ФЯ, дз на 27.09.2021

Малофеев Михаил

26 сентября 2021 г.

Задача №1

a) Докажем, что язык

$$\{uabv | u \in \{a, b\}^*, v \in \{a, b\}^*, |u| = |v|, u \neq v^R\}$$

не является регулярным. Воспользуемся леммой о накачке. Докажем, что для любого n существует такое слово длины хотя бы n, такое, что для любого разбиения этого слова на части x y z, где длина y ненулевая, а длина xy не превосходит n, существует такое k, что $xy^kz \notin L$. Давайте для каждого n возьмём слово a^nabb^n. Тогда для любого разбиения этого слова на части x, y, z часть y будет состоять из ненулевого количества букв a. Пусть длина y будет равна l. Возьмём k = 0. Тогда новое слово будет иметь вид $a^{n-l}abb^n$. Это слово не принадлежит языку L, так как есть противоречие с условием |u| = |v|, а здесь |u| = n - l, |v| = n.

b) Докажем, что язык

$$\{a^kc^me^n | k \geq 0, n \geq 0, m = n + k + 1\}$$

не является регулярным. Воспользуемся леммой о накачке. Докажем, что для любого n существует такое слово длины хотя бы n, такое, что для любого разбиения этого слова на части x y z, где длина y ненулевая, а длина xy не превосходит n, существует такое k, что $xy^kz \notin L$. Давайте для каждого n возьмём слово $c^{n+1}e^n$. Тогда при любом разбиении на x, y, z, y будет иметь вид c^l. Давайте возьмём k = 0. Тогда новое слово будет иметь вид $c^{n+1-l}e^n$. Это слово не принадлежит языку L, так как есть противоречие с тем, что m = n + k + 1.

c) Докажем, что язык

$$\{a^n | \exists p \geq n : p\ prime\ and\ p + 2\ prime\}$$

является регулярным. Если гипотеза верна, что простых чисел-близнецов бесконечно много, то в этом языке будут содержатся строки, состоящие из любого количества букв a, так как для любой длины строки n найдутся простые числа-близнецы, большие n. Следовательно, для данного языка можно построить регулярное выражение a^*.

В том случае, если гипотеза о бесконечности простых чисел-близнецов неверна, то всего таких простых чисел-близнецов конечно. Возьмём наибольшую пару из них. Пусть они равны p и p + 2. Тогда в нашем языке будут содержатся все слова, составленные из буквы a и имеющие длину не больше p. Тогда их можно перечислить, так как их конечно. Следовательно, такой язык является регулярным.