Bab 1

pengantar

Topik Inti

Representasi angka di komputer

Kesalahan dalam solusi numerik, kesalahan pembulatan dan kesalahan pemotongan

Komputer dan pemrograman

1.1 LATAR BELAKANG

Metode numerik adalah teknik matematika yang digunakan untuk memecahkan masalah matematika yang tidak dapat diselesaikan atau sulit dipecahkan secara analitis. Solusi analitik adalah jawaban eksak dalam bentuk ekspresi matematis dalam bentuk variabel yang terkait dengan masalah yang sedang dipecahkan. Solusi numerik adalah nilai numerik perkiraan (angka) untuk solusi. Meskipun solusi numerik adalah perkiraan, mereka bisa sangat akurat. Dalam banyak metode numerik, perhitungan dijalankan secara iteratif sampai akurasi yang diinginkan tercapai.

Sebagai contoh, Gambar 1-1 menunjukkan balok bermassa m ditarik oleh gaya F yang diterapkan pada sudut . Dengan menerapkan persamaan keseimbangan, hubungan antara gaya dan sudut diberikan oleh:

di mana adalah koefisien gesekan dan g adalah percepatan gravitasi. Untuk nilai F yang diberikan, sudut yang diperlukan untuk memindahkan balok dapat ditentukan dengan menyelesaikan Persamaan. (1.1) untuk . Persamaan (1.1), bagaimanapun, tidak dapat diselesaikan secara analitis untuk . Dengan menggunakan metode numerik, solusi perkiraan dapat ditentukan untuk akurasi yang ditentukan. Ini berarti bahwa ketika solusi numerik untuk disubstitusikan kembali ke Persamaan. (1.1 ), nilai F yang diperoleh dari ekspresi di ruas kanan tidak persis sama dengan nilai F yang diberikan, tetapi sangat dekat.

Teknik numerik untuk memecahkan masalah matematika dikembangkan dan digunakan ratusan bahkan ribuan tahun yang lalu. Penerapan teknik numerik sulit karena perhitungan harus dilakukan dengan tangan atau dengan menggunakan perangkat komputasi mekanis sederhana, yang membatasi jumlah perhitungan yang dapat dilakukan, serta kecepatan dan akurasinya. Saat ini metode numerik digunakan dengan komputer digital elektronik cepat yang memungkinkan untuk melakukan banyak perhitungan yang membosankan dan berulang yang menghasilkan solusi yang akurat (walaupun tidak tepat) dalam waktu yang sangat singkat.

Memecahkan masalah dalam sains dan teknik

Proses pemecahan masalah dalam sains dan teknik dipengaruhi oleh alat (metode matematika) yang tersedia untuk memecahkan masalah. Prosesnya dapat dibagi menjadi langkah-langkah berikut:

Pernyataan masalah

Pernyataan masalah mendefinisikan masalah. Ini memberikan deskripsi masalah, daftar variabel yang terlibat, dan mengidentifikasi kendala dalam bentuk batas dan/atau kondisi awal.

Formulasi solusinya

Formulasi solusi terdiri dari model (hukum fisika atau hukum) yang digunakan untuk mewakili masalah dan turunan dari persamaan yang mengatur yang perlu diselesaikan. Contoh hukum tersebut adalah hukum Newton, hukum kekekalan massa, dan hukum termodinamika. Model yang digunakan (dipilih) untuk memecahkan masalah harus konsisten dengan metode yang selanjutnya digunakan untuk menyelesaikan persamaan. Jika metode analitik diharapkan digunakan untuk penyelesaian, persamaan yang mengatur harus dari jenis yang dapat diselesaikan secara analitik. Jika diperlukan, formulasi harus disederhanakan, sehingga persamaan dapat diselesaikan secara analitik. Jika metode numerik digunakan untuk penyelesaiannya, model dan persamaannya bisa lebih rumit. Meski begitu, bagaimanapun, beberapa batasan mungkin ada. Misalnya, jika formulasi sedemikian rupa sehingga solusi numerik memerlukan waktu komputasi yang lama, formulasi mungkin harus disederhanakan sehingga solusi diperoleh dalam waktu yang wajar. Contohnya adalah prakiraan cuaca. Masalah yang dipecahkan besar, dan model numerik yang digunakan sangat rumit. Namun, simulasi numerik cuaca tidak dapat bertahan lebih lama dari periode di mana prakiraan diperlukan.

