

Ejercicios de Introducción al Análisis Real

«“Lo que es trivial hay que demostrarlo, porque lo que no es trivial yo no lo demuestro”»

OMAR DUQUE

Edgar Santiago Ochoa
eochoaq@unal.edu.co

Mateo Andrés Manosalva
mmanosalva@unal.edu.co

Índice general

1. Espacios métricos	2
1. Algunos ejercicios al lector:	2
2. Quiz 4:	5
3. Quiz 5:	7
4. Ejercicios adicionales.	9
5. El conjunto de Cantor ☠☠☠☠☠	12
6. Sucesiones ☠☠☠☠☠	13
6.1. Algunos ejercicios al lector:	13
6.2. Límite superior y límite inferior:	15
7. Quiz 6:	16
8. Completez	20
8.1. Algunos ejercicios al lector	20
9. Quiz 7:	20
10. Compacidad	22
11. Quiz 8:	22
12. Ejercicios adicionales:	23
13. Conexidad	25
14. Quiz 9	25
15. Ejercicios 3:	26
2. Funciones entre espacios métricos	27
1. Funciones continuas sobre espacios métricos	27
2. Quiz 10	27
3. Funciones entre espacios métricos compactos	28
4. Quiz 11:	28
5. Homeomorfismos	30
6. Quiz 12	30

Capítulo 1

Espacios métricos

El curso de Introducción al Análisis Real es uno de los más pesados en la carrera de matemáticas y los estudiantes carecen casi que de toda ayuda (no hay monitorias y los espacios en clase a veces son insuficientes), por estos motivos decidimos hacer este solucionario de las notas de Introducción al Análisis Real de los profesores Leonardo Rendón y Serafín Bautista, esto más que un solucionario es una guía de lectura de las notas, aquí encontrarás muchos de los conceptos o ideas del curso desde un punto de vista más de estudiante que ha sufrido esa materia y que sabe lo compleja que puede llegar a ser.

Esperamos que las soluciones de los ejercicios que aportamos acá sirvan de guía para entender los conceptos y mecanismos que se deben usar para atacar este tipo de problemas.

Muchos éxitos - mmanosalva y eochoaq

1.1. Algunos ejercicios al lector:

- ✎ Probar que (\mathbb{R}^n, d_1) y (\mathbb{R}^n, d_∞) son espacios métricos.

Demostración. • Sean $p, q \in \mathbb{R}^n$, tenemos que:

$$d_1(p, q) = \sum_{k=1}^n |p_k - q_k|$$

Luego como $|p_k - q_k| \geq 0$, $d_1(p, q) \geq 0$ (estamos sumando valores positivos). Ahora si $d_1(p, q) = 0$, como $|p_k - q_k| \geq 0$ entonces $|p_k - q_k| = 0$ para todo k , luego $p_k = q_k$ para todo k , es decir $p = q$, además note que

$$d_1(p, q) = \sum_{k=1}^n |q_k - p_k| = d_1(q, p)$$

Esto ya que $|p_k - q_k| = |q_k - p_k|$, Ahora veamos la desigualdad triangular.

$$\begin{aligned}
d_1(p, q) &= \sum_{k=1}^n |p_k - q_k| \\
&= \sum_{k=1}^n |p_k - q_k + r_k - r_k| \\
&\leq \sum_{k=1}^n |p_k - r_k| + \sum_{k=1}^n |r_k - q_k| = d_1(p, r) + d_1(r, q)
\end{aligned}$$

- Nuevamente tomamos $p, q \in \mathbb{R}^n$, tenemos que:

$$d_\infty(p, q) = \max_{1 \leq k \leq n} |p_k - q_k|$$

como $|p_k - q_k| \geq 0$ pues es claro que el máximo será mayor igual que 0 y por tanto $d_\infty(p, q) \geq 0$. Como $|p_k - q_k| = |q_k - p_k|$:

$$d_\infty(p, q) = \max_{1 \leq k \leq n} |q_k - p_k| = d_\infty(q, p)$$

Ahora si $\max_{1 \leq k \leq n} |q_k - p_k| = 0$, $|p_k - q_k| = 0$ para todo k (si el máximo es 0 los demás también por definición de máximo) y como $|p_k - q_k| = 0$ para todo k , pues $p_k = q_k$ para todo k , es decir $p = q$. Veamos la desigualdad triangular.

$$\begin{aligned}
d_\infty(p, q) &= \max_{1 \leq k \leq n} |p_k - q_k| \\
&= \max_{1 \leq k \leq n} |p_k - q_k + r_k - r_k| \\
&\leq \max_{1 \leq k \leq n} |p_k - r_k| + \max_{1 \leq k \leq n} |r_k - q_k| \\
&\leq d_\infty(p, r) + d_\infty(r, q)
\end{aligned}$$

□

- ☞ Sea X un conjunto no vacío y $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Diremos que f es una función acotada si existe $k > 0$ tal que para todo $x \in X$ se tiene $|f(x)| \leq k$. Consideremos el conjunto $B(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es acotada}\}$. Definamos:

$$\begin{aligned}
d : B(X) \times B(X) &\rightarrow \mathbb{R} \\
(f, g) &\mapsto d(f, g)
\end{aligned}$$

donde $d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in X\} = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$. Entonces $(B(X), d)$ es un espacio métrico.

