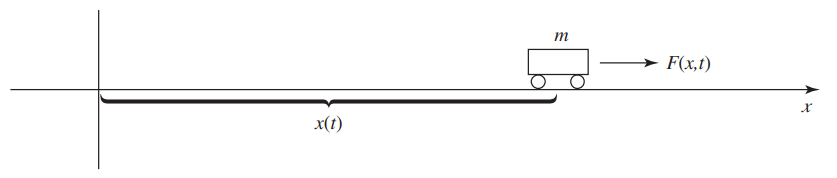
1. FUNGSI GELOMBANG
   1. PERSAMAAN SCHRODINGER

Bayangkan sebuah partikel bermassa m, dibatasi untuk bergerak sepanjang sumbu x, dikenai gaya tertentu *F(x,t)* (Gambar 1.1).



Program mekanika klasik adalah menentukan posisi partikel pada waktu tertentu: x(t). Setelah kita mengetahuinya, kita dapat mengetahui kecepatan (*v=dx/dt*), momentum (*p=mv*), energi kinetik (*T=(1/2)mv2*), atau variabel dinamis lainnya yang menarik. Dan bagaimana cara menentukan *x(t)*? Kami menerapkan hukum kedua Newton: *F = ma*. (Untuk sistem konservatif—satu-satunya jenis yang akan kita bahas, dan untungnya, satu-satunya jenis yang terjadi pada tingkat mikroskopis—gaya dapat dinyatakan sebagai turunan dari fungsi energi potensial,[[1]](#footnote-0) *F=-∂V/∂x*, dan hukum Newton membaca *md2x/dt2=-∂V/∂x*.) Ini, bersama dengan kondisi awal yang sesuai (biasanya posisi dan kecepatan at t=0 ), menentukan x(t).)

Mekanika kuantum mendekati masalah yang sama ini dengan cara yang sangat berbeda. Dalam hal ini yang kita cari adalah **fungsi gelombang** partikel, Ψ(*x,t*), dan kita mendapatkannya dengan menyelesaikan **persamaan Schrödinger**:)

(1.1)

Di sini i adalah akar kuadrat dari -1, dan *ħ* adalah konstanta Planck—atau lebih tepatnya, konstanta aslinya (*h*) dibagi dengan *2π*:

(1.2)

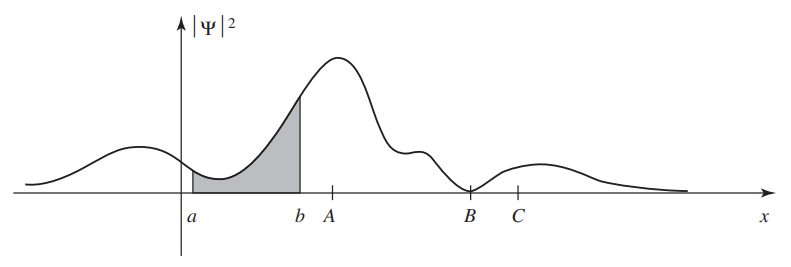
Persamaan Schrödinger memainkan peran yang secara logis analog dengan hukum kedua Newton: Mengingat kondisi awal yang sesuai (biasanya, Ψ(x,0)), persamaan Schrödinger menentukan Ψ(x,t) untuk semua waktu di masa depan, sama seperti, dalam mekanika klasik, hukum Newton menentukan x(t) untuk semua waktu di masa depan.[[2]](#footnote-1)

* 1. INTERPRETASI STATISTIK

Tapi apa sebenarnya "fungsi gelombang" ini, dan apa fungsinya untuk Anda setelah Anda mendapatkannya? Bagaimanapun, sebuah partikel, menurut sifatnya, terlokalisasi pada suatu titik, sedangkan fungsi gelombang (seperti namanya) tersebar di ruang ~~angkasa~~ (ini adalah fungsi dari x, untuk t yang diberikan). Bagaimana objek seperti itu dapat mewakili keadaan partikel? Jawabannya diberikan oleh interpretasi statistik Born, yang mengatakan bahwa memberikan probabilitas untuk menemukan partikel di titik x, pada waktu t atau, lebih tepatnya[[3]](#footnote-2)

(1.3)

Probabilitas adalah luas daerah di bawah grafik . Untuk fungsi gelombang pada Gambar 1.2,



Gambar 1.2: Fungsi gelombang tipikal. Daerah yang diarsir menyatakan peluang menemukan partikel antara a dan b. Partikel akan relatif mungkin ditemukan di dekat A, dan tidak mungkin ditemukan di dekat B.

Anda akan sangat mungkin menemukan partikel di sekitar titik A, di mana besar, dan relatif tidak mungkin menemukannya di dekat titik B.

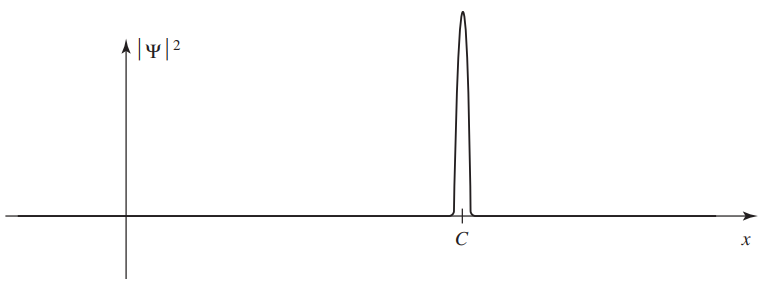
Interpretasi statistik memperkenalkan semacam **ketidakpastian** ke dalam mekanika kuantum, karena bahkan jika Anda tahu semua yang harus dikatakan teori tentang partikel (yaitu: fungsi gelombangnya), Anda tetap tidak dapat memprediksi dengan pasti hasil eksperimen sederhana untuk mengukur posisinya—semua mekanika kuantum yang ditawarkan adalah informasi statistik tentang kemungkinan hasil. Ketidakpastian ini telah sangat mengganggu fisikawan dan filsuf, dan wajar untuk bertanya-tanya apakah itu fakta alam, atau cacat dalam teori.

Misalkan saya mengukur posisi partikel, dan saya menemukannya di titik C[[4]](#footnote-3). Pertanyaan: Di mana partikel sebelum saya melakukan pengukuran? Ada tiga jawaban yang masuk akal untuk pertanyaan ini, dan mereka berfungsi untuk mengkarakterisasi aliran pemikiran utama mengenai ketidakpastian kuantum:

