به نام خدا

محمدمهدی آقاجانی

۹۳۳۱۰۵۶

پروژه پایانی

استاد : دکتر دیده ور

لیستی از تمام مسایل NP-Hard و NP-Complete را ارایه کنید.

مسایل NP-Hard عبارتند از :

- 3SAT
- Maximum Independent Set
- Clique
- Vertex Cover
- Graph Coloring
- Hamiltonian Cycle
- Subset Sum
- Frivolous
- Planer Circuit SAT
- Not All Equal 3SAT
- Planer 3SAT
- X3M
- Partition
- 3Partition
- Set Cover
- Hitting Set
- Hamiltonian Path
- Longest Path
- Steiner Tree

و اما در اینجا لیستی از مسایل NP-Complete را مشاهده میکنید:

- 1-Penalty
- Bipartite Dimension
- Capacitated Minimum Spanning Tree

- Route Inspection problem
- Domatic Number
- Bandwidth Problem
- Graph Homomorphism
- Minimum k-cut
- Treewidth
- Bin Packing Problem
- Knapsack Problem
- Integer Programming
- Quadratic Assignment
- Closest String
- LCS
- Shortest Common Supersequence
- Bulls and Cows
- Eternity II
- Fillomino
- Heyawake
- Kakuro
- Nonograms
- Verbal Arithmetic
- Berth Allocation
- Cyclic Ordering
- Monochromatic Triangle
- Metric k-center
- K-Chinese Postman
- Serializability
- Sparse Approximation
- Second Order Instantiation

مساله SAT را تعریف کنید و اثبات کنید که NP-Complete است.

تعریف : Boolean satisfiability یا همان مساله SAT عبارت است از تعیین satisfiable بودن یا نبودن یک عبارت Boolean. همچنین satisfiable بودن یک عبارت به معنای این است که بتوان طوری متغیر های داخل فرمول را مقدار دهی منطقی کرد که حاصل عبارت برابر TREU بشود و اگر نتوان این کار را انجام داد آن عبارت satisfiable نخواهد بود.

مثلا عبارت $F = A \wedge \sim B$ یک عبارت satisfiable است زیرا میتوان مقدار A را برابر TREU و B را برابر FALSE قرار داد در حالیکه عبارت $G = A \wedge\sim A$ unsatisfiable خواهد بود زیرا با هر نوع تخصیص مقدار به A مقدار این عبارت برابر FALSE خواهد بود. این مساله یک مساله NP-Complete می باشد که در زیر به اثبات آن اشاره میکنیم.

اثبات : این اثبات شامل دو قسمت می باشد. قسمت اول مربوط به این است که این مساله NP است و قسمت دوم مربو به این است که هر مساله ای در NP می تواند در زمان polynomial به این مساله کاهش یابد.

این مساله در NP می باشد زیرا هر نمونه ای از آن میتواند در زمان polynomial توسط یک تورینگ ماشین معین verify بشود(اگر مساله در زمان چندجمله توسط مشاین تورینگ معین verify بشود در NP خواهد بود و اثبات این موضوع در textbook ها موجود است)

اما بخش دیگری از اثبات مربوط به نحوه کاهش ئذیری دیگر مسایل در NP به این مساله می باشد. فرض کنید که هر مساله ای در NP می تواند توسط ماشین تورینگ نامعین $M = (Q.\Sigma.s.F.\delta)$ حل بشود(تمایم متغیر ها طبق تعریف رسمی ماشین تورینگ می باشند) . همچنین فرض کنید که M می تواند نمونه ای از مساله را در زمان p(n) پذیرش یا رد کند که p یک تابع چندجمله ای و n اندازه ورودی مساله می باشد.

برای هر ورودی I یک عبارت بولین B تعریف می کنیم به نحوی که satisfiable است اگر و فقط اگر ماشین M ورودی I را پذیرش کند. این عبارت بولین از متغیر های جدول زیر استفاده میکند. $q \in Q, -p(n) \leq i \leq p(n), j \in \Sigma$, and $0 \leq k \leq p(n)$.

Variables	Intended interpretation	How many?
$T_{i,j,k}$	True if tape cell i contains symbol j at step k of the computation.	$O(p(n)^2)$
$H_{i,k}$	True if the M's read/write head is at tape cell i at step k of the computation.	$O(p(n)^2)$
$Q_{q,k}$	True if M is in state q at step k of the computation.	$O(p(n))$

حال عبارت بولین B را این طور تعریف میکنیم که and منطقی عبارات در جدول زیر باشد.

Expression	Conditions	Interpretation	How many?
$T_{i,j,0}$	Tape cell i initially contains symbol j	Initial contents of the tape. For $i > n$-1 and $i < 0$, outside of the actual input I, the initial symbol is the special default/blank symbol.	$O(p(n))$
$Q_{s,0}$		Initial state of M.	1
$H_{0,0}$		Initial position of read/write head.	1
$\neg T_{i,j,k} \vee \neg T_{i,j',k}$	$j \neq j'$	At most one symbol per tape cell.	$O(p(n)^2)$
$\bigvee_{j\in\Sigma} T_{i,j,k}$		At least one symbol per tape cell.	$O(p(n)^2)$
$T_{i,j,k} \wedge T_{i,j',k+1} \rightarrow H_{i,k}$	$j \neq j'$	Tape remains unchanged unless written.	$O(p(n)^2)$
$\neg Q_{q,k} \vee \neg Q_{q',k}$	$q \neq q'$	Only one state at a time.	$O(p(n))$
$\neg H_{i,k} \vee \neg H_{i',k}$	$i \neq i'$	Only one head position at a time.	$O(p(n)^3)$
$(H_{i,k} \wedge Q_{q,k} \wedge T_{i,\sigma,k}) \rightarrow \bigvee_{((q,\sigma),(q',\sigma',d))\in\delta} (H_{i+d,\ k+1} \wedge Q_{q',\ k+1} \wedge T_{i,\ \sigma',\ k+1})$	$k<p(n)$	Possible transitions at computation step k when head is at position i.	$O(p(n)^2)$
$\bigvee_{0\le k\le p(n)} \bigvee_{f\in F} Q_{f,k}$		Must finish in an accepting state, not later than in step $p(n)$.	1

اگر برای M حالت پذیرش وجود داشته باشدبرای ورودی I ، آنگاه با assign کردن Q , H , T به مقادیری که در جدول اولی نشان داده شد، عبارت B یک عبارت satisfiable خواهد بود.

تعداد متغیر ها $O(p(n)^2)$ است و هر یک در زمان $O(\log(p(n))$ encode میشوند. تعداد عبارات $O(p(n)^3)$ می باشد در نتیجه سایز عبارت B برابر $O(\log(p(n))p(n)^3)$ خواهدبوددر نتیجه تبدیلات همچنان در زمان چندجمله ای انجام میشوند.