FisTum

**UU No 28 tahun 2014 tentang Hak Cipta**

**Fungsi dan sifat hak cipta Pasal 4**

Hak Cipta sebagaimana dimaksud dalam Pasal 3 huruf a merupakan hak eksklusif yang terdiri atas hak moral dan hak ekonomi.

**Pembatasan Pelindungan Pasal 26**

Ketentuan sebagaimana dimaksud dalam Pasal 23, Pasal 24, dan Pasal 25 tidak berlaku terhadap:

* + 1. penggunaan kutipan singkat Ciptaan dan/atau produk Hak Terkait untuk pelaporan peristiwa aktual yang ditujukan hanya untuk keperluan penyediaan informasi aktual;
    2. Penggandaan Ciptaan dan/atau produk Hak Terkait hanya untuk kepentingan penelitian ilmu pengetahuan;
    3. Penggandaan Ciptaan dan/atau produk Hak Terkait hanya untuk keperluan pengajaran, kecuali pertunjukan dan Fonogram yang telah dilakukan Pengumuman sebagai bahan ajar; dan
    4. penggunaan untuk kepentingan pendidikan dan pengembangan ilmu pengetahuan yang memungkinkan suatu Ciptaan dan/atau produk Hak Terkait dapat digunakan tanpa izin Pelaku Pertunjukan, Produser Fonogram, atau Lembaga Penyiaran.

**Sanksi Pelanggaran Pasal 113**

1. Setiap Orang yang dengan tanpa hak melakukan pelanggaran hak ekonomi sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf i untuk Penggunaan Secara Komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 1 (satu) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp100.000.000 (seratus juta rupiah).
2. Setiap Orang yang dengan tanpa hak dan/atau tanpa izin Pencipta atau pemegang Hak Cipta melakukan pelanggaran hak ekonomi Pencipta sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf c, huruf d, huruf f, dan/atau huruf h untuk Penggunaan Secara Komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 3 (tiga) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah).

Fisika Kuantum

Mohammad Malik Hidayatulloh, S.Si., M.Si,. Ph.d.



**JUDUL**

**Nama Penulis**

Desain Cover :

**Nama**

Sumber :

Link

Tata Letak :

**Nama**

Proofreader :

**Nama**

Ukuran :

**Jml hal judul, Jml hal isi naskah, Uk: 15.5x23 cm**

ISBN :

**No ISBN**

Cetakan Pertama :

**Bulan** **2019**

Hak Cipta 2019, Pada Penulis

Isi diluar tanggung jawab percetakan

**Copyright © 2019 by Deepublish Publisher**

All Right Reserved

Hak cipta dilindungi undang-undang

Dilarang keras menerjemahkan, memfotokopi, atau

memperbanyak sebagian atau seluruh isi buku ini

tanpa izin tertulis dari Penerbit.

**PENERBIT DEEPUBLISH**

**(Grup Penerbitan CV BUDI UTAMA)**

Anggota IKAPI (076/DIY/2012)

Jl.Rajawali, G. Elang 6, No 3, Drono, Sardonoharjo, Ngaglik, Sleman

Jl.Kaliurang Km.9,3 – Yogyakarta 55581

Telp/Faks: (0274) 4533427

Website: www.deepublish.co.id

www.penerbitdeepublish.com

E-mail: cs@deepublish.co.id

* + ***Memahamkan anak tentang simbol-simbol jalur evakuasi***

**Fakultas Teknik Sipil dan Perencanaan (FTSP)**

**UNIVERSITAS ISLAM INDONESIA**

Jl. Kaliurang Km 14,5 Yogyakarta

Telf. : (0274)895042, 086440 : Fax. : (0274)895330

Email : [dekanat@ftsp.uii.ac.id](mailto:dekanat@ftsp.uii.ac.id)

Homepage : www.uii.ac.id

*Buku Siap Siaga Bencana di Lingkungan SekitarPintar*

*Buku Siap Siaga Bencana di Lingkungan SekitarPintar*

*Buku Siap Siaga Bencana di Lingkungan SekitarPintar*

*Buku Siap Siaga Bencana di Lingkungan SekitarPintar*



*Buku Siap Siaga Bencana di Lingkungan SekitarPintar*

# KATA PENGANTAR / UCAPAN TERIMAKASIH

Isi kata pengantar pada paragraph pertama disini (jenis font bisa disesuaikan menurut keinginan anda)

Pada paragraph selanjutnya sebenarnya anda tinggal tekan enter saja agar format pada paragraph selanjutnya sama dengan paragraph pertama

Penulis / Nama

# DAFTAR ISI

[KATA PENGANTAR / UCAPAN TERIMAKASIH vi](#_Toc1080807035)

[DAFTAR ISI viii](#_Toc428785355)

[BAB 1. PENGANTAR 1](#_Toc1616467687)

[1. Mekanika Quantum 2](#_Toc1256411788)

[2. PERSAMAAN GELOMBANG 6](#_Toc663915020)

[3. PERSAMAAN SCHRÖDINGER: BENTUK YANG BERGANTUNG TERHADAP WAKTU 9](#_Toc1702539109)

[4. LINEARITAS DAN SUPERPOSISI 13](#_Toc1533896173)

# PENGANTAR

Secara bahasa, quantum diambil dari kata quanta yang berarti paket-paket. Mekanika terbagi menjadi 4 yaitu : mekanika klasik, mekanika quantum, mekanika relativitas, teori medan kuantum. Mekanika klasik membahas pada objek yang makroskopis (objek yang terlihat oleh mata normal) dan dengan kecepatan rendah (maksudnya jauh dari kecepatan cahaya), beberapa contoh dari mekanika klasik seperti mekanika Newton, mekanika Hamiltonian. Ketika objeknya semakin kecil (bukan objek makroskopis lagi) maka mekanika klasik tidak bisa menjelaskan, membuktikan, mendeskripsikan lagi karena hukum-hukum mekanika klasik ketika diterapkan untuk objek yang bukan makroskopis mengalami kegagalan dalam kata lain hukum-hukum mekanika klasik tidak berlaku lagi sehingga fenomena seperti ini kemudian dibahas oleh mekanika quantum yang bisa menjelaskan sampai pada tingkat partikel. Ketika objeknya bergerak dengan kecepatan yang mendekati kecepatan cahaya maka akan dibahas dalam teori relativitas, ada relativitas umum yang melibatkan gravitasi dan ada relativitas khusus yang tidak melibatkan gravitasi. Kemudian jika objeknya kecil dan kecepatannya mendekati cahaya maka akan dibahas oleh teori medan quantum. Yang akan kita diskusikan di sini adalah mekanika quantum artinya kita mengamati benda non-relativistik tetapi ukurannya sangat kecil atau pada tingkat partikel dan atom.

Beberapa teori tentang atom telah dijelaskan dalam fisika modern seperti teori atom yang dikemukakan oleh Rutherford, kemudian disempurnakan oleh Bohr. Meskipun teori atom Bohr yang dikembangkan lebih jauh mampu menjelaskan banyak aspek fenomena atom, tetapi teori atom Bohr memiliki sejumlah keterbatasan juga. Pertama, teori ini hanya berlaku untuk hidrogen dan ion satu elektron seperti He+ dan Li2+ bahkan untuk helium biasa teori ini sudah tidak berlaku. Teori Bohr tidak dapat menjelaskan mengapa garis spektral tertentu lebih intens daripada yang lain (mengapa transisi tertentu antara tingkat energi memiliki probabilitas kemunculan yang lebih besar daripada yang lain). Teori ini tidak dapat menjelaskan pengamatan bahwa banyak garis spektral sebenarnya terdiri dari beberapa garis terpisah yang panjang gelombangnya sedikit berbeda. Dan mungkin yang paling penting, itu tidak memungkinkan kita untuk mendapatkan apa yang seharusnya dimungkinkan oleh teori atom yang benar-benar sukses: pemahaman tentang bagaimana atom-atom individu berinteraksi satu sama lain untuk memberikan agregat makroskopik materi dengan sifat fisik dan kimia yang kita amati. Kelemahan-kelemahan sebelumnya terhadap teori Bohr tidak diajukan dengan cara yang tidak bersahabat, karena teori itu adalah salah satu pencapaian penting yang mengubah pemikiran ilmiah, tetapi lebih untuk menekankan bahwa diperlukan pendekatan yang lebih umum terhadap fenomena atom.

Pendekatan semacam itu dikembangkan pada tahun 1925 dan 1926 oleh Erwin Schrödinger, Werner Heisenberg, Max Born, Paul Dirac, dan lainnya dengan nama mekanika kuantum yang tepat. “Penemuan mekanika kuantum hampir merupakan kejutan total. Ini menggambarkan dunia fisik dengan cara yang pada dasarnya baru. Bagi banyak dari kita, itu tampak seperti keajaiban,” kata Eugene Wigner, salah satu pekerja awal di lapangan. Pada awal 1930-an penerapan mekanika kuantum untuk masalah yang melibatkan inti, atom, molekul, dan materi dalam keadaan padat memungkinkan untuk memahami kumpulan data yang luas (“sebagian besar fisika dan keseluruhan kimia,” menurut Dirac) dan penting untuk teori apa pun menghasilkan prediksi dengan akurasi yang luar biasa. Mekanika kuantum telah bertahan dari setiap uji eksperimental sejauh ini bahkan dari kesimpulan yang paling tidak terduga.

Tidak seperti mekanika Newton, atau elektrodinamika Maxwell, atau relativitas Einstein, teori kuantum tidak diciptakan atau bahkan dikemas secara definitif oleh satu individu, dan teori itu masih menyimpan beberapa bekas luka masa mudanya yang menggembirakan namun traumatis hingga hari ini. Tidak ada konsensus umum mengenai apa prinsip dasarnya, bagaimana seharusnya diajarkan, atau apa sebenarnya “artinya”. Setiap fisikawan yang kompeten dapat "melakukan" mekanika kuantum, tetapi cerita yang kita ceritakan kepada diri kita sendiri tentang apa yang kita lakukan sama beragamnya dengan kisah Scheherazade, dan hampir tidak masuk akal. Niels Bohr berkata, “Jika Anda tidak bingung dengan fisika kuantum maka Anda belum benar-benar memahaminya”; Richard Feynman berkomentar, "Saya pikir saya dapat dengan aman mengatakan bahwa tidak ada yang mengerti mekanika kuantum."

Tujuan dari buku ini adalah untuk mengajarkan Anda bagaimana melakukan mekanika kuantum. Terlepas dari beberapa latar belakang penting dalam Bab 1, pertanyaan kuasi-filosofis yang lebih dalam disimpan untuk akhir. Kami tidak percaya seseorang dapat dengan cerdas mendiskusikan apa arti mekanika kuantum sampai seseorang memiliki pemahaman yang kuat tentang apa yang dilakukan mekanika kuantum. Tetapi jika Anda benar-benar tidak sabar, tentu saja membaca Kata Penutup segera setelah menyelesaikan Bab 1.

Teori kuantum tidak hanya kaya secara konseptual, tetapi juga secara teknis sulit, dan solusi yang tepat untuk semua tetapi contoh buku teks yang paling artifisial sedikit dan jarang. Oleh karena itu penting untuk mengembangkan teknik khusus untuk menyerang masalah yang lebih realistis. Oleh karena itu, buku ini dibagi menjadi dua bagian; 1 Bagian I mencakup teori dasar, dan Bagian II menyusun gudang skema aproksimasi, dengan aplikasi ilustratif. Meskipun penting untuk memisahkan kedua bagian secara logis, tidak perlu mempelajari materi dalam urutan yang disajikan di sini. Beberapa instruktur, misalnya, mungkin ingin membahas teori gangguan waktu-independen tepat setelah Bab 2.

Buku ini ditujukan untuk kursus satu semester atau satu tahun di tingkat junior atau senior. Kursus satu semester harus berkonsentrasi terutama pada Bagian I; kursus setahun penuh harus memiliki ruang untuk materi tambahan di luar Bagian II. Pembaca harus terbiasa dengan dasar-dasar aljabar linier (seperti yang dirangkum dalam Lampiran), bilangan kompleks, dan kalkulus melalui turunan parsial; beberapa kenalan dengan analisis Fourier dan fungsi delta Dirac akan membantu. Mekanika klasik dasar sangat penting, tentu saja, dan sedikit elektrodinamika akan berguna di beberapa tempat. Seperti biasa, semakin banyak fisika dan matematika yang Anda ketahui, semakin mudah, dan semakin banyak yang Anda dapatkan dari studi Anda. Tapi mekanika kuantum bukanlah sesuatu yang mengalir mulus dan alami dari teori-teori sebelumnya. Sebaliknya, itu mewakili keberangkatan yang tiba-tiba dan revolusioner dari ide-ide klasik, menyerukan cara berpikir yang sepenuhnya baru dan secara radikal berlawanan dengan intuisi tentang dunia. Memang, itulah yang membuatnya menjadi subjek yang sangat menarik.

Sepintas, buku ini mungkin mengejutkan Anda sebagai matematika yang menakutkan. Kami menemukan polinomial Legendre, Hermite, dan Laguerre, harmonik bola, fungsi Bessel, Neumann, dan Hankel, fungsi Airy, dan bahkan fungsi zeta Riemann—belum lagi transformasi Fourier, ruang Hilbert, operator hermitian, dan koefisien Clebsch–Gordan. Apakah semua bagasi ini benar-benar diperlukan? Mungkin tidak, tetapi fisika seperti pertukangan: Menggunakan alat yang tepat membuat pekerjaan lebih mudah, tidak lebih sulit, dan mengajar mekanika kuantum tanpa peralatan matematika yang sesuai adalah seperti mencabut gigi dengan tang—mungkin, tapi menyakitkan. (Di sisi lain, dapat menjadi membosankan dan mengalihkan perhatian jika instruktur merasa berkewajiban untuk memberikan pelajaran yang rumit tentang penggunaan yang tepat dari setiap alat. Naluri kami adalah untuk menyerahkan sekop kepada siswa dan menyuruh mereka untuk mulai menggali. Mereka mungkin akan mengalami lecet pada awalnya. , tapi kami masih berpikir ini adalah cara yang paling efisien dan menarik untuk belajar.) Bagaimanapun, kami dapat meyakinkan Anda bahwa tidak ada matematika yang mendalam dalam buku ini, dan jika Anda mengalami sesuatu yang asing, dan Anda tidak menemukan penjelasan yang memadai, tentu saja bertanya kepada seseorang tentang hal itu, atau mencarinya. Ada banyak buku bagus tentang metode matematika—kami sangat merekomendasikan Mary Boas, Mathematical Methods in the Physical Sciences, 3rd edn, Wiley, New York (2006), atau George Arfken dan HansJurgen Weber, Mathematical Methods for Physicists, 7th edn, Academic Press ,Orlando (2013). Tapi apa pun yang Anda lakukan, jangan biarkan matematika—yang bagi kami hanyalah alat—mengaburkan fisika.

Beberapa pembaca telah mencatat bahwa ada lebih sedikit contoh yang dikerjakan dalam buku ini daripada yang biasa, dan bahwa beberapa materi penting diturunkan ke masalah. Ini bukan kecelakaan. Kami tidak percaya Anda dapat mempelajari mekanika kuantum tanpa melakukan banyak latihan sendiri. Instruktur tentu saja harus membahas sebanyak mungkin masalah di kelas selama waktu memungkinkan, tetapi siswa harus diperingatkan bahwa ini bukan subjek yang setiap orang memiliki intuisi alami—Anda mengembangkan serangkaian otot baru di sini, dan tidak ada pengganti senam. Mark Semon menyarankan agar kami menawarkan "Michelin Guide" untuk masalah tersebut, dengan jumlah bintang yang bervariasi untuk menunjukkan tingkat kesulitan dan kepentingan. Ini sepertinya ide yang bagus (walaupun, seperti kualitas restoran, pentingnya masalah sebagian adalah masalah selera); kami telah mengadopsi skema peringkat berikut:

\* masalah penting yang harus dipelajari setiap pembaca;

\*\* masalah yang agak lebih sulit atau periferal;

\*\*\* masalah yang luar biasa menantang, yang mungkin memakan waktu lebih dari satu jam.

(Tidak ada bintang sama sekali berarti makanan cepat saji: OK jika Anda lapar, tetapi tidak terlalu bergizi.) Sebagian besar masalah bintang satu muncul di akhir bagian yang relevan; sebagian besar masalah bintang tiga ada di akhir bab. Jika komputer diperlukan, kami meletakkan mouse di margin. Manual solusi tersedia (hanya untuk instruktur) dari penerbit.

Dalam penyusunan edisi ketiga ini kami berusaha semaksimal mungkin untuk mempertahankan semangat edisi pertama dan kedua. Meskipun sekarang ada dua penulis, kami masih menggunakan bentuk tunggal (“saya”) dalam menyapa pembaca—terasa lebih intim, dan bagaimanapun hanya satu dari kami yang dapat berbicara pada satu waktu (“kami” dalam teks berarti Anda, sang pembaca, dan saya, penulis, bekerja sama). Schroeter membawa perspektif baru dari ahli teori solid state, dan dia sebagian besar bertanggung jawab atas bab baru tentang simetri. Kami telah menambahkan sejumlah masalah, mengklarifikasi banyak penjelasan, dan merevisi Kata Penutup. Tapi kami bertekad untuk tidak membiarkan buku menjadi gemuk, dan untuk alasan itu kami telah menghilangkan bab tentang pendekatan adiabatik (wawasan signifikan dari bab itu telah dimasukkan ke dalam Bab 11), dan menghapus materi dari Bab 5 tentang mekanika statistik ( yang benar termasuk dalam buku tentang fisika termal). Tak perlu dikatakan bahwa instruktur dipersilakan untuk membahas topik lain seperti yang mereka inginkan, tetapi kami ingin buku teks itu sendiri untuk mewakili inti penting dari subjek.

## Tentang Mekanika Quantum

*Mekanika klasik adalah aproksimasi dari mekanika kuantum*

Perbedaan mendasar antara mekanika klasik (atau Newtonian) dan mekanika kuantum terletak pada apa yang mereka bahas. Dalam mekanika klasik, sejarah masa depan sebuah partikel sepenuhnya ditentukan oleh posisi awal dan momentumnya bersama dengan gaya-gaya yang bekerja padanya. Dalam dunia sehari-hari, besaran-besaran ini semuanya dapat ditentukan dengan cukup baik agar prediksi mekanika Newton sesuai dengan apa yang kita temukan.

Mekanika kuantum juga sampai pada hubungan antara besaran yang dapat diamati, tetapi sifat dari besaran yang dapat diamati berbeda ketika di alam atom, seperti ditunjukkan oleh prinsip ketidakpastian. Sebab dan akibat masih terkait dalam mekanika kuantum, tetapi apa yang menjadi perhatiannya membutuhkan interpretasi yang cermat. Dalam mekanika kuantum, jenis kepastian tentang karakteristik masa depan mekanika klasik tidak mungkin karena dalam mekanika quantum keadaan awal partikel tidak dapat ditentukan dengan akurasi yang memadai. Semakin banyak yang kita ketahui tentang posisi partikel sekarang, maka semakin sedikit yang kita ketahui tentang momentumnya dan karenanya tentang posisinya nanti.

Kuantitas yang hubungannya dieksplorasi mekanika kuantum adalah probabilitas. Misalnya, bahwa jari-jari orbit elektron dalam atom hidrogen saat keadaan normal selalu tepat 5.3x10-11 m, seperti yang dilakukan teori Bohr, mekanika kuantum menyatakan bahwa ini adalah jari-jari yang paling mungkin. Dalam percobaan yang sesuai, sebagian besar percobaan akan menghasilkan nilai yang berbeda, baik lebih besar atau lebih kecil, tetapi nilai yang paling mungkin ditemukan adalah 5.3x10-11 m.

Mekanika kuantum mungkin tampak pengganti yang buruk untuk mekanika klasik. Namun, mekanika klasik ternyata hanyalah versi perkiraan mekanika kuantum. Kepastian mekanika klasik adalah ilusi, dan kesepakatan nyata mereka dengan eksperimen terjadi karena objek biasa terdiri dari begitu banyak atom individu yang menyimpang dari perilaku rata-rata tidak terlalu mencolok. Keduanya sama-sama merupakan prinsip dalam fisika, yang satu untuk dunia makro dan satunya lagi untuk dunia mikro, hanya ada satu set yang termasuk dalam mekanika kuantum.