1. Posisi **realis**: *Partikel itu berada di C.* Hal ini tampaknya masuk akal, dan ini adalah respons yang dianjurkan Einstein. Namun, perhatikan bahwa jika ini benar maka mekanika kuantum adalah teori yang tidak lengkap, karena partikelnya benar-benar berada di C, namun mekanika kuantum tidak dapat memberi tahu kita demikian. Bagi kaum realis, ketidakpastian bukanlah fakta alam, tetapi cerminan dari ketidaktahuan kita. Seperti yang dikatakan d'Espagnat, "posisi partikel tidak pernah tidak pasti, tetapi hanya tidak diketahui oleh peneliti."[[5]](#footnote-4) Jelas Ψ bukan keseluruhan cerita—beberapa informasi tambahan (dikenal sebagai **variabel tersembunyi**) diperlukan untuk memberikan deskripsi lengkap tentang partikel.
2. Posisi **ortodoks**: *Partikel itu tidak benar-benar ada di mana pun.* Tindakan pengukuranlah yang memaksanya untuk “bersikap” (meskipun bagaimana dan mengapa memutuskan pada titik C kami tidak berani bertanya). Jordan mengatakannya dengan sangat gamblang: “Pengamatan tidak hanya mengganggu apa yang akan diukur, tetapi juga menghasilkannya … Kami memaksa [partikel] untuk mengambil posisi tertentu.”[[6]](#footnote-5) Pandangan ini (yang disebut **interpretasi Kopenhagen**), dikaitkan dengan Bohr dan para pengikutnya. Di antara fisikawan itu selalu menjadi posisi yang paling diterima secara luas. Namun, perhatikan bahwa jika itu benar, ada sesuatu yang sangat aneh tentang tindakan pengukuran—sesuatu yang hampir satu abad perdebatan tidak banyak membantu untuk dijelaskan.
3. Posisi **agnostik**: *Menolak untuk menjawab*. Ini tidak sebodoh kedengarannya — lagi pula, apa gunanya membuat pernyataan tentang status partikel sebelum pengukuran, ketika satu-satunya cara untuk mengetahui apakah Anda benar adalah dengan melakukan pengukuran, di mana kasus apa yang Anda dapatkan tidak lagi "sebelum pengukuran"? Adalah metafisika (dalam arti kata yang merendahkan) untuk mengkhawatirkan sesuatu yang pada dasarnya tidak dapat diuji. Pauli berkata: "Seseorang seharusnya tidak lagi memeras otak tentang masalah apakah sesuatu yang tidak dapat diketahui apa-apa tentang keberadaannya sama sekali, daripada tentang pertanyaan kuno tentang berapa banyak malaikat yang dapat duduk di ujung jarum."[[7]](#footnote-6) Selama beberapa dekade ini adalah posisi "mundur" dari sebagian besar fisikawan: mereka akan mencoba menjual jawaban ortodoks kepada Anda, tetapi jika Anda gigih, mereka akan mundur ke respons agnostik, dan mengakhiri percakapan.

Sampai baru-baru ini, ketiga posisi (realis, ortodoks, dan agnostik) memiliki pendukungnya masing-masing. Tetapi pada tahun 1964 John Bell mengejutkan komunitas fisika dengan menunjukkan bahwa membuat perbedaan yang dapat diamati apakah partikel memiliki posisi yang tepat (meskipun tidak diketahui) sebelum pengukuran, atau tidak. Penemuan Bell secara efektif menghilangkan agnostisisme sebagai pilihan yang layak, dan menjadikannya pertanyaan eksperimental apakah 1 atau 2 adalah pilihan yang benar. Saya akan kembali ke cerita ini di akhir buku, ketika Anda berada dalam posisi yang lebih baik untuk menghargai argumen Bell; untuk saat ini, cukuplah untuk mengatakan bahwa eksperimen-eksperimen itu secara meyakinkan telah mengkonfirmasi interpretasi ortodoks:[[8]](#footnote-7) sebuah partikel sama sekali tidak memiliki posisi yang tepat sebelum pengukuran, seperti halnya riak-riak di kolam; itu adalah proses pengukuran yang menekankan pada satu angka tertentu, dan dengan demikian dalam arti tertentu menciptakan hasil yang spesifik, hanya dibatasi oleh pembobotan statistik yang dipaksakan oleh fungsi gelombang.

Bagaimana jika saya melakukan pengukuran kedua, segera setelah yang pertama? Apakah saya akan mendapatkan C lagi, atau apakah tindakan pengukuran menghasilkan angka yang sama sekali baru setiap kali? Pada pertanyaan ini semua orang setuju: Pengukuran berulang (pada partikel yang sama) harus mengembalikan nilai yang sama. Memang, akan sulit untuk membuktikan bahwa partikel itu benar-benar ditemukan di C pada contoh pertama, jika ini tidak dapat dikonfirmasi dengan pengulangan pengukuran secara langsung. Bagaimana interpretasi ortodoks menjelaskan fakta bahwa pengukuran kedua pasti akan menghasilkan nilai C? Pastilah pengukuran pertama secara radikal mengubah fungsi gelombang, sehingga sekarang mencapai puncak yang tajam di sekitar C (Gambar 1.3).



Gambar 1.3: Runtuhnya fungsi gelombang: grafik segera setelah pengukuran menemukan partikel di titik C.

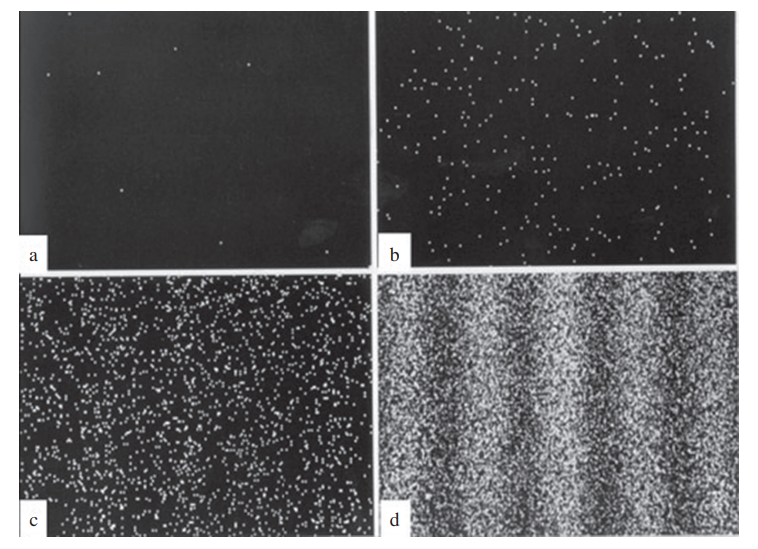
Kami mengatakan bahwa fungsi gelombang **runtuh**, pada pengukuran, ke lonjakan di titik C (segera menyebar lagi, sesuai dengan persamaan Schrödinger, sehingga pengukuran kedua harus dilakukan dengan cepat). Maka, ada dua jenis proses fisik yang sama sekali berbeda: proses "biasa", di mana fungsi gelombang berkembang secara santai di bawah persamaan Schrödinger, dan "pengukuran", di mana Ψ tiba-tiba dan terputus-putus runtuh.[[9]](#footnote-8)

**Contoh 1.1**

**Interferensi Elektron**. Saya telah menegaskan bahwa partikel (elektron, misalnya) memiliki sifat gelombang, dikodekan dalam Ψ. Bagaimana kita bisa memeriksa ini, di laboratorium?

Tanda klasik dari fenomena gelombang adalah *interferensi*: dua gelombang dalam fase berinterferensi secara konstruktif, dan di luar fase mereka berinterferensi secara destruktif. Sifat gelombang cahaya dikonfirmasi pada tahun 1801 oleh eksperimen celah ganda Young yang terkenal, yang menunjukkan “pinggiran” interferensi pada layar yang jauh ketika berkas monokromatik melewati dua celah. Jika pada dasarnya percobaan yang sama dilakukan dengan elektron, pola yang sama berkembang,[[10]](#footnote-9) menegaskan sifat gelombang elektron.

