌الفاصله روی بازه $[-5,5]$ در شکل‌های زیر نمایش داده شده است. در نزدیکی انتهای بازه نوسان‌های بزرگ دیده می‌شود و با افزایش تعداد نقاط این نوسانات بزرگتر خواهد شد. پس وقتی $n\to\infty$، $E_n(x)$ بزرگ می‌شود.



برونیابی: فرض کنید مقادیر تابع f را در نقاط متمایز $x_0, x_1, \ldots, x_n$ داریم:

نقطه	x_0	x_1	$\ldots$	x_n
مقدار تابع	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$\ldots$	$f(x_n)$

فرض کنید می‌خواهیم مقدار تابع را در نقطه x که $x \neq x_0, \ldots, x_n$ تقریب بزنیم.

اگر x خارج از فواصل بین $x_0, x_1, \ldots, x_n$ باشد، به این امر، برونیابی می‌گوییم. برای برونیابی می‌توان از همان چندجمله‌ای درونیاب استفاده کرد در این صورت با توجه به قضیه صفحه ۳ خطا برابر است با

$$E(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c_x)$$

که c_x نقطه‌ای است که در بازه شامل نقاط x_i و x قرار دارد.

اما با توجه به فرمول خطا، وقتی x خارج از فواصل بین نقاط $x_0, x_1, \ldots, x_n$ باشد (یعنی در حالت برونیابی) عاملهای $(x-x_0), \ldots, (x-x_n)$ در رابطه خطا می‌توانند مقادیر بزرگی باشند بنابراین مقدار خطا ممکن است بزرگ باشد مگر آنکه x به یکی از نقاط انتهایی نزدیک باشد.

(درونیابی معکوس): در درونیابی معکوس به دنبال نقطه x هستیم که به ازای y داده شده $f(x)=y$ صدق کند. اگر f یک تابع نسبتاً هموار و $f'(x)$ در همسایگی نقطه‌ای که درونیابی معکوس انجام می‌شود ناصفر باشد در این صورت $x = f^{-1}(y)$ به صورت نقطه‌ای در ترتیب قرار داده شده وجود دارد برای تقریب $f^{-1}(y)$ می‌توان f^{-1} را به عنوان تابعی از y در نظر گرفت و روش درونیابی را برای f^{-1} اعمال کرد.

مثال) فرض کنید نقاط جدول زیر مفروضند. ریشه معادله $f(x)=0$ را تقریب بزنید.

x_i	-2	2	3
$f(x_i)$	-7	9	28

تعریف می‌کنیم $g(y) = f^{-1}(y)$ پس جدول زیر را داریم.

y_i	$g(y_i)$	مرتبه اول	مرتبه دوم
-7	-2		
		0.250	
9	2		-0.005639
		0.05263	
28	3		

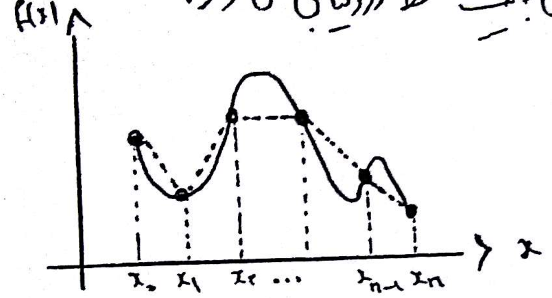
$$P_2(y) = -2 + (y+7)(0.25) + (y+7)(y-9)(-0.005639)$$

$$f^{-1}(0) = g(0) \simeq P_2(0) = -2 + (7)(0.25) + (7)(-9)(-0.005639) = 0.105257$$

درونیابی تکه چندجمله‌ای:

وقتی تعداد نقاط درونیابی زیاد باشد، چندجمله‌ای‌های درونیاب برای گذشتن از نقاط درونیاب، نوسانات زیادی را باید تحمل کنند که اغلب رضایت‌بخش نیست. در این موارد، روش دیگر آن است که از درونیابی تکه خطی یا درونیابی تکه سهمی استفاده کنیم که در ادامه به شرح آن می‌پردازیم:

درونیابی تکه خطی: در این روش، بین هر دو نقطه متوالی با یک خط درونیابی می‌شود.



