به نام خدا

محمدمهدی آقاجانی

استاد : دکتر فلاح

ریاضیات گسسته

توابع مولد

سوال ۱ :

پ)

برای هر یک از جمله ها یک پرانتز تشکیل می دهیم که در واقع توان X در آن ها همان مقدار آن جمله ست :

$$f(x) = (x^2 + x^3 + x^4)(x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8)^4$$

برای پیدا کردن جواب باید به دنبال ضریب x^{30} باشیم .

که می شود :

$$c(17,14) - c(11,8) * c(4,1) + c(5,2) * c(4,2) + c(18,15) - c(12,9) * c(4,1) + c(6,3)c(4,2) + c(19,16) - c(13,10)c(4,1) + c(7,4)c(4,2)$$

ت)

مانند بالا f(x) را تشکیل می دهیم :

$$f(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{30})^3 * (1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{30}) * (x + x^3 + x^5 + \cdots + x^{29})$$

که می شود :

$$c(31,29) + c(29,27)c(2,1) + c(27,25)c(3,2) + c(25,23)c(4,3) + \cdots + c(3,1)c(15,14)$$

سوال ۲ :

الف)

برای هر کودک یک پرانتز در نظر می گیریم که توان X در آن تعداد سکه هایی ست که آن کودک دریافت کرده:

$$f(x) = (1 + x + x^2 + \cdots + x^{35})^5$$

ب)

$$f(x) = (x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{35})^5$$

پ)

$$f(x) = (x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^{35})^5$$

ت)

$$f(x) = (1 + x + x^2 + \cdots + x^{35})^4 * (x^{10} + x^{11} + \cdots + x^{35})$$

سوال ۳ :

الف)

$$f(x) = (1 + x + x^2 + \cdots + x^{10})^6$$

ب)

$$f(x) = (1 + x + x^2 + \cdots + x^r)^n$$

سوال ۶ :

$$f(x) = (1 + ax)(1 + bx)(1 + cx) \ldots (1 + tx)$$

صفحه ۵۶۲ :

سوال ۱ :

الف)

$$(1 + x)^8$$

ب) از اولی مشتق می گیریم :

$$8(1 + x)^7$$

ت)

$$\frac{x^3}{1 - x}$$

ث)

$$\frac{6x^3}{1 + x}$$

ح)

$$\frac{x^2}{1 - ax}$$

سوال ۲ :

ت)

می توان 3x را برابر با y فرض کرد :

$$1 - y + y^2 - y^3 + \cdots = 1 - 3x + 9x^2 - 27x^3 + \cdots$$

که دنباله آن می شود :1,-3,9,-27,...

ث)

باید در مخرج از یک ۳ فاکتور گرفت :

$$\frac{1}{3}\left(1+\frac{x}{3}+\left(\frac{x}{3}\right)^2+\cdots\right)$$

که دنباله آن می شود : ... , 1/3 , 1/9 , 1/27

سوال ۳ : ؟

سوال ۴)

در ابتدا مخرج مشترک می گیریم :

$$\frac{(3x^3-2)^{15}}{x^{15}}$$

پس باید در صورت به دنبال ضریب x^{15} باشیم که می شود $3^5 * (-2)^{10}$

سوال ۶)از x^7فاکتور می گیریم :

$$x^{42}(1+x+x^2+x^3+\cdots)^{15}=\frac{x^{42}}{(1-x)^{15}}=x^{42}*(1-x)^{-15}=c(22,8)$$

سوال ۹)

الف) ۰

ب)اول ساده سازی می کنیم :

$$x(x^2-5)(1-x)^{-3}$$

که ضریب x^{15} می شود : $c(14,12)-5*c(16,14)$

سوال ۱۰) متناظر هر خط تولید یک پرانتز در نظر می گیریم و در هر پرانتز توان x متناظر با تعداد روبوت های آن خط تولید است :

$$f(x)=(x^3+x^4+x^5+\cdots+x^{24})^4$$

حال باید ضریب x^{24}را پیدا نمود :$c(15,12)$

سوال ۱۲ :