Sekarang anggaplah kita mengurangi intensitas berkas elektron, sampai hanya satu elektron yang ada dalam peralatan pada waktu tertentu. Menurut interpretasi statistik setiap elektron akan menghasilkan tempat di layar. Mekanika kuantum tidak dapat memprediksi lokasi yang tepat dari tempat itu — yang dapat diberitahukan kepada kita hanyalah probabilitas pendaratan elektron tertentu di tempat tertentu. Tetapi jika kita bersabar, dan menunggu seratus ribu elektron—satu per satu—untuk melakukan perjalanan, akumulasi titik-titik tersebut mengungkapkan pola interferensi dua celah klasik (Gambar 1.4).[[11]](#footnote-10)



Gambar 1.4: Pembentukan pola interferensi elektron. (a) Delapan elektron, (b) 270 elektron, (c) 2000 elektron, (d) 160.000 elektron. Dicetak ulang atas izin Central Research Laboratory, Hitachi, Ltd., Jepang.

Tentu saja, jika Anda menutup satu celah, atau entah bagaimana berusaha mendeteksi celah mana yang dilewati setiap elektron, pola interferensi menghilang; fungsi gelombang dari partikel yang muncul sekarang sama sekali berbeda (dalam kasus pertama karena kondisi batas untuk persamaan Schrödinger telah diubah, dan yang kedua karena runtuhnya fungsi gelombang pada pengukuran). Tetapi dengan kedua celah terbuka, dan tidak ada interupsi elektron yang sedang terbang, setiap elektron mengganggu dirinya sendiri; itu tidak melewati satu celah atau yang lain, tetapi melalui keduanya sekaligus, seperti gelombang air, menabrak dermaga dengan dua bukaan, mengganggu dirinya sendiri. Tidak ada yang misterius tentang ini, setelah Anda menerima gagasan bahwa partikel mematuhi persamaan gelombang. Hal yang benar-benar mencengangkan adalah susunan blip-by-blip dari pola tersebut. Dalam teori gelombang klasik mana pun, polanya akan berkembang dengan lancar dan terus-menerus, semakin intens seiring berjalannya waktu. Proses kuantum lebih mirip lukisan pointillist Seurat: Gambar muncul dari kontribusi kumulatif semua titik individu.[[12]](#footnote-11)

* 1. PELUANG
     1. Variable Diskrit

Karena interpretasi statistik, probabilitas memainkan peran sentral dalam mekanika kuantum, jadi saya menyimpang sekarang untuk diskusi singkat tentang teori probabilitas. Ini terutama masalah pengenalan beberapa notasi dan terminologi, dan saya akan melakukannya dalam konteks contoh sederhana.

Bayangkan sebuah ruangan berisi empat belas orang, yang usianya adalah sebagai berikut:

satu orang berusia 14 tahun,

satu orang berusia 15 tahun,

tiga orang berusia 16 tahun,

dua orang berusia 22 tahun,

dua orang berusia 24 tahun,

lima orang berusia 25 tahun.

Jika kita biarkan N(j) mewakili jumlah orang yang berusia j, maka

N(14)=1,

N(15)=1,

N(16)=3,

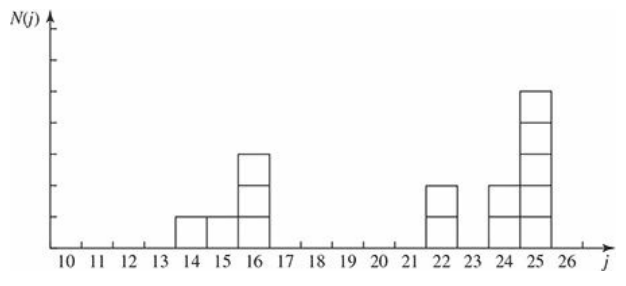
N(22)=2,

N(24)=2,

N(25)=5,

sementara N(17), misalnya, adalah nol. Jumlah orang dalam ruangan tersebut adalah

(Dalam contoh, tentu saja, N=14.) Gambar 1.5 adalah histogram dari data. Berikut ini adalah beberapa pertanyaan yang mungkin ditanyakan tentang distribusi ini.



Gambar 1.5: Histogram yang menunjukkan jumlah orang, N(j), dengan usia j, misalnya pada Bagian 1.3.1.

**Pertanyaan 1** Jika Anda memilih satu orang secara acak dari kelompok ini, berapa peluang bahwa usia orang ini adalah 15 tahun?

**Jawaban** Satu peluang dalam 14, karena ada 14 kemungkinan pilihan, semua kemungkinannya sama, di antaranya hanya satu yang memiliki usia tertentu. Jika P(j) adalah peluang mendapatkan umur j, maka P(14)=1/14, P(15)=1/14, P(16)=3/14, dan seterusnya. Secara umum,

Perhatikan bahwa peluang mendapatkan 14 atau 15 adalah jumlah dari peluang individu (dalam hal ini, 1/7). Secara khusus, jumlah semua probabilitasnya adalah 1—orang yang Anda pilih harus memiliki usia tertentu:

**Pertanyaan 2** Berapa usia yang paling mungkin?

**Jawaban** 25, jelas; lima orang berbagi usia ini, sedangkan paling banyak tiga memiliki usia lain. J yang paling mungkin adalah j dimana P(j) adalah maksimum.

**Pertanyaan 3** Berapa usia rata-rata?

**Jawaban** 23, untuk 7 orang lebih muda dari 23, dan 7 lebih tua. (Median adalah nilai j sedemikian rupa sehingga probabilitas mendapatkan hasil yang lebih besar sama dengan probabilitas mendapatkan hasil yang lebih kecil.)

**Pertanyaan 4** Berapa usia **rata-rata** (atau **mean**)?

**Jawaban**

Secara umum, nilai rata-rata j (yang akan kita tulis sebagai berikut: (j)) adalah

Perhatikan bahwa tidak perlu ada orang dengan usia rata-rata atau usia rata-rata—dalam contoh ini tak seorang pun kebetulan berusia 21 atau 23 tahun. Dalam mekanika kuantum, rata-rata biasanya adalah besaran bunga; dalam konteks itu telah disebut **nilai harap**. Ini adalah istilah yang menyesatkan, karena ini menunjukkan bahwa ini adalah hasil yang kemungkinan besar akan Anda dapatkan jika Anda melakukan satu pengukuran (itu akan menjadi nilai yang paling mungkin, bukan nilai rata-rata)—tetapi saya khawatir kita terjebak dengan itu.

**Pertanyaan 5** Berapa rata-rata kuadrat usia?

**Jawaban** Anda bisa mendapatkan 142=196, dengan probabilitas 1/14, atau 152=225, dengan probabilitas 1/14, atau 162=256, dengan probabilitas 3/14, dan seterusnya. Maka rata-ratanya adalah

In general, the average value of some function of j is given by

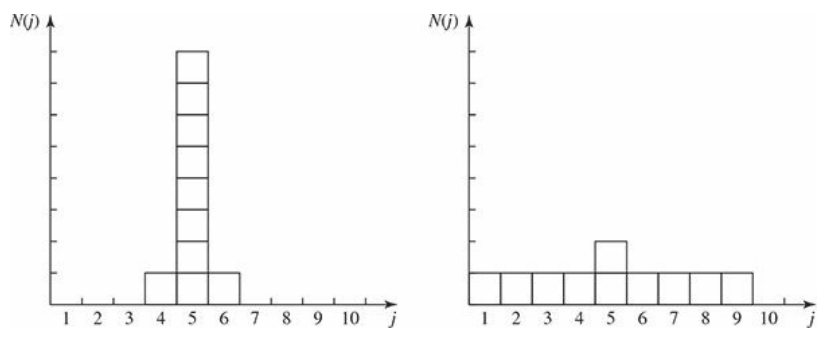
(Persamaan 1.6, 1.7, dan 1.8 adalah, jika Anda suka, kasus khusus dari rumus ini.) Hati-hati: Rata-rata kuadrat, (j2), tidak sama, secara umum, dengan kuadrat rata-rata, (j)2. Misalnya, jika ruangan tersebut hanya berisi dua bayi berusia 1 dan 3 tahun, maka (j2)=5, tetapi (j)2=4.