## Fungsi Gelombang

Kuantitas yang berkaitan dengan mekanika kuantum adalah **fungsi gelombang Ψ** suatu benda. Sementara itu **Ψ** sendiri tidak memiliki interpretasi fisik, kemungkinan menemukan partikel sebanding dengan kuadrat dari nilai mutlaknya |**Ψ**|2 yang dievaluasi di tempat tertentu pada waktu tertentu. Momentum linier, momentum sudut, dan energi benda adalah besaran lain yang dapat ditentukan dari **Ψ**. Masalah mekanika kuantum adalah untuk menentukan **Ψ** suatu benda ketika kebebasan geraknya dibatasi oleh aksi gaya eksternal.

Fungsi gelombang biasanya berupa fungsi kompleks yang terdiri dari bagian real dan imajiner. Probabilitas, bagaimanapun, harus menjadi kuantitas nyata positif. Oleh karena itu, kerapatan probabilitas |**Ψ**|2 untuk suatu kompleks diambil sebagai hasil kali **Ψ\*Ψ** dari **Ψ** dan **konjugat kompleksnya Ψ\***. Konjugat kompleks dari setiap fungsi diperoleh dengan mengganti i dengan -i dimanapun ia muncul dalam fungsi tersebut. Setiap fungsi kompleks **Ψ** dapat ditulis dalam bentuk

Dimana A dan B adalah fungsi Real. Konjugat komplek **Ψ\*** dari **Ψ** adalah

sehingga

karena i2 = -1. Sehingga selalu bernilai real positif seperti yang diperlukan.

## Linearitas Dan Superposisi

*Fungsi gelombang penjumlahan, bukan probabilitas*

Sifat penting persamaan Schrödinger adalah persamaan tersebut linier dalam fungsi gelombang **Ψ**. Dengan ini berarti bahwa persamaan memiliki suku yang mengandung **Ψ** dan turunannya tetapi tidak ada suku yang bebas dari Ψ atau yang melibatkan pangkat lebih tinggi dari **Ψ** atau turunannya. Akibatnya, kombinasi linear dari solusi persamaan Schrödinger untuk sistem yang diberikan juga merupakan solusi itu sendiri. Jika **Ψ**1 dan **Ψ**2 adalah dua solusi (yaitu, dua fungsi gelombang yang memenuhi persamaan), maka

(1.16)

juga merupakan solusi, di mana a1 dan a2 adalah konstanta. Jadi fungsi gelombang **Ψ**1 dan **Ψ**2 mematuhi prinsip superposisi yang dilakukan gelombang lain (lihat Bagian 2.1) dan kami menyimpulkan bahwa efek interferensi dapat terjadi untuk fungsi gelombang seperti halnya untuk cahaya, suara, air, dan gelombang elektromagnetik. Bahkan, diasumsikan bahwa gelombang de Broglie tunduk pada prinsip superposisi.

Mari kita terapkan prinsip superposisi pada difraksi berkas elektron. Gambar 5.2a menunjukkan sepasang celah yang dilalui berkas paralel elektron monoenergik menuju layar tampilan. Jika celah 1 saja yang terbuka, hasilnya adalah variasi intensitas yang ditunjukkan pada Gambar 5.2b yang sesuai dengan kerapatan peluang

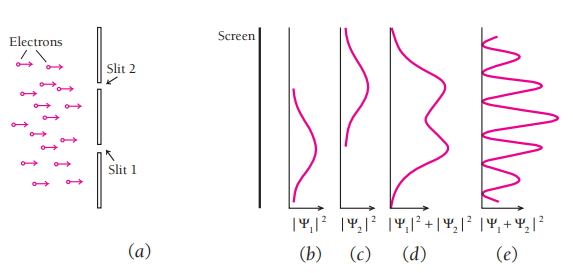
Jika hanya celah 2 yang terbuka, seperti pada Gambar 5.2c, kerapatan peluang yang sesuai adalah

Kita mungkin mengira bahwa membuka kedua celah akan memberikan variasi intensitas elektron yang dijelaskan oleh P1 + P2, seperti pada Gambar 5.2d. Namun, ini tidak terjadi karena dalam mekanika kuantum fungsi gelombang menambahkan, bukan probabilitas. Sebaliknya, hasil dengan kedua celah terbuka adalah seperti yang ditunjukkan pada Gambar 5.2e, pola yang sama dari bolak-balik maksima dan minima yang terjadi ketika seberkas cahaya monokromatik melewati celah ganda pada Gambar 2.4.

Pola difraksi pada Gambar 5.2e muncul dari superposisi Ψ fungsi gelombang **Ψ**1 dan **Ψ**2 elektron yang melewati celah 1 dan 2:

Oleh karena itu, kerapatan probabilitas di layar adalah

Dua suku di sebelah kanan persamaan ini mewakili perbedaan antara Gambar 5.2d dan e dan bertanggung jawab atas osilasi intensitas elektron pada layar. Dalam Sec. 6.8 perhitungan serupa akan digunakan untuk menyelidiki mengapa atom hidrogen memancarkan radiasi ketika mengalami transisi dari satu keadaan kuantum ke keadaan kuantum lainnya dengan energi yang lebih rendah.



Susunan percobaan celah ganda. (b) Intensitas elektron pada layar dengan hanya celah 1 yang terbuka. (c) Intensitas elektron pada layar dengan hanya celah 2 yang terbuka. (d) Jumlah intensitas (b) dan (c). (e) Intensitas sebenarnya pada layar dengan celah 1 dan 2 keduanya terbuka. Fungsi gelombang **Ψ**1 dan **Ψ**2 dijumlahkan untuk menghasilkan intensitas pada layar, bukan rapatan peluang dan

## Persamaan Gelombang

*Ini dapat memiliki berbagai solusi, termasuk yang kompleks*

**Persamaan Schrödinger**, yang merupakan persamaan dasar mekanika kuantum dalam arti yang sama bahwa hukum kedua tentang gerak adalah persamaan dasar mekanika Newton, adalah persamaan gelombang dalam variabel **Ψ**.

Sebelum kita membahas persamaan Schrödinger, mari kita tinjau persamaan gelombang

(1.3)

yang mengatur gelombang yang kuantitas variabelnya adalah y yang merambat dalam arah x dengan kecepatan v. Dalam kasus gelombang pada tali yang diregangkan, y adalah perpindahan tali dari sumbu x; dalam kasus gelombang suara, y adalah perbedaan tekanan; dalam kasus gelombang cahaya, y adalah besaran medan listrik atau magnet. Persamaan (1.3) dapat diturunkan dari hukum gerak kedua untuk gelombang mekanik dan dari persamaan Maxwell untuk gelombang elektromagnetik.

Solusi persamaan gelombang dapat bermacam-macam, yang mencerminkan variasi gelombang yang dapat terjadi satu pulsa perjalanan, ada rangkaian gelombang dengan amplitudo dan panjang gelombang konstan, ada rangkaian gelombang superposisi dengan amplitudo dan panjang gelombang yang sama, ada rangkaian superposisi gelombang dengan amplitudo dan panjang gelombang yang berbeda, ada gelombang berdiri pada tali yang diikatkan pada kedua ujungnya, dan seterusnya. Semua solusi harus berbentuk

(1.4)

di mana F adalah sembarang fungsi yang dapat dibedakan. Solusi untuk gelombang yang merambat dalam arah x, dan solusi untuk gelombang yang merambat dalam arah -x.

Mari kita pertimbangkan ekivalen gelombang dari “partikel bebas”, yang merupakan partikel yang tidak berada di bawah pengaruh gaya apa pun dan karena itu menempuh jalur lurus dengan kecepatan konstan. Gelombang ini dijelaskan oleh solusi umum Persamaan. (1.3) untuk gelombang harmonik tak teredam (yaitu, amplitudo konstan A), monokromatik (frekuensi sudut konstan ω) dalam arah +x, yaitu

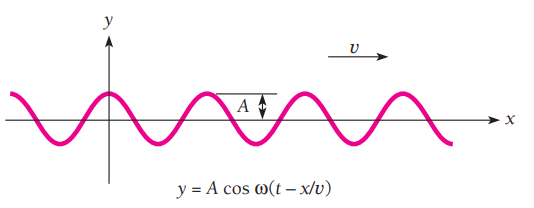
(1.5)

Dalam rumus ini y adalah besaran kompleks, dengan bagian real dan imajiner. Karena

persamaan (1.5) dapat ditulis dalam bentuk

(1.6)

Hanya bagian nyata dari Persamaan. (1.6) yang memiliki arti penting dalam kasus gelombang pada tali yang diregangkan. Di sana y mewakili perpindahan tali dari posisi normalnya (Gbr. 1.1), dan bagian imajiner dari Persamaan. (1.6) dibuang karena tidak relevan.



Gambar 1.1 Gelombang pada bidang xy yang merambat dalam arah x sepanjang tali yang direntangkan pada sumbu x

Contoh 5.1

Buktikan bahwa persamaan (1.5) adalah penyelesaian persamaan gelombang

solusi

Turunan fungsi eu adalah

Turunan parsial pertama dari y terhadap x (artinya kita asumsikan bahwa t bernilai konstan) dari persamaan (1.5) menjadi

Turunan parsial kedua dari y terhadap x adalah

Turunan parsial y terhadap t adalah

Turunan kedua dari y terhadap t adalah

Selesaikan turunan kedua y terhadap x dan y terhadap t

Jadi, persamaan terbukti sebagai solusi dari persamaan

## Persamaan Schrödinger: Bentuk Yang Bergantung Terhadap Waktu

*Prinsip fisik dasar yang tidak dapat diturunkan dari hal lain*

Dalam mekanika kuantum, fungsi gelombang **Ψ** sesuai dengan variabel gelombang y dari gerakan gelombang secara umum. Namun, **Ψ**, tidak seperti y, bukanlah besaran yang dapat diukur dan karena itu mungkin kompleks. Untuk alasan ini kami berasumsi bahwa **Ψ** untuk partikel yang bergerak bebas dalam arah +x ditentukan oleh

(1.7)

Mengganti ω pada persamaan di atas dengan dan v dengan λv memberikan

(1.8)

Ini nyaman karena kita sudah tahu apa itu v dan λ adalah dalam hal energi total E dan momentum p partikel yang dijelaskan oleh Ψ. Karena

dan

kita punya partikel bebas

(1.9)

Persamaan (1.9) menggambarkan ekuivalen gelombang dari sebuah partikel tak terbatas dengan energi total E dan momentum p yang bergerak dalam arah +x, seperti yang telah dijelaskan oleh Persamaan. (1.5) sebelumnya, misalnya, sebuah gelombang perpindahan harmonik yang bergerak bebas di sepanjang tali yang diregangkan.

Ekspresi untuk fungsi gelombang **Ψ** diberikan oleh Persamaan. (1.9) adalah benar hanya untuk partikel yang bergerak bebas. Namun, kami paling tertarik pada situasi di mana gerakan partikel tunduk pada berbagai batasan. Perhatian penting, misalnya, adalah elektron yang terikat pada atom oleh medan listrik nukleusnya. Yang harus kita lakukan sekarang adalah memperoleh persamaan diferensial fundamental untuk **Ψ**, yang kemudian dapat kita selesaikan untuk **Ψ** dalam situasi tertentu. Persamaan ini, yang merupakan persamaan Schrödinger, dapat diperoleh dengan berbagai cara, tetapi tidak dapat diturunkan secara ketat dari prinsip fisika yang ada: persamaan mewakili sesuatu yang baru. Apa yang akan dilakukan di sini adalah menunjukkan satu langkah menuju persamaan gelombang untuk **Ψ** dan kemudian mendiskusikan signifikansi hasilnya.

Kita mulai dengan menurunkan dua kali Persamaan. (1.9) untuk **Ψ** terhadap x, yang memberikan

(1.10)

Turunkan Persamaan. (1.9) sekali terhadap t memberikan

(1.11)

Pada kecepatan yang lebih kecil dibandingkan dengan kecepatan cahaya, energi total E sebuah partikel adalah jumlah energi kinetiknya dan energi potensialnya U, di mana U secara umum merupakan fungsi dari posisi x dan waktu t:

(1.12)

Fungsi U mewakili pengaruh seluruh alam semesta pada partikel. Tentu saja, hanya sebagian kecil dari alam semesta yang berinteraksi dengan partikel sampai batas tertentu; misalnya, dalam kasus elektron dalam atom hidrogen, hanya medan listrik inti yang harus diperhitungkan.

Mengalikan kedua sisi Persamaan. (1.12) dengan fungsi gelombang Ψ memberikan

(1.13)

Sekarang kita substitusikan dan dari Persamaan. (1.10) dan (1.11) untuk mendapatkan **bentuk persamaan Schrödinger yang bergantung pada waktu** untuk satu dimensi:

kedua ruas dikalikan dengan menghasilkan

(1.14)

Dalam tiga dimensi, bentuk persamaan Schrödinger yang bergantung waktu adalah

(1.15)

di mana energi potensial partikel U adalah beberapa fungsi dari *x, y, z,* dan *t*. Setiap pembatasan yang mungkin ada pada gerakan partikel akan mempengaruhi fungsi energi potensial U. Setelah U diketahui, persamaan Schrödinger dapat diselesaikan untuk fungsi gelombang **Ψ** dari partikel, dari mana kerapatan probabilitasnya |**Ψ**|2 dapat ditentukan untuk *x, y, z, t* tertentu.

**Persamaan Schrödinger**

Bayangkan sebuah partikel bermassa m, dibatasi untuk bergerak sepanjang sumbu x, dikenai gaya tertentu F(x,t) (Gambar 1.1). Program mekanika klasik adalah menentukan posisi partikel pada waktu tertentu: x(t). Setelah kita mengetahuinya, kita dapat mengetahui kecepatan (v=dx/dt), momentum (p=mv), energi kinetik (T=(1/2)mv2), atau variabel dinamis lainnya yang menarik. Dan bagaimana cara menentukan x(t)? Kami menerapkan hukum kedua Newton: F = ma. (Untuk sistem konservatif—satu-satunya jenis yang akan kita bahas, dan untungnya, satu-satunya jenis yang terjadi pada tingkat mikroskopis—gaya dapat dinyatakan sebagai turunan dari fungsi energi potensial, F=-dv/dx , dan hukum Newton membaca md2/dt2=-dv/dx.) Ini, bersama dengan kondisi awal yang sesuai (biasanya posisi dan kecepatan att=0 ), menentukan x(t).

Mekanika kuantum mendekati masalah yang sama ini dengan cara yang sangat berbeda. Dalam hal ini yang kita cari adalah fungsi gelombang partikel, (x,t), dan kita mendapatkannya dengan menyelesaikan persamaan Schrödinger:

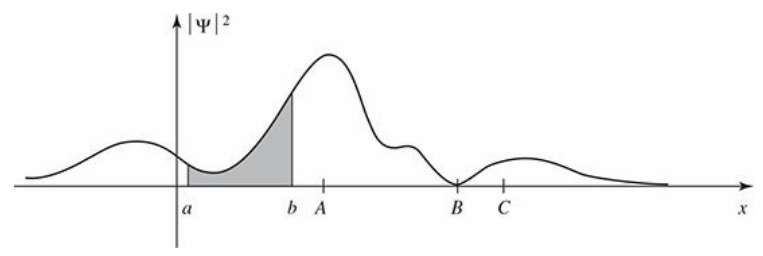
Di sini i adalah akar kuadrat dari , dan adalah konstanta Planck—atau lebih tepatnya, konstanta aslinya (h) dibagi dengan:

Persamaan Schrödinger memainkan peran yang secara logis analog dengan hukum kedua Newton: Mengingat kondisi awal yang sesuai (biasanya, Ψ(x,t)), persamaan Schrödinger menentukan Ψ(x,t) untuk semua waktu di masa depan, sama seperti, dalam mekanika klasik, hukum Newton menentukan x(t) untuk semua waktu di masa depan.

## Interpretasi Statistik

Tapi apa sebenarnya "fungsi gelombang" ini, dan apa fungsinya untuk Anda setelah Anda mendapatkannya? Bagaimanapun, sebuah partikel, menurut sifatnya, terlokalisasi pada suatu titik, sedangkan fungsi gelombang (seperti namanya) tersebar di ruang angkasa (ini adalah fungsi dari x, untuk t yang diberikan). Bagaimana objek seperti itu dapat mewakili keadaan partikel? Jawabannya diberikan oleh interpretasi statistik Born, yang mengatakan bahwa memberikan probabilitas untuk menemukan partikel di titik x, pada waktu t atau, lebih tepatnya

Probabilitas adalah luas daerah di bawah grafik . Untuk fungsi gelombang pada Gambar 1.2, Anda akan sangat mungkin menemukan partikel di sekitar titik A, di mana besar, dan relatif tidak mungkin menemukannya di dekat titik B.



Gambar 1.2: Fungsi gelombang tipikal. Daerah yang diarsir menyatakan peluang menemukan partikel antara a dan b. Partikel akan relatif mungkin ditemukan di dekat A, dan tidak mungkin ditemukan di dekat B.

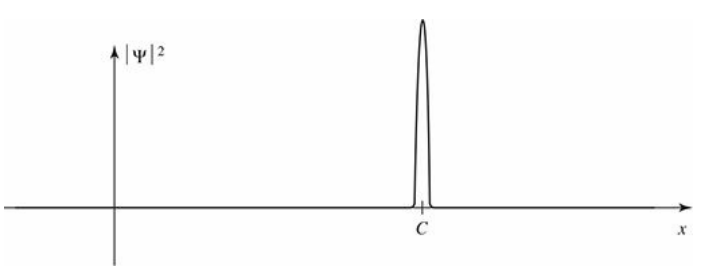
Interpretasi statistik memperkenalkan semacam ketidakpastian ke dalam mekanika kuantum, karena bahkan jika Anda tahu semua yang harus dikatakan teori tentang partikel (yaitu: fungsi gelombangnya), Anda tetap tidak dapat memprediksi dengan pasti hasil eksperimen sederhana untuk mengukur posisinya—semua mekanika kuantum yang ditawarkan adalah informasi statistik tentang kemungkinan hasil. Ketidakpastian ini telah sangat mengganggu fisikawan dan filsuf, dan wajar untuk bertanya-tanya apakah itu fakta alam, atau cacat dalam teori.

Misalkan saya mengukur posisi partikel, dan saya menemukannya di titik C. Pertanyaan: Di mana partikel sebelum saya melakukan pengukuran? Ada tiga jawaban yang masuk akal untuk pertanyaan ini, dan mereka berfungsi untuk mengkarakterisasi aliran pemikiran utama mengenai ketidakpastian kuantum:

1. Posisi realis: Partikel itu berada di C. Hal ini tampaknya masuk akal, dan ini adalah respons yang dianjurkan Einstein. Namun, perhatikan bahwa jika ini benar maka mekanika kuantum adalah teori yang tidak lengkap, karena partikelnya benar-benar berada di C, namun mekanika kuantum tidak dapat memberi tahu kita demikian. Bagi kaum realis, ketidakpastian bukanlah fakta alam, tetapi cerminan dari ketidaktahuan kita. Seperti yang dikatakan d'Espagnat, "posisi partikel tidak pernah tidak pasti, tetapi hanya tidak diketahui oleh peneliti." Jelas **Ψ** bukan keseluruhan cerita—beberapa informasi tambahan (dikenal sebagai variabel tersembunyi) diperlukan untuk memberikan deskripsi lengkap tentang partikel.
2. Posisi ortodoks: Partikel itu tidak benar-benar ada di mana pun. Tindakan pengukuranlah yang memaksanya untuk “bersikap” (meskipun bagaimana dan mengapa memutuskan pada titik C kami tidak berani bertanya). Jordan mengatakannya dengan sangat gamblang: “Pengamatan tidak hanya mengganggu apa yang akan diukur, tetapi juga menghasilkannya … Kami memaksa [partikel] untuk mengambil posisi tertentu.” Pandangan ini (yang disebut interpretasi Kopenhagen), dikaitkan dengan Bohr dan para pengikutnya. Di antara fisikawan itu selalu menjadi posisi yang paling diterima secara luas. Namun, perhatikan bahwa jika itu benar, ada sesuatu yang sangat aneh tentang tindakan pengukuran—sesuatu yang hampir satu abad perdebatan tidak banyak membantu untuk dijelaskan.
3. Posisi agnostik: Menolak menjawab. Ini tidak sebodoh kedengarannya — lagi pula, apa gunanya membuat pernyataan tentang status partikel sebelum pengukuran, ketika satu-satunya cara untuk mengetahui apakah Anda benar adalah dengan melakukan pengukuran, di mana kasus apa yang Anda dapatkan tidak lagi "sebelum pengukuran"? Adalah metafisika (dalam arti kata yang merendahkan) untuk mengkhawatirkan sesuatu yang pada dasarnya tidak dapat diuji. Pauli berkata: "Seseorang seharusnya tidak lagi memeras otak tentang masalah apakah sesuatu yang tidak dapat diketahui apa-apa tentang keberadaannya sama sekali, daripada tentang pertanyaan kuno tentang berapa banyak malaikat yang dapat duduk di ujung jarum." Selama beberapa dekade ini adalah posisi "mundur" dari sebagian besar fisikawan: mereka akan mencoba menjual jawaban ortodoks kepada Anda, tetapi jika Anda gigih, mereka akan mundur ke respons agnostik, dan mengakhiri percakapan.