Demostración. Es inmediato que $d(f, g) \geq 0$ por definición de supremo y porque $|f(x) - g(x)| \geq 0$. Como $|f(x) - g(x)| = |g(x) - f(x)|$, entonces también se tiene

que $d(f, g) = d(g, f)$.

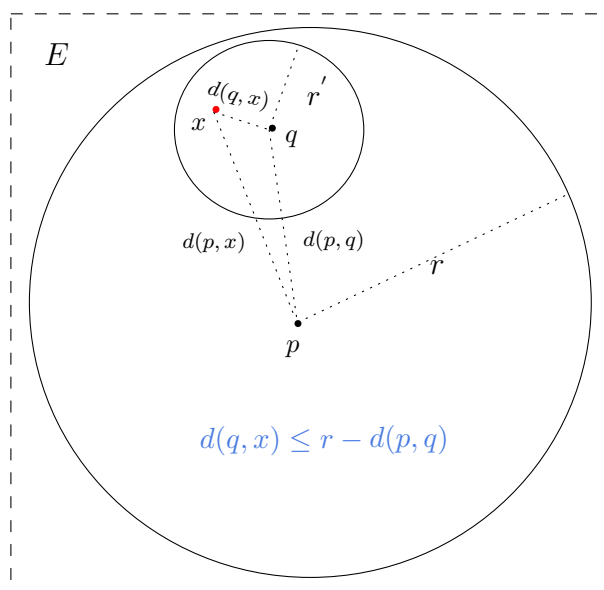
Tenemos que $|f(x) - g(x)| \geq 0$, luego por definición de supremo si $\sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| = 0$, entonces $|f(x) - g(x)| = 0$ para todo $x \in X$, así $f = g$, o sea si $d(f, g) = 0$, entonces $f = g$. Veamos ahora la desigualdad triangular ☹☹☹☹☹:

$$\begin{aligned} d(f, g) &= \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| \\ &= \sup_{x \in X} |f(x) - g(x) + h(x) - h(x)| \\ &\leq \sup_{x \in X} |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| \\ &= \sup_{x \in X} |f(x) - h(x)| + \sup_{x \in X} |h(x) - g(x)| \\ &= d(f, h) + d(h, g) \end{aligned}$$

Esto ya que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$

□

- ☞ Dado (E, d) un espacio métrico, toda bola abierta es un conjunto abierto. En efecto, dados $B_E(p, r)$ (con $r > 0$ y $p \in E$) y $q \in B_E(p, r)$, tomamos $r' = r - d(p, q)$ de donde se tiene que $B_E(q, r') \subset B_E(p, r)$ (verifique esta contención como ejercicio).



Demostración. Sea $x \in B_E(q, r')$, entonces;

$$\begin{aligned} d(p, x) &\leq d(p, q) + d(q, x) \\ &\leq r - d(q, x) + d(q, x) \\ &\leq r \end{aligned}$$

Luego el punto $x \in B_E(p, r)$ y se tiene la contención

□

Note que la prueba no debe depender del dibujo, sin embargo hacer dibujos puede ser de ayuda para tener una idea de la demostración, como ocurrió en este caso

Teorema 1 (Teorema 9). Dado (E, d) en espacio métrico, tenemos que:

- 1) E es cerrado
- 2) \emptyset es cerrado
- 3) Unión finita de cerrados es cerrada.
- 4) Intersección arbitraria de cerrados es cerrada.

Demostración. • Note que $E^C = \emptyset$ luego el complemento de E es abierto.

- Por definición E es abierto, luego \emptyset es cerrado.
- Consideremos C_i una familia de cerrados, luego

$$\left(\bigcup_{i=1}^n C_i \right)^C = \bigcap_{i=1}^n C_i^C$$

Y como intersección finita de abiertos es abierto, entonces acabamos.

- Nuevamente consideremos C_i una familia de cerrados, entonces:

$$\left(\bigcap_{i \in I} C_i \right)^C = \bigcup_{i \in I} C_i^C$$

Y como unión arbitraria de abiertos es abierto, entonces acabamos.