Sekarang, ada perbedaan mencolok antara dua histogram pada Gambar 1.6, meskipun mereka memiliki median yang sama, rata-rata yang sama, nilai yang paling mungkin sama, dan jumlah elemen yang sama: Yang pertama memuncak tajam tentang nilai rata-rata, sedangkan yang kedua luas dan datar. (Yang pertama mungkin mewakili profil usia untuk siswa di ruang kelas kota besar, yang kedua, mungkin, sekolah satu kamar pedesaan.) Kita membutuhkan ukuran numerik dari jumlah "penyebaran" dalam distribusi, sehubungan dengan rata-rata. Cara yang paling jelas untuk melakukan ini adalah dengan mencari tahu seberapa jauh setiap individu dari rata-rata,

dan menghitung rata-rata dari Δj. Masalahnya, tentu saja, Anda mendapatkan nol:

(Perhatikan bahwa (j) konstan—tidak berubah saat Anda berpindah dari satu anggota sampel ke yang lain—sehingga dapat diambil di luar penjumlahan.) Untuk menghindari masalah yang menjengkelkan ini, Anda dapat memutuskan untuk merata-ratakan nilai absolut dari . Tetapi nilai-nilai absolut tidak menyenangkan untuk dikerjakan; sebagai gantinya, kita mengatasi masalah tanda dengan mengkuadratkan sebelum rata-rata

Kuantitas ini dikenal sebagai **varians** dari distribusi; σ itu sendiri (akar kuadrat rata-rata kuadrat deviasi dari rata-rata—teguk!) disebut **deviasi standar**. Yang terakhir adalah ukuran umum dari penyebaran sekitar (j).



Gambar 1.6: Dua histogram dengan median yang sama, rata-rata yang sama, dan nilai kemungkinan yang sama, tetapi standar deviasi yang berbeda.

Ada teorema kecil yang berguna tentang varians:

Mengambil akar kuadrat, standar deviasi itu sendiri dapat ditulis sebagai

Dalam praktiknya, ini adalah cara yang jauh lebih cepat untuk mendapatkan daripada dengan penerapan langsung Persamaan 1.11: cukup hitung (j2) dan (j)2, kurangi, dan ambil akar kuadratnya. Kebetulan, saya memperingatkan Anda beberapa saat yang lalu bahwa (j2) secara umum tidak sama dengan (j)2. Karena σ2 jelas non-negatif (dari definisinya 1.11), Persamaan 1.12 menyiratkan bahwa

dan keduanya sama hanya jika σ=0, artinya, untuk distribusi tanpa spread sama sekali (setiap anggota memiliki nilai yang sama).

* + 1. **Variabel Kontinyu**

Sejauh ini, saya berasumsi bahwa kita berurusan dengan variabel diskrit—yaitu, variabel yang hanya dapat mengambil nilai terisolasi tertentu (dalam contoh, j harus bilangan bulat, karena saya memberikan usia hanya dalam tahun). Tetapi cukup sederhana untuk menggeneralisasi ke distribusi kontinu. Jika saya memilih seseorang secara acak dari jalanan, peluang usianya tepat 16 tahun, 4 jam, 27 menit, dan 3,333… detik adalah nol. Satu-satunya hal yang masuk akal untuk dibicarakan adalah probabilitas bahwa usianya terletak pada beberapa interval—katakanlah, antara 16 dan 17. Jika intervalnya cukup pendek, probabilitas ini sebanding dengan panjang interval. Misalnya, peluang usianya antara 16 dan 16 ditambah dua hari mungkin dua kali lipat kemungkinan antara 16 dan 16 ditambah satu hari. (Kecuali, saya kira, ada ledakan bayi yang luar biasa 16 tahun yang lalu, tepat pada hari itu—dalam hal ini kami hanya memilih interval yang terlalu lama untuk diterapkan aturan. Jika ledakan bayi berlangsung enam jam, kami akan mengambil interval satu detik atau kurang, untuk berada di sisi yang aman. Secara teknis, kita berbicara tentang interval yang sangat kecil.) Jadi

{Probabilitas bahwa sesuatu (dipilih secara acak) terletak di antara x dan (x+dx)}=

Faktor proporsionalitas, ρ(x), sering secara longgar disebut "probabilitas mendapatkan x", tetapi ini adalah bahasa yang ceroboh; istilah yang lebih baik adalah kerapatan probabilitas. Probabilitas bahwa x terletak di antara a dan b (interval berhingga) diberikan oleh integral dari ρ(x):

dan aturan yang kami simpulkan untuk distribusi diskrit diterjemahkan dengan cara yang jelas:

**Contoh 1.2**

Misalkan seseorang menjatuhkan batu dari tebing setinggi h. Saat jatuh, saya mengambil sejuta foto, dengan interval acak. Pada setiap gambar saya mengukur jarak batu itu jatuh. Pertanyaan: Berapa rata-rata dari semua jarak ini? Artinya, berapa waktu rata-rata jarak yang ditempuh?[[13]](#footnote-12)

**Solusi:** Batu mulai diam, dan bertambah cepat saat jatuh; ia menghabiskan lebih banyak waktu di dekat puncak, jadi jarak rata-rata pasti akan kurang dari h/2. Dengan mengabaikan hambatan udara, jarak x pada waktu t adalah

Kecepatannya adalah dx/dt = gt, dan total waktu terbang adalah T = 2h/g. Peluang terambilnya foto tertentu antara t dan t + dt adalah dt/T , jadi peluang foto tersebut menunjukkan jarak pada jarak yang sesuai x ke x + dx adalah

Jadi kerapatan probabilitas (Persamaan 1.14) adalah

(di luar kisaran ini, tentu saja, kepadatan probabilitas adalah nol).

Kita dapat memeriksa hasil ini, menggunakan Persamaan 1.16:

Jarak rata-rata (Persamaan 1.17) adalah

yang agak kurang dari h/2, seperti yang diantisipasi.

Gambar 1.7 menunjukkan grafik (x). Perhatikan bahwa kepadatan probabilitas dapat menjadi tak hingga, meskipun probabilitas itu sendiri (integral dari ρ) tentu saja harus berhingga (memang, kurang dari atau sama dengan 1).

* 1. **Normalisasi**

Bahkan sebelum kita mempertimbangkan perhitungan sebenarnya dari Ψ, kita dapat menetapkan persyaratan tertentu yang harus selalu dipenuhi. Untuk satu hal, karena |Ψ|2 sebanding dengan kerapatan probabilitas P untuk menemukan benda yang dijelaskan oleh Ψ, integral dari |Ψ|2 di seluruh ruang harus berhingga bagaimanapun juga, benda itu ada di suatu tempat.Jika

partikel itu tidak ada, dan integralnya jelas tidak bisa menjadi ∞ dan masih berarti apapun. Selanjutnya, |Ψ|2 tidak bisa negatif atau kompleks karena hasilnya berupa bilangan real semua seperti yang sudah diperlihatkan sebelumnya. Satu-satunya kemungkinan yang tersisa adalah integral menjadi kuantitas terbatas jika Ψ ingin menggambarkan dengan benar benda real.