Pemrograman (dari solusi numerik)

Jika masalah diselesaikan secara numerik, metode numerik yang digunakan untuk solusi harus dipilih. Untuk setiap jenis masalah matematika ada beberapa (atau banyak) teknik numerik yang dapat digunakan. Teknik berbeda dalam akurasi, panjang perhitungan, dan kesulitan dalam pemrograman. Setelah metode numerik dipilih, itu diimplementasikan dalam program komputer. Implementasinya terdiri dari algoritma, yang merupakan rencana rinci yang menjelaskan bagaimana melakukan metode numerik, dan program komputer, yang merupakan daftar perintah yang memungkinkan komputer untuk mengeksekusi algoritma untuk menemukan solusi.

Interpretasi solusi

Karena solusi numerik adalah perkiraan (kesalahan dibahas di Bagian 1.4), dan karena program komputer yang mengeksekusi metode numerik mungkin memiliki kesalahan (atau bug), solusi numerik perlu diperiksa dengan cermat. Ini dapat dilakukan dengan beberapa cara, tergantung pada masalahnya. Misalnya, jika metode numerik digunakan untuk menyelesaikan persamaan aljabar nonlinier, validitas solusi dapat diverifikasi dengan mensubstitusi solusi kembali ke persamaan. Dalam masalah yang lebih rumit, seperti solusi persamaan diferensial, solusi numerik dapat dibandingkan dengan solusi yang diketahui dari masalah serupa, atau masalah dapat diselesaikan beberapa kali menggunakan kondisi batas (atau awal) yang berbeda, dan metode numerik yang berbeda, dan memeriksa perbedaan berikutnya dalam solusi.

Sebuah ilustrasi dari dua langkah pertama dalam proses pemecahan masalah ditunjukkan pada Contoh 1-1.

Bab 8

Diferensiasi Numerik

Pendekatan perbedaan hingga dari turunan.

Rumus beda hingga menggunakan ekspansi deret Taylor

Ringkasan rumus beda hingga untuk diferensiasi numerik (8.4).

Rumus Diferensiasi Menggunakan Polinomial Lagrange

Topik Inti Diferensiasi menggunakan fitting kurva.

Penggunaan fungsi bawaan MATLAB untuk diferensiasi numerik.

Topik Pelengkap

ekstrapolasi Richardson.

Kesalahan dalam diferensiasi numerik

Diferensiasi parsial numerik.

8.1 LATAR BELAKANG

Diferensiasi memberikan ukuran laju perubahan kuantitas. Laju perubahan besaran muncul di banyak disiplin ilmu, terutama sains dan teknik. Salah satu yang lebih mendasar dari laju ini adalah hubungan antara posisi, kecepatan, dan percepatan. Jika posisi, x dari suatu benda yang bergerak sepanjang garis lurus dikenal sebagai fungsi waktu, t, (kurva atas pada Gambar 8-1):

kecepatan benda, v(t), adalah turunan dari posisi terhadap waktu (kurva tengah pada Gambar 8-1):

Kecepatan v adalah kemiringan kurva posisi-waktu. Demikian pula, percepatan benda, a(t), adalah turunan dari kecepatan terhadap waktu (kurva bawah pada Gambar 8-1):

Percepatan a adalah kemiringan kurva kecepatan-waktu.