□

✎ Sea (E, d) un espacio métrico $\{p\} = \bigcap_{r>0} B[p, r]$

Demostración. Suponga que $\{p\} \neq \bigcap_{r>0} B[p, r]$, luego existe $x \in \bigcap_{r>0} B[p, r]$ tal que $x \neq p$, entonces $x \in B[p, r]$ para todo $r > 0$, pero $x \neq p$, por tanto $d(x, p) > 0$, así existe $0 < r < d(x, p)$ tal que $x \notin B[p, r]$, contradicción. □

1.2. Quiz 4:

✎ **Falso:** Observamos que vía la definición de abierto \mathbb{Q} no puede ser abierto ya que toda bola con centro en un racional va a tener irracionales dentro que no están en \mathbb{Q} y por tanto la bola no está contenida en \mathbb{Q} , luego no es abierto.

De hecho es la forma de argumentar esto, vía la densidad de \mathbb{Q} en \mathbb{R} que ya conocemos de los cursos anteriores.

De manera más formal para todo $r > 0$, $B(q, r) = (q - r, q + r) \not\subseteq \mathbb{Q}$, ya que \mathbb{Q} es denso en \mathbb{R} .

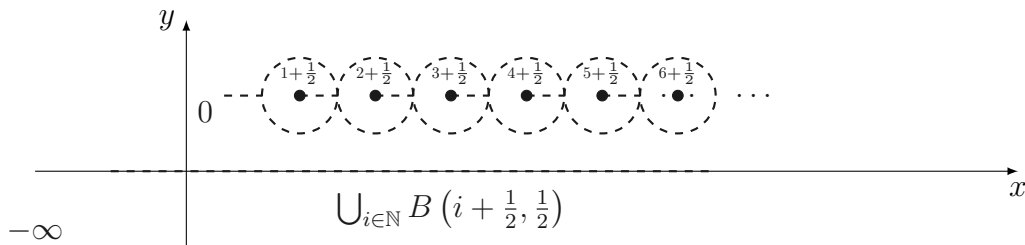
Esto ocurre ya que estamos tomando bolas en \mathbb{R} . (Este argumento es para la métrica usual).

✎ **Verdadero:**

Demostración. Sea $q \in \mathbb{Q}$, consideremos $B(q, \frac{1}{2})$ entonces como estamos en la métrica discreta $B(q, \frac{1}{2}) = \{x \in \mathbb{R} : d_d(q, x) < \frac{1}{2}\} = \{q\}$ por definición de la métrica y como podemos hacer esto para todo $q \in \mathbb{Q}$ y un conjunto es abierto si y solo si es unión de bolas abiertas, razonando inductivamente acabamos. \square

✎ **Verdadero:** $B(0, \frac{1}{2}) = \{x \in \mathbb{R} : d_d(0, x) < \frac{1}{2}\} = \{0\} = \{x \in \mathbb{R} : d_d(0, x) \leq \frac{1}{4}\} = B[0, \frac{1}{4}]$

✎ **Verdadero:**



Demostración. Para ver que los naturales son cerrados con d_1 , veamos que su complemento es abierto. Observe que:

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{N} = (-\infty, 0) \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B\left(i + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Note que esas bolas son abiertas y unión arbitraria de abiertos es abierto, efectivamente esas bolas cubren $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ entonces acabamos. \square

✎ **Verdadero:**

Demostración. Sea $X \subseteq \mathbb{R}$ en (\mathbb{R}, d_d) , X es abierto ya que:

$$X = \bigcup_{x \in X} B\left(x, \frac{1}{2}\right)$$

Y $\mathbb{R} \setminus X$ también ya que:

$$\mathbb{R} \setminus X = \bigcup_{j \in \mathbb{R} \setminus X} B\left(j, \frac{1}{2}\right)$$

Luego X es cerrado ya que su complemento es abierto, estos conjuntos los llamaremos **clopen** para simplificar en algunos casos. \square

Note que podemos escoger cualquier $r \leq 1$ y la prueba se mantiene.

- ✎ **Falso:** Queremos ver que $[0, \frac{1}{4})^C = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ no es abierto, note que $B(\frac{1}{4}, r) = (\frac{1}{4} - r, \frac{1}{4} + r)$ para todo $r > 0$ no está contenida en $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, entonces $[0, \frac{1}{4})$ no es cerrado en $([0, \frac{1}{2}), d|_{[0, \frac{1}{2}) \times [0, \frac{1}{2})})$
- ✎ **Falso:** El conjunto $[0, \frac{1}{2})$ es abierto en $([0, \frac{1}{2}), d_1|_{[0, \frac{1}{2}) \times [0, \frac{1}{2})})$, pero no en (\mathbb{R}, d_1)
- ✎ **Verdadero:**

Demostración. Sea A abierto en (E, d) , entonces:

$$A = \bigcup_{a \in A} B(a, r_a)$$

Luego:

$$A \cap E_1 = \bigcup_{a \in A} B(a, r_a) \cap E_1$$

Y sabemos que $B(a, r_a) \cap E_1$ es abierto en E_1 y como unión arbitraria de abiertos es abierto $A \cap E_1$ es abierto, es decir A es abierto en E_1 . \square

Y acabamos esta sección.