Sampai baru-baru ini, ketiga posisi (realis, ortodoks, dan agnostik) memiliki pendukungnya masing-masing. Tetapi pada tahun 1964 John Bell mengejutkan komunitas fisika dengan menunjukkan bahwa membuat perbedaan yang dapat diamati apakah partikel memiliki posisi yang tepat (meskipun tidak diketahui) sebelum pengukuran, atau tidak. Penemuan Bell secara efektif menghilangkan agnostisisme sebagai pilihan yang layak, dan menjadikannya pertanyaan eksperimental apakah 1 atau 2 adalah pilihan yang benar. Saya akan kembali ke cerita ini di akhir buku, ketika Anda berada dalam posisi yang lebih baik untuk menghargai argumen Bell; untuk saat ini, cukuplah untuk mengatakan bahwa eksperimen-eksperimen itu secara meyakinkan telah mengkonfirmasi interpretasi ortodoks: 8 sebuah partikel sama sekali tidak memiliki posisi yang tepat sebelum pengukuran, seperti halnya riak-riak di kolam; itu adalah proses pengukuran yang menekankan pada satu angka tertentu, dan dengan demikian dalam arti tertentu menciptakan hasil yang spesifik, hanya dibatasi oleh pembobotan statistik yang dipaksakan oleh fungsi gelombang.

Bagaimana jika saya melakukan pengukuran kedua, segera setelah yang pertama? Apakah saya akan mendapatkan C lagi, atau apakah tindakan pengukuran menghasilkan angka yang sama sekali baru setiap kali? Pada pertanyaan ini semua orang setuju: Pengukuran berulang (pada partikel yang sama) harus mengembalikan nilai yang sama. Memang, akan sulit untuk membuktikan bahwa partikel itu benar-benar ditemukan di C pada contoh pertama, jika ini tidak dapat dikonfirmasi dengan pengulangan pengukuran secara langsung. Bagaimana interpretasi ortodoks menjelaskan fakta bahwa pengukuran kedua pasti akan menghasilkan nilai C? Pastilah pengukuran pertama secara radikal mengubah fungsi gelombang, sehingga sekarang mencapai puncak yang tajam di sekitar C (Gambar 1.3). Kami mengatakan bahwa fungsi gelombang runtuh, pada pengukuran, ke lonjakan di titik C (segera menyebar lagi, sesuai dengan persamaan Schrödinger, sehingga pengukuran kedua harus dilakukan dengan cepat). Maka, ada dua jenis proses fisik yang sama sekali berbeda: proses "biasa", di mana fungsi gelombang berkembang secara santai di bawah persamaan Schrödinger, dan "pengukuran", di mana **Ψ** tiba-tiba dan terputus-putus runtuh.



Gambar 1.3: Runtuhnya fungsi gelombang: grafik segera setelah pengukuran menemukan partikel di titik C.

## Probability

### Variable diskrit

Karena interpretasi statistik, probabilitas memainkan peran sentral dalam mekanika kuantum, jadi saya menyimpang sekarang untuk diskusi singkat tentang teori probabilitas. Ini terutama masalah pengenalan beberapa notasi dan terminologi, dan saya akan melakukannya dalam konteks contoh sederhana. Bayangkan sebuah ruangan berisi empat belas orang, yang usianya adalah sebagai berikut:

satu orang berusia 14 tahun,

satu orang berusia 15 tahun,

tiga orang berusia 16 tahun,

dua orang berusia 22 tahun,

dua orang berusia 24 tahun,

lima orang berusia 25 tahun.

Jika kita biarkan N(j) mewakili jumlah orang yang berusia j, maka

N(14)=1,

N(15)=1,

N(16)=3,

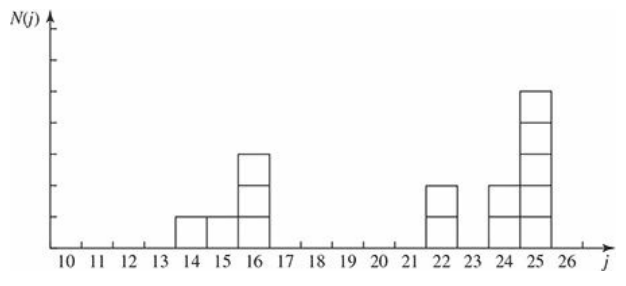
N(22)=2,

N(24)=2,

N(25)=5,

sementara N(17), misalnya, adalah nol. Jumlah orang dalam ruangan tersebut adalah

(Dalam contoh, tentu saja, N=14.) Gambar 1.5 adalah histogram dari data. Berikut ini adalah beberapa pertanyaan yang mungkin ditanyakan tentang distribusi ini.



Gambar 1.5: Histogram yang menunjukkan jumlah orang, N(j), dengan usia j, misalnya pada Bagian 1.3.1.

Pertanyaan 1 Jika Anda memilih satu orang secara acak dari kelompok ini, berapa peluang bahwa usia orang ini adalah 15 tahun?

Jawaban Satu peluang dalam 14, karena ada 14 kemungkinan pilihan, semua kemungkinannya sama, di antaranya hanya satu yang memiliki usia tertentu. Jika P(j) adalah peluang mendapatkan umur j, maka P(14)=1/14, P(15)=1/14, P(16)=3/14, dan seterusnya. Secara umum,

Perhatikan bahwa peluang mendapatkan 14 atau 15 adalah jumlah dari peluang individu (dalam hal ini, 1/7). Secara khusus, jumlah semua probabilitasnya adalah 1—orang yang Anda pilih harus memiliki usia tertentu:

Pertanyaan 2 Berapa usia yang paling mungkin?

Jawaban 25, jelas; lima orang berbagi usia ini, sedangkan paling banyak tiga memiliki usia lain. J yang paling mungkin adalah j dimana P(j) adalah maksimum.

Pertanyaan 3 Berapa usia rata-rata?

Jawaban 23, untuk 7 orang lebih muda dari 23, dan 7 lebih tua. (Median adalah nilai j sedemikian rupa sehingga probabilitas mendapatkan hasil yang lebih besar sama dengan probabilitas mendapatkan hasil yang lebih kecil.)

Pertanyaan 4 Berapa usia rata-rata (atau rata-rata)?

Jawab

Secara umum, nilai rata-rata j (yang akan kita tulis sebagai berikut: (j)) adalah

Perhatikan bahwa tidak perlu ada orang dengan usia rata-rata atau usia rata-rata—dalam contoh ini tak seorang pun kebetulan berusia 21 atau 23 tahun. Dalam mekanika kuantum, rata-rata biasanya adalah besaran bunga; dalam konteks itu telah disebut nilai harapan. Ini adalah istilah yang menyesatkan, karena ini menunjukkan bahwa ini adalah hasil yang kemungkinan besar akan Anda dapatkan jika Anda melakukan satu pengukuran (itu akan menjadi nilai yang paling mungkin, bukan nilai rata-rata)—tetapi saya khawatir kita terjebak dengan itu.

Pertanyaan 5 Berapa rata-rata kuadrat usia?

Jawaban Anda bisa mendapatkan 142=196, dengan probabilitas 1/14, atau 152=225, dengan probabilitas 1/14, atau 162=256, dengan probabilitas 3/14, dan seterusnya. Maka rata-ratanya adalah

In general, the average value of some function of j is given by

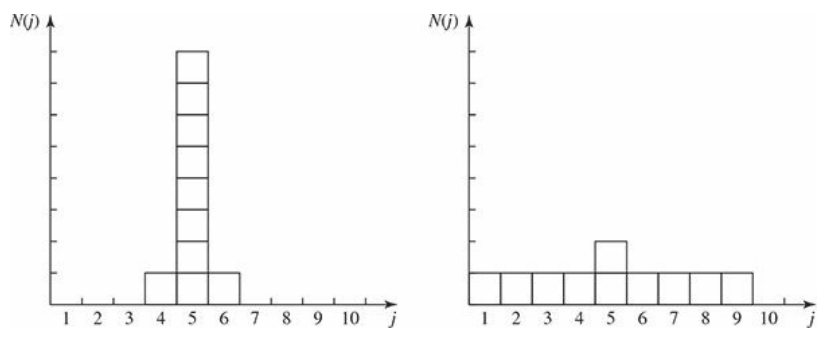
(Persamaan 1.6, 1.7, dan 1.8 adalah, jika Anda suka, kasus khusus dari rumus ini.) Hati-hati: Rata-rata kuadrat, (j2), tidak sama, secara umum, dengan kuadrat rata-rata, (j)2. Misalnya, jika ruangan tersebut hanya berisi dua bayi berusia 1 dan 3 tahun, maka (j2)=5, tetapi (j)2=4.

Sekarang, ada perbedaan mencolok antara dua histogram pada Gambar 1.6, meskipun mereka memiliki median yang sama, rata-rata yang sama, nilai yang paling mungkin sama, dan jumlah elemen yang sama: Yang pertama memuncak tajam tentang nilai rata-rata, sedangkan yang kedua luas dan datar. (Yang pertama mungkin mewakili profil usia untuk siswa di ruang kelas kota besar, yang kedua, mungkin, sekolah satu kamar pedesaan.) Kita membutuhkan ukuran numerik dari jumlah "penyebaran" dalam distribusi, sehubungan dengan rata-rata. Cara yang paling jelas untuk melakukan ini adalah dengan mencari tahu seberapa jauh setiap individu dari rata-rata,

dan menghitung rata-rata dari Δj. Masalahnya, tentu saja, Anda mendapatkan nol:

(Perhatikan bahwa (j) konstan—tidak berubah saat Anda berpindah dari satu anggota sampel ke yang lain—sehingga dapat diambil di luar penjumlahan.) Untuk menghindari masalah yang menjengkelkan ini, Anda dapat memutuskan untuk merata-ratakan nilai absolut dari . Tetapi nilai-nilai absolut tidak menyenangkan untuk dikerjakan; sebagai gantinya, kita mengatasi masalah tanda dengan mengkuadratkan sebelum rata-rata

Kuantitas ini dikenal sebagai varians dari distribusi; σ itu sendiri (akar kuadrat rata-rata kuadrat deviasi dari rata-rata—teguk!) disebut deviasi standar. Yang terakhir adalah ukuran umum dari penyebaran sekitar (j).



Gambar 1.6: Dua histogram dengan median yang sama, rata-rata yang sama, dan nilai kemungkinan yang sama, tetapi standar deviasi yang berbeda.

Ada teorema kecil yang berguna tentang varians:

Mengambil akar kuadrat, standar deviasi itu sendiri dapat ditulis sebagai

Dalam praktiknya, ini adalah cara yang jauh lebih cepat untuk mendapatkan daripada dengan penerapan langsung Persamaan 1.11: cukup hitung (j2) dan (j)2, kurangi, dan ambil akar kuadratnya. Kebetulan, saya memperingatkan Anda beberapa saat yang lalu bahwa (j2) secara umum tidak sama dengan (j)2. Karena σ2 jelas non-negatif (dari definisinya 1.11), Persamaan 1.12 menyiratkan bahwa

dan keduanya sama hanya jika σ=0, artinya, untuk distribusi tanpa spread sama sekali (setiap anggota memiliki nilai yang sama).

### Variabel Kontinu

Sejauh ini, saya berasumsi bahwa kita berurusan dengan variabel diskrit—yaitu, variabel yang hanya dapat mengambil nilai terisolasi tertentu (dalam contoh, j harus bilangan bulat, karena saya memberikan usia hanya dalam tahun). Tetapi cukup sederhana untuk menggeneralisasi ke distribusi kontinu. Jika saya memilih seseorang secara acak dari jalanan, peluang usianya tepat 16 tahun, 4 jam, 27 menit, dan 3,333… detik adalah nol. Satu-satunya hal yang masuk akal untuk dibicarakan adalah probabilitas bahwa usianya terletak pada beberapa interval—katakanlah, antara 16 dan 17. Jika intervalnya cukup pendek, probabilitas ini sebanding dengan panjang interval. Misalnya, peluang usianya antara 16 dan 16 ditambah dua hari mungkin dua kali lipat kemungkinan antara 16 dan 16 ditambah satu hari. (Kecuali, saya kira, ada ledakan bayi yang luar biasa 16 tahun yang lalu, tepat pada hari itu—dalam hal ini kami hanya memilih interval yang terlalu lama untuk diterapkan aturan. Jika ledakan bayi berlangsung enam jam, kami akan mengambil interval satu detik atau kurang, untuk berada di sisi yang aman. Secara teknis, kita berbicara tentang interval yang sangat kecil.) Jadi

{Probabilitas bahwa sesuatu (dipilih secara acak) terletak di antara x dan (x+dx)}=

Faktor proporsionalitas, ρ(x), sering secara longgar disebut "probabilitas mendapatkan x", tetapi ini adalah bahasa yang ceroboh; istilah yang lebih baik adalah kerapatan probabilitas. Probabilitas bahwa x terletak di antara a dan b (interval berhingga) diberikan oleh integral dari ρ(x):

dan aturan yang kami simpulkan untuk distribusi diskrit diterjemahkan dengan cara yang jelas:

## Normalisasi

Bahkan sebelum kita mempertimbangkan perhitungan sebenarnya dari **Ψ**, kita dapat menetapkan persyaratan tertentu yang harus selalu dipenuhi. Untuk satu hal, karena |**Ψ**|2 sebanding dengan kerapatan probabilitas P untuk menemukan benda yang dijelaskan oleh **Ψ**, integral dari |**Ψ**|2 di seluruh ruang harus berhingga bagaimanapun juga, benda itu ada di suatu tempat.Jika

partikel itu tidak ada, dan integralnya jelas tidak bisa menjadi ∞ dan masih berarti apapun. Selanjutnya, |**Ψ**|2 tidak bisa negatif atau kompleks karena hasilnya berupa bilangan real semua seperti yang sudah diperlihatkan sebelumnya. Satu-satunya kemungkinan yang tersisa adalah integral menjadi kuantitas terbatas jika **Ψ** ingin menggambarkan dengan benar benda real.

Biasanya lebih mudah untuk memiliki |**Ψ**|2 sama dengan kerapatan probabilitas P untuk menemukan partikel yang dijelaskan oleh **Ψ**, daripada hanya sebanding dengan P. Jika |**Ψ**|2 sama dengan P, maka pasti benar bahwa

(1.1)

karena jika partikel selalu ada di suatu tempat, maka

Fungsi gelombang yang memenuhi persamaan (1.1) dikatakan **dinormalisasi**. Setiap fungsi gelombang yang dapat diterima dapat dinormalisasi dengan mengalikannya dengan konstanta yang sesuai; kita akan segera melihat bagaimana hal ini dilakukan.

Kami kembali sekarang ke interpretasi statistik dari fungsi gelombang (Persamaan 1.3), yang mengatakan bahwa p2 adalah kerapatan probabilitas untuk menemukan partikel di titik x, pada waktu t. Ini mengikuti (Persamaan 1.16) bahwa integral p2 atas semua x harus 1 (partikel harus berada di suatu tempat):

Tanpa ini, interpretasi statistik akan menjadi omong kosong.

Namun, persyaratan ini akan mengganggu Anda: Bagaimanapun, fungsi gelombang seharusnya ditentukan oleh persamaan Schrödinger—kita tidak dapat memaksakan kondisi asing tanpa **Ψ** memeriksa bahwa keduanya konsisten. Sekilas Persamaan 1.1 mengungkapkan bahwa jika **Ψ**(x,t) adalah solusi, demikian juga A**Ψ**(x,t), di mana A adalah konstanta (kompleks). Apa yang harus kita lakukan, kemudian, adalah memilih faktor perkalian yang tidak ditentukan ini untuk memastikan bahwa Persamaan 1.20 terpenuhi. Proses ini disebut normalisasi fungsi gelombang. Untuk beberapa solusi persamaan Schrödinger integralnya tak terhingga; dalam hal ini tidak ada faktor perkalian yang menghasilkan 1. Hal yang sama berlaku untuk solusi trivial **Ψ=0**. Solusi yang tidak dapat dinormalisasi tersebut tidak dapat mewakili partikel, dan harus ditolak. Keadaan yang dapat direalisasikan secara fisik sesuai dengan solusi integral kuadrat dari persamaan Schrödinger.

Tapi tunggu sebentar! Misalkan saya telah menormalkan fungsi gelombang pada waktu t=0. Bagaimana saya tahu bahwa itu akan tetap normal, seiring berjalannya waktu, dan **Ψ** berevolusi? (Anda tidak dapat terus menormalkan kembali fungsi gelombang, karena kemudian A menjadi fungsi dari t, dan Anda tidak lagi memiliki solusi untuk persamaan Schrödinger.) Untungnya, persamaan Schrödinger memiliki sifat luar biasa yang secara otomatis mempertahankan normalisasi dari fungsi gelombang—tanpa fitur penting ini persamaan Schrödinger tidak akan sesuai dengan interpretasi statistik, dan seluruh teori akan runtuh.

Ini penting, jadi sebaiknya kita berhenti sejenak untuk bukti yang cermat. Memulai dengan,

(Perhatikan bahwa integral adalah fungsi hanya dari t, jadi saya menggunakan turunan total (d/dt) di sebelah kiri, tetapi integral adalah fungsi dari x dan juga t, jadi turunan parsial (∂/∂t) di sebelah kanan.) Dengan aturan perkalian,

Sekarang persamaan Schrödinger mengatakan bahwa

dan karenanya juga (mengambil konjugat kompleks Persamaan 1.23)

jadi

Integral dalam Persamaan 1.21 sekarang dapat dievaluasi secara eksplisit:

Tetapi Ψ(x,t) harus menuju nol saat x menuju (±) tak terhingga—jika tidak, fungsi gelombang tidak akan dapat dinormalisasi. 15 Oleh karena itu

dan karenanya integralnya konstan (tidak tergantung waktu); jika **Ψ** dinormalisasi pada t=0, itu tetap dinormalisasi untuk semua waktu mendatang. QED

## Nilai Harap

*Cara mengekstrak informasi dari fungsi gelombang*

Setelah persamaan Schrödinger diselesaikan untuk partikel dalam situasi fisik tertentu, fungsi gelombang yang dihasilkan **Ψ**(*x, y, z, t*) berisi semua informasi tentang partikel yang diizinkan oleh prinsip ketidakpastian. Kecuali untuk variabel-variabel yang dikuantisasi, informasi ini dalam bentuk probabilitas dan bukan angka spesifik.

Sebagai contoh, mari kita hitung nilai harap (x) dari posisi partikel yang dibatasi sumbu x yang dijelaskan oleh fungsi gelombang **Ψ**(x, t). Ini adalah nilai x yang akan kita peroleh jika kita mengukur posisi banyak sekali partikel yang dijelaskan oleh fungsi gelombang yang sama pada beberapa saat t dan kemudian rata-rata hasilnya.

Untuk memperjelas prosedur, pertama-tama kita menjawab pertanyaan yang sedikit berbeda: Berapakah posisi rata-rata dari sejumlah partikel identik yang didistribusikan sepanjang sumbu x sedemikian rupa sehingga ada partikel N1 di x1, partikel N2 di x2, dan seterusnya? Posisi rata-rata dalam hal ini sama dengan pusat massa distribusi, dan sebagainya

Ketika kita berhadapan dengan satu partikel, kita harus mengganti nomor Ni dari partikel pada xi dengan probabilitas Pi bahwa partikel tersebut ditemukan dalam interval dx pada xi . Probabilitas ini adalah

di mana adalah fungsi gelombang partikel yang dievaluasi pada x = xi . Dengan melakukan substitusi ini dan mengubah penjumlahan menjadi integral, kita melihat bahwa nilai harap dari posisi partikel tunggal adalah

Jika **Ψ** adalah fungsi gelombang yang dinormalisasi, penyebut dari Persamaan. (5.18) sama dengan probabilitas bahwa partikel ada di suatu tempat antara x = -∞ dan x = ∞ dan karena itu memiliki nilai 1. Dalam kasus ini, Nilai harap untuk posisi

Contoh

Sebuah partikel terbatas pada sumbu x memiliki fungsi gelombang antara x0 dan x1; di tempat lain. (a) Tentukan peluang bahwa partikel dapat ditemukan antara x = 0,45 dan x = 0,55. (b) Temukan nilai harapan x dari posisi partikel.