$$\text{تابع درونیاب} = q(x) = \begin{cases} f(x_0) + (x-x_0)\, f[x_0, x_1] & x_0 \leq x \leq x_1 \\ f(x_1) + (x-x_1)\, f[x_1, x_2] & x_1 \leq x \leq x_2 \\ \vdots & \\ f(x_{n-1}) + (x-x_{n-1})\, f[x_{n-1}, x_n] & x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases}$$

درونیابی تکه سهمی: در این روش با نقاط x_0, x_1, x_2 یک چندجمله‌ای با درجه حداکثر ۲ تعیین می‌شود.

سپس، با نقاط x_2, x_3, x_4 " " "

سپس، با نقاط x_4, x_5, x_6 " " "

⋮

سپس با نقاط $x_{2k-2}, x_{2k-1}, x_{2k}$ " " "

مثال) فرض کنید $f(x) = \sin(\pi x)$ ، $0 \leq x \leq 1$ و فرض کنید $P_n(x)$ چند جمله‌ای درونیاب f در نقاط $x_i = \frac{i}{n}$ $(i = 0, 1, 2, \dots, n)$ باشد. نشان دهید

$$\lim_{n \to \infty} P_n(x) = \sin(\pi x)$$

جواب) باید نشان دهیم وقتی $n \to \infty$ خطا به صفر میل می‌کند.

$$E(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c_x) \qquad 0 \leq c_x \leq 1$$

اما داریم

$$\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq \pi^{n+1}$$ به ازای هر $0 \leq x \leq 1$.

از طرف دیگر چون x_i ها و نیز x در فاصله $[0,1]$ قرار دارند می‌توان گفت $|x - x_i| \leq 1$ بنابراین داریم:

$$\Rightarrow \quad |E(x)| \leq \underbrace{\frac{\pi^{n+1}}{(n+1)!}}$$

حد این دنباله وقتی $n \to \infty$ برابر با صفر است لذا با افزایش تعداد نقاط خطا به سمت صفر میل می‌کند.

«تمرینات بحث درونیابی»

سؤالات کلاسیکی :

سؤال ۱) مقادیر تابع f مطابق جدول زیر داده شده است :

x_i	-۱	۰	۱
$f(x_i)$	۱	۱	۳

با استفاده از روش لاگرانژ چند جمله‌ای درونیاب خاطر با نقاط فوق را به دست آورده و به کمک آن مقدار تقریبی f(۰/۲۵) را بیابید.

سؤال ۲) جدول تفاضلات تقسیم شده را برای تابع $\sin x$ در مقادیر $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{\pi}{6}$ و ۰ تشکیل دهید و براساس آن چند جمله‌ای درونیاب را به دست آورید. سپس مقدار تقریبی $\sin(\frac{\pi}{12})$ را محاسبه نمایید.

سؤال ۳) جدول تفاضلات (پیشرو - پسرو) تابع f را به صورت زیر در نظر بگیرید :

حذف

i	x_i	$f(x_i)$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
۰	۱٫۲۵۰	۱٫۳۹۱۴			
۱	۱٫۲۶۰	۱٫۳۷۷۰	-۰/۰۱۴۴		
۲	۱٫۲۷۰	۱٫۳۴۷۸	-۰/۰۲۹۲	-۰/۰۱۴۶	
۳	۱٫۲۸۰	۱٫۳۰۴۶	-۰/۰۴۳۲	-۰/۰۱۴۰	-۰/۰۰۰۸

الف) P_3(۱٫۲۶۵) را محاسبه کنید.

ب) با اضافه نمودن نقطه $(x_4, f(x_4))$ = (۱٫۲۹۰ ,۱٫۲۴۷۷) به جدول، مقدار P_4(۱٫۲۶۵) را حساب کنید.