1.3. Quiz 5:

- ✎ **Verdadero:**

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}$ entonces $(B(x, \frac{1}{3}) \setminus \{x\}) = \emptyset$, luego $(B(x, \frac{1}{3}) \setminus \{x\}) \cap \mathbb{Q} = \emptyset$, por tanto $\mathbb{Q}' = \emptyset$. \square

- ✎ **Falso:** Sabemos que S es cerrado si y solo si $\overline{S} = S$, antes probamos que \mathbb{N} en (\mathbb{R}, d_1) es cerrado luego

$$\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$$

- ✎ **Falso:** Sabemos que $\partial \mathbb{Q} = \overline{\mathbb{Q}} \cap \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$ y como \mathbb{Q} y $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{I}$ son densos en \mathbb{R} entonces $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ y $\overline{\mathbb{I}} = \mathbb{R}$, así $\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$

- ✎ **Verdadero:**

Demostración. Tenemos que $x \in [0, 1)'$ si y solo si $x \in \overline{[0, 1) - \{x\}}$, observe que:

$$\begin{aligned}\overline{[0, 1) - \{x\}} &= [0, 1) \setminus \text{int}([0, 1) \setminus ([0, 1) \setminus \{x\})) \\ &= [0, 1) \setminus \text{int}(\{x\}) \\ &= [0, 1) \setminus \emptyset\end{aligned}$$

En efecto si $x \in [0, 1)$, $x \in [0, 1)'$ □

✎ **Verdadero:** $\partial\mathbb{R} = \overline{\mathbb{R}} \cap \overline{\emptyset} = \mathbb{R} \cap \emptyset = \emptyset$

✎ **Verdadero:**

Demostración. Como en las pruebas anteriores note que si $r \leq 1$ entonces para todo $x \in \mathbb{R}$, $B(x, r) \setminus \{x\} = \emptyset$ y por tanto $B(x, r) \setminus \{x\} \cap \mathbb{R} = \emptyset$, luego $\mathbb{R}' = \emptyset$ □

✎ **Falso:** Sea (\mathbb{R}, d_d) los reales con la métrica discreta, luego:

$$\overline{B(0, 1)} = \overline{\{0\}} = \{0\}$$

Mientras que:

$$B[0, 1] = \mathbb{R}$$

✎ **Verdadero:**

Demostración. Tenemos que:

$$d_1(p, q) = \sum_{k=1}^n |p_k - q_k|$$

y

$$d_\infty(p, q) = \max_{1 \leq k \leq n} |p_k - q_k|.$$

Pero como en este caso estamos en \mathbb{R} , entonces

$$d_1(p, q) = |p - q| = d_\infty(p, q)$$

Entonces como \mathbb{N} es cerrado en (\mathbb{R}, d_1) , también es cerrado en (\mathbb{R}, d_∞) □

✎ **Verdadero:**

Demostración. Tenemos que A es cerrado en (\mathbb{R}^n, d_∞) , luego A^C es abierto en (\mathbb{R}^n, d_∞) , así para todo $x \in A^C$ existe un r_x tal que:

$$B_\infty(x, r_x) = \{y \in \mathbb{R}^n : d_\infty(x, y) < r_x\} \subseteq A^C$$

Ahora supongamos que A no es cerrado en (\mathbb{R}^n, d_1) , luego A^C no es abierto en (\mathbb{R}^n, d_1) , es decir, existe $a \in A^C$ tal que para todo $r > 0$:

$$B_2(a, r) \not\subseteq A^C$$

En particular $B_2(a, r_a) \not\subseteq A^C$, pero como $d_\infty(x, y) \leq d_2(x, y) < r_a$, entonces $B_2(a, r_a) \subseteq B_\infty(a, r_a) \subseteq A^C$, contradicción.

□

1.4. Ejercicios adicionales.

Nota. los siguientes ejercicios fueron propuestos en 2022-2 en un parcial de Análisis, el propósito de esta sección es que sirva para que el estudiante pueda hacerse una idea del modelo de preguntas que se suelen hacer y esté preparado

En cada caso determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero demuéstrelolo de lo contrario dé un contra ejemplo.