Biasanya lebih mudah untuk memiliki |Ψ|2 sama dengan kerapatan probabilitas P untuk menemukan partikel yang dijelaskan oleh Ψ, daripada hanya sebanding dengan P. Jika |Ψ|2 sama dengan P, maka pasti benar bahwa

(1.1)

karena jika partikel selalu ada di suatu tempat, maka

Fungsi gelombang yang memenuhi persamaan (1.1) dikatakan dinormalisasi. Setiap fungsi gelombang yang dapat diterima dapat dinormalisasi dengan mengalikannya dengan konstanta yang sesuai; kita akan segera melihat bagaimana hal ini dilakukan.

Kami kembali sekarang ke interpretasi statistik dari fungsi gelombang (Persamaan 1.3), yang mengatakan bahwa p2 adalah kerapatan probabilitas untuk menemukan partikel di titik x, pada waktu t. Ini mengikuti (Persamaan 1.16) bahwa integral p2 atas semua x harus 1 (partikel harus berada di suatu tempat):

Tanpa ini, interpretasi statistik akan menjadi omong kosong.

Namun, persyaratan ini akan mengganggu Anda: Bagaimanapun, fungsi gelombang seharusnya ditentukan oleh persamaan Schrödinger—kita tidak dapat memaksakan kondisi asing tanpa Ψ memeriksa bahwa keduanya konsisten. Sekilas Persamaan 1.1 mengungkapkan bahwa jika Ψ(x,t) adalah solusi, demikian juga AΨ(x,t), di mana A adalah konstanta (kompleks). Apa yang harus kita lakukan, kemudian, adalah memilih faktor perkalian yang tidak ditentukan ini untuk memastikan bahwa Persamaan 1.20 terpenuhi. Proses ini disebut normalisasi fungsi gelombang. Untuk beberapa solusi persamaan Schrödinger integralnya tak terhingga; dalam hal ini tidak ada faktor perkalian yang menghasilkan 1. Hal yang sama berlaku untuk solusi trivial Ψ=0. Solusi yang tidak dapat dinormalisasi tersebut tidak dapat mewakili partikel, dan harus ditolak. Keadaan yang dapat direalisasikan secara fisik sesuai dengan solusi integral kuadrat dari persamaan Schrödinger.

Tapi tunggu sebentar! Misalkan saya telah menormalkan fungsi gelombang pada waktu t=0. Bagaimana saya tahu bahwa itu akan tetap normal, seiring berjalannya waktu, dan Ψ berevolusi? (Anda tidak dapat terus menormalkan kembali fungsi gelombang, karena kemudian A menjadi fungsi dari t, dan Anda tidak lagi memiliki solusi untuk persamaan Schrödinger.) Untungnya, persamaan Schrödinger memiliki sifat luar biasa yang secara otomatis mempertahankan normalisasi dari fungsi gelombang—tanpa fitur penting ini persamaan Schrödinger tidak akan sesuai dengan interpretasi statistik, dan seluruh teori akan runtuh.

Ini penting, jadi sebaiknya kita berhenti sejenak untuk bukti yang cermat. Memulai dengan,

(Perhatikan bahwa integral adalah fungsi hanya dari t, jadi saya menggunakan turunan total (d/dt) di sebelah kiri, tetapi integral adalah fungsi dari x dan juga t, jadi turunan parsial (∂/∂t) di sebelah kanan.) Dengan aturan perkalian,

Sekarang persamaan Schrödinger mengatakan bahwa

dan karenanya juga (mengambil konjugat kompleks Persamaan 1.23)

jadi

Integral dalam Persamaan 1.21 sekarang dapat dievaluasi secara eksplisit:

Tetapi Ψ(x,t) harus menuju nol saat x menuju (±) tak terhingga—jika tidak, fungsi gelombang tidak akan dapat dinormalisasi. 15 Oleh karena itu

dan karenanya integralnya konstan (tidak tergantung waktu); jika Ψ dinormalisasi pada t=0, itu tetap dinormalisasi untuk semua waktu mendatang. QED (Quantum Electro Dynamics)

* 1. **Momentum**

Untuk sebuah partikel di statep2 , nilai harapan dari x adalah

Apa sebenarnya artinya ini? Ini tidak berarti bahwa jika Anda mengukur posisi satu partikel berulang kali, adalah rata-rata dari hasil yang akan Anda dapatkan. Sebaliknya: Pengukuran pertama (yang hasilnya tidak tentu) akan meruntuhkan fungsi gelombang menjadi lonjakan pada nilai yang sebenarnya diperoleh, dan pengukuran berikutnya (jika dilakukan dengan cepat) hanya akan mengulangi hasil yang sama. Sebaliknya, adalah rata-rata pengukuran yang dilakukan pada partikel semua dalam keadaan Ψ, yang berarti bahwa Anda harus menemukan beberapa cara untuk mengembalikan partikel ke keadaan semula setelah setiap pengukuran, atau Anda harus menyiapkan seluruh rangkaian partikel, masing-masing dalam keadaan Ψ yang sama, dan ukur posisi semuanya: <x> adalah rata-rata dari hasil ini. Saya suka membayangkan deretan botol di rak, masing-masing berisi partikel dalam keadaan Ψ (relatif terhadap pusat botol). Seorang mahasiswa pascasarjana dengan penggaris ditugaskan untuk setiap botol, dan pada sinyal mereka semua mengukur posisi partikel masing-masing. Kami kemudian membangun histogram dari hasil, yang harus cocok dengan |Ψ|2, dan menghitung rata-rata, yang harus sesuai dengan <x>. (Tentu saja, karena kami hanya menggunakan sampel yang terbatas, kami tidak dapat mengharapkan kesepakatan yang sempurna, tetapi semakin banyak botol yang kami gunakan, semakin dekat kami seharusnya.) Singkatnya, nilai harapan adalah rata-rata pengukuran pada ansambel sistem yang disiapkan secara identik, bukan rata-rata pengukuran berulang pada satu dan sistem yang sama.

Sekarang, seiring berjalannya waktu, akan berubah (karena ketergantungan waktu Ψ), dan kita mungkin tertarik untuk mengetahui seberapa cepat ia bergerak. Mengacu pada Persamaan 1.25 dan 1.28, kita melihat bahwa

Ekspresi ini dapat disederhanakan menggunakan integrasi-per-bagian:

(Saya menggunakan fakta bahwa , dan membuang suku batas, dengan alasan bahwa Ψ menjadi nol di (±) tak hingga.) Melakukan integrasi-per-bagian lain, pada suku kedua, kami menyimpulkan:

Apa yang harus kita lakukan dari hasil ini? Perhatikan bahwa kita berbicara tentang "kecepatan" dari nilai harapan x, yang tidak sama dengan kecepatan partikel. Tidak ada yang telah kita lihat sejauh ini yang memungkinkan kita menghitung kecepatan partikel. Bahkan tidak jelas apa arti kecepatan dalam mekanika kuantum: Jika partikel tidak memiliki posisi tertentu (sebelum pengukuran), ia juga tidak memiliki kecepatan yang terdefinisi dengan baik. Yang bisa kami minta secara wajar hanyalah kemungkinan mendapatkan nilai tertentu. Kita akan melihat di Bab 3 bagaimana membangun kerapatan probabilitas untuk kecepatan, dengan Ψ; untuk saat ini cukuplah untuk mendalilkan bahwa nilai ekspektasi kecepatan sama dengan turunan waktu dari nilai ekspektasi posisi:

Persamaan 1.31 memberitahu kita bagaimana menghitung (v) langsung dari Ψ.