سؤال ۴) جدول زیر مقدار تابع f را در چند نقطه نشان می‌دهد. مقدار (۱,۲) $\in x$ را طوری بیابید که $f(x)=$۰/۱۵

x_i	۱	۱٫۲	۱٫۴	۱٫۶	۱٫۸	۲
$f(x_i)$	۰	۰/۱۲۷۵۲۴	۰/۳۰۱۸۲۳	۰/۵۱۷	۰/۷۷۶۱۲۷	۱٫۰۳۹۷۲۵

سؤال ۵) تابع $f(x)=x^3$ را در بازه [۰,۱] با نقاط $x_1=1$ ، $x_0=0$ درونیابی می‌کنیم. حداکثر خطای درونیابی در بازه مفروض چقدر است؟

سؤال ۶) جدول زیر مفروض است. با استفاده از تفاضلات تقسیم شده نیوتن چند جمله‌ای درونیاب تابع f را به دست آورده و تقریبی از f(۱/۵) ارائه دهید.

x_i	۰	۱	۲	۴
$f(x_i)$	۰	-۱	۴	۵۶

سوال ۷) جدول تفاضلات پیشرو را به صورت زیر در نظر بگیرید و بر اساس آن $F[4,6,8,10]$ را محاسبه کنید.

حذف

راهنمایی: از فرمول زیر استفاده کنید:

$$F[x_0,x_1,x_2,x_3]=\frac{\Delta^3 f(x_0)}{3!\,h^3}$$

x_i	$f(x_i)$	Δ	Δ^2	Δ^3
4	1			
6	-2	-3		
8	-3	-1	2	
10	-6	-3	-2	-4

سوال ۸) فرض کنید $f(x)=x^n$ و فرض کنید $x_0, x_1, \dots, x_n$ نقاط متساوی‌الفاصله با فاصله h باشند و فرض کنید $x_0=0$ و $h=1$. مقدار $\Delta^n f(x_0)$ را تعیین کنید.

حذف

سوال ۹) داده‌های زیر را در نظر بگیرید. مقدار تقریبی $f(-1)$ را از روش پیشرو نیوتن بیابید. همچنین مقدار تقریبی $f(2.5)$ را با روش پسرو نیوتن تعیین کنید.

حذف

x_i	0	-2	4	2
$f(x_i)$	1	-5	10	6

سوال ۱۰) جمله خطای درونیاب تابع $f(x)=x^5-5x^4$ مبتنی بر نقاط $x_0=0$ ، $x_1=1$ ، $x_2=3$ و $x_3=5$ را بیابید.

سوال ۱۱) جمله خطای درونیاب مبتنی بر نقاط $x_0=0$ ، $x_1=1$ ، $x_2=2$ را برای تابع $f(x)=x2^{-x}$ بیابید. سپس مقدار تقریبی $f(1.5)$ را محاسبه کنید. همچنین کران خطا را بیابید.

سوال ۱۲) معادله $f(x)=x^3+x-1=0$ روی $[0,1]$ فقط یک ریشه دارد.

الف) به کمک درونیابی نقاط $x_0=0$ ، $x_1=0.5$ و $x_2=1$ ریشه تقریبی معادله را بیابید.

ب) با درونیابی معکوس و استفاده از نقاط داده شده در قسمت (الف) ریشه تقریبی معادله را بیابید.

سوال ۱۳) جدول زیر مقدار تابع f را در چند نقطه نشان می‌دهد.

x_i	0	0.1	0.2	0.3
$f(x_i)$	0	0.1127	0.2227	0.3286

الف) مقدار $f(0.14)$ را با درونیابی خطی تقریب بزنید.

ب) مقدار $f(0.14)$ را با درونیابی روی تمام نقاط جدول تقریب بزنید.

سوالات اثباتی:

سوال ۱۴) فرض کنید $f(x)=\sin(\frac{\pi}{2}x)$ ، $a\leq x\leq b$ ، فرض کنید $P_n(x)$ چند جمله‌ای درونیاب f متناظر با نقاط $x_i=a+i(\frac{b-a}{n})$ باشد ($i=0,1,\dots,n$) نشان دهید