- ☠ Si $A \neq \emptyset$ es un subconjunto cerrado y acotado inferiormente en \mathbb{R} con la métrica usual $|x - y|$ entonces A tiene elemento mínimo.

Verdadero:

Demostración. Supongamos que A es acotado inferiormente en \mathbb{R} , entonces existe $i = \inf(A)$, veamos que $i \in A$. Supongamos que $i \notin A$, entonces $i \in \mathbb{R} \setminus A$, $\mathbb{R} \setminus A$ es abierto porque A es cerrado, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $B(i, \epsilon) = (i - \epsilon, i + \epsilon) \subseteq \mathbb{R} \setminus A$, por otro lado como $i = \inf(A)$ existe $b \in A$ tal que $i \leq b < i + \epsilon$, luego $b \in (i - \epsilon, i + \epsilon) \subseteq \mathbb{R} \setminus A$. Contradicción, luego $i \in A$, es decir $i = \min(A)$.

□

- ☠ Sean (X, d) un espacio métrico y A, B subconjuntos de X tales que $\text{int}(A) \subseteq B \subseteq \bar{A}$ entonces $\bar{B} = \bar{A}$.

Falso: Contraejemplo: Sean (\mathbb{R}, d_1) , $\mathbb{N} = A$ y $\{0\} = B$, entonces como $\text{int}(\mathbb{N}) = \emptyset$, es claro que $\text{int}(\mathbb{N}) \subseteq \{0\}$, por otro lado $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$ ya que \mathbb{N} es cerrado, y $\overline{\{0\}} = \{0\}$, en efecto $\{0\} \neq \mathbb{N}$.

- ☠ Si (X, d) es un espacio métrico entonces $d'(x, y) = d^2(x, y)$ también define una métrica en X^2 .

Falso: Contraejemplo: Tome (\mathbb{R}, d_1) , veamos que (\mathbb{R}, d_1^2) no es un espacio métrico. Note que $d_1^2(3, 1) > d_1^2(3, 2) + d_1^2(2, 1)$ ($4 > 1 + 1$), lo que contradice la desigualdad triangular

☠ (X, d) un espacio métrico y $(A_j)_{j \in J}$ una familia de subconjuntos de X . Si $a \in \overline{A_j}$ para todo $j \in J$ entonces $a \in \overline{\bigcap_{j \in J} A_j}$.

Falso: Contraejemplo: Sean \mathbb{Q}, \mathbb{I} , en (\mathbb{R}, d_1) , y sea $x = \sqrt{2}$, como $\overline{\mathbb{Q}} = \overline{\mathbb{I}} = \mathbb{R}$, $x \in \overline{\mathbb{Q}}$ y $x \in \overline{\mathbb{I}}$, sin embargo $x \notin \overline{\mathbb{Q} \cap \mathbb{I}} = \overline{\emptyset} = \emptyset$

☠☠ Sean:

- X el espacio de las funciones acotadas $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ definidas en el intervalo real $I = [0, 1]$,
- d la métrica definida en X^2 por $d(f, g) = \sup_{x \in I} |f(x) - g(x)|$,
- $f_0(x) = x^2$, $f_n(x) = \frac{x^2 \sin(2\pi nx)}{2\pi n}$ con $n \in \mathbb{Z}^+$, $x \in I$ y
- $B(f_0, \frac{3}{2}) = \{f \in X : d(f, f_0) < \frac{3}{2}\}$ entonces $f_n \in B(f_0, \frac{3}{2})$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

Demostración. Queremos ver que $f_n \in B(f_0, \frac{3}{2})$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, es decir que $d(f_n, f_0) < \frac{3}{2}$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, luego por la definición de la métrica:

$$\begin{aligned} d(f_n, f_0) &= \sup_{x \in I} \left| x^2 - \frac{x^2 \sin(2\pi nx)}{2\pi n} \right| \\ &= \sup_{x \in I} \left| x^2 \left(1 - \frac{\sin(2\pi nx)}{2\pi n} \right) \right| \\ &\leq \sup_{x \in I} \left| 1 - \frac{\sin(2\pi nx)}{2\pi n} \right| && (x^2 \leq 1) \\ &\leq \left| 1 - \frac{1}{2\pi n} \right| && (-1 \leq \sin(\theta) \leq 1) \\ &\leq \frac{3}{2} \\ &= 1,5 \end{aligned}$$

Ya que $0 < \frac{1}{2\pi n} < 1$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$

□

Nota. cuando decimos métrica sobre X^2 queremos decir que la métrica va del producto cartesiano $X \times X$ en \mathbb{R} , no confundir con $X^2 \times X^2$

Nota. Los siguientes ejercicios fueron propuestos en 2023-1 en el primer parcial de análisis:

Sean (X, d) es un espacio métrico y A es un subconjunto de X . En cada caso determine si la proposición es verdadera o falsa y demuéstrela o dé un contra-ejemplo según sea el caso.