Sebenarnya, adalah kebiasaan untuk bekerja dengan momentum (p=mv), daripada kecepatan:

Biarkan saya menulis ekspresi untuk dan dengan cara yang lebih sugestif:

Kami mengatakan bahwa operator 18 x "mewakili" posisi, dan operator "mewakili" momentum; untuk menghitung nilai ekspektasi, kami "menjepit" operator yang sesuai antara p22 dan p222, dan mengintegrasikan.

Itu lucu, tapi bagaimana dengan kuantitas lainnya? Faktanya adalah, semua variabel dinamis klasik dapat dinyatakan dalam posisi dan momentum. Energi kinetik, misalnya, adalah

dan momentum sudut adalah

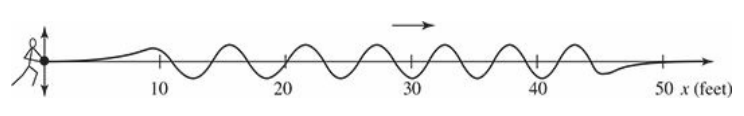
(yang terakhir, tentu saja, tidak terjadi untuk gerak dalam satu dimensi). Untuk menghitung nilai harapan dari setiap kuantitas tersebut, , kita cukup mengganti setiap p dengan , menyisipkan operator yang dihasilkan antara dan , dan mengintegrasikan:

Misalnya, nilai harapan energi kinetik adalah

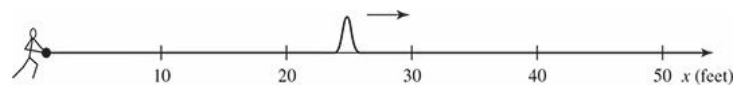
Persamaan 1.36 adalah resep untuk menghitung nilai harapan dari setiap kuantitas dinamis, untuk sebuah partikel dalam keadaan ; itu memasukkan Persamaan 1.34 dan 1.35 sebagai kasus khusus. Saya telah mencoba membuat Persamaan 1.36 tampak masuk akal, mengingat interpretasi statistik Born, tetapi sebenarnya ini mewakili cara bisnis yang sangat baru (dibandingkan dengan mekanika klasik) sehingga ada baiknya untuk berlatih menggunakannya sebelum kita kembali (dalam Bab 3) dan meletakkannya di atas landasan teoretis yang lebih kuat. Sementara itu, jika Anda lebih suka menganggapnya sebagai aksioma, tidak masalah bagi saya.

* 1. **Prinsip Ketidakpastian**

Bayangkan Anda memegang salah satu ujung tali yang sangat panjang, dan Anda menghasilkan gelombang dengan menggoyangkannya ke atas dan ke bawah secara berirama (Gambar 1.8). Jika seseorang bertanya kepada Anda, “Di mana tepatnya ombak itu?” Anda mungkin akan berpikir dia sedikit gila: Ombaknya tidak tepat di mana pun — itu menyebar lebih dari 50 kaki atau lebih. Di sisi lain, jika dia bertanya kepada Anda berapa panjang gelombangnya, Anda dapat memberikan jawaban yang masuk akal: sepertinya sekitar 6 kaki. Sebaliknya, jika Anda menyentak tali secara tiba-tiba (Gambar 1.9), Anda akan mendapatkan tonjolan yang relatif sempit di sepanjang garis. Kali ini pertanyaan pertama (Di mana tepatnya gelombang itu?) adalah pertanyaan yang masuk akal, dan pertanyaan kedua (Berapa panjang gelombangnya?) tampaknya gila—bahkan tidak periodik samar-samar, jadi bagaimana Anda bisa menetapkan panjang gelombang untuk itu? Tentu saja, Anda dapat menggambar kasus perantara, di mana gelombang terlokalisasi dengan cukup baik dan panjang gelombang terdefinisi dengan cukup baik, tetapi ada trade-off yang tak terhindarkan di sini: semakin tepat posisi gelombang, semakin kurang presisi panjang gelombangnya, dan sebaliknya. 20 Sebuah teorema dalam analisis Fourier membuat semua ini ketat, tetapi untuk saat ini saya hanya membahas argumen kualitatif.



Gambar 1.8: Gelombang dengan panjang gelombang yang (cukup) terdefinisi dengan baik, tetapi posisinya tidak jelas.



Gambar 1.9: Gelombang dengan posisi (cukup) yang terdefinisi dengan baik, tetapi panjang gelombang yang tidak jelas.

Ini berlaku, tentu saja, untuk setiap fenomena gelombang, dan karenanya khususnya untuk fungsi gelombang mekanika kuantum. Tetapi panjang gelombang p2 terkait dengan momentum partikel dengan rumus de Broglie: 21

Jadi penyebaran panjang gelombang sesuai dengan penyebaran momentum, dan pengamatan umum kita sekarang mengatakan bahwa semakin tepat posisi partikel ditentukan, semakin kurang tepat momentumnya. Secara kuantitatif,

di mana σx adalah simpangan baku dalam x, dan σp merupakan simpangan baku dalam p. Ini adalah prinsip ketidakpastian Heisenberg yang terkenal. (Kita akan membuktikannya di Bab 3, tapi saya ingin segera menyebutkannya, jadi Anda bisa mengujinya pada contoh di Bab 2.)

Harap pahami apa arti prinsip ketidakpastian: Seperti pengukuran posisi, pengukuran momentum menghasilkan jawaban yang tepat—"penyebaran" di sini mengacu pada fakta bahwa pengukuran yang dilakukan pada sistem yang disiapkan secara identik tidak menghasilkan hasil yang identik. Anda dapat, jika mau, membangun keadaan sedemikian rupa sehingga pengukuran posisi akan sangat berdekatan (dengan menjadikan Ψ sebagai "lonjakan") yang dilokalkan, tetapi Anda akan membayar harga: Pengukuran momentum pada keadaan ini akan tersebar luas. Atau Anda dapat menyiapkan keadaan dengan momentum tertentu (dengan membuat Ψ gelombang sinusoidal panjang), tetapi dalam hal ini pengukuran posisi akan tersebar luas. Dan, tentu saja, jika suasana hati Anda benar-benar buruk, Anda dapat membuat keadaan di mana posisi maupun momentum tidak terdefinisi dengan baik: Persamaan 1.40 adalah pertidaksamaan, dan tidak ada batasan seberapa besar σx dan σp— buat saja Ψ beberapa garis bergelombang panjang dengan banyak gundukan dan lubang dan tidak ada struktur periodik.

1. PERSAMAAN SCHRODINGER YANG BERGANTUNG PADA WAKTU
   1. Keadaan Stasioner

Dalam Bab 1 kita telah berbicara banyak tentang fungsi gelombang, dan bagaimana Anda menggunakannya untuk menghitung berbagai besaran yang menarik. Waktunya telah tiba untuk berhenti menunda-nunda, dan hadapi apa yang, secara logis, pertanyaan sebelumnya: Bagaimana Anda mendapatkan ? Kita perlu menyelesaikan persamaan Schrödinger,

(2.1)

untuk potensial tertentu[[14]](#footnote-13) V(x,t). Dalam bab ini (dan sebagian besar buku ini) saya akan *berasumsi bahwa V tidak bergantung pada t*. Dalam hal ini persamaan Schrödinger dapat diselesaikan dengan **metode pemisahan variabel** (garis serangan pertama fisikawan pada persamaan diferensial parsial): Kami mencari solusi yang merupakan produk,

(2.2)

di mana (huruf kecil) adalah fungsi dari x saja, dan merupakan fungsi dari t saja. Sekilas, ini adalah batasan yang tidak masuk akal, dan kita tidak bisa berharap untuk mendapatkan lebih dari sebagian kecil dari semua solusi dengan cara ini. Tapi tunggu dulu, karena solusi yang kami dapatkan ternyata sangat menarik. Selain itu (seperti yang biasanya terjadi pada pemisahan variabel) pada akhirnya kita akan dapat menyatukan solusi yang dapat dipisahkan sedemikian rupa untuk membangun solusi yang paling umum.