Pembahasan:

1. Peluang
2. Nilai harap dari posisi partikel

Prosedur yang sama seperti yang diikuti di atas dapat digunakan untuk memperoleh nilai harapan <G(x)> dari kuantitas apa pun, misalnya energi potensial U(x) yang merupakan fungsi posisi x partikel yang dijelaskan oleh fungsi gelombang **Ψ**. Hasilnya adalah Nilai harap

Nilai harap <p> untuk momentum tidak dapat dihitung dengan cara ini karena, menurut prinsip ketidakpastian, tidak ada fungsi seperti p(x) yang dapat diadakan. Jika kita menentukan x, sehingga Δx=0, kita tidak dapat menentukan p yang sesuai karena . Masalah yang sama terjadi untuk nilai harapan untuk energi karena berarti bahwa, jika kita menetapkan t, fungsi E(t) adalah mustahil. Dalam Sec. 5.6 kita akan melihat bagaimana <p> dan <E> dapat ditentukan.

Dalam fisika klasik tidak ada batasan seperti itu yang terjadi, karena prinsip ketidakpastian dapat diabaikan di dunia makro. Ketika kita menerapkan hukum gerak kedua pada gerakan benda yang dikenai berbagai gaya, kita berharap untuk mendapatkan p(x,t) dan E(x,t) dari solusi serta x(t). Memecahkan masalah dalam mekanika klasik memberi kita seluruh arah gerak tubuh di masa depan. Dalam fisika kuantum, di sisi lain, semua yang kita dapatkan secara langsung dengan menerapkan persamaan Schrödinger pada gerak partikel adalah fungsi gelombang **Ψ**, dan arah gerak partikel di masa depan seperti keadaan awalnya adalah masalah probabilitas, bukan kepastian.

## Fungsi Gelombang yang Berperilaku Baik

Selain dapat dinormalisasi, **Ψ** harus bernilai tunggal, karena P hanya dapat memiliki satu nilai pada tempat dan waktu tertentu, dan kontinu. Pertimbangan momentum mensyaratkan bahwa turunan parsial nilainya berhingga, kontinu, dan bernilai tunggal. Hanya fungsi gelombang dengan semua sifat ini yang dapat menghasilkan hasil yang bermakna secara fisik ketika digunakan dalam perhitungan, jadi hanya fungsi gelombang "berperilaku baik" yang dapat diterima sebagai representasi matematis dari benda nyata. Untuk meringkas:

1. **Ψ** harus kontinyu dan bernilai tunggal dimanapun.
2. harus kontinu dan bernilai tunggal dimanapun.
3. **Ψ** harus dapat dinormalisasi, yang berarti bahwa Ψ harus menuju ke 0 sesuai x → ±∞, y → ±∞, z → ±∞ agar pada semua ruang menjadi konstanta berhingga.

Aturan-aturan ini tidak selalu dipatuhi oleh fungsi gelombang partikel dalam situasi model yang hanya mendekati yang sebenarnya. Misalnya, fungsi gelombang dari sebuah partikel dalam kotak dengan dinding yang sangat keras tidak memiliki turunan kontinu pada dinding, karena **Ψ** = 0 di luar kotak. Tetapi di dunia nyata, di mana dinding tidak pernah keras tanpa batas, tidak ada perubahan tajam **Ψ** pada dinding dan turunannya kontinu. Latihan dibawah ini memberikan contoh lain dari fungsi gelombang yang tidak berperilaku baik.

Mengingat fungsi gelombang **Ψ** yang dinormalisasi dan dapat diterima, probabilitas bahwa partikel yang dijelaskannya akan ditemukan di wilayah tertentu hanyalah integral dari kerapatan probabilitas |**Ψ**|2 di wilayah itu. Jadi untuk partikel yang dibatasi geraknya dalam arah x, probabilitas menemukannya antara x1 dan x2 diberikan oleh

(1.2)

Kita akan melihat contoh perhitungan tersebut nantinya.

## Validitas Persamaan Schrödinger

Persamaan Schrödinger diperoleh di sini menggunakan fungsi gelombang dari partikel yang bergerak bebas (energi potensial konstan U). Bagaimana kita bisa yakin itu berlaku untuk kasus umum partikel yang dikenai gaya sembarang yang bervariasi dalam ruang dan waktu [*U=U(x, y, z, t)*]? Substitusikan Persamaan. (1.10) dan (1.11) ke dalam Persamaan. (1.13) benar-benar sebuah lompatan liar tanpa pembenaran formal; ini berlaku untuk semua cara lain di mana persamaan Schrödinger dapat diperoleh, termasuk pendekatan Schrödinger sendiri.

Yang harus kita lakukan adalah mendalilkan/mempostulatkan persamaan Schrödinger, menyelesaikannya untuk berbagai situasi fisik, dan membandingkan hasil perhitungan dengan hasil eksperimen. Jika kedua set hasil setuju, postulat yang terkandung dalam persamaan Schrödinger valid. Jika mereka tidak setuju, postulat harus dibuang dan beberapa pendekatan lain kemudian harus dieksplorasi. Dengan kata lain,

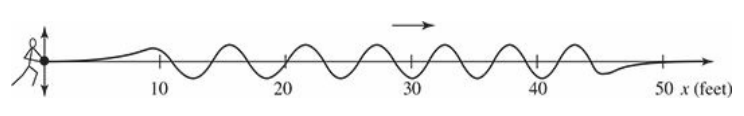
Persamaan Schrödinger tidak dapat diturunkan dari prinsip dasar fisika lainnya; itu adalah prinsip dasar itu sendiri.

Yang terjadi adalah persamaan Schrödinger ternyata sangat akurat dalam memprediksi hasil eksperimen. Untuk memastikan, Persamaan. (1.15) hanya dapat digunakan untuk masalah nonrelativistik, dan formulasi yang lebih rumit diperlukan ketika kecepatan partikel mendekati kecepatan cahaya yang terlibat. Tetapi karena sesuai dengan pengalaman dalam jangkauan penerapannya, kita harus mempertimbangkan persamaan Schrödinger sebagai pernyataan yang valid mengenai aspek-aspek tertentu dari dunia fisik.

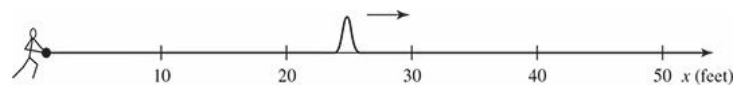
Perlu dicatat bahwa persamaan Schrödinger tidak menambah jumlah prinsip yang diperlukan untuk menggambarkan cara kerja dunia fisik. Hukum gerak kedua Newton F=ma, prinsip dasar mekanika klasik, dapat diturunkan dari persamaan Schrödinger asalkan besaran yang terkait dipahami sebagai rata-rata daripada nilai presisi. (Hukum gerak Newton juga tidak diturunkan dari prinsip lain. Seperti persamaan Schrödinger, hukum ini dianggap valid dalam jangkauan penerapannya karena sesuai dengan eksperimen.)

## Prinsip Ketidakpastian

Bayangkan Anda memegang salah satu ujung tali yang sangat panjang, dan Anda menghasilkan gelombang dengan menggoyangkannya ke atas dan ke bawah secara berirama (Gambar 1.8). Jika seseorang bertanya kepada Anda, “Di mana tepatnya ombak itu?” Anda mungkin akan berpikir dia sedikit gila: Ombaknya tidak tepat di mana pun — itu menyebar lebih dari 50 kaki atau lebih. Di sisi lain, jika dia bertanya kepada Anda berapa panjang gelombangnya, Anda dapat memberikan jawaban yang masuk akal: sepertinya sekitar 6 kaki. Sebaliknya, jika Anda menyentak tali secara tiba-tiba (Gambar 1.9), Anda akan mendapatkan tonjolan yang relatif sempit di sepanjang garis. Kali ini pertanyaan pertama (Di mana tepatnya gelombang itu?) adalah pertanyaan yang masuk akal, dan pertanyaan kedua (Berapa panjang gelombangnya?) tampaknya gila—bahkan tidak periodik samar-samar, jadi bagaimana Anda bisa menetapkan panjang gelombang untuk itu? Tentu saja, Anda dapat menggambar kasus perantara, di mana gelombang terlokalisasi dengan cukup baik dan panjang gelombang terdefinisi dengan cukup baik, tetapi ada trade-off yang tak terhindarkan di sini: semakin tepat posisi gelombang, semakin kurang presisi panjang gelombangnya, dan sebaliknya. 20 Sebuah teorema dalam analisis Fourier membuat semua ini ketat, tetapi untuk saat ini saya hanya membahas argumen kualitatif.



Gambar 1.8: Gelombang dengan panjang gelombang yang (cukup) terdefinisi dengan baik, tetapi posisinya tidak jelas.



Gambar 1.9: Gelombang dengan posisi (cukup) yang terdefinisi dengan baik, tetapi panjang gelombang yang tidak jelas.

Ini berlaku, tentu saja, untuk setiap fenomena gelombang, dan karenanya khususnya untuk fungsi gelombang mekanika kuantum. Tetapi panjang gelombang p2 terkait dengan momentum partikel dengan rumus de Broglie: 21

Jadi penyebaran panjang gelombang sesuai dengan penyebaran momentum, dan pengamatan umum kita sekarang mengatakan bahwa semakin tepat posisi partikel ditentukan, semakin kurang tepat momentumnya. Secara kuantitatif,

di mana σx adalah simpangan baku dalam x, dan σp merupakan simpangan baku dalam p. Ini adalah prinsip ketidakpastian Heisenberg yang terkenal. (Kita akan membuktikannya di Bab 3, tapi saya ingin segera menyebutkannya, jadi Anda bisa mengujinya pada contoh di Bab 2.)

Harap pahami apa arti prinsip ketidakpastian: Seperti pengukuran posisi, pengukuran momentum menghasilkan jawaban yang tepat—"penyebaran" di sini mengacu pada fakta bahwa pengukuran yang dilakukan pada sistem yang disiapkan secara identik tidak menghasilkan hasil yang identik. Anda dapat, jika mau, membangun keadaan sedemikian rupa sehingga pengukuran posisi akan sangat berdekatan (dengan menjadikan Ψ sebagai "lonjakan") yang dilokalkan, tetapi Anda akan membayar harga: Pengukuran momentum pada keadaan ini akan tersebar luas. Atau Anda dapat menyiapkan keadaan dengan momentum tertentu (dengan membuat Ψ gelombang sinusoidal panjang), tetapi dalam hal ini pengukuran posisi akan tersebar luas. Dan, tentu saja, jika suasana hati Anda benar-benar buruk, Anda dapat membuat keadaan di mana posisi maupun momentum tidak terdefinisi dengan baik: Persamaan 1.40 adalah pertidaksamaan, dan tidak ada batasan seberapa besar σx dan σp— buat saja Ψ beberapa garis bergelombang panjang dengan banyak gundukan dan lubang dan tidak ada struktur periodik.

## Operator

*Cara lain untuk menemukan nilai harapan*

Petunjuk tentang cara yang tepat untuk mengevaluasi <p> dan <E> berasal dari membedakan fungsi gelombang partikel bebas terhadap x dan t. Kami menemukan bahwa

yang dapat ditulis dalam bentuk sugestif

Ternyata besaran dinamik p dalam beberapa hal sesuai dengan operator diferensial dan besaran dinamis E juga sesuai dengan operator diferensial .

Sebuah operator memberi tahu kita operasi apa yang harus dilakukan pada kuantitas yang mengikutinya. Jadi operator menginstruksikan kita untuk mengambil turunan parsial dari apa yang datang setelahnya sehubungan dengan t dan mengalikan hasilnya dengan . Persamaan (5.22) terdapat pada cap pos yang digunakan untuk membatalkan prangko Austria yang diterbitkan untuk memperingati 100 tahun kelahiran Schrödinger.

Merupakan kebiasaan untuk menyatakan operator dengan menggunakan tanda sisipan, sehingga adalah operator yang sesuai dengan momentum p dan adalah operator yang sesuai dengan energi total E. Dari Persamaan. (5.21) dan (5.22) operator ini adalah

Meskipun kami hanya menunjukkan bahwa korespondensi yang diungkapkan dalam Persamaan. (5.23) dan (5.24) berlaku untuk partikel bebas, keduanya merupakan hasil umum yang validitasnya sama dengan persamaan Schrödinger. Untuk mendukung pernyataan ini, kita dapat mengganti persamaan untuk energi total partikel dengan persamaan operator

Operator hanyalah U(**Ψ**). Energi kinetik KE diberikan dalam momentum p oleh

dan jadi kita punya Operator energi kinetik

Persamaan (5.25) oleh karena itu berbunyi

Sekarang kita kalikan identitas **Ψ**=**Ψ** dengan Persamaan. (5.27) dan dapatkan

yang merupakan persamaan Schrödinger. Postulasi Persamaan. (5.23) dan (5.24) setara dengan mendalilkan persamaan Schrödinger.

## Operator dan Nilai Harap

Karena p dan E dapat digantikan oleh operator yang sesuai dalam suatu persamaan, kita dapat menggunakan operator ini untuk mendapatkan nilai ekspektasi untuk p dan E. Jadi nilai ekspektasi untuk p adalah

dan nilai harapan untuk E adalah

Kedua Persamaan. (5.28) dan (5.29) dapat dievaluasi untuk setiap fungsi gelombang yang dapat diterima **Ψ** (x, t).

Mari kita lihat mengapa nilai harapan yang melibatkan operator harus dinyatakan dalam bentuk

Alternatif lainnya adalah

karena Ψ\* dan Ψ harus 0 pada x=±∞ , dan

yang tidak masuk akal. Dalam kasus besaran aljabar seperti x dan V(x), urutan faktor dalam integral tidak penting, tetapi ketika operator diferensial terlibat, urutan faktor yang benar harus diperhatikan.

Setiap karakteristik kuantitas G yang dapat diamati dari sistem fisik dapat diwakili oleh operator mekanika kuantum yang sesuai . Untuk memperoleh operator ini, kita nyatakan G dalam bentuk x dan p dan kemudian ganti p dengan . Jika fungsi gelombang **Ψ** dari sistem diketahui, nilai harapan dari G(x,p) adalah Nilai harap dari sebuah operator

Dengan cara ini semua informasi tentang sistem yang diizinkan oleh prinsip ketidakpastian dapat diperoleh dari fungsi gelombangnya **Ψ**.

## Persamaan Schrödinger: Bentuk Keadaan Ideal

*Nilai eigen dan fungsi eigen*

Dalam banyak situasi, energi potensial partikel tidak bergantung pada waktu secara eksplisit; gaya yang bekerja padanya, dan karenanya U, bervariasi dengan posisi partikel saja. Jika ini benar, persamaan Schrödinger dapat disederhanakan dengan menghilangkan semua referensi ke t.

Kita mulai dengan mencatat bahwa fungsi gelombang satu dimensi Ψ dari partikel tak terbatas dapat ditulis

Terbukti **Ψ** adalah produk dari fungsi bergantung waktu dan fungsi bergantung posisi ψ. Seperti yang terjadi, variasi waktu dari semua fungsi gelombang partikel yang bekerja oleh gaya yang tidak bergantung pada waktu memiliki bentuk yang sama dengan partikel tak terbatas. Mengganti **Ψ** dari Persamaan. (5.31) ke dalam bentuk persamaan Schrödinger yang bergantung waktu, kita temukan bahwa

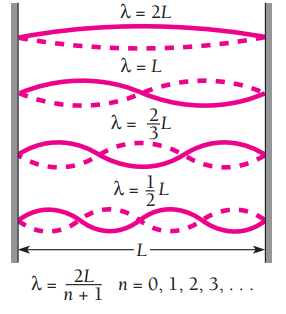
Membagi dengan faktor eksponensial umum memberikan

Persamaan (5.32) adalah bentuk keadaan tunak dari persamaan Schrödinger. Dalam tiga dimensi itu adalah

Sifat penting persamaan keadaan tunak Schrödinger adalah, jika persamaan tersebut memiliki satu atau lebih solusi untuk sistem tertentu, masing-masing fungsi gelombang ini sesuai dengan nilai spesifik energi E. Jadi kuantisasi energi muncul dalam mekanika gelombang sebagai elemen alami dari teori, dan kuantisasi energi di dunia fisik terungkap sebagai karakteristik fenomena universal dari semua sistem stabil.

Analogi yang akrab dan cukup mirip dengan cara di mana kuantisasi energi terjadi dalam solusi persamaan Schrödinger adalah dengan gelombang berdiri dalam string yang diregangkan dengan panjang L yang diperbaiki di kedua ujungnya. Di sini, alih-alih gelombang tunggal yang merambat tanpa batas dalam satu arah, gelombang berjalan dalam arah +x dan -x secara bersamaan. Gelombang-gelombang ini tunduk pada syarat (disebut syarat batas) bahwa perpindahan y selalu nol di kedua ujung tali. Fungsi yang dapat diterima y(x,t) untuk perpindahan harus, dengan turunannya (kecuali di ujung-ujungnya), berperilaku sebaik ψ dan turunannya yaitu kontinu, berhingga, dan bernilai tunggal. Dalam hal ini y harus nyata, bukan kompleks, karena mewakili kuantitas yang dapat diukur secara langsung. Satu-satunya solusi dari persamaan gelombang, Persamaan. (5.3), yang sesuai dengan berbagai batasan ini adalah batasan di mana panjang gelombang diberikan oleh

dengan n = 0,1,2,3,... seperti yang ditunjukkan pada Gambar. 5.3. Ini adalah kombinasi dari persamaan gelombang dan pembatasan yang ditempatkan pada sifat penyelesaiannya yang membawa kita untuk menyimpulkan bahwa y(x, t) hanya dapat ada untuk panjang gelombang λn tertentu.



Gambar 5.3 Gelombang berdiri pada tali yang direntangkan dikencangkan pada kedua ujungnya.

## Nilai Eigen dan Fungsi Eigen

Nilai energi En untuk persamaan keadaan tunak Schrödinger yang dapat diselesaikan disebut **nilai eigen** dan fungsi gelombang yang sesuai ψn disebut **fungsi eigen**. (Istilah ini berasal dari bahasa Jerman Eigenwert, yang berarti "nilai yang tepat atau karakteristik," dan Eigenfunktion, "fungsi yang tepat atau karakteristik.") Tingkat energi diskrit atom hidrogen denga n = 1,2,3,...

adalah contoh dari himpunan nilai eigen. Kita akan melihat di Bab. 6 mengapa nilai-nilai tertentu dari E adalah satu-satunya yang menghasilkan fungsi gelombang yang dapat diterima untuk elektron dalam atom hidrogen.

Contoh penting dari variabel dinamis selain energi total yang ditemukan terkuantisasi dalam sistem stabil adalah momentum sudut **L**. Dalam kasus atom hidrogen, kita akan menemukan bahwa nilai eigen dari besarnya momentum sudut total ditentukan oleh

dengan l = 0,1,2,... (n-1)

Tentu saja, variabel dinamis G mungkin tidak terkuantisasi. Dalam hal ini pengukuran G yang dilakukan pada sejumlah sistem yang identik tidak akan menghasilkan hasil yang unik melainkan penyebaran nilai yang rata-ratanya adalah nilai harapan.

Dalam atom hidrogen, posisi elektron tidak terkuantisasi, misalnya, sehingga kita harus menganggap elektron berada di sekitar nukleus dengan probabilitas tertentu per satuan volume tetapi tanpa posisi yang dapat diprediksi atau bahkan orbit dalam atom hidrogen pengertian klasik. Pernyataan probabilistik ini tidak bertentangan dengan fakta bahwa eksperimen yang dilakukan pada atom hidrogen selalu menunjukkan bahwa setiap atom mengandung satu elektron utuh, bukan 27 persen elektron di wilayah tertentu dan 73 persen di tempat lain. Probabilitasnya adalah salah satu menemukan elektron, dan meskipun probabilitas ini tercoreng di luar angkasa, elektron itu sendiri tidak.