Banyak model dalam fisika dan teknik dinyatakan dalam bentuk laju. Dalam rangkaian listrik, arus dalam kapasitor terkait dengan turunan waktu dari tegangan. Dalam menganalisis konduksi panas, jumlah aliran panas ditentukan dari turunan suhu. Diferensiasi juga digunakan untuk mencari nilai maksimum dan minimum fungsi.

Kebutuhan untuk diferensiasi numerik

Fungsi yang akan dibedakan dapat diberikan sebagai ekspresi analitis atau sebagai kumpulan titik-titik diskrit (data yang ditabulasi). Ketika fungsi diberikan sebagai ekspresi matematika sederhana, turunannya dapat ditentukan secara analitik. Ketika diferensiasi analitik dari ekspresi sulit atau tidak mungkin, diferensiasi numerik harus digunakan. Ketika fungsi ditentukan sebagai himpunan titik-titik diskrit, diferensiasi dilakukan dengan menggunakan metode numerik.

Diferensiasi numerik juga memainkan peran penting dalam beberapa metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial, seperti yang ditunjukkan pada Bab 10 dan 11.

Pendekatan untuk diferensiasi numerik

Diferensiasi numerik dilakukan pada data yang ditentukan sebagai kumpulan titik-titik diskrit. Dalam banyak kasus, data diukur atau dicatat dalam eksperimen, atau mungkin merupakan hasil dari perhitungan numerik skala besar. Jika ada kebutuhan untuk menghitung turunan numerik dari suatu fungsi yang diberikan dalam bentuk analitik, maka diferensiasi dilakukan dengan menggunakan titik-titik diskrit dari fungsi tersebut. Ini berarti bahwa dalam semua kasus integrasi numerik dilakukan dengan menggunakan nilai-nilai dari titik.

Untuk himpunan titik tertentu, dua pendekatan dapat digunakan untuk menghitung aproksimasi numerik dari turunan di salah satu titik. Salah satu pendekatannya adalah dengan menggunakan pendekatan beda hingga untuk turunannya. Pendekatan beda hingga dari turunan di titik xi adalah perkiraan perhitungan berdasarkan nilai titik di sekitar xi. Pendekatan ini diilustrasikan pada Gambar 8-2a di mana turunan pada titik xi didekati dengan kemiringan garis yang menghubungkan titik sebelum xi dengan titik setelah xi. Keakuratan aproksimasi beda hingga bergantung pada keakuratan titik data, jarak antar titik, dan rumus khusus yang digunakan untuk aproksimasi. Rumus paling sederhana mendekati turunan sebagai kemiringan garis yang menghubungkan dua titik yang berdekatan. Pendekatan perbedaan hingga tercakup dalam Bagian 8.2 dan 8.3.

Pendekatan kedua adalah mendekati titik-titik dengan ekspresi analitik yang dapat dengan mudah dibedakan, dan kemudian menghitung turunannya dengan membedakan ekspresi analitik. Ekspresi analitis perkiraan dapat diturunkan dengan menggunakan pemasangan kurva. Pendekatan ini diilustrasikan pada Gambar 8-2b, di mana titik-titiknya adalah kurva yang dipasang oleh f(x), dan turunannya di titik xi diperoleh dengan secara analitik membedakan fungsi aproksimasi dan mengevaluasi hasilnya pada titik xi. Pendekatan untuk diferensiasi numerik ini dijelaskan dalam Bagian 8.6.