☠ $X = \overline{A} \cup A^C$

Demostración. Sabemos que $\overline{A} = X \setminus \text{int}(A^C)$. En efecto $X \setminus \text{int}(A^C) \cup A^C = X$ ya que $\text{int}(A^C) \subseteq A^C$ \square

☠ $\partial(\partial A) = \partial A$

Falso: Contraejemplo: Considere (\mathbb{R}, d_1) , sabemos que $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$ y que $\partial\mathbb{R} = \emptyset$, luego $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R} \neq \partial(\partial\mathbb{Q}) = \partial\mathbb{R} = \emptyset$

☠ $X = \text{int}(A) \cup \partial(A) \cup A^C$

Demostración. Tenemos que $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^C}$, luego

$$\begin{aligned} \text{int}(A) \cup (\overline{A} \cap \overline{A^C}) \cup A^C &= \text{int}(A) \cup (\overline{A} \cup A^C \cap \overline{A^C} \cup A^C) \\ &= \text{int}(A) \cup (X \cap (X \setminus \text{int}(A) \cup A^C)) \\ &= \text{int}(A) \cup (X \setminus \text{int}(A)) \\ &= X \end{aligned}$$

\square

Nota. Aquí usamos varias de las propiedades de las notas en el capítulo del concepto de clausura, derivado y frontera, note que además usamos la propiedad anterior en la prueba cuando afirmamos que $\overline{A} \cup A^C = X$, note también que usamos que $(A^C)^C = A$ pero pues ustedes ya vieron conjuntos allí.

☠ $\text{int}(\text{int}(A)) = \text{int}(A)$

Demostración. Tenemos que $\text{int}(A)$ es abierto, luego como un conjunto es abierto si y solo si es igual a su interior entonces $\text{int}(\text{int}(A)) = \text{int}(A)$ \square

☠ Si ∂A es abierto entonces $A = \emptyset$

Falso: Contraejemplo: Considere (\mathbb{R}, d_1) , luego $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$ y \mathbb{R} es abierto pero $\mathbb{Q} \neq \emptyset$.

☠ Si $X = \mathbb{R}^n$ y A es d_1 -abierto entonces A es d_2 -abierto.

Demostración. Suponga que A es d_1 -abierto, entonces para todo $x \in A$, existe r tal que:

$$B_1(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : d_1(x, y) < r\} \subseteq A$$

Y como $d_2(x, y) \leq d_1(x, y)$, entonces existe r' $B_2(x, r') \subseteq B_1(x, r) \subseteq A$, luego A es d_2 -abierto

□

Nota. Para este caso estamos usando la definición de métrica equivalente, note que si $d_2(x, y) \leq d_1(x, y)$ entonces existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $d_1(x, y) \leq C d_2(x, y)$, luego eso es lo que nos garantiza la existencia de ese radio r' de tal manera que $B_2(x, r') \subseteq B_1(x, r)$.

Nota. Note que en las notas hace falta hacer énfasis en esta definición, sin embargo este tipo de detalles se suelen cubrir en clase, en cualquier caso el lector puede buscar en algún medio externo la definición de métrica equivalente y notar este detalle sutil.

☠ Si $A \subseteq Y \subseteq X$ y A es Y -abierto entonces A es X -abierto.

Falso: Contraejemplo: Si $E = \mathbb{R}$ con $d(x, y) = |x - y|$ el conjunto $[0, \frac{1}{3})$ no es abierto en \mathbb{R} pero es abierto en $(E_1, d|_{E_1 \times E_1})$ con $E_1 = [0, \frac{1}{2})$. Simplemente observe que $B_{E_1}(0, \frac{1}{3}) = [0, \frac{1}{3})$.

☠ Si $x \in X$ entonces para todo $r > 0$ se tiene que $\overline{B(x, r)} = B[x, r]$.

Falso: Contraejemplo: Sea (\mathbb{R}, d_d) , entonces $\overline{B(0, 1)} = \overline{\{0\}} = 0$ ya que $\{0\}$ es cerrado con la métrica discreta, pero $B[0, 1] = \mathbb{R}$, luego no son iguales.

Nota. Sobre este parcial como se puede notar los ejercicios no son tan complejos si se nos permite usar las propiedades de las notas (que se ven también en clase), pero es probable que para ser usadas en el parcial el estudiante deba demostrarlas, en cuyo caso recomendamos entender muy bien las ideas de cada una de las pruebas, la idea nunca es memorizar las pruebas o las propiedades sino entender un poco la geometría del asunto y las ideas principales de cada prueba.