## Operator dan Nilai Eigen

Kondisi bahwa variabel dinamis tertentu G dibatasi pada nilai diskrit Gn—dengan kata lain, bahwa G dikuantisasi—adalah fungsi gelombang n dari sistem sedemikian rupa sehingga persamaan nilai eigen

di mana adalah operator yang berkorespondensi dengan G dan setiap Gn adalah bilangan real. Ketika Persamaan. (5.34) berlaku untuk fungsi gelombang suatu sistem, ini adalah postulat dasar mekanika kuantum bahwa setiap pengukuran G hanya dapat menghasilkan salah satu nilai Gn. Jika pengukuran G dilakukan pada sejumlah sistem identik yang semuanya dalam keadaan yang dijelaskan oleh fungsi eigen tertentu , setiap pengukuran akan menghasilkan nilai tunggal Gk.

Contoh

Fungsi eigen dari operator adalah . Temukan nilai eigen yang sesuai.

Pembahasan:

Disini sehingga

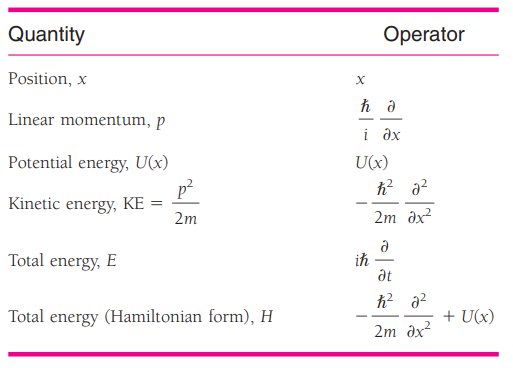
Karena , sehingga

Dari persamaan (5.24) kita tahu bahwa nilai eigen G disini hanya G = 4.

Mengingat Persamaan. (5.25) dan (5.26) operator energi total dari Persamaan. (5.24) juga dapat ditulis sebagai operator hamiltonian

dan disebut **operator Hamiltonian** karena mengingatkan pada fungsi Hamilton dalam mekanika klasik lanjutan, yang merupakan ekspresi untuk energi total suatu sistem dalam bentuk koordinat dan momentum saja. Terbukti persamaan Schrödinger kondisi tunak dapat ditulis secara sederhana sebagai

sehingga kita dapat mengatakan bahwa berbagai En adalah nilai eigen dari operator Hamiltonian . Jenis hubungan antara nilai eigen dan operator mekanika kuantum ini cukup umum. Tabel 5.1 mencantumkan operator yang sesuai dengan berbagai besaran yang dapat diamati.



## Momentum

Untuk sebuah partikel di statep2 , nilai harapan dari x adalah

Apa sebenarnya artinya ini? Ini tidak berarti bahwa jika Anda mengukur posisi satu partikel berulang kali, adalah rata-rata dari hasil yang akan Anda dapatkan. Sebaliknya: Pengukuran pertama (yang hasilnya tidak tentu) akan meruntuhkan fungsi gelombang menjadi lonjakan pada nilai yang sebenarnya diperoleh, dan pengukuran berikutnya (jika dilakukan dengan cepat) hanya akan mengulangi hasil yang sama. Sebaliknya, adalah rata-rata pengukuran yang dilakukan pada partikel semua dalam keadaan Ψ, yang berarti bahwa Anda harus menemukan beberapa cara untuk mengembalikan partikel ke keadaan semula setelah setiap pengukuran, atau Anda harus menyiapkan seluruh rangkaian partikel, masing-masing dalam keadaan Ψ yang sama, dan ukur posisi semuanya: <x> adalah rata-rata dari hasil ini. Saya suka membayangkan deretan botol di rak, masing-masing berisi partikel dalam keadaan Ψ (relatif terhadap pusat botol). Seorang mahasiswa pascasarjana dengan penggaris ditugaskan untuk setiap botol, dan pada sinyal mereka semua mengukur posisi partikel masing-masing. Kami kemudian membangun histogram dari hasil, yang harus cocok dengan |Ψ|2, dan menghitung rata-rata, yang harus sesuai dengan <x>. (Tentu saja, karena kami hanya menggunakan sampel yang terbatas, kami tidak dapat mengharapkan kesepakatan yang sempurna, tetapi semakin banyak botol yang kami gunakan, semakin dekat kami seharusnya.) Singkatnya, nilai harapan adalah rata-rata pengukuran pada ansambel sistem yang disiapkan secara identik, bukan rata-rata pengukuran berulang pada satu dan sistem yang sama.

Sekarang, seiring berjalannya waktu, akan berubah (karena ketergantungan waktu Ψ), dan kita mungkin tertarik untuk mengetahui seberapa cepat ia bergerak. Mengacu pada Persamaan 1.25 dan 1.28, kita melihat bahwa

Ekspresi ini dapat disederhanakan menggunakan integrasi-per-bagian:

(Saya menggunakan fakta bahwa , dan membuang suku batas, dengan alasan bahwa Ψ menjadi nol di (±) tak hingga.) Melakukan integrasi-per-bagian lain, pada suku kedua, kami menyimpulkan:

Apa yang harus kita lakukan dari hasil ini? Perhatikan bahwa kita berbicara tentang "kecepatan" dari nilai harapan x, yang tidak sama dengan kecepatan partikel. Tidak ada yang telah kita lihat sejauh ini yang memungkinkan kita menghitung kecepatan partikel. Bahkan tidak jelas apa arti kecepatan dalam mekanika kuantum: Jika partikel tidak memiliki posisi tertentu (sebelum pengukuran), ia juga tidak memiliki kecepatan yang terdefinisi dengan baik. Yang bisa kami minta secara wajar hanyalah kemungkinan mendapatkan nilai tertentu. Kita akan melihat di Bab 3 bagaimana membangun kerapatan probabilitas untuk kecepatan, dengan Ψ; untuk saat ini cukuplah untuk mendalilkan bahwa nilai ekspektasi kecepatan sama dengan turunan waktu dari nilai ekspektasi posisi:

Persamaan 1.31 memberitahu kita bagaimana menghitung (v) langsung dari Ψ.

Sebenarnya, adalah kebiasaan untuk bekerja dengan momentum (p=mv), daripada kecepatan:

Biarkan saya menulis ekspresi untuk dan dengan cara yang lebih sugestif:

Kami mengatakan bahwa operator 18 x "mewakili" posisi, dan operator "mewakili" momentum; untuk menghitung nilai ekspektasi, kami "menjepit" operator yang sesuai antara p22 dan p222, dan mengintegrasikan.

Itu lucu, tapi bagaimana dengan kuantitas lainnya? Faktanya adalah, semua variabel dinamis klasik dapat dinyatakan dalam posisi dan momentum. Energi kinetik, misalnya, adalah

dan momentum sudut adalah

(yang terakhir, tentu saja, tidak terjadi untuk gerak dalam satu dimensi). Untuk menghitung nilai harapan dari setiap kuantitas tersebut, , kita cukup mengganti setiap p dengan , menyisipkan operator yang dihasilkan antara dan , dan mengintegrasikan:

Misalnya, nilai harapan energi kinetik adalah

Persamaan 1.36 adalah resep untuk menghitung nilai harapan dari setiap kuantitas dinamis, untuk sebuah partikel dalam keadaan ; itu memasukkan Persamaan 1.34 dan 1.35 sebagai kasus khusus. Saya telah mencoba membuat Persamaan 1.36 tampak masuk akal, mengingat interpretasi statistik Born, tetapi sebenarnya ini mewakili cara bisnis yang sangat baru (dibandingkan dengan mekanika klasik) sehingga ada baiknya untuk berlatih menggunakannya sebelum kita kembali (dalam Bab 3) dan meletakkannya di atas landasan teoretis yang lebih kuat. Sementara itu, jika Anda lebih suka menganggapnya sebagai aksioma, tidak masalah bagi saya.

Menemukan momentum partikel yang terperangkap dalam kotak satu dimensi tidak semudah menemukan <x>. Di Sini

dan, dari Persamaan. (5.30),

Kami mencatat bahwa

Dengan kami memiliki

karena

Nilai harapan <p> dari momentum partikel adalah 0.

Sekilas kesimpulan ini tampak aneh. Bagaimanapun, , jadi kami akan mengantisipasi itu

Tanda ± memberikan penjelasan: Partikel bergerak maju mundur, dan momentum rata-ratanya untuk setiap nilai n adalah

yang merupakan nilai harapan.

Menurut Persamaan. (5.47) harus ada dua fungsi eigen momentum untuk setiap fungsi eigen energi, yang sesuai dengan dua kemungkinan arah gerak. Prosedur umum untuk mencari nilai eigen dari operator mekanika kuantum, di sini , adalah mulai dari persamaan nilai eigen

dimana setiap adalah bilangan real. Persamaan ini hanya berlaku jika fungsi gelombang n adalah fungsi eigen dari operator momentum , yang di sini adalah

Kita dapat melihat sekaligus bahwa fungsi eigen energi

bukan juga fungsi eigen momentum, karena

Untuk menemukan fungsi eigen momentum yang benar, kita perhatikan bahwa

Oleh karena itu setiap fungsi eigen energi dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari dua fungsi gelombang

Memasukkan fungsi gelombang pertama ini ke dalam persamaan nilai eigen, Persamaan. (5.48), kita memiliki

sehingga

Demikian pula fungsi gelombang mengarah ke nilai eigen momentum

Kami menyimpulkan bahwa dan memang fungsi eigen momentum untuk sebuah partikel dalam sebuah kotak, dan bahwa Persamaan. (5.47) dengan benar menyatakan nilai eigen momentum yang sesuai.

# Aplikasi dalam satu dimensi

## Stationary States

Dalam Bab 1 kita telah berbicara banyak tentang fungsi gelombang, dan bagaimana Anda menggunakannya untuk menghitung berbagai besaran bunga. Waktunya telah tiba untuk berhenti menunda-nunda, dan hadapi apa yang, secara logis, pertanyaan sebelumnya: Bagaimana Anda mendapatkan p2222? Kita perlu menyelesaikan persamaan Schrödinger,

untuk potensial tertentu V(x,t). Dalam bab ini (dan sebagian besar buku ini) saya akan berasumsi bahwa V tidak bergantung pada t. Dalam hal ini persamaan Schrödinger dapat diselesaikan dengan metode pemisahan variabel (garis serangan pertama fisikawan pada persamaan diferensial parsial): Kami mencari solusi yang merupakan produk,

di mana p22(huruf kecil) adalah fungsi dari x saja, p33 dan merupakan fungsi dari t saja. Sekilas, ini adalah batasan yang tidak masuk akal, dan kita tidak bisa berharap untuk mendapatkan lebih dari sebagian kecil dari semua solusi dengan cara ini. Tapi tunggu dulu, karena solusi yang kami dapatkan ternyata sangat menarik. Selain itu (seperti yang biasanya terjadi pada pemisahan variabel) pada akhirnya kita akan dapat menyatukan solusi yang dapat dipisahkan sedemikian rupa untuk membangun solusi yang paling umum.

Untuk solusi yang dapat dipisahkan, kami memiliki

(turunan biasa, sekarang), dan persamaan Schrödinger berbunyi

Atau, membaginya dengan p22233:

Sekarang, ruas kiri adalah fungsi dari t saja, dan ruas kanan adalah fungsi dari x saja. 2 Satu-satunya cara ini mungkin benar adalah jika kedua sisi sebenarnya konstan—jika tidak, dengan memvariasikan t, saya dapat mengubah sisi kiri tanpa menyentuh sisi kanan, dan keduanya tidak lagi sama. (Itu argumen yang halus tapi penting, jadi jika itu baru bagi Anda, pastikan untuk berhenti sejenak dan memikirkannya.) Untuk alasan yang akan muncul sebentar lagi, kita akan menyebut konstanta pemisahan E. Kemudian

atau

dan

atau

Pemisahan variabel telah mengubah persamaan diferensial parsial menjadi dua persamaan diferensial biasa (Persamaan 2.4 dan 2.5). Yang pertama mudah untuk diselesaikan (cukup kalikan dengan dt dan integrasikan); solusi umumnya adalah c333, tetapi kita mungkin juga menyerap konstanta C ke p33(karena kuantitas yang diinginkan adalah produk p333). Kemudian

Yang kedua (Persamaan 2.5) disebut persamaan Schrödinger yang tidak bergantung waktu; kita tidak dapat melanjutkannya sampai potensial V(x) ditentukan.

Sisa bab ini akan dikhususkan untuk memecahkan persamaan Schrödinger yang tidak bergantung waktu, untuk berbagai potensial sederhana. Tetapi sebelum saya membahasnya, Anda berhak bertanya: Apa hebatnya solusi yang dapat dipisahkan? Lagi pula, sebagian besar solusi untuk persamaan Schrödinger (tergantung waktu) tidak berbentuk p332. Saya menawarkan tiga jawaban—dua di antaranya fisik, dan satu matematika:

1. Mereka adalah keadaan stasioner. Meskipun fungsi gelombang itu sendiri,

tidak (jelas) tergantung pada t, kepadatan probabilitas,

tidak—ketergantungan waktu dibatalkan. 4 Hal yang sama terjadi dalam menghitung nilai harapan dari setiap variabel dinamis; Persamaan 1.36 direduksi menjadi

Setiap nilai harapan adalah konstan dalam waktu; kita mungkin juga membuang faktornya sama sekali, dan cukup gunakan sebagai ganti . (Memang, sering disebut sebagai “fungsi gelombang”, tetapi ini adalah bahasa yang ceroboh yang bisa berbahaya, dan penting untuk diingat bahwa fungsi gelombang yang sebenarnya selalu membawa faktor goyangan yang bergantung pada waktu itu.) Secara khusus, konstan, dan karenanya (Persamaan 1.33). Tidak ada yang pernah terjadi dalam keadaan stasioner. 2. Mereka adalah keadaan energi total tertentu. Dalam mekanika klasik, energi total (kinetik plus potensial) disebut Hamiltonian:

Operator Hamilton yang sesuai, diperoleh dengan substitusi kanonik , Oleh karena itu 5

Dengan demikian persamaan Schrödinger yang tidak bergantung waktu (Persamaan 2.5) dapat ditulis

dan nilai harapan dari energi total adalah

(Perhatikan bahwa normalisasi memerlukan normalisasi .) Selain itu,

dan karenanya

Jadi varians dari H adalah

Tapi ingat, jika , maka setiap anggota sampel harus berbagi nilai yang sama (distribusi memiliki spread nol). Kesimpulan: Solusi yang dapat dipisahkan memiliki sifat bahwa setiap pengukuran energi total pasti mengembalikan nilai E. (Itulah sebabnya saya memilih huruf itu untuk konstanta pemisahan.)

3. Solusi umum adalah kombinasi linier dari solusi yang dapat dipisahkan. Seperti yang akan kita temukan, persamaan Schrödinger yang tidak bergantung waktu (Persamaan 2.5) menghasilkan kumpulan solusi tak terhingga , , yang kita tulis sebagai , masing-masing dengan konstanta pemisahan yang terkait ; dengan demikian ada fungsi gelombang yang berbeda untuk setiap energi yang diizinkan:

Sekarang (seperti yang dapat Anda periksa sendiri dengan mudah) persamaan Schrödinger (tergantung waktu) (Persamaan 2.1) memiliki sifat bahwa setiap kombinasi linier 6 dari solusi itu sendiri adalah solusi. Setelah kami menemukan solusi yang dapat dipisahkan, maka, kami dapat segera membangun solusi yang jauh lebih umum, dalam bentuk

Kebetulan setiap solusi untuk persamaan Schrödinger (tergantung waktu) dapat ditulis dalam bentuk ini—ini hanyalah masalah menemukan konstanta yang tepat agar sesuai dengan kondisi awal untuk masalah yang dihadapi. Anda akan melihat di bagian berikut bagaimana semua ini bekerja dalam praktik, dan di Bab 3 kami akan memasukkannya ke dalam bahasa yang lebih elegan, tetapi poin utamanya adalah ini: Setelah Anda menyelesaikan persamaan Schrödinger yang tidak bergantung waktu, Anda ' dasarnya dilakukan; mendapatkan dari sana

ke solusi umum persamaan Schrödinger yang bergantung waktu, pada prinsipnya, sederhana dan lugas. Banyak yang telah terjadi dalam empat halaman terakhir, jadi izinkan saya merangkum, dari perspektif yang agak berbeda. Inilah masalah umum: Anda diberi potensial (tidak tergantung waktu), dan fungsi gelombang awal; tugas Anda adalah mencari fungsi gelombang, , untuk waktu berikutnya t. Untuk melakukan ini, Anda harus menyelesaikan persamaan Schrödinger (tergantung waktu) (Persamaan 2.1). Strategi pertama adalah menyelesaikan persamaan Schrödinger yang tidak bergantung waktu (Persamaan 2.5); ini menghasilkan, secara umum, satu set tak terbatas solusi, , masing-masing dengan energi yang terkait sendiri, . Agar sesuai, Anda menuliskan kombinasi linier umum dari solusi ini

keajaibannya adalah Anda selalu dapat mencocokkan keadaan awal yang ditentukan 7 dengan pilihan konstanta yang sesuai. Untuk membangun Anda cukup menempelkan ke setiap istilah ketergantungan waktu karakteristiknya ("faktor goyangannya"), : 8

Solusi yang dapat dipisahkan itu sendiri,

adalah keadaan stasioner, dalam arti bahwa semua probabilitas dan nilai ekspektasi tidak bergantung pada waktu, tetapi sifat ini secara tegas tidak dimiliki oleh solusi umum (Persamaan 2.17): energinya berbeda, untuk keadaan stasioner yang berbeda, dan eksponensial tidak membatalkan , ketika Anda membangun .

Anda mungkin bertanya-tanya apa yang diwakili oleh koefisien secara fisik. Saya akan memberi tahu Anda jawabannya, meskipun penjelasannya harus menunggu Bab 3:

Pengukuran yang kompeten akan selalu menghasilkan salah satu nilai yang "diizinkan" (oleh karena itu namanya), dan merupakan probabilitas untuk mendapatkan nilai tertentu . 10 Tentu saja, jumlah dari probabilitas ini harus 1:

dan nilai harapan energi harus

Kita akan segera melihat bagaimana ini berhasil dalam beberapa contoh nyata. Perhatikan, akhirnya, bahwa karena konstanta tidak bergantung pada waktu, demikian pula probabilitas untuk mendapatkan energi tertentu, dan, fortiori, nilai harapan H. Ini adalah manifestasi dari kekekalan energi dalam mekanika kuantum.

## Partikel Dalam Kotak

*Bagaimana kondisi batas dan normalisasi menentukan fungsi gelombang*

Untuk menyelesaikan persamaan Schrödinger, bahkan dalam bentuk keadaan tunak yang lebih sederhana, biasanya memerlukan teknik matematika yang rumit. Untuk alasan ini, studi mekanika kuantum secara tradisional disediakan untuk siswa tingkat lanjut yang memiliki kecakapan yang diperlukan dalam matematika. Namun, karena mekanika kuantum adalah struktur teoretis yang hasilnya paling dekat dengan kenyataan eksperimental, kita harus menjelajahi metode dan aplikasinya untuk memahami fisika modern. Seperti yang akan kita lihat, bahkan latar belakang matematika sederhana saja sudah cukup bagi kita untuk mengikuti alur pemikiran yang telah membawa mekanika kuantum ke pencapaian terbesarnya.

Masalah mekanika kuantum yang paling sederhana adalah masalah partikel yang terperangkap dalam kotak dengan dinding yang sangat keras. Dalam Sec. 3.6 kita melihat bagaimana argumen yang cukup sederhana menghasilkan tingkat energi sistem. Mari kita selesaikan masalah yang sama dengan cara yang lebih formal, yang akan memberi kita fungsi gelombang ψn yang sesuai dengan setiap tingkat energi.

Kita dapat menentukan gerakan partikel dengan mengatakan bahwa partikel itu dibatasi untuk bergerak sepanjang sumbu x antara x = 0 dan x = L oleh dinding yang sangat keras. Sebuah partikel tidak kehilangan energi ketika bertabrakan dengan dinding tersebut, sehingga energi totalnya tetap konstan. Dari sudut pandang formal, energi potensial U partikel tak terhingga di kedua sisi kotak, sedangkan U adalah konstanta—katakanlah 0 untuk memudahkan di bagian dalam (Gbr. 5.4). Karena partikel tidak dapat memiliki jumlah energi yang tak terbatas, ia tidak dapat berada di luar kotak, sehingga fungsi gelombangnya ψ adalah 0 untuk x ≤ 0 dan x ≥ L. Tugas kita adalah menemukan apa ψ yang ada di dalam kotak, yaitu antara x = 0 dan x = L.