Kebisingan(Noise) dan hamburan(scatter) di titik data

Ketika data yang akan dibedakan diperoleh dari pengukuran eksperimental, biasanya ada hamburan dalam data karena kesalahan eksperimental atau ketidakpastian dalam pengukuran (misalnya, gangguan listrik). Sekumpulan titik data yang mengandung hamburan ditunjukkan secara skematis pada Gambar 8-3. Jika kumpulan data ini didiferensiasikan menggunakan pendekatan beda hingga dua titik, yang merupakan bentuk paling sederhana dari pendekatan beda hingga (kemiringan garis yang menghubungkan dua titik yang berdekatan), maka variasi besar (nilai positif dan negatif) akan terlihat pada nilai turunan dari titik ke titik. Dari data pada gambar terlihat jelas bahwa nilai y umumnya bertambah dengan bertambahnya x, yang berarti turunan dari y w.r.t x positif. Hasil yang lebih baik dapat diperoleh dengan menggunakan rumus orde tinggi dari pendekatan perbedaan hingga yang memperhitungkan nilai dari lebih dari dua titik. Misalnya, (lihat rumus di Bagian 8.4) ada empat, lima, dan tujuh titik rumus beda hingga. Seperti disebutkan sebelumnya, diferensiasi juga dapat dilakukan dengan mencocokkan kurva data dengan fungsi analitik yang kemudian didiferensiasikan. Dalam hal ini, data dihaluskan sebelum dibedakan, menghilangkan masalah kemiringan yang diperkuat secara salah antara titik-titik yang berurutan.

8.2 PENDEKATAN SELISIH HINGGA DARI DERIVATIF

Turunan f'(x) dari suatu fungsi f(x) di titik x =a didefinisikan oleh:

Secara grafis, definisi tersebut diilustrasikan pada Gambar 8-4. Turunan adalah nilai kemiringan garis singgung fungsi pada x = a. Turunan diperoleh dengan mengambil titik x dekat x = a dan menghitung kemiringan garis yang menghubungkan kedua titik tersebut. Keakuratan menghitung turunan dengan cara ini meningkat seiring dengan semakin dekat titik x ke titik a. Pada limit, saat titik x mendekati titik a, turunannya adalah gradien garis yang menyinggung f(x) di x =a. Dalam Kalkulus, penerapan kondisi batas dalam Persamaan. (8.4), yang berarti bahwa titik x mendekati titik a, digunakan untuk menurunkan aturan diferensiasi yang memberikan ekspresi analitik untuk turunannya.

Dalam aproksimasi beda hingga turunan, nilai fungsi pada titik yang berbeda di sekitar titik x=a digunakan untuk memperkirakan kemiringan. Harus diingat bahwa fungsi yang sedang didiferensiasikan ditentukan oleh sekumpulan titik-titik diskrit. Berbagai rumus pendekatan perbedaan hingga ada. Tiga rumus tersebut, di mana turunannya dihitung dari nilai dua titik, disajikan di bagian ini.

Maju, mundur, dan rumus perbedaan pusat untuk turunan pertama

Rumus beda hingga ke depan, belakang, dan tengah adalah aproksimasi beda hingga paling sederhana dari turunan. Dalam pendekatan ini, diilustrasikan pada Gambar. 8-5, turunan pada titik (xi) dihitung dari nilai dua titik. Turunan ditaksir sebagai nilai kemiringan garis yang menghubungkan dua titik.

• Beda maju adalah gradien garis yang menghubungkan titik (xi,f(xi)) dan (xi+1,f(xi+1)):

• Beda mundur adalah kemiringan garis yang menghubungkan titik (xi-1,f(xi-1)) dan (xi,f(xi)):

• Beda pusat adalah gradien garis yang menghubungkan titik (xi-1,f(xi-1)) dan (xi+1,f(xi+1)) :

Dua contoh pertama menunjukkan penerapan rumus beda hingga ke depan, ke belakang, dan pusat. Contoh 8-1 membandingkan diferensiasi numerik dengan diferensiasi analitik, dan dalam Contoh 8-2 rumus digunakan untuk diferensiasi data diskrit.

Contoh 8-1: Membandingkan diferensiasi numerik dan analitik.

Perhatikan fungsi Hitung turunan pertamanya di titik x = 3 secara numerik dengan rumus beda hingga depan, belakang, dan pusat dan menggunakan:

(a) Titik x = 2, x = 3, dan x = 4.

(b) Titik x = 2.75, x = 3 , dan x = 3.25.

Bandingkan hasilnya dengan turunan eksak (analitis).