1.5. El conjunto de Cantor ☠☠☠☠☠

Nota. En esta sección solo trataremos el problema de probar que el conjunto de cantor es perfecto, es decir que todo elemento del conjunto pertenece a su derivado. Quizás luego pongamos un diagrama de la prueba de que no es contable, un resultado más fuerte que quizás se podría sugerir es revisar la prueba de que todo conjunto perfecto no puede ser contable.

👉 El conjunto de Cantor es perfecto:

Demostración. Para demostrar que el conjunto de Cantor C es perfecto, para cada $x \in C$ y para cada $\epsilon > 0$ se debe encontrar un punto $y \in C - \{x\}$ tal que $|x - y| < \epsilon$.

Para buscar y , recordemos que C se construye como la intersección de conjuntos $C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \dots$ donde C_n es una unión de 2^n intervalos disjuntos cada uno de longitud 3^{-n} , y recordemos también que C tiene intersección no vacía con cada uno de esos 2^n intervalos.

Elija n tal que $3^{-n} < \epsilon$. Sea $[a, b]$ el intervalo de C_n que contiene a x . Cuando se quita el tercio medio de $[a, b]$, se obtienen dos intervalos $[a, b']$, $[b'', b]$ de C_{n+1} . El punto x está contenido en uno de esos dos intervalos, y hay un punto $y \in C$ que está contenido en el otro de esos dos intervalos. Por lo tanto, $y \neq x$ y $|x - y| < \epsilon$. \square

Nota. Enlace para ver la prueba de que todo conjunto perfecto no es contable:

[Enlace.](#)

🔗 El conjunto de Cantor es no contable

1.6. Sucesiones ☠☠☠☠☠

Este capítulo es cosa densa, mucho cuidado.

6.1. Algunos ejercicios al lector:

En esta sección también hay algunos ejercicios que el libro dice que son triviales, pero lo que es trivial hay que demostrarlo.

🔗 Es fácil demostrar que $n_k \geq k$ (Inducción)

Demostración. Supongamos que la secuencia comienza en $k = 1$. Entonces, lo más pequeño que puede ser n_1 es 1. Por lo tanto, $n_k \geq k$ es verdadero para $k = 1$. Ahora, asumimos por inducción que $n_k \geq k$ para algún k . Dado que lo más pequeño que puede ser n_{k+1} es $n_k + 1$, obtenemos

$$n_{k+1} \geq n_k + 1 \geq k + 1.$$

\square

(Para esta prueba es clave saber que tanto k como n_k son naturales.)

Nota. Note que una subsecuencia podría verse como un subconjunto de una sucesión ya que los puntos $\{x_{n_1}, x_{n_2}, \dots\} \subseteq \{x_1, x_2, \dots\}$. Esto es lo que nos permite ver que toda subsecuencia de una sucesión acotada es acotada.

Nota. En el teorema 10 lo que nos quieren decir es que $S \subseteq E$ es cerrado si y solo si cualquier sucesión convergente en el espacio que es definida en S converge en S , o sea

su límite pertenece a S , algo de esperar.

✎ En la proposición 22 se hace la prueba para sucesiones crecientes pero no decrecientes, veamos ese caso:

Demostración. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión decreciente y acotada en (\mathbb{R}, d_1) , como $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada entonces es acotada inferiormente y por lo tanto existe $I = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Veamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = I$. Dado $\epsilon > 0$ por la propiedad de aproximación existe $N \in \mathbb{N}$, tal que $I + \epsilon > a_N$ y como $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es decreciente

$$I + \epsilon > a_N \geq a_n \quad \text{si } n \geq N$$

Por otro lado $I + \epsilon > a_n > I - \epsilon$ (ya que $I = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$), Así $|a_n - I| < \epsilon$ para todo $n \geq N$, luego $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = I$ \square

✎ Ejercicio proposición 23

Teorema 2. Proposición 23:

Sean $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesiones en (\mathbb{R}, d_1) , si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ son convergentes, entonces:

- $(a_n \pm b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente y $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

Lema 1. Si $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión convergente (que converge a b), entonces $(-b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente y converge a $-b$.

Demostración. Tenemos que $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente y converge a b , es decir para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$ $|b_n - b| < \epsilon$, luego:

$$|-b_n + b| = |-1(b_n - b)| = |-1||b_n - b| = |b_n - b| < \epsilon$$

Luego $(-b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente y converge a $-b$ \square

Con este lema podemos hacer la prueba del teorema solo para $((a_n)_{n \in \mathbb{N}} + (b_n)_{n \in \mathbb{N}})_{n \in \mathbb{N}}$ ya que el caso de la resta es corolario de esto, note que basta considerar la sucesión $(-b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y usar el resultado para la suma.