الف)

برای هر نفر دو پرانتز در نظر می گیریم که یکی برای نوشابه های نوع اول و دیگری برای نوشابه های نوع دوم می باشد و توان هر متغیر برابر با تعداد نوشابه ها از آن نوع می باشد :

$$f(x)=(x^2+x^3+\cdots+x^{24})^5*(y^2+y^3+\cdots+y^{24})^5$$

حال باید به دنبال ضریب $x^{24}y^{24}$ باشیم که با تبدیل چند جمله ای بالا به یک سری می شود :

$$f(x) = x^{10}(1-x^{23})^5(1-x)^{-5} * y^{10}(1-y^{23})^5(1-y)^{-5}$$

و ضریب می شود :c(18,14)*c(18,14)

ب) تابع مولد زیر را در نظر می گیریم :

$$f(x) = (x^2 + x^3 + \cdots + x^{24})^5(y^3 + y^4 + \cdots + y^{24})^5$$

و باید ضریب $x^{24}y^{24}$ را تعیین کنیم .

سوال ۱۳ :

هر پرانتز را متناظر با یک پرتاب در نظر می گیریم و توان X برابر است با عددی که در آن پرتاب حاصل شده است

$$f(x) = (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^{12}$$

حال باید ضریب x^{30}را تعیین کنیم :

$$f(x) = x^{12}(1-x^6)^{12}(1-x)^{-12}$$

که می شود : $c(29,18) - c(12,1)c(23,12) + c(12,2)c(17,6) - c(12,3)$

که احتمال آن می شود عدد بالا تقسیم بر کل حالات که کل حال برابر است با 6^{12}

سوال ۱۶ :

برای هر نفر دوپرانتز در نظر می گیریم :

$$f(x) = (x^2 + x^3 + \cdots x^{12})^3(1 + y + y^2 + \cdots + y^5)^3(x + x^2 + \cdots + x^{12})(y^3 + y^4 + \cdots + y^{16})$$

که باید ضریب x^{12} را پیدا کرده و در ضریب y^{16}ضرب نماییم .

که می شود :$c(8,5) * (c(16,13) - c(3,1)c(10,7) + c(3,2)c(4,1)$

سوال ۱۷ :

می توان $x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$ را یک y فرض کرد . آنگاه داریم :

$$f(x) = \sum_0^\infty c(i,i)y^i = \sum_0^\infty (x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^i$$

که هر یک از جملات برابر تعداد دفعاتی ست که می توان از کیسه خارج کرد.

سوال ۱۸ :

$$(1-4x)^{-\frac{1}{2}} = c\left(-\frac{1}{2},0\right) + c\left(-\frac{1}{2},1\right)(-4x) + c\left(-\frac{1}{2},2\right)(-4x)^2 + \cdots + c\left(-\frac{1}{2},n\right)(-4x)^n$$

تعیین ضریب x^n :

$$c\left(-\frac{1}{2},n\right)(-4)^n = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(-4)^n$$
$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}+n-1\right)}{n!}(4)^n = \frac{(1)(3)\ldots(2n-1)}{n!}(2)^n = \frac{2n!}{n!\,n!} = c(2n,n)$$

سوال ۲۳ :

الف) $c_n = n + n - 1 + n - 2 + n - 3 + n - 4 = 5n - 10$

ب)$-1^n(n+1)$

صفحه ۵۶۸ :

سوال ۱ :

$$7 = 1+1+1+1+1+1+1 = 2+1+1+1+1+1 = 3+1+1+1+1$$
$$= 3+2+1+1 = 2+2+1+1+1 = 2+2+2+1 = 3+2+2$$
$$= 3+3+1 = 4+1+1+1 = 4+2+1 = 4+3 = 5+1+1 = 5+2$$
$$= 6+1$$