SOLUSI

Diferensiasi analitik: Turunan dari fungsi tersebut adalah , dan nilai f turunan pada x = 3 adalah

Diferensiasi numerik

(a) Titik-titik yang digunakan untuk diferensiasi numerik adalah:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| x | 2 | 3 | 4 |
| f(x) | 8 | 27 | 64 |

Menggunakan Persamaan. (8.5) sampai (8.7), turunan yang menggunakan rumus beda hingga ke depan, ke belakang, dan pusat adalah:

Beda hingga ke depan:

Beda terbatas mundur:

Beda hingga pusat:

(b) Titik-titik yang digunakan untuk diferensiasi numerik adalah:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *x* | *2* | *3* | *4* |
| *f(x)* |  |  |  |

Menggunakan Persamaan. (8.5) sampai (8.7), turunan yang menggunakan rumus beda hingga ke depan, ke belakang, dan pusat adalah:

Beda hingga ke depan:

Beda terbatas mundur:

Beda hingga pusat:

Hasilnya menunjukkan bahwa rumus beda hingga pusat memberikan pendekatan yang lebih akurat. Ini akan dibahas lebih lanjut di bagian berikutnya. Selain itu, pemisahan yang lebih kecil antara titik-titik memberikan perkiraan yang jauh lebih akurat.

Contoh 8-2: Getaran teredam.

Dalam percobaan getaran, sebuah balok bermassa m diikatkan pada pegas dengan kekakuan k, dan sebuah dashpot dengan koefisien redaman c, seperti yang ditunjukkan pada gambar. Untuk memulai percobaan balok dipindahkan dari posisi setimbang dan kemudian dilepaskan dari keadaan diam. Posisi balok sebagai fungsi waktu dicatat pada frekuensi 5 Hz (5 kali sedetik). Data yang direkam untuk 10 detik pertama ditunjukkan pada gambar. Titik data untuk 4 ≤ t ≤ 8 s diberikan dalam tabel di bawah ini.

(a) Kecepatan balok adalah turunan dari posisi w.r.t. waktu. Gunakan perbedaan hingga pusat rumus untuk menghitung kecepatan pada waktu t = 5 dan t = 6 s.

(b) Tulislah fungsi MATLAB yang ditentukan pengguna yang menghitung turunan dari suatu fungsi yang diberikan oleh himpunan titik-titik diskrit. Beri nama fungsi dx=derivative(x,y) dimana x dan y adalah vektor dengan koordinat titik-titik, dan dx adalah vektor dengan nilai turunan di setiap titik. Fungsi tersebut harus menghitung turunan pada dx pertama dan titik terakhir masing-masing menggunakan rumus beda hingga maju dan mundur, dan menggunakan rumus beda hingga pusat untuk semua titik lainnya.

Gunakan titik data yang diberikan untuk menghitung kecepatan balok untuk 4 ≤ t ≤ 8 detik Hitung percepatan balok dengan membedakan kecepatannya. Buatlah plot perpindahan, kecepatan, dan percepatan, terhadap waktu untuk 4 ≤ t ≤ 8 detik

t (s) 4.0 4.2 4.4 4.6 4.8 5.0 5.2 5.4 5.6 5.8 6.0 6.2

x (cm) -5.87 -4.23 -2.55 -0.89 0.67 2.09 3.31 4.31 5.06 5.55 5.78 5.77

t (s) 6.8 7.0 7.2 7.4 7.6 7.8 8.0

x (cm) 4.46 3.72 2.88 2.00 1.10 0.23 -0.59

SOLUSI

1. Kecepatan dihitung dengan menggunakan Persamaan. (8.7):

untuk t=5s

untuk t=6s

(b) Fungsi yang ditentukan pengguna dx=turunan(x, y) yang terdaftar berikutnya menghitung turunan dari suatu fungsi yang diberikan oleh himpunan titik-titik diskrit.