Untuk solusi yang dapat dipisahkan, kami memiliki

(turunan biasa, sekarang), dan persamaan Schrödinger berbunyi

Atau, membaginya dengan :

(2.3)

Sekarang, ruas kiri adalah fungsi dari t saja, dan ruas kanan adalah fungsi dari x saja.[[15]](#footnote-14) Satu-satunya cara ini mungkin benar adalah jika kedua sisi sebenarnya konstan—jika tidak, dengan memvariasikan t, saya dapat mengubah sisi kiri tanpa menyentuh sisi kanan, dan keduanya tidak lagi sama. (Itu argumen yang halus tapi penting, jadi jika itu baru bagi Anda, pastikan untuk berhenti sejenak dan memikirkannya.) Untuk alasan yang akan muncul sebentar lagi, kita akan menyebut konstanta pemisahan E. Kemudian

atau

(2.4)

dan

atau

(2.5)

Pemisahan variabel telah mengubah persamaan diferensial parsial menjadi dua persamaan diferensial biasa (Persamaan 2.4 dan 2.5). Yang pertama mudah untuk diselesaikan (cukup kalikan dengan *dt* dan integralkan); solusi umumnya adalah , tetapi kita mungkin juga menyerap konstanta C ke (karena kuantitas yang diinginkan adalah produk ). Kemudian[[16]](#footnote-15)

(2.6)

Yang kedua **(Persamaan 2.5) disebut persamaan Schrödinger yang tidak bergantung waktu**; kita tidak dapat melanjutkannya sampai potensial V(x) ditentukan.

Sisa bab ini akan dikhususkan untuk memecahkan persamaan Schrödinger yang tidak bergantung waktu, untuk berbagai potensial sederhana. Tetapi sebelum saya membahasnya, Anda berhak bertanya: *Apa hebatnya solusi yang dapat dipisahkan?* Lagi pula, sebagian besar solusi untuk persamaan Schrödinger (tergantung waktu) tidak berbentuk . Saya menawarkan tiga jawaban—dua di antaranya fisik, dan satu matematika:

1. Mereka adalah keadaan stasioner. Meskipun fungsi gelombang itu sendiri,

(2.7)

tidak (jelas) tergantung pada t, kepadatan probabilitas,

(2.8)

tidak—ketergantungan waktu dibatalkan.[[17]](#footnote-16) Hal yang sama terjadi dalam menghitung nilai harapan dari setiap variabel dinamis; Persamaan 1.36 direduksi menjadi

(2.9)

*Setiap nilai harapan adalah konstan dalam waktu*; kita mungkin juga membuang faktornya sama sekali, dan cukup gunakan sebagai ganti . (Memang, sering disebut sebagai “fungsi gelombang”, tetapi ini adalah bahasa yang ceroboh yang bisa berbahaya, dan penting untuk diingat bahwa fungsi gelombang yang sebenarnya selalu membawa faktor goyangan yang bergantung pada waktu itu.) Secara khusus, konstan, dan karenanya (Persamaan 1.33) . Tidak ada yang pernah terjadi dalam keadaan stasioner.

1. Mereka adalah keadaan *energi total tertentu*. Dalam mekanika klasik, energi total (kinetik plus potensial) disebut **Hamiltonian**:

*Operator Hamilton* yang sesuai, diperoleh dengan substitusi kanonik , Oleh karena itu[[18]](#footnote-17)

Dengan demikian persamaan Schrödinger yang tidak bergantung waktu (Persamaan 2.5) dapat ditulis

dan nilai harapan dari energi total adalah

(Perhatikan bahwa normalisasi dari memerlukan normalisasi .) Selain itu,

dan karenanya

Jadi varians dari H adalah

Tapi ingat, jika , maka setiap anggota sampel harus berbagi nilai yang sama (distribusi memiliki spread nol). Kesimpulan: Solusi yang dapat dipisahkan memiliki sifat bahwa *setiap pengukuran energi total pasti mengembalikan nilai* E. (Itulah sebabnya saya memilih huruf itu untuk konstanta pemisahan.)

1. Solusi umum adalah **kombinasi linier** dari solusi yang dapat dipisahkan. Seperti yang akan kita temukan, persamaan Schrödinger yang tidak bergantung waktu (Persamaan 2.5) menghasilkan kumpulan solusi tak terhingga , , yang kita tulis sebagai , masing-masing dengan konstanta pemisahan yang terkait ; dengan demikian ada fungsi gelombang yang berbeda untuk setiap energi yang diizinkan:

Sekarang (seperti yang dapat Anda periksa sendiri dengan mudah) persamaan Schrödinger (tergantung waktu) (Persamaan 2.1) memiliki sifat bahwa setiap kombinasi linier 6 dari solusi itu sendiri adalah solusi. Setelah kami menemukan solusi yang dapat dipisahkan, maka, kami dapat segera membangun solusi yang jauh lebih umum, dalam bentuk

Kebetulan setiap solusi untuk persamaan Schrödinger (tergantung waktu) dapat ditulis dalam bentuk ini—ini hanyalah masalah menemukan konstanta yang tepat agar sesuai dengan kondisi awal untuk masalah yang dihadapi. Anda akan melihat di bagian berikut bagaimana semua ini bekerja dalam praktik, dan di Bab 3 kami akan memasukkannya ke dalam bahasa yang lebih elegan, tetapi poin utamanya adalah ini: Setelah Anda menyelesaikan persamaan Schrödinger yang tidak bergantung waktu, Anda ' dasarnya dilakukan; mendapatkan dari sana

ke solusi umum persamaan Schrödinger yang bergantung waktu, pada prinsipnya, sederhana dan lugas. Banyak yang telah terjadi dalam empat halaman terakhir, jadi izinkan saya merangkum, dari perspektif yang agak berbeda. Inilah masalah umum: Anda diberi potensial (tidak tergantung waktu), dan fungsi gelombang awal; tugas Anda adalah mencari fungsi gelombang, , untuk waktu berikutnya t. Untuk melakukan ini, Anda harus menyelesaikan persamaan Schrödinger (tergantung waktu) (Persamaan 2.1). Strategi pertama adalah menyelesaikan persamaan Schrödinger yang tidak bergantung waktu (Persamaan 2.5); ini menghasilkan, secara umum, satu set tak terbatas solusi, , masing-masing dengan energi yang terkait sendiri, . Agar sesuai, Anda menuliskan kombinasi linier umum dari solusi ini

keajaibannya adalah Anda selalu dapat mencocokkan keadaan awal yang ditentukan 7 dengan pilihan konstanta yang sesuai. Untuk membangun Anda cukup menempelkan ke setiap istilah ketergantungan waktu karakteristiknya ("faktor goyangannya"), : 8

Solusi yang dapat dipisahkan itu sendiri,

adalah keadaan stasioner, dalam arti bahwa semua probabilitas dan nilai ekspektasi tidak bergantung pada waktu, tetapi sifat ini secara tegas tidak dimiliki oleh solusi umum (Persamaan 2.17): energinya berbeda, untuk keadaan stasioner yang berbeda, dan eksponensial tidak membatalkan , ketika Anda membangun .