سوال ۴ :

$$(1+x^2+x^4+x^6+\cdots)(1+x^3+x^6+\cdots)(1+x^5+x^{10}+\cdots)(1+x^7+x^{14}+\cdots)$$
$$= \frac{1}{1-x^2} * \frac{1}{1-x^3} * \frac{1}{1-x^5} * \frac{1}{1-x^7}$$

سوال۶ :

الف) هر پرانتز را برای یک نوع جمعوند در نظر می گیریم و توان X برابر است با تعداد مراتب ظاهر شدن آن جمعوند :

$$\frac{1-x^6}{1-x} * \frac{1-x^{12}}{1-x^2} * \frac{1-x^{18}}{1-x^3} * \ldots = \prod_1^\infty \frac{1-x^{6i}}{1-x^i}$$

ب)

$$\frac{1-x^6}{1-x}*\frac{1-x^{12}}{1-x^2}*\frac{1-x^{18}}{1-x^3}*\ldots=\prod_{1}^{12}\frac{1-x^{6i}}{1-x^i}$$

سوال ۷ :

برای حالت اول تابع مولد را بدست می آوریم :

$$\frac{1-x^3}{1-x}*\frac{1-x^6}{1-x^2}*\frac{1-x^9}{1-x^3}*\ldots$$

حال در حالت دوم تابع مولد به صورت زیر می شود :

$$\frac{1}{1-x}*\frac{1}{1-x^2}*\frac{1}{1-x^3}*\ldots$$

باید توجه داشت که ما در هر دو حالت به دنبال ضریب x^n در تابع هستیم .پس اگر نشان دهیم هر دو تابع با هم برابر هستند آن گاه در واقع ضریب x^n در آن ها برابر بوده و مساله اثبات می شود حال کافی ست که دقت کنیم در حالت اول صورت کسر ها در تمامی مخرج هایی که در واقع متناظر جمعوند بخش پذیر بر ۳ هستند تکرار می شوند و می توان آن ها را ساده نمود و در نتیجه هر دو حالت با هم برابرند.

صفحه ۵۷۹ :

سوال ۱ :

پ)

به جای x عبارت x(1+a) را قرار می دهیم که می شود : $\frac{1}{1-x(1+a)}$

ت)

چندجمله ای آن را تشکیل می دهیم :

$$f(x)=2+(1+a)x+(1+a^2)x^2+\cdots$$

خود متشکل از دو عبارت می تواند باشد

$$1+x+x^2+x^3+\cdots$$

$$1+ax+a^2x^2+a^3x^3+\cdots$$

در نهایت تابع مولد می شود :

$$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-ax}$$

سوال ۳ :

برای هر نوع فشنگ یک متغیر در نظر گرفته و برای هر شخص پرانتز در نظر می گیریم که توان هر متغیر در آن به منزله تعداد فشنگ ها برای آن فرد است که می شود :

$$f(x,y) = (x^2 + x^3 + \cdots + x^7)^4 (y^2 + y^3 + \cdots + y^7)^4$$

حال باید ضریب $x^{20}y^{20}$ را پیدا کنیم که می شود : $\left(c(15,12) - c(4,1)c(9,6) + c(4,2)\right)^2$

سوال ۷ :

برای هر یک از اعداد داده شده یک پرانتز در نظر می گیریم و تابع مولد نمایی زیر را تشکیل می دهیم :

$$\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)^4 = (e^x - x)^4$$

حال باید به دنبال ضریب $\frac{x^{10}}{10!}$ باشیم که می شود :

$$4^{10} - c(4,1) * 10 * 3^9 + c(4,2) * 10 * 9 * 2^8 - c(4,3) * 10 * 9 * 8$$

سوال ۱۱ :

الف) در ابتدا ضریب x^{20} را در عبارت زیر پیدا می کنیم :

$$f(x) = (x + x^2 + x^3 + \cdots x^{20})^{12}$$

که می شود : $c(19,8)$

ب) باید ضریب x^{10} را در عبارت زیر پیدا نمود :

$$f(x) = (x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{10})^6$$

که می شود : c(9,4)