Program 8-1: File fungsi. Turunan dari suatu fungsi yang diberikan oleh titik.

function dx = derivative(x,y)

% derivative calculates the derivative of a function that is given by a set

% of points. The derivatives at the first and last points are calculated by

% using the forward and backward finite difference formula, respectively.

% The derivative at all the other points is calculated by the central

% finite difference formula.

% Input variables:

% x A vector with the coordinates x of the data points.

% y A vector with the coordinates y of the data points.

% Output variable:

% dx A vector with the value of the derivative at each point.

n = length(x);

dx(1) = (y(2)-y(1))/(x(2)-y(1));

for i=2:n-1

dx(i)=(y(i+1)-y(i-1))/(x(i+1)-x(i-1));

end

dx(n)= (y(n)-y(n-1))/(x(n)-x(n-1));

simpan dengan nama derivative.m

Turunan fungsi yang ditentukan pengguna digunakan dalam file skrip berikut. Program menentukan kecepatan (turunan dari titik data yang diberikan) dan percepatan (turunan dari kecepatan) dan kemudian menampilkan tiga plot.

t = 4:0.2:8;

x= [-5.87 -4.23 -2.55 -0.89 0.67 2.09 3.31 4.31 5.06 5.55 5.78 5.77 5.52 5.08 4.46 3.72 2.88 2.00 1.10 0.23 -0.59];

vel = derivative(t,x)

acc= derivative(t,vel)

subplot (3,1,1)

plot (t,x)

subplot (3,1,2)

plot (t,vel)

subplot (3,1,3)

plot (t,acc)

simpan dengan nama file main.m

8.3 FORMULAS PERBEDAAN HINGGA MENGGUNAKAN EKSPANSI DERET TAYLOR

Rumus selisih maju, mundur, dan pusat, serta banyak rumus selisih hingga lainnya untuk mendekati turunan, dapat diturunkan dengan menggunakan ekspansi deret Taylor. Rumus memberikan perkiraan turunan pada suatu titik dari nilai-nilai titik di sekitarnya. Jumlah titik yang digunakan dalam perhitungan bervariasi dengan rumus, dan titik dapat berada di depan, di belakang, atau di kedua sisi titik di mana turunan dihitung. Salah satu keuntungan menggunakan ekspansi deret Taylor untuk menurunkan rumus adalah bahwa hal itu juga memberikan perkiraan kesalahan pemotongan dalam pendekatan.

Pada bagian ini, beberapa rumus beda hingga diturunkan. Meskipun rumus dapat diturunkan untuk titik-titik yang berjarak tidak sama, penurunan di sini adalah untuk titik-titik yang berjarak sama. Bagian 8.3.1 memberikan rumus untuk aproksimasi turunan pertama, dan Bagian 8.3.2 membahas rumus beda hingga untuk turunan kedua. Metode yang digunakan untuk menurunkan rumus juga dapat digunakan untuk memperoleh rumus beda hingga untuk mendekati turunan orde tinggi. Rangkuman rumus beda hingga untuk mengevaluasi turunan sampai dengan turunan keempat disajikan pada Bagian 8.4.

8.3.1 Rumus Beda Hingga Turunan Pertama

Beberapa rumus untuk aproksimasi turunan pertama di titik xi berdasarkan nilai titik di dekat diturunkan dengan menggunakan ekspansi deret Taylor. Semua rumus yang diturunkan di bagian ini adalah untuk kasus di mana titik-titik berjarak sama.

Rumus beda maju dua titik untuk turunan pertama

Nilai suatu fungsi di titik dapat didekati dengan deret Taylor dalam bentuk nilai fungsi dan turunannya di titik :

di mana adalah jarak antar titik. Dengan menggunakan dua suku ekspansi deret Taylor dengan sisa (lihat Bab 2), Persamaan. (8.8) dapat ditulis ulang menjadi:

di mana adalah nilai antara dan .