Di dalam kotak persamaan Schrödinger menjadi

sejak U = 0 di sana. (Turunan total sama dengan turunan parsial karena ψ merupakan fungsi hanya dari x dalam soal ini.) Persamaan (5.37) memiliki penyelesaian

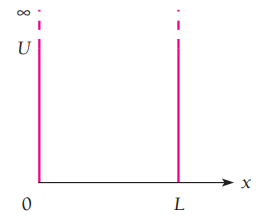
yang dapat kita verifikasi dengan substitusi kembali ke Persamaan. (5.37). A dan B adalah konstanta yang akan dievaluasi.

Solusi ini tunduk pada syarat batas yaitu ψ = 0 untuk x = 0 dan untuk x = L. Karena cos 0 = 1, suku kedua tidak dapat menggambarkan partikel karena partikel tersebut tidak lenyap pada x = 0. Oleh karena itu, kita simpulkan bahwa B = 0. Karena sin 0 = 0 , suku sinus selalu menghasilkan 0 pada x = 0, seperti yang disyaratkan, tetapi ψ akan menjadi 0 pada x = L hanya jika

Dengan n = 1,2,3,... Hasil ini muncul karena sinus sudut π, 2π, 3π, . . . semuanya 0.

Dari Persamaan. (5.39) jelas bahwa energi partikel hanya dapat memiliki nilai tertentu, yang merupakan nilai eigen yang disebutkan pada bagian sebelumnya. Nilai eigen ini, yang merupakan **tingkat energi** sistem, ditemukan dengan menyelesaikan Persamaan. (5.39) untuk En, yang memberikan

dengan n = 1,2,3,... Persamaan (5.40) sama dengan Persamaan. (3.18) dan memiliki interpretasi yang sama [lihat pembahasan yang mengikuti Persamaan. (3.18) di Sec. 3.6].



Gambar 5.4 Sebuah sumur potensial berbentuk bujur sangkar dengan penghalang yang sangat tinggi di setiap ujungnya sesuai dengan sebuah kotak dengan dinding yang sangat keras..

Fungsi Gelombang

Fungsi gelombang partikel dalam kotak yang energinya En, dari Persamaan. (5.38) dengan B = 0,

Mengganti Persamaan. (5.40) untuk En memberi

untuk fungsi eigen yang sesuai dengan nilai eigen energi En.

Sangat mudah untuk memverifikasi bahwa fungsi eigen ini memenuhi semua persyaratan yang dibahas dalam Sec. 5.1: untuk setiap bilangan kuantum n, ψn adalah fungsi x bernilai tunggal, berhingga, dan ψn dan kontinu (kecuali di ujung kotak). Selanjutnya, integral dari |ψn|2 di semua ruang adalah terbatas/berhingga, seperti yang dapat kita lihat dengan mengintegralkan dari x = 0 ke x = L (karena partikel dibatasi dalam batas-batas ini). Dengan bantuan identitas trigonometri kami menemukan bahwa

Untuk menormalkan ψ, kita harus menetapkan nilai ke A sedemikian rupa sehingga sama dengan probabilitas P dx untuk menemukan partikel antara x dan x + dx, bukan hanya sebanding dengan P dx. Jika sama dengan P dx, maka harus benar bahwa

Membandingkan Persamaan. (5.43) dan (5.44), kita melihat bahwa fungsi gelombang partikel dalam kotak dinormalisasi jika

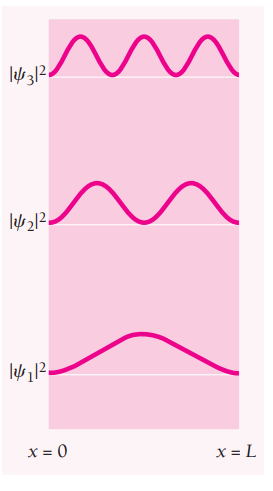
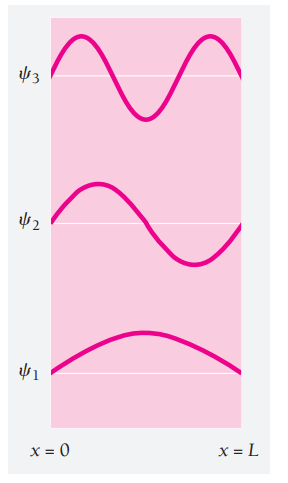
Oleh karena itu, fungsi gelombang yang dinormalisasi dari partikel adalah Partikel dalam kotak

n = 1, 2, 3, . . . (5.46)

Fungsi gelombang yang ternormalisasi ψ1, ψ2, dan ψ3 bersama-sama dengan densitas peluang |ψ1|2 , |ψ2|2 , dan |ψ3|2 diplot pada Gambar 5.5. Meskipun ψn mungkin negatif dan juga positif, |ψn|2 tidak pernah negatif dan, karena ψn dinormalisasi, nilainya pada x tertentu sama dengan densitas probabilitas untuk menemukan partikel di sana. Dalam setiap kasus |ψn|2 = 0 pada x = 0 dan x = L, batas-batas kotak.

Di tempat tertentu di dalam kotak, kemungkinan kehadiran partikel mungkin sangat berbeda untuk bilangan kuantum yang berbeda. Misalnya, |ψ1|2 memiliki nilai maksimum 2/L di tengah kotak, sedangkan |ψ2|2 = 0 di sana. Sebuah partikel dengan tingkat energi terendah n = 1 kemungkinan besar berada di tengah kotak, sedangkan partikel dengan tingkat energi n = 2 yang lebih tinggi berikutnya tidak pernah ada! Fisika klasik, tentu saja, menunjukkan probabilitas yang sama untuk partikel berada di mana saja di dalam kotak.

Fungsi gelombang yang ditunjukkan pada Gambar 5.5 menyerupai getaran yang mungkin terjadi pada tali yang dipasang pada kedua ujungnya, seperti pada tali yang diregangkan pada Gambar 5.2. Ini mengikuti dari fakta bahwa gelombang dalam tali yang diregangkan dan gelombang yang mewakili partikel yang bergerak dijelaskan oleh persamaan dengan bentuk yang sama, sehingga ketika pembatasan yang identik ditempatkan pada setiap jenis gelombang, hasil formalnya adalah identik.



Gambar 5.5 Fungsi gelombang dan densitas peluang partikel yang dibatasi kotak berdinding kaku.

Contoh 5.4

Temukan probabilitas bahwa sebuah partikel yang terperangkap dalam kotak selebar L dapat ditemukan antara 0,45L dan 0,55L untuk keadaan dasar dan keadaan tereksitasi pertama.

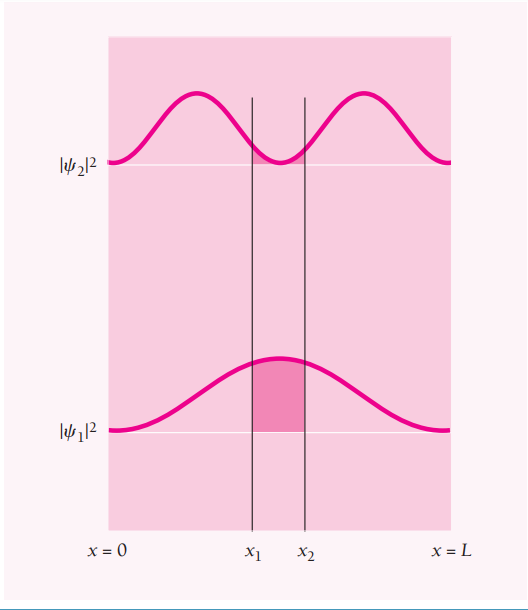
Penyelesaian

Bagian kotak ini adalah sepersepuluh dari lebar kotak dan berpusat di tengah kotak (Gbr. 5.6). Secara klasik kita mengharapkan partikel berada di wilayah ini 10 persen dari waktu. Mekanika kuantum memberikan prediksi yang sangat berbeda yang bergantung pada bilangan kuantum keadaan partikel. Dari Persamaan. (5.2) dan (5.46) peluang menemukan partikel antara x1 dan x2 pada keadaan ke-n adalah

Disini x1 = 0.45L dan x2 = 0.55L. Untuk keadaan dasar, yang sesuai dengan n = 1, kita memiliki

Ini kira-kira dua kali probabilitas klasik. Untuk keadaan tereksitasi pertama, yang sesuai dengan n = 2, kita memiliki

Angka rendah ini konsisten dengan kerapatan probabilitas |ψn|2 = 0 pada x = 0.5L



Gambar 5.6 Probabilitas Px1,x2 untuk menemukan partikel dalam kotak pada Gambar 5.5 antara x1 = 0.45L dan x2 = 0.55L sama dengan luas area di bawah kurva di antara batas-batas ini.

Contoh 5.5

Temukan nilai harapan x dari posisi partikel yang terperangkap dalam kotak yang lebarnya L.

Solusi

Dari Persamaan. (5.19) dan (5.46) kita memiliki

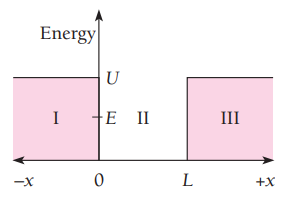
Karena sin nπ = 0, cos 2nπ = 1, dan cos 0 = 1, untuk semua nilai n nilai ekspektasi x adalah

Hasil ini berarti bahwa posisi rata-rata partikel berada di tengah kotak di semua keadaan kuantum. Tidak ada konflik dengan fakta bahwa |ψ|2 = 0 di L/2 di n = 2, 4, 6, . . . menyatakan karena <x> adalah rata-rata, bukan probabilitas, dan mencerminkan simetri |ψ|2 di tengah kotak.

## Sumur Potensal Terbatas

*Fungsi gelombang menembus dinding, yang menurunkan tingkat energi*

Energi potensial tidak pernah tak terbatas di dunia nyata, dan kotak dengan dinding yang sangat keras dari bagian sebelumnya tidak memiliki pasangan fisik. Namun, sumur potensial dengan penghalang dengan ketinggian terbatas tentu ada. Mari kita lihat apa fungsi gelombang dan tingkat energi partikel dalam sumur seperti itu.



Gambar 5.7 Sebuah sumur potensial bujur sangkar dengan hambatan berhingga. Energi E dari partikel yang terperangkap lebih kecil dari tinggi U dari penghalang.

Gambar 5.7 menunjukkan sebuah sumur potensial dengan sudut persegi yang tingginya U dan lebar L dan berisi partikel yang energi E lebih kecil dari U. Menurut mekanika klasik, ketika partikel menumbuk sisi sumur, partikel tersebut akan memantul tanpa memasuki daerah I. dan III. Dalam mekanika kuantum, partikel juga memantul bolak-balik, tetapi sekarang memiliki probabilitas tertentu untuk menembus ke daerah I dan III meskipun E<U.

Di daerah I dan III persamaan keadaan tunak Schrödinger adalah

yang dapat kita tulis ulang dalam bentuk yang lebih mudah

di mana

Solusi untuk Persamaan. (5.53) adalah eksponensial nyata:

Baik maupun harus berhingga di semua tempat. Karena sebagai dan sebagai , koefisien D dan F oleh karena itu harus 0. Oleh karena itu kita memiliki

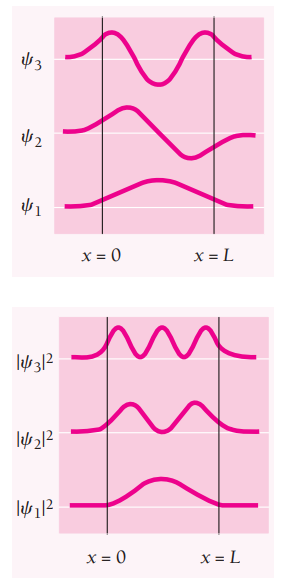
Fungsi gelombang ini berkurang secara eksponensial di dalam penghalang di sisi-sisi sumur.

Di dalam sumur, persamaan Schrödinger sama dengan Persamaan. (5.37) dan solusinya adalah lagi

Dalam kasus sumur dengan hambatan yang sangat tinggi, kami menemukan bahwa B=0 dengan urutan ψ=0 pada x=0 dan x=L. Di sini, bagaimanapun, ψII=C pada x=0 dan ψII=G pada x=L, sehingga solusi sinus dan kosinus dari Persamaan. (5.59) adalah mungkin.

Untuk salah satu solusi, keduanya ψ dan dψ/dx harus kontinu di x=0 dan x=L: fungsi gelombang di dalam dan di luar setiap sisi sumur tidak hanya harus memiliki nilai yang sama di mana mereka bergabung tetapi juga kemiringan yang sama, sehingga mereka cocok dengan sempurna . Ketika kondisi batas ini diperhitungkan, hasilnya adalah pencocokan tepat hanya terjadi untuk nilai spesifik tertentu En dari energi partikel. Fungsi gelombang lengkap dan densitas probabilitasnya ditunjukkan pada Gambar 5.8.

Karena panjang gelombang yang masuk ke dalam sumur lebih panjang daripada untuk sumur tak hingga dengan lebar yang sama (lihat Gambar 5.5), momentum partikel yang sesuai lebih rendah (kita ingat bahwa λ=h/p). Oleh karena itu tingkat energi En lebih rendah untuk setiap n daripada tingkat energi untuk partikel dalam sumur tak terhingga.



Gambar 5.8 Fungsi gelombang dan kerapatan peluang partikel dalam sumur potensial berhingga. Partikel tersebut memiliki kemungkinan tertentu untuk ditemukan di luar tembok.

## The Infinite Square

Well Suppose

(Figure 2.1). A particle in this potential is completely free, except at the two ends and , where an infinite force prevents it from escaping. A classical model would be a cart on a frictionless horizontal air track, with perfectly elastic bumpers—it just keeps bouncing back and forth forever. (This potential is artificial, of course, but I urge you to treat it with respect. Despite its simplicity—or rather, precisely because of its simplicity—it serves as a wonderfully accessible test case for all the fancy machinery that comes later. We’ll refer back to it frequently.)

Outside the well, (the probability of finding the particle there is zero). Inside the well, where , the time-independent Schrödinger equation (Equation 2.5) reads

(By writing it in this way, I have tacitly assumed that ; we know from Problem 2.2 that won’t work.) Equation 2.24 is the classical simple harmonic oscillator equation; the general solution is

where A and B are arbitrary constants. Typically, these constants are fixed by the boundary conditions of the problem. What are the appropriate boundary conditions for ? Ordinarily, both and are continuous, 11 but where the potential goes to infinity only the first of these applies. (I’ll justify these boundary conditions, and account for the exception when , in Section 2.5; for now I hope you will trust me.) Continuity of requires that

so as to join onto the solution outside the well. What does this tell us about A and B? Well,

Then , so either (in which case we’re left with the trivial—non-normalizable— solution , or else , which means that

But is no good (again, that would imply , and the negative solutions give nothing new, since and we can absorb the minus sign into A. So the distinct solutions are

Curiously, the boundary condition at does not determine the constant A, but rather the constant k, and hence the possible values o

In radical contrast to the classical case, a quantum particle in the infinite square well cannot have just any old energy—it has to be one of these special (“allowed”) values. 12 To find A, we normalize : 13

This only determines the magnitude of A, but it is simplest to pick the positive real root: (the phase of A carries no physical significance anyway). Inside the well, then, the solutions are

As promised, the time-independent Schrödinger equation has delivered an infinite set of solutions (one for each positive integer . The first few of these are plotted in Figure 2.2. They look just like the standing waves on a string of length a; , which carries the lowest energy, is called the ground state, the others, whose energies increase in proportion to , are called excited states. As a collection, the functions have some interesting and important properties: 1. They are alternately even and odd, with respect to the center of the well: is even, is odd, is even, and so on. 14 2. As you go up in energy, each successive state has one more node (zero-crossing): has none (the end points don’t count), has one, has two, and so on. 3. They are mutually orthogonal, in the sense that 15

Note that this argument does not work if . (Can you spot the point at which it fails?) In that case normalization tells us that the integral is 1. In fact, we can combine orthogonality and normalization into a single statement

where (the so-called Kronecker delta) is defined by

We say that the s are orthonormal. 4. They are complete, in the sense that any other function, , can be expressed as a linear combination of them:

I’m not about to prove the completeness of the functions , but if you’ve studied advanced calculus you will recognize that Equation 2.35 is nothing but the Fourier series for , and the fact that “any” function can be expanded in this way is sometimes called Dirichlet’s theorem. 16 The coefficients can be evaluated—for a given —by a method I call Fourier’s trick, which beautifully exploits the orthonormality of : Multiply both sides of Equation 2.35 by , and integrate.

(Notice how the Kronecker delta kills every term in the sum except the one for which .) Thus the nth coefficient in the expansion of is

These four properties are extremely powerful, and they are not peculiar to the infinite square well. The first is true whenever the potential itself is a symmetric function; the second is universal, regardless of the shape of the potential. 18 Orthogonality is also quite general—I’ll show you the proof in Chapter 3. Completeness holds for all the potentials you are likely to encounter, but the proofs tend to be nasty and laborious; I’m afraid most physicists simply assume completeness, and hope for the best. The stationary states (Equation 2.18) of the infinite square well are

I claimed (Equation 2.17) that the most general solution to the (time-dependent) Schrödinger equation is a linear combination of stationary states:

(If you doubt that this is a solution, by all means check it!) It remains only for me to demonstrate that I can fit any prescribed initial wave function, by appropriate choice of the coefficients :

The completeness of the s (confirmed in this case by Dirichlet’s theorem) guarantees that I can always express in this way, and their orthonormality licenses the use of Fourier’s trick to determine the actual coefficients:

That does it: Given the initial wave function, , we first compute the expansion coefficients , using Equation 2.40, and then plug these into Equation 2.39 to obtain . Armed with the wave function, we are in a position to compute any dynamical quantities of interest, using the procedures in Chapter 1. And this same ritual applies to any potential—the only things that change are the functional form of the s and the equation for the allowed energies

Of course, it’s no accident that Equation 2.20 came out right in Example 2.3. Indeed, this follows from the normalization of (the s are independent of time, so I’m going to do the proof for ; if this bothers you, you can easily generalize the argument to arbitrary .

(Again, the Kronecker delta picks out the term in the summation over m.) Similarly, the expectation value of the energy (Equation 2.21) can be checked explicitly: The time-independent Schrödinger equation (Equation 2.12) says

## Osilator Harmonis

*Tingkat energinya berjarak sama*

Gerak harmonik terjadi ketika suatu sistem bergetar pada konfigurasi kesetimbangan. Sistem dapat berupa objek yang ditopang oleh pegas atau mengambang dalam cairan, molekul diatomik, atom dalam kisi kristal—ada banyak contoh dalam semua skala ukuran. Syarat terjadinya gerak harmonik adalah adanya gaya pemulih yang bekerja untuk mengembalikan sistem ke konfigurasi setimbangnya ketika terganggu. Inersia massa yang terlibat menyebabkan mereka melampaui keseimbangan, dan sistem berosilasi tanpa batas jika tidak ada energi yang hilang.

Dalam kasus khusus gerak harmonik sederhana, gaya pemulih F pada partikel bermassa m adalah linier; yaitu, F sebanding dengan perpindahan partikel x dari posisi setimbangnya dan dalam arah yang berlawanan. Jadi

Hubungan ini biasa disebut hukum Hooke. Dari hukum gerak kedua, F = ma, kita mendapatkan

Ada berbagai cara untuk menulis solusi untuk Persamaan. (5.62). Yang umum adalah

di mana

adalah frekuensi osilasi dan A adalah amplitudonya. Nilai dari ф, sudut fase, tergantung pada berapa x pada waktu t = 0 dan pada arah gerak saat itu.

Pentingnya osilator harmonik sederhana dalam fisika klasik dan modern tidak terletak pada kepatuhan yang ketat dari gaya pemulih aktual ke hukum Hooke, yang jarang benar, tetapi pada kenyataan bahwa gaya pemulih ini direduksi menjadi hukum Hooke untuk perpindahan kecil x. Akibatnya, setiap sistem di mana sesuatu mengeksekusi getaran kecil tentang posisi kesetimbangan berperilaku sangat mirip dengan osilator harmonik sederhana.