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x)=f(x)$$

سوال ۱۵) فرض کنید $f(x)=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n$ و فرض کنید $x_0,x_1,\dots,x_n$ نقاط متمایز باشند. نشان دهید

$$f[x_0,x_1,\dots,x_n]=a_n$$

سوال ۱۶) فرض کنید $x_0,x_1,\dots,x_n$ دو به دو متمایز و مقدار تابع f در این نقاط معلوم باشد فرض کنید $P_n(x)$ چند جمله‌ای درونیاب متناظر با نقاط مذکور باشد نشان دهید

$$r(x)=\begin{vmatrix} P_n(x) & 1 & x & x^2 & \cdots & x^n \\ f(x_0) & 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ f(x_1) & 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & & & & & \\ f(x_n) & 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}=0$$

دترمینان

راهنمایی: ابتدا نشان دهید $r(x)$ یک چند جمله‌ای با درجه حداکثر n است. سپس نشان دهید $r(x_0)=r(x_1)=\dots=r(x_n)=0$ و از آنکه $r(x)$ بیش‌تر از n ریشه پیدا کرده نتیجه بگیرید که $r(x)$ باید تابع ثابت صفر باشد

سوال ۱۷) فرض کنید (دقت) $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$ و فرض کنید $x_0,x_1,\dots,x_n$ نقاط متساوی‌الفاصله با فاصله h باشند. نشان دهید

$$\Delta^n f(x_0)=n!\,a_nh^n$$

$$\Delta^m f(x_0)=0 \quad \forall m>n$$

سوال ۱۸) تابع $f(x)=e^x$ را به ازای $0\leq x\leq 1$ در نظر بگیرید و فرض کنید $P_n(x)$ چند جمله‌ای درونیاب متناظر با نقاط $x_i=\frac{i}{n}$ باشد ($i=0,1,\dots,n$) نشان دهید

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x)=e^x$$

سوال ۱۹) فرض کنید $x_0,x_1,\dots,x_n$ نقاط متمایز و $L_i(x)$ چند جمله‌ای های لاگرانژ متناظر با این نقاط باشند نشان دهید

$$\sum_{i=0}^{n} L_i(x)\,x_i^k=x^k \quad \forall x \quad \forall k\leq n$$

راهنمایی: تعریف کنید $f(x)=x^k$

سوال ۲۰) تابع $f(x)$ مفروض است. فرض کنید چندجمله‌ای $P(x)$ تابع $f(x)$ را در نقاط $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ درونیابی کند. همچنین فرض کنید چندجمله‌ای $Q(x)$ تابع $f(x)$ را در نقاط ~~$x_2, x_3, \dots, x_n$ درونیابی کند. نشان دهید~~ چندجمله‌ای زیر تابع $f(x)$ را در نقاط $x_1, x_2, \dots, x_n$ درونیابی می‌کند:

$$R(x) = P(x) + \frac{x - x_1}{x_n - x_1}\left[Q(x) - P(x)\right]$$

سوال ۲۱) اگر $P(x)$ چندجمله‌ای باشد که تابع $f(x)$ را در نقاط متمایز $x_0, x_1, \dots, x_n$ درونیابی می‌کند نشان دهید

$$f(x) - P(x) = \sum_{i=0}^{n} \left(f(x) - f(x_i)\right) L_i(x)$$

که $L_i(x)$ چندجمله‌ای‌های لاگرانژ متناظر با نقاط $x_0, x_1, \dots, x_n$ هستند.

راهنمایی: از اینکه $P(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)$ و نیز از رابطه $\sum_{i=0}^{n} L_i(x) = 1$ استفاده کنید.

سوال ۲۲) فرض کنید $x_0, x_1, \dots, x_n$ نقاط متمایز باشند. ثابت کنید

$$\sum_{i=0}^{n} x_i^{n+1} L_i(0) = (-1)^n x_0 x_1 x_2 \cdots x_n$$

راهنمایی: تابع $f(x) = x^{n+1}$ را با نقاط $x_0, x_1, \dots, x_n$ درونیابی می‌کنیم. خطای درونیابی برابر است با:

$$E(x) = x^{n+1} - \sum_{i=0}^{n} L_i(x)\, x_i^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

اما چون $f^{(n+1)}(c_x) = (n+1)!$ داریم:

$$E(x) = x^{n+1} - \sum_{i=0}^{n} L_i(x)\, x_i^{n+1} = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

با قرار دادن $x = 0$ حکم نتیجه می‌شود.