Memecahkan Persamaan. (8.9) untuk menghasilkan:

Nilai perkiraan turunan sekarang dapat dihitung jika suku kedua di ruas kanan Persamaan. (8.10) diabaikan. Mengabaikan istilah kedua ini menyebabkan kesalahan pemotongan (diskritisasi). Karena suku ini sebanding dengan *h*, kesalahan pemotongan dikatakan berada pada orde *h* (ditulis sebagai ):

Harus ditunjukkan di sini bahwa besarnya kesalahan pemotongan tidak benar-benar diketahui karena nilai tidak diketahui. Namun demikian, Persamaan (8.11) berharga karena menyiratkan bahwa semakin kecil *h* memberikan yang lebih kecil Selain itu, seperti yang akan ditunjukkan nanti dalam bab ini, ini menyediakan sarana untuk membandingkan ukuran kesalahan dalam rumus beda hingga yang berbeda.

Menggunakan notasi Persamaan. (8.11), nilai perkiraan turunan pertama adalah:

Pendekatan dalam Persamaan. (8.12) sama dengan rumus beda maju pada Persamaan. 8.5).

Rumus selisih mundur dua titik untuk turunan pertama

Rumus selisih mundur juga dapat diturunkan dengan penerapan ekspansi deret Taylor. Nilai fungsi di titik didekati dengan deret Taylor dalam bentuk nilai fungsi dan turunannya di titik :

dimana . Dengan menggunakan ekspansi deret Taylor dua suku dengan sisa (lihat Bab 2), Persamaan. (8.13) dapat ditulis ulang sebagai:

di mana adalah nilai antara dan . Memecahkan Persamaan. (8.14) untuk menghasilkan:

Nilai perkiraan turunan, f'(xi), dapat dihitung jika suku kedua di ruas kanan Persamaan. (8.15) diabaikan. Ini menghasilkan:

Pendekatan dalam Persamaan. (8.16) sama dengan rumus selisih mundur pada Persamaan. (8.6)

Rumus beda pusat dua titik untuk turunan pertama

Rumus perbedaan pusat dapat diturunkan dengan menggunakan tiga suku dalam ekspansi deret Taylor dan sebuah sisa. Nilai fungsi di titik dalam hal nilai fungsi dan turunannya di titik diberikan oleh:

di mana ξ adalah nilai *x* antara *xi* dan *xi+1*. Nilai fungsi di titik *xi-1* dalam kaitannya dengan nilai fungsi dan turunannya di titik *xi* diberikan oleh:

dimana adalah nilai *x* antara *xi-1* dan *xi*. Dalam dua persamaan terakhir, jarak interval dianggap sama sehingga . Mengurangi Persamaan. (8.18) dari Persamaan. (8.17) memberikan:

Estimasi untuk turunan pertama diperoleh dengan menyelesaikan Persamaan. (8.19) untuk sambil mengabaikan suku-suku sisa, yang menimbulkan galat pemotongan, dengan orde *h2* :

Pendekatan dalam Persamaan. (8.20) sama dengan rumus beda pusat Persamaan. (8.7) untuk interval dengan jarak yang sama. Perbandingan Persamaan. (8.12), (8.16), dan (8.20) menunjukkan bahwa pada aproksimasi beda maju dan mundur kesalahan pemotongan berorde *h*, sedangkan pada aproksimasi beda pusat kesalahan pemotongan berorde *h2*. Hal ini menunjukkan bahwa aproksimasi perbedaan pusat memberikan aproksimasi turunan yang lebih akurat. Hal ini dapat diamati secara skematis pada Gambar 8-5, di mana kemiringan garis yang mewakili turunan yang didekati dalam aproksimasi perbedaan pusat tampak lebih dekat dengan kemiringan garis singgung daripada garis dari aproksimasi maju dan mundur.