Untuk memverifikasi poin penting ini, kami mencatat bahwa setiap gaya pemulih yang merupakan fungsi dari x dapat dinyatakan dalam deret Maclaurin tentang posisi kesetimbangan x = 0 sebagai

Karena x = 0 adalah posisi kesetimbangan, . Untuk x kecil nilai x2, x3, . . . sangat kecil dibandingkan dengan x, sehingga suku ketiga dan suku yang lebih tinggi dari deret tersebut dapat diabaikan. Oleh karena itu, satu-satunya suku signifikansi ketika x kecil adalah suku kedua. Oleh karena itu

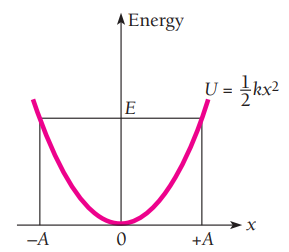
yang merupakan hukum Hooke ketika (dF/dx)x=0 negatif, tentu saja untuk setiap gaya pemulih. Kesimpulannya, kemudian, adalah bahwa semua osilasi bersifat harmonik sederhana ketika amplitudonya cukup kecil.

Fungsi energi potensial U(x) yang sesuai dengan gaya hukum Hooke dapat ditemukan dengan menghitung kerja yang diperlukan untuk membawa partikel dari x = 0 ke x = x melawan gaya tersebut. Hasilnya adalah

yang diplot pada Gambar 5.10. Kurva *U(x)* versus x adalah parabola. Jika energi osilator adalah E, partikel bergetar bolak-balik antara x = -A dan x = +A, dimana E dan A dihubungkan oleh . Gambar 8.18 menunjukkan bagaimana kurva energi potensial nonparabola dapat didekati dengan parabola untuk perpindahan kecil.

Bahkan sebelum kita membuat perhitungan rinci, kita dapat mengantisipasi tiga modifikasi mekanika kuantum pada gambar klasik ini:

1. Energi yang diizinkan tidak akan membentuk spektrum kontinu, melainkan spektrum diskrit dengan nilai spesifik tertentu saja.
2. Energi terendah yang diizinkan tidak akan menjadi E = 0 tetapi akan menjadi E = E0 minimum yang pasti.
3. Akan ada probabilitas tertentu bahwa partikel dapat menembus potensial dengan baik dan melampaui batas -A dan +A.



Gambar 5.10 Energi potensial osilator harmonik sebanding dengan x2, di mana x adalah perpindahan dari posisi kesetimbangan. Amplitudo A dari gerakan ditentukan oleh energi total E dari osilator, yang secara klasik dapat memiliki nilai apa pun.

Tingkat Energi

Persamaan Schrödinger untuk osilator harmonik adalah, dengan

Lebih mudah untuk menyederhanakan Persamaan. (5.75) dengan memperkenalkan besaran tak berdimensi

dan

di mana v adalah frekuensi klasik osilasi yang diberikan oleh Persamaan. (5.64). Dalam melakukan substitusi ini, yang telah kita lakukan adalah mengubah satuan di mana x dan E masing-masing dinyatakan dari meter dan joule menjadi satuan tak berdimensi.

Dalam bentuk y dan persamaan Schrödinger menjadi

Solusi persamaan ini yang dapat diterima di sini dibatasi oleh kondisi yang ψ → 0 sebagaimana y → ∞ agar

Jika tidak, fungsi gelombang tidak dapat mewakili partikel yang sebenarnya. Sifat matematika dari Persamaan. (5.69) sedemikian rupa sehingga kondisi ini akan dipenuhi hanya jika

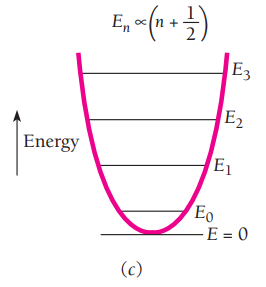
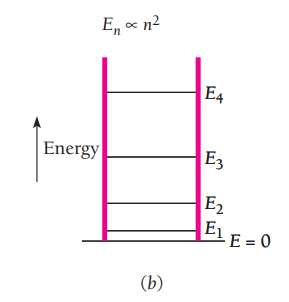
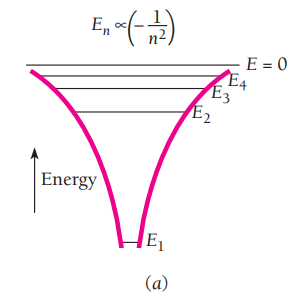
n = 0, 1, 2, 3, . . .

Karena menurut Persamaan. (5.68), tingkat energi osilator harmonik yang frekuensi klasik osilasinya diberikan oleh rumus

n = 0, 1, 2, 3, . . . Energi osilator harmonik dengan demikian dikuantisasi dalam langkah h. Kami mencatat bahwa ketika n = 0,

yang merupakan nilai terendah yang dapat dimiliki energi osilator. Nilai ini disebut energi titik nol karena osilator harmonik dalam kesetimbangan dengan lingkungannya akan mendekati energi E = E0 dan bukan E = 0 saat suhu mendekati 0 K.

Gambar 5.11 adalah perbandingan tingkat energi osilator harmonik dengan atom hidrogen dan partikel dalam kotak dengan dinding yang sangat keras. Bentuk masing-masing kurva energi potensial juga diperlihatkan. Jarak tingkat energi adalah konstan hanya untuk osilator harmonik.



Gambar 5.11 Potensi sumur dan tingkat energi dari (a) atom hidrogen, (b) partikel dalam kotak, dan (c) osilator harmonik. Dalam setiap kasus, tingkat energi bergantung dengan cara yang berbeda pada bilangan kuantum n. Hanya untuk osilator harmonik yang level-levelnya berjarak sama. Simbol itu berarti “sebanding dengan.”

Fungsi Gelombang

Untuk setiap pilihan parameter n terdapat fungsi gelombang yang berbeda n. Setiap fungsi terdiri dari polinomial Hn(y) (disebut polinomial Hermite) baik pangkat ganjil atau genap dari y, faktor eksponensial , dan koefisien numerik yang diperlukan untuk ψn untuk memenuhi kondisi normalisasi

n = 0, 1, 2 . . .

Rumus umum untuk fungsi gelombang ke-n adalah

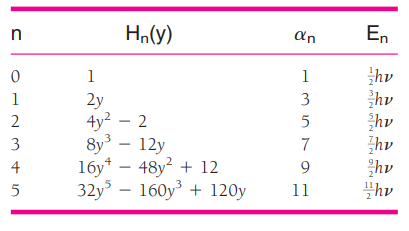
Enam polinomial hermit pertama Hn(y) tercantum dalam Tabel 5.2.

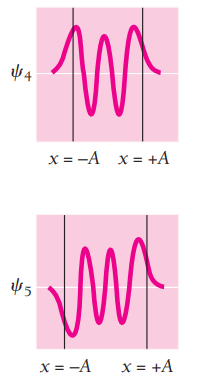
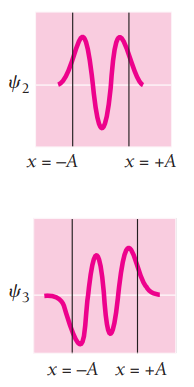
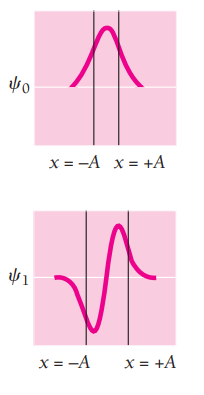
Fungsi gelombang yang sesuai dengan enam tingkat energi pertama dari osilator harmonik ditunjukkan pada Gambar 5.12. Dalam setiap kasus rentang di mana partikel berosilasi klasik dengan energi total yang sama En akan dibatasi ditunjukkan. Jelas bahwa partikel mampu menembus ke daerah terlarang secara klasik dengan kata lain, melebihi amplitudo A yang ditentukan oleh energi dengan probabilitas yang menurun secara eksponensial, seperti halnya partikel dalam sumur potensial kuadrat berhingga.

Sangat menarik dan instruktif untuk membandingkan kerapatan probabilitas dari osilator harmonik klasik dan osilator harmonik mekanika kuantum dengan energi yang sama. Kurva atas pada Gambar. 5.13 menunjukkan kepadatan ini untuk osilator klasik. Probabilitas P untuk menemukan partikel pada posisi tertentu paling besar pada titik akhir gerakannya, di mana ia bergerak lambat, dan paling kecil di dekat posisi kesetimbangan (x=0), di mana ia bergerak cepat.

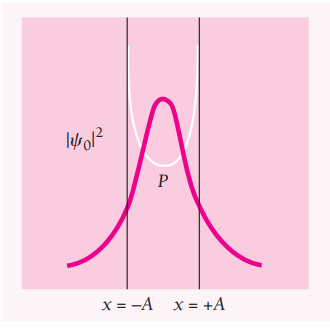
Persis perilaku yang berlawanan terjadi ketika osilator mekanika kuantum berada dalam keadaan energi terendah n=0. Seperti yang ditunjukkan, kerapatan probabilitas memiliki nilai maksimum pada x = 0 dan turun di kedua sisi posisi ini. Namun, ketidaksepakatan ini menjadi kurang dan kurang ditandai dengan peningkatan n. Grafik yang lebih rendah dari Gambar 5.13 sesuai dengan n = 10, dan jelas bahwa ketika dirata-ratakan atas x memiliki karakter umum probabilitas klasik P. Ini adalah contoh lain dari prinsip korespondensi yang disebutkan dalam Bab. 4: Dalam batas bilangan kuantum besar, fisika kuantum menghasilkan hasil yang sama seperti fisika klasik.

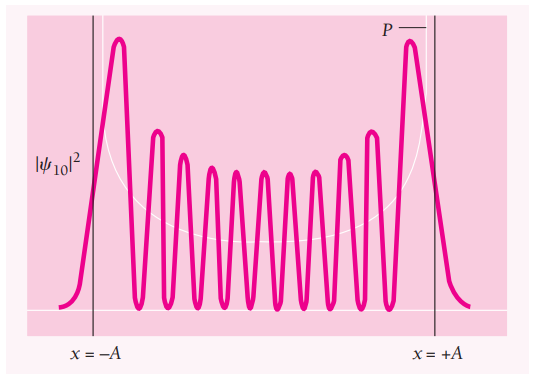
Dapat diperdebatkan bahwa meskipun memang mendekati P ketika dihaluskan, namun berfluktuasi dengan cepat dengan x sedangkan P tidak. Namun, keberatan ini hanya berarti jika fluktuasi dapat diamati, dan semakin kecil jarak antara puncak dan cekungan, semakin sulit untuk mendeteksinya secara eksperimental. "Ekor" eksponensial dari di luar x = ±A juga berkurang besarnya dengan meningkatnya n. Dengan demikian gambar klasik dan kuantum mulai semakin mirip satu sama lain semakin besar nilai n, sesuai dengan prinsip korespondensi, meskipun mereka sangat berbeda untuk n kecil.





Gambar 5.12 Enam fungsi gelombang osilator harmonik pertama. Garis vertikal menunjukkan batas A dan A antara osilator klasik dengan energi yang sama akan bergetar.





Gambar 5.13 Kerapatan probabilitas untuk n = 0 dan n = 10 keadaan osilator harmonik mekanika kuantum. Kerapatan probabilitas untuk osilator harmonik klasik dengan energi yang sama ditunjukkan dalam warna putih. Pada keadaan n = 10, panjang gelombang terpendek pada x = 0 dan terpanjang pada x = -A

Contoh 5.7

Temukan nilai harapan <x> untuk dua keadaan pertama dari osilator harmonik.

Solusi

Rumus umum untuk <x> adalah

Dalam perhitungan seperti ini lebih mudah untuk memulai dengan y menggantikan x dan kemudian menggunakan Persamaan. (5.67) untuk mengubah ke x. Dari Persamaan. (5.72) dan Tabel 5.2,

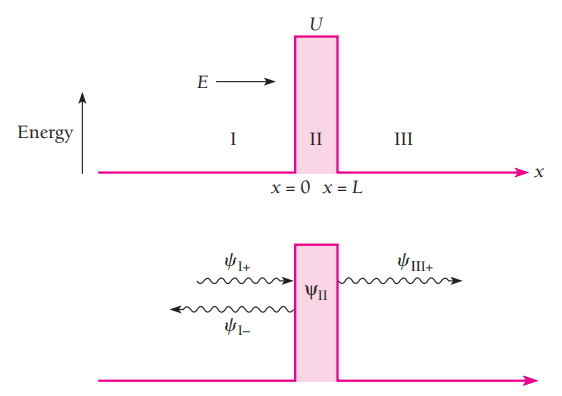
Nilai <x> untuk n = 0 dan n = 1 masing-masing akan sebanding dengan integral

Nilai harapan <x> karena itu 0 dalam kedua kasus. Sebenarnya, <x> = 0 untuk semua keadaan osilator harmonik, yang dapat diprediksi karena x = 0 adalah posisi kesetimbangan osilator di mana energi potensialnya minimum.

## Efek Terowongan (Tunnel)

*Sebuah partikel tanpa energi untuk melewati penghalang potensial masih dapat menembusnya*

Meskipun dinding sumur potensial pada Gambar 5.7 memiliki ketinggian yang terbatas, mereka dianggap tebalnya tak terhingga. Akibatnya partikel itu terjebak selamanya meskipun bisa menembus dinding. Selanjutnya kita melihat situasi sebuah partikel yang menumbuk penghalang potensial setinggi U, sekali lagi dengan E < U, tetapi di sini penghalang memiliki lebar terhingga (Gbr. 5.9). Apa yang akan kita temukan adalah bahwa partikel tersebut memiliki probabilitas tertentu tidak harus besar, tetapi juga tidak nol untuk melewati penghalang dan muncul di sisi lain. Partikel tersebut tidak memiliki energi untuk melewati bagian atas penghalang, tetapi tetap dapat menembusnya, sehingga untuk berbicara. Tidak mengherankan, semakin tinggi penghalang dan semakin lebar, semakin kecil kemungkinan partikel bisa melewatinya.



Gambar 5.9 Ketika sebuah partikel energi E < U mendekati penghalang potensial, menurut mekanika klasik partikel harus dipantulkan. Dalam mekanika kuantum, gelombang de Broglie yang sesuai dengan partikel sebagian dipantulkan dan sebagian ditransmisikan, yang berarti bahwa partikel memiliki peluang terbatas untuk menembus penghalang.

Efek terowongan benar-benar terjadi, terutama dalam kasus partikel alfa yang dipancarkan oleh inti radioaktif tertentu. Seperti yang akan kita pelajari di Bab. 12, partikel alfa yang energi kinetiknya hanya beberapa MeV dapat lepas dari inti yang dinding potensialnya mungkin 25 MeV. Probabilitas untuk melarikan diri sangat kecil sehingga partikel alfa mungkin harus menabrak dinding 1038 kali atau lebih sebelum muncul, tetapi cepat atau lambat ia akan keluar. Tunneling juga terjadi dalam pengoperasian dioda semikonduktor tertentu (Bag. 10.7) di mana elektron melewati penghalang potensial meskipun energi kinetiknya lebih kecil dari ketinggian penghalang.

Mari kita perhatikan seberkas partikel identik yang semuanya memiliki energi kinetik E. Sinar datang dari kiri pada penghalang potensial dengan tinggi U dan lebar L, seperti pada Gambar 5.9. Di kedua sisi penghalang U=0, yang berarti tidak ada gaya yang bekerja pada partikel di sana. Fungsi gelombang ψI+ mewakili partikel masuk yang bergerak ke kanan dan ψI- mewakili partikel yang dipantulkan bergerak ke kiri; ψIII mewakili partikel yang ditransmisikan bergerak ke kanan. Fungsi gelombang ψII mewakili partikel-partikel di dalam penghalang, beberapa di antaranya berakhir di wilayah III sementara yang lain kembali ke wilayah I. Probabilitas transmisi T bagi partikel untuk melewati penghalang sama dengan fraksi sinar datang yang didapat melalui penghalang. Probabilitas ini dihitung dalam Lampiran bab ini. Nilai perkiraannya diberikan oleh

di mana

dan L adalah lebar penghalang.

Contoh 5.6

Elektron dengan energi 1,0 eV dan 2,0 eV datang pada penghalang setinggi 10,0 eV dan lebar 0,50 nm.

1. Temukan probabilitas transmisi masing-masing.
2. Bagaimana pengaruhnya jika lebar penghalang digandakan?

Solusi

1. Untuk elektron 1,0-eV

karena L = 0,50 nm = 5,0 x 1010 m, , dan perkiraan probabilitas transmisi adalah

Satu elektron 1,0-eV dari 8,9 juta rata-rata dapat menembus penghalang 10-eV. Untuk elektron 2,0 eV perhitungan serupa memberikan . Elektron ini dua kali lebih mungkin untuk menembus penghalang.

1. Jika lebar penghalang digandakan menjadi 1,0 nm, probabilitas transmisi menjadi

Terbukti T lebih sensitif terhadap lebar penghalang daripada energi partikel di sini

## Efek Tunnel

Kami mempertimbangkan situasi yang ditunjukkan pada Gambar. 5.9 dari partikel energi E<U yang mendekati penghalang potensial U tinggi dan lebar L. Di luar penghalang di daerah I dan III persamaan Schrödinger untuk partikel mengambil bentuk

Solusi untuk persamaan ini yang sesuai di sini adalah

dimana

adalah bilangan gelombang dari gelombang de Broglie yang mewakili partikel di luar penghalang.

Karena

solusi ini setara dengan Persamaan. (5.38) nilai koefisien berbeda dalam setiap kasus, tentu saja tetapi dalam bentuk yang lebih cocok untuk menggambarkan partikel yang tidak terperangkap.

Berbagai istilah dalam Persamaan. (5.75) dan (5.76) tidak sulit untuk ditafsirkan. Seperti yang ditunjukkan secara skematis pada Gambar. 5.9, adalah gelombang amplitudo A datang dari kiri pada penghalang. Oleh karena itu kita dapat menulis

Gelombang ini sesuai dengan berkas insiden partikel dalam arti bahwa I 2 adalah kerapatan probabilitasnya. Jika adalah kecepatan grup gelombang yang datang, yang sama dengan kecepatan partikel, maka

adalah fluks partikel yang tiba di penghalang. Artinya, S adalah jumlah partikel per detik yang tiba di sana.

Pada x = 0 gelombang datang mengenai penghalang dan sebagian dipantulkan, dengan

mewakili gelombang pantul. Karenanya

Di sisi terjauh penghalang (x > L) hanya ada gelombang

bergerak dalam arah +x dengan kecepatan vIII+ karena wilayah III tidak mengandung apa pun yang dapat memantulkan gelombang. Jadi G = 0 dan

Probabilitas transmisi T untuk partikel melewati penghalang adalah rasio

antara fluks partikel yang muncul dari penghalang dan fluks yang tiba di sana. Dengan kata lain, T adalah fraksi partikel datang yang berhasil menembus penghalang. Secara klasik T = 0 karena partikel dengan E < U tidak dapat eksis di dalam penghalang; mari kita lihat apa hasil mekanika kuantumnya.

Di wilayah II persamaan Schrödinger untuk partikel adalah

Karena U > E solusinya adalah

dimana bilangan gelombang di dalam penghalang adalah

Karena eksponen adalah kuantitas nyata, tidak berosilasi dan karenanya tidak mewakili partikel yang bergerak. Namun, kerapatan probabilitas bukanlah nol, jadi ada probabilitas terbatas untuk menemukan partikel di dalam penghalang. Partikel tersebut dapat muncul ke wilayah III atau mungkin kembali ke wilayah I.