Anda mungkin bertanya-tanya apa yang diwakili oleh koefisien secara fisik. Saya akan memberi tahu Anda jawabannya, meskipun penjelasannya harus menunggu Bab 3:

Pengukuran yang kompeten akan selalu menghasilkan salah satu nilai yang "diizinkan" (oleh karena itu namanya), dan merupakan probabilitas untuk mendapatkan nilai tertentu . 10 Tentu saja, jumlah dari probabilitas ini harus 1:

dan nilai harapan energi harus

Kita akan segera melihat bagaimana ini berhasil dalam beberapa contoh nyata. Perhatikan, akhirnya, bahwa karena konstanta tidak bergantung pada waktu, demikian pula probabilitas untuk mendapatkan energi tertentu, dan, fortiori, nilai harapan H. Ini adalah manifestasi dari kekekalan energi dalam mekanika kuantum.

The Infinite Square Well

Suppose (Figure 2.1). A particle in this potential is completely free, except at the two ends and , where an infinite force prevents it from escaping. A classical model would be a cart on a frictionless horizontal air track, with perfectly elastic bumpers—it just keeps bouncing back and forth forever. (This potential is artificial, of course, but I urge you to treat it with respect. Despite its simplicity—or rather, precisely because of its simplicity—it serves as a wonderfully accessible test case for all the fancy machinery that comes later. We’ll refer back to it frequently.)

Outside the well, (the probability of finding the particle there is zero). Inside the well, where , the time-independent Schrödinger equation (Equation 2.5) reads

(By writing it in this way, I have tacitly assumed that ; we know from Problem 2.2 that won’t work.) Equation 2.24 is the classical simple harmonic oscillator equation; the general solution is

where A and B are arbitrary constants. Typically, these constants are fixed by the boundary conditions of the problem. What are the appropriate boundary conditions for ? Ordinarily, both and are continuous, 11 but where the potential goes to infinity only the first of these applies. (I’ll justify these boundary conditions, and account for the exception when , in Section 2.5; for now I hope you will trust me.) Continuity of requires that

so as to join onto the solution outside the well. What does this tell us about A and B? Well,

Then , so either (in which case we’re left with the trivial—non-normalizable— solution , or else , which means that

But is no good (again, that would imply , and the negative solutions give nothing new, since and we can absorb the minus sign into A. So the distinct solutions are

Curiously, the boundary condition at does not determine the constant A, but rather the constant k, and hence the possible values o

In radical contrast to the classical case, a quantum particle in the infinite square well cannot have just any old energy—it has to be one of these special (“allowed”) values. 12 To find A, we normalize : 13

This only determines the magnitude of A, but it is simplest to pick the positive real root: (the phase of A carries no physical significance anyway). Inside the well, then, the solutions are

As promised, the time-independent Schrödinger equation has delivered an infinite set of solutions (one for each positive integer . The first few of these are plotted in Figure 2.2. They look just like the standing waves on a string of length a; , which carries the lowest energy, is called the ground state, the others, whose energies increase in proportion to , are called excited states. As a collection, the functions have some interesting and important properties: 1. They are alternately even and odd, with respect to the center of the well: is even, is odd, is even, and so on. 14 2. As you go up in energy, each successive state has one more node (zero-crossing): has none (the end points don’t count), has one, has two, and so on. 3. They are mutually orthogonal, in the sense that 15

Note that this argument does not work if . (Can you spot the point at which it fails?) In that case normalization tells us that the integral is 1. In fact, we can combine orthogonality and normalization into a single statement

where (the so-called Kronecker delta) is defined by

We say that the s are orthonormal. 4. They are complete, in the sense that any other function, , can be expressed as a linear combination of them:

I’m not about to prove the completeness of the functions , but if you’ve studied advanced calculus you will recognize that Equation 2.35 is nothing but the Fourier series for , and the fact that “any” function can be expanded in this way is sometimes called Dirichlet’s theorem. 16 The coefficients can be evaluated—for a given —by a method I call Fourier’s trick, which beautifully exploits the orthonormality of : Multiply both sides of Equation 2.35 by , and integrate.

(Notice how the Kronecker delta kills every term in the sum except the one for which .) Thus the nth coefficient in the expansion of is

These four properties are extremely powerful, and they are not peculiar to the infinite square well. The first is true whenever the potential itself is a symmetric function; the second is universal, regardless of the shape of the potential. 18 Orthogonality is also quite general—I’ll show you the proof in Chapter 3. Completeness holds for all the potentials you are likely to encounter, but the proofs tend to be nasty and laborious; I’m afraid most physicists simply assume completeness, and hope for the best. The stationary states (Equation 2.18) of the infinite square well are

I claimed (Equation 2.17) that the most general solution to the (time-dependent) Schrödinger equation is a linear combination of stationary states:

(If you doubt that this is a solution, by all means check it!) It remains only for me to demonstrate that I can fit any prescribed initial wave function, by appropriate choice of the coefficients :

The completeness of the s (confirmed in this case by Dirichlet’s theorem) guarantees that I can always express in this way, and their orthonormality licenses the use of Fourier’s trick to determine the actual coefficients:

That does it: Given the initial wave function, , we first compute the expansion coefficients , using Equation 2.40, and then plug these into Equation 2.39 to obtain . Armed with the wave function, we are in a position to compute any dynamical quantities of interest, using the procedures in Chapter 1. And this same ritual applies to any potential—the only things that change are the functional form of the s and the equation for the allowed energies

Of course, it’s no accident that Equation 2.20 came out right in Example 2.3. Indeed, this follows from the normalization of (the s are independent of time, so I’m going to do the proof for ; if this bothers you, you can easily generalize the argument to arbitrary .

(Again, the Kronecker delta picks out the term in the summation over m.) Similarly, the expectation value of the energy (Equation 2.21) can be checked explicitly: The time-independent Schrödinger equation (Equation 2.12) says

1. Magnetic forces are an exception, but let’s not worry about them just yet. By the way, we shall assume throughout this book that the motion is nonrelativistic (v c). [↑](#footnote-ref-0)
2. For a delightful first-hand account of the origins of the Schrödinger equation see the article by Felix Bloch in Physics Today, December 1976 [↑](#footnote-ref-1)
3. The wave function itself is complex, but || 2 = ∗ (where ∗ is the complex conjugate of ) is real and non-negative—as a probability, of course, must be. [↑](#footnote-ref-2)
4. Of course, no measuring instrument is perfectly precise; what I mean is that the particle was found in the vicinity of C, as defined by the precision of the equipment. [↑](#footnote-ref-3)
5. [↑](#footnote-ref-4)
6. [↑](#footnote-ref-5)
7. [↑](#footnote-ref-6)
8. [↑](#footnote-ref-7)
9. [↑](#footnote-ref-8)
10. [↑](#footnote-ref-9)
11. [↑](#footnote-ref-10)
12. [↑](#footnote-ref-11)
13. [↑](#footnote-ref-12)
14. [↑](#footnote-ref-13)
15. [↑](#footnote-ref-14)
16. [↑](#footnote-ref-15)
17. [↑](#footnote-ref-16)
18. [↑](#footnote-ref-17)