Rumus selisih maju dan mundur tiga titik untuk turunan pertama

Rumus perbedaan maju dan mundur, Persamaan. (8.12) dan (8.16), berikan taksiran untuk turunan pertama dengan galat pemotongan *O(h)*. Rumus selisih maju mengevaluasi turunan di titik *xi* berdasarkan nilai pada titik tersebut dan titik yang berada tepat di sebelah kanannya *xi+l.* Rumus selisih mundur mengevaluasi turunan di titik *xi* berdasarkan nilai di titik tersebut dan satu tepat di sebelah kirinya, *xi-1*. Jelas, rumus beda maju dapat berguna untuk mengevaluasi turunan pertama pada titik pertama *x1* dan di semua titik interior, sedangkan rumus beda mundur berguna untuk mengevaluasi turunan pertama pada titik terakhir dan semua titik interior. Rumus perbedaan pusat, Persamaan. (8.20), memberikan perkiraan untuk turunan pertama dengan kesalahan *O(h2)*. Rumus perbedaan pusat mengevaluasi turunan pertama pada suatu titik *xi* yang diberikan dengan menggunakan titik-titik *xi-1* dan *xi+1* Akibatnya, untuk suatu fungsi yang diberikan oleh himpunan diskrit dari n titik, rumus perbedaan pusat hanya berguna untuk titik-titik interior dan bukan untuk titik akhir (*x1* atau *xn*). Estimasi untuk turunan pertama pada titik akhir, dengan kesalahan *O(h2)*, dapat dihitung dengan rumus selisih maju dan mundur tiga titik, yang diturunkan selanjutnya.

Rumus selisih maju tiga titik menghitung turunan di titik *xi* dari nilai pada titik tersebut dan dua titik berikutnya, *xi+1* dan *xi+2*. Diasumsikan bahwa titik-titik tersebut berjarak sama sehingga . (Prosedur ini dapat diterapkan pada titik-titik yang berjarak tidak sama.) Penurunan rumus dimulai dengan menggunakan tiga suku ekspansi deret Taylor dengan sisa, untuk menulis nilai fungsi di titik *xi+1* dan di titik *xi+2* dalam hal nilai fungsi dan turunannya di titik *xi*:

di mana f,1 adalah nilai x antara x; dan X;+1, dan f,2 adalah nilai x antara x; dan X;+2. Persamaan (8.21) dan (8.22) selanjutnya digabungkan sedemikian rupa sehingga suku-suku dengan turunan kedua hilang. Ini dilakukan dengan mengalikan Persamaan. (8.21) dengan 4 dan mengurangkan Persamaan. (8.22):

Estimasi untuk turunan pertama diperoleh dengan menyelesaikan Persamaan. (8.23) untuk f'(x;) sambil mengabaikan suku-suku sisa, yang menimbulkan kesalahan pemotongan orde h2

:

(8.24)

Persamaan (8.24) adalah rumus beda maju tiga titik yang menaksir turunan pertama di titik x; dari nilai fungsi pada titik tersebut dan pada dua titik berikutnya, X;+i dan X;+2, dengan galat O(h2). Rumus dapat digunakan untuk menghitung turunan pada titik pertama dari suatu fungsi yang diberikan oleh himpunan diskrit dari n titik.

Rumus selisih mundur tiga titik menghasilkan turunan pada titik x1 dari nilai fungsi pada titik tersebut dan pada dua titik sebelumnya, x1\_1 dan x1\_2• Rumus diturunkan dengan cara yang sama seperti Persamaan. (8.24) diturunkan. Perpanjangan deret Taylor tiga suku dengan sisa ditulis untuk nilai fungsi di titik x1\_ 1 , dan di titik x;\_2 dalam bentuk nilai fungsi dan turunannya di titik x1• Persamaan kemudian dimanipulasi menjadi dapatkan persamaan tanpa suku turunan kedua, yang kemudian diselesaikan untuk f'(x). Rumus yang didapat adalah :

(8.25)

di mana h = x;-x1\_1 = x1\_1-x;\_2 adalah jarak antar titik.

Contoh 8-3 menunjukkan penerapan rumus beda maju tiga titik untuk turunan pertama.