## The Free Particle

We turn next to what should have been the simplest case of all: the free particle everywhere). Classically this would just be motion at constant velocity, but in quantum mechanics the problem is surprisingly subtle. The time-independent Schrödinger equation reads

So far, it’s the same as inside the infinite square well (Equation 2.24), where the potential is also zero; this time, however, I prefer to write the general solution in exponential form (instead of sines and cosines), for reasons that will appear in due course:

Unlike the infinite square well, there are no boundary conditions to restrict the possible values of k (and hence of ; the free particle can carry any (positive) energy. Tacking on the standard time dependence, ,

Now, any function of x and t that depends on these variables in the special combination (for some constant represents a wave of unchanging shape, traveling in the -direction at speed v: A fixed point on the waveform (for example, a maximum or a minimum) corresponds to a fixed value of the argument, and hence to x and t such that

Since every point on the waveform moves with the same velocity, its shape doesn’t change as it propagates. Thus the first term in Equation 2.94 represents a wave traveling to the right, and the second represents a wave (of the same energy) going to the left. By the way, since they only differ by the sign in front of k, we might as well write

and let k run negative to cover the case of waves traveling to the left:

Evidently the “stationary states” of the free particle are propagating waves; their wavelength is , and, according to the de Broglie formula (Equation 1.39), they carry momentum

The speed of these waves (the coefficient of t over the coefficient of is

On the other hand, the classical speed of a free particle with energy E is given by (pure kinetic, since , so

Apparently the quantum mechanical wave function travels at half the speed of the particle it is supposed to represent! We’ll return to this paradox in a moment—there is an even more serious problem we need to confront first: This wave function is not normalizable:

In the case of the free particle, then, the separable solutions do not represent physically realizable states. A free particle cannot exist in a stationary state; or, to put it another way, there is no such thing as a free particle with a definite energy. But that doesn’t mean the separable solutions are of no use to us. For they play a mathematical role that is entirely independent of their physical interpretation: The general solution to the time-dependent Schrödinger equation is still a linear combination of separable solutions (only this time it’s an integral over the continuous variable k, instead of a sum over the discrete index :

(The quantity is factored out for convenience; what plays the role of the coefficient in Equation 2.17 is the combination .) Now this wave function can be normalized (for appropriate . But it necessarily carries a range of ks, and hence a range of energies and speeds. We call it a wave packet. 40 In the generic quantum problem, we are given , and we are asked to find . For a free particle the solution takes the form of Equation 2.101; the only question is how to determine so as to match the initial wave function:

This is a classic problem in Fourier analysis; the answer is provided by Plancherel’s theorem (see Problem 2.19):

is called the Fourier transform of ; is the inverse Fourier transform of (the only difference is the sign in the exponent). 41 There is, of course, some restriction on the allowable functions: The integrals have to exist. 42 For our purposes this is guaranteed by the physical requirement that itself be normalized. So the solution to the generic quantum problem, for the free particle, is Equation 2.101, with

I return now to the paradox noted earlier: the fact that the separable solution travels at the “wrong” speed for the particle it ostensibly represents. Strictly speaking, the problem evaporated when we discovered that is not a physically realizable state. Nevertheless, it is of interest to figure out how information about the particle velocity is contained in the wave function (Equation 2.101). The essential idea is this: A wave packet is a superposition of sinusoidal functions whose amplitude is modulated by ϕ (Figure 2.10); it consists of “ripples” contained within an “envelope.” What corresponds to the particle velocity is not the speed of the individual ripples (the so-called phase velocity), but rather the speed of the envelope (the group velocity)—which, depending on the nature of the waves, can be greater than, less than, or equal to, the velocity of the ripples that go to make it up. For waves on a string, the group velocity is the same as the phase velocity. For water waves it is one-half the phase velocity, as you may have noticed when you toss a rock into a pond (if you concentrate on a particular ripple, you will see it build up from the rear, move forward through the group, and fade away at the front, while the group as a whole propagates out at half that speed). What I need to show is that for the wave function of a free particle in quantum mechanics the group velocity is twice the phase velocity—just right to match the classical particle speed.

The problem, then, is to determine the group velocity of a wave packet with the generic form

In our case , but what I have to say now applies to any kind of wave packet, regardless of its dispersion relation (the formula for ω as a function of . Let us assume that is narrowly peaked about some particular value . (There is nothing illegal about a broad spread in k, but such wave packets change shape rapidly—different components travel at different speeds, so the whole notion of a “group,” with a welldefined velocity, loses its meaning.) Since the integrand is negligible except in the vicinity of , we may as well Taylor-expand the function about that point, and keep only the leading terms:

where is the derivative of ω with respect to k, at the point . Changing variables from k to (to center the integral at , we have

The term in front is a sinusoidal wave (the “ripples”), traveling at speed . It is modulated by the integral (the “envelope”), which is a function of , and therefore propagates at the speed . Thus the phase velocity is

while the group velocity is

(both of them evaluated at . In our case, , so , whereas , which is twice as great. This confirms that the group velocity of the wave packet matches the classical particle velocity:

## Menerapkan Kondisi Batas

Untuk menghitung probabilitas transmisi T kita harus menerapkan kondisi batas yang sesuai ke dan . Gambar 5.14 menunjukkan fungsi gelombang pada daerah I, II, dan III. Seperti dibahas sebelumnya, baik ψ dan turunannya harus kontinu di mana-mana. Dengan mengacu pada Gambar 5.14, kondisi ini berarti bahwa untuk kecocokan sempurna di setiap sisi penghalang, fungsi gelombang di dalam dan di luar harus memiliki nilai yang sama dan kemiringan yang sama. Oleh karena itu di sisi kiri penghalang

dan di sisi kanan

Sekarang kita substitusikan dan dari Persamaan. (5,75), (5,81), dan (5,85) ke dalam persamaan di atas. Ini menghasilkan dalam urutan yang sama

Persamaan (5.91) sampai (5.94) dapat diselesaikan untuk (A/F) untuk memberikan

Mari kita asumsikan bahwa penghalang potensial U relatif tinggi terhadap energi E dari partikel yang datang. Jika demikian halnya, maka k2/k1 > k1/k2 dan

Mari kita asumsikan juga bahwa penghalang cukup lebar untuk dilemahkan antara x = 0 dan x = L. Ini berarti bahwa dan

Oleh karena itu Persamaan. (5.95) dapat didekati dengan

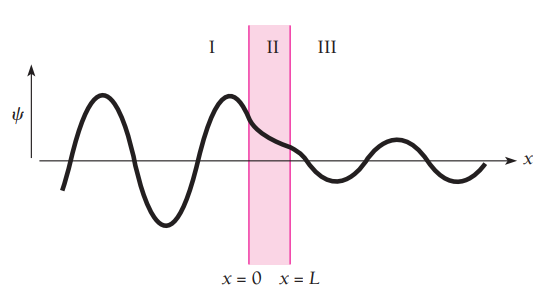
Sekarang kita kalikan (A/F) dan (A/F)\* untuk menghasilkan

Di sini jadi di Persamaan. (5.83), yang berarti probabilitas transmisi adalah

Dari definisi k1, Persamaan. (5.77), dan dari k2, Persamaan. (5.86), kita melihat bahwa

Rumus ini berarti bahwa kuantitas dalam tanda kurung dalam Persamaan. (5,99) bervariasi jauh lebih sedikit dengan E dan U daripada eksponensial. Kuantitas yang dikurung, selanjutnya, selalu dalam urutan besarnya 1 dalam nilai. Oleh karena itu, perkiraan yang masuk akal dari probabilitas transmisi adalah

seperti yang dinyatakan dalam Sec. 5.10.



Gambar 5.14 Pada setiap dinding penghalang, fungsi gelombang di dalam dan di luarnya harus bersesuaian sempurna, yang berarti harus memiliki nilai dan kemiringan yang sama di sana.

## POTENSI FUNGSI DELTA

**Negara Terikat dan Negara Hamburan**

Kami telah menemukan dua jenis solusi yang sangat berbeda untuk persamaan Schrödinger yang tidak bergantung waktu: Untuk sumur kuadrat tak terbatas dan osilator harmonik, keduanya dapat dinormalisasi, dan diberi label oleh indeks diskrit n; untuk partikel bebas mereka tidak dapat dinormalisasi, dan diberi label oleh variabel kontinu k. Yang pertama mewakili keadaan yang dapat direalisasikan secara fisik dalam hak mereka sendiri, yang terakhir tidak; tetapi dalam kedua kasus solusi umum untuk persamaan Schrödinger yang bergantung waktu adalah kombinasi linier dari keadaan stasioner—untuk tipe pertama kombinasi ini berbentuk jumlah (lebih , sedangkan untuk yang kedua adalah integral (lebih dari . signifikansi fisik dari perbedaan ini? Dalam mekanika klasik, potensial bebas waktu satu dimensi dapat menimbulkan dua jenis gerak yang agak berbeda. Jika naik lebih tinggi dari energi total partikel di kedua sisi (Gambar 2.11(a)), maka partikel "terjebak" di sumur potensial—bergoyang bolak-balik di antara titik balik, tetapi tidak dapat lepas (kecuali, tentu saja, Anda memberinya sumber energi ekstra, seperti motor, tetapi kami tidak berbicara tentang itu). Kami menyebutnya keadaan terikat. Jika, di sisi lain, E melebihi di satu sisi (atau keduanya), maka partikel datang dari "tak terhingga," melambat atau mempercepat di bawah pengaruh potensial , dan kembali ke tak terhingga (Gambar 2.11(b)).(Tidak bisa terjebak dalam potensi kecuali ada beberapa mekanisme, seperti gesekan, untuk menghilangkan energi, tetapi sekali lagi, kita tidak membicarakannya.) Kami menyebutnya keadaan hamburan. Beberapa potensial hanya menerima keadaan terikat (misalnya, osilator harmonik); beberapa hanya mengizinkan status hamburan (misalnya, sebuah bukit potensial tanpa kemiringan di dalamnya); beberapa mengizinkan kedua jenis, tergantung pada energi partikel.

Dua jenis solusi persamaan Schrödinger sesuai dengan keadaan terikat dan hamburan. Perbedaannya bahkan lebih bersih dalam domain kuantum, karena fenomena tunneling (yang akan kita bahas segera) memungkinkan partikel untuk "bocor" melalui penghalang potensial yang terbatas, jadi satu-satunya hal yang penting adalah potensi di tak terhingga (Gambar 2

Dalam kehidupan nyata, sebagian besar potensi menjadi nol pada tak terhingga, dalam hal ini kriteria lebih disederhanakan:

Karena sumur kuadrat tak terbatas dan potensi osilator harmonik menuju tak terhingga sebagai , mereka hanya mengakui keadaan terikat; karena potensi partikel bebas adalah nol di mana-mana, itu hanya memungkinkan keadaan hamburan. 43 Pada bagian ini (dan selanjutnya) kita akan menggali potensi-potensi yang mendukung kedua jenis negara tersebut.

### Sumur Fungsi Delta

Fungsi delta Dirac adalah lonjakan yang sangat tinggi dan sangat sempit di titik asal, yang luasnya adalah 1 (Gambar 2.12):

Secara teknis, ini bukan fungsi sama sekali, karena tidak berhingga pada x = 0 (matematikawan menyebutnya fungsi umum atau fungsi yang digeneralisasi, atau distribusi). 44 Namun demikian, ini adalah konstruksi yang sangat berguna dalam fisika teoretis. (Misalnya, dalam elektrodinamika, kerapatan muatan dari muatan titik adalah fungsi delta.) Perhatikan bahwa δ(x-a) akan menjadi lonjakan area 1 pada titik a. Jika Anda mengalikan δ(x-a) dengan fungsi biasa f(x), itu sama dengan mengalikan dengan f(a),

karena produknya nol pula kecuali di titik a. Khususnya,

Itulah sifat terpenting dari fungsi delta: Di bawah tanda integral berfungsi untuk “mengambil” nilai f(x) pada titik a. (Tentu saja, integral tidak perlu dari -∞ ke +∞ ; yang penting adalah bahwa domain integrasi mencakup titik a, sehingga a-є sampai a+є akan dilakukan, untuk sembarang є>0.)

Gambar 2.12: Fungsi delta Dirac (Persamaan 2.114).

Mari kita pertimbangkan potensi bentuk

di mana a adalah beberapa konstanta positif. 45 Ini adalah potensi buatan, tentu saja (begitu juga sumur persegi tak terbatas), tetapi sangat mudah untuk digunakan, dan menerangi teori dasar dengan kekacauan analitis yang minimal. Persamaan Schrödinger untuk fungsi delta terbaca dengan baik

itu menghasilkan kedua keadaan terikat (E<0) dan keadaan hamburan (E>0).

Pertama-tama kita akan melihat keadaan terikat. Di wilayah x<0,V(x)=0 jadi

di mana

(E negatif, dengan asumsi, jadi k adalah real dan positif.) Solusi umum untuk Persamaan 2.119 adalah

tapi bentuk pertama meledak sebagai x → -∞ , jadi kita harus memilih A = 0:

Di wilayah tersebut x > 0,V(x) lagi-lagi nol, dan solusi umumnya berbentuk ; kali ini istilah kedua yang meledak (sebagai x → +∞), jadi

Tetap hanya untuk menggabungkan kedua fungsi ini bersama-sama, menggunakan kondisi batas yang sesuai di x = 0. Saya mengutip sebelumnya kondisi batas standar untuk ψ:

Dalam hal ini syarat batas pertama menyatakan bahwa , jadi

diplot pada Gambar 2.13. Kondisi batas kedua tidak memberi tahu kita apa pun; ini (seperti dinding sumur persegi tak terbatas) kasus luar biasa di mana V tak terbatas pada sambungan, dan jelas dari grafik bahwa fungsi ini memiliki ketegaran di . Apalagi sampai saat ini fungsi delta belum masuk ke dalam cerita sama sekali. Ternyata fungsi delta menentukan diskontinuitas dalam turunan dari , di . Saya akan menunjukkan kepada Anda sekarang bagaimana ini bekerja, dan sebagai produk sampingan kita akan melihat mengapa biasanya terus menerus.

Gambar 2.13: Fungsi gelombang keadaan terikat untuk potensi fungsi delta (Persamaan 2.125).

Idenya adalah untuk mengintegrasikan persamaan Schrödinger, dari ke , dan kemudian mengambil limit sebagai

Integral pertama tidak lain adalah , dievaluasi pada dua titik akhir; integral terakhir adalah nol, pada limit , karena merupakan luas sliver dengan lebar lenyap dan tinggi terhingga. Dengan demikian

Biasanya, batas di sebelah kanan adalah nol lagi, dan karena itu biasanya kontinu. Tetapi ketika tidak terbatas pada batas, argumen ini gagal. Khususnya, jika , Persamaan 2.116 menghasilkan

Untuk kasus yang dihadapi (Persamaan 2.125),

dan karenanya . Dan . Jadi Persamaan 2.128 mengatakan

dan energi yang diizinkan (Persamaan 2.120) adalah

Akhirnya, kami menormalkan:

jadi (memilih akar real positif):

Terbukti delta berfungsi dengan baik, terlepas dari "kekuatannya" , memiliki tepat satu keadaan terikat:

Bagaimana dengan status hamburan, dengan ? Untuk persamaan Schrödinger berbunyi

di mana

adalah nyata dan positif. Solusi umumnya adalah

dan kali ini kita tidak bisa mengesampingkan kedua istilah itu, karena tak satu pun dari mereka meledak. Demikian pula untuk ,

Kontinuitas at mensyaratkan bahwa

Derivatifnya adalah

dan karenanya . Sementara itu, , sehingga syarat batas kedua (Persamaan 2.128) mengatakan

atau, lebih kompak,

Setelah menerapkan kedua kondisi batas, kita memiliki dua persamaan (Persamaan 2.136 dan 2.138) dalam empat yang tidak diketahui , B, F, dan —lima, jika Anda menghitung k. Normalisasi tidak akan membantu—ini bukan keadaan yang dapat dinormalisasi. Mungkin lebih baik kita berhenti sejenak, dan memeriksa signifikansi fisik dari berbagai konstanta ini. Ingat yang menimbulkan (bila digabungkan dengan faktor goyangan ke fungsi gelombang yang merambat ke kanan, dan mengarah ke gelombang yang merambat ke kiri. Oleh karena itu, A (dalam Persamaan 2.134) adalah amplitudo gelombang yang datang dari kiri , B adalah amplitudo gelombang yang kembali ke kiri; F (Persamaan 2.135) adalah amplitudo gelombang yang merambat ke kanan, dan G adalah amplitudo gelombang yang datang dari kanan (lihat Gambar 2.14). partikel eksperimen hamburan yang khas ditembakkan dari satu arah — katakanlah, dari kiri. Dalam hal ini amplitudo gelombang yang datang dari kanan akan menjadi nol:

A adalah amplitudo gelombang datang, B adalah amplitudo gelombang pantul, dan F adalah amplitudo gelombang yang ditransmisikan. Memecahkan Persamaan 2.136 dan 2.138 untuk B dan F, kami menemukan

(Jika Anda ingin mempelajari hamburan dari kanan, atur ; maka G adalah amplitudo datang, F adalah amplitudo yang dipantulkan, dan B adalah amplitudo yang ditransmisikan.)

Gambar 2.14: Hamburan dari delta berfungsi dengan baik.

Sekarang, probabilitas menemukan partikel di lokasi tertentu diberikan oleh , sehingga probabilitas relatif 46 bahwa partikel yang datang akan dipantulkan kembali adalah

R disebut koefisien refleksi. (Jika Anda memiliki seberkas partikel, ini memberi tahu Anda fraksi dari bilangan masuk yang akan memantul kembali.) Sementara itu, probabilitas sebuah partikel akan terus menembus adalah koefisien transmisi 47

Tentu saja, jumlah dari probabilitas ini harus 1—dan itu adalah:

Perhatikan bahwa R dan T adalah fungsi dari , dan karenanya (Persamaan 2.133 dan 2.138) dari E:

Semakin tinggi energi, semakin besar kemungkinan transmisi (yang masuk akal).

Ini semua sangat rapi, tetapi ada masalah prinsip yang tidak dapat kita abaikan sama sekali: Fungsi gelombang hamburan ini tidak dapat dinormalisasi, jadi mereka tidak benar-benar mewakili kemungkinan keadaan partikel. Kita tahu penyelesaian untuk masalah ini: bentuk kombinasi linier yang dapat dinormalisasi dari keadaan stasioner, seperti yang kita lakukan untuk partikel bebas—partikel fisik sebenarnya diwakili oleh paket gelombang yang dihasilkan. Meskipun pada prinsipnya langsung, ini adalah bisnis yang berantakan dalam praktiknya, dan pada titik ini yang terbaik adalah menyerahkan masalahnya ke komputer. 48 Sementara itu, karena tidak mungkin membuat fungsi gelombang partikel bebas yang dapat dinormalisasi tanpa melibatkan kisaran energi, R dan T harus ditafsirkan sebagai perkiraan peluang refleksi dan transmisi untuk partikel dengan energi di sekitar E.

Kebetulan, mungkin mengejutkan Anda bahwa kami dapat menganalisis masalah yang bergantung pada waktu (partikel masuk, menyebarkan potensi, dan terbang hingga tak terbatas) menggunakan keadaan stasioner. Bagaimanapun, (dalam Persamaan 2.134 dan 2.135) hanyalah fungsi sinusoidal yang kompleks, tidak bergantung waktu, memanjang (dengan amplitudo konstan) hingga tak terhingga di kedua arah. Namun, dengan menerapkan kondisi batas yang sesuai pada fungsi ini, kami dapat menentukan probabilitas bahwa partikel (diwakili oleh paket gelombang lokal) akan memantul, atau melewati, potensi. Keajaiban matematis di balik ini, saya kira, adalah fakta bahwa dengan mengambil kombinasi linier dari keadaan yang tersebar di semua ruang, dan dengan ketergantungan waktu yang pada dasarnya sepele, kita dapat membangun fungsi gelombang yang terkonsentrasi di sekitar titik (bergerak), dengan perilaku yang cukup rumit. tepat waktu (lihat Soal 2.42).

Selama kita memiliki persamaan yang relevan di atas tabel, mari kita lihat secara singkat kasus penghalang fungsi delta (Gambar 2.15). Secara formal, yang harus kita lakukan adalah mengubah tanda . Ini membunuh keadaan terikat, tentu saja (Masalah 2.2). Di sisi lain, koefisien refleksi dan transmisi, yang hanya bergantung pada , tidak berubah. Aneh untuk dikatakan, partikel itu kemungkinan besar akan melewati penghalang seperti juga menyeberangi sumur! Secara klasik, tentu saja, sebuah partikel tidak dapat melewati penghalang yang sangat tinggi, terlepas dari energinya. Faktanya, masalah hamburan klasik cukup membosankan: Jika , maka dan — partikel pasti membuatnya berakhir; jika kemudian dan —ia naik ke atas bukit sampai kehabisan tenaga, dan kemudian kembali dengan cara yang sama seperti sebelumnya. Masalah hamburan kuantum jauh lebih kaya: Partikel memiliki beberapa kemungkinan bukan nol melewati potensi bahkan jika . Kami menyebut fenomena ini tunneling; itu adalah mekanisme yang memungkinkan banyak elektronik modern—belum lagi kemajuan spektakuler dalam mikroskop. Sebaliknya, bahkan jika ada kemungkinan partikel itu akan memantul kembali—walaupun saya tidak menyarankan Anda meluncur dari tebing dengan harapan mekanika kuantum akan menyelamatkan Anda (lihat Soal 2.35).

Gambar 2.15: Penghalang fungsi delta.