Demostración. Tenemos que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ son convergentes, es decir para todo $\epsilon > 0$ existen $N_1 \in \mathbb{N}$ y $N_2 \in \mathbb{N}$ tales que si $n > N_1$ $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ y si $n > N_2$, $|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$, luego si $n > \max\{N_1, N_2\}$, entonces.

$$|a_n + b_n - a - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

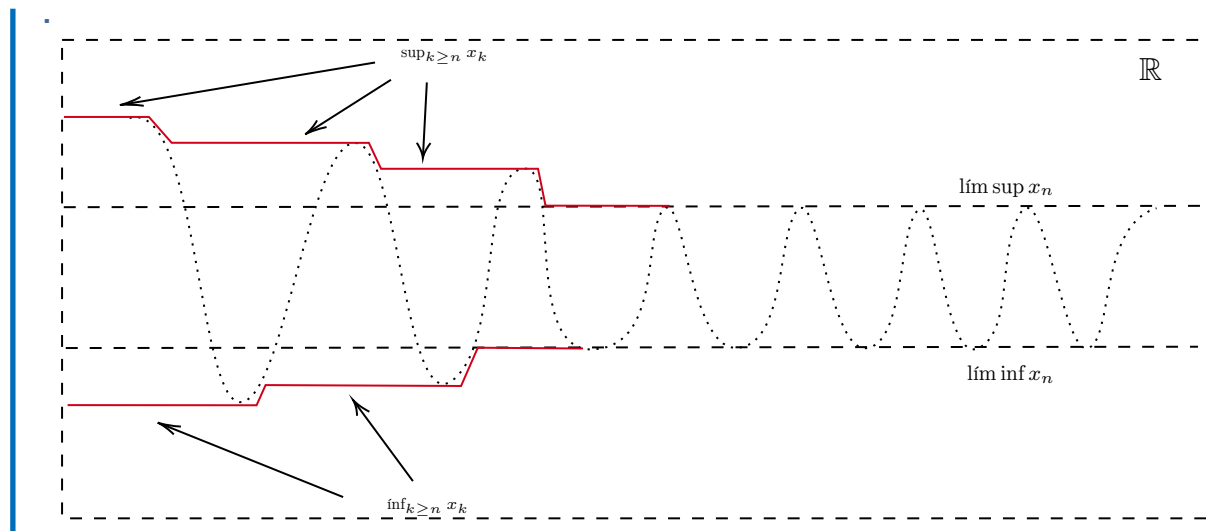
\square

Nota. En estas pruebas siempre al escribirlas debemos saber las cotas que vamos a usar, pero esto no significa que siempre debamos ver a ojo que cota usar, usando la definición nos hubiéramos dado cuenta que la suma de las cotas nos iba a dar 2ϵ , por eso escogemos $\frac{\epsilon}{2}$, porque queremos que la suma sea menor que ϵ , en análisis esto se hace para que las demostraciones tengan un mejor estilo, escritura y forma, se supone que con práctica el estudiante debería ser capaz de ver algunas de estas cotas sin mucho esfuerzo, pero si esto no se te da bien no te preocupes, a mí tampoco.

Recordemos que en este punto estamos trabajando con los REALES, ya que vamos a comenzar con el capítulo de límite superior e inferior.

6.2. Límite superior y límite inferior:

Esta sección puede resultar confusa en un inicio, aquí trataremos de desglosar un poco la idea fundamental de todo.



Dada $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ acotada en \mathbb{R} existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha \leq x_n \leq \beta$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $X_n = \{x_k : k \geq n\}$ tomamos

$$b_n = \sup X_n, \text{ y}$$

$$a_n = \inf X_n.$$

De esta forma tenemos que

$$\alpha \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{n-1} \leq a_n \leq \cdots \leq b_n \leq b_{n-1} \leq \cdots \leq b_1 \leq \beta.$$

Nota. Todo esto se tiene porque primero estamos en los reales y la sucesión es acotada, podemos garantizar el Sup y el Inf, note que:

$$X_1 = \{x_1, x_2, \dots\} \quad \text{y} \quad X_2 = \{x_2, x_3, \dots\}$$

Luego $\sup X_1$ o es x_1 o está en X_2 y $\sup X_2$ o es x_2 o está en X_3 , luego razonando de

esta forma nos damos cuenta que $\sup X_n \leq \sup X_{n-1}$, por eso $b_n \leq b_{n-1}$.

Nota. Todo esto pasa ya que el supremo es mayor o igual que todos los elementos de X_n , luego si el supremo de X_n fuera x_n , entonces el supremo de X_{n+1} sería más pequeño, y en caso de que no fuera x_n , entonces el supremo de X_n y X_{n+1} serían iguales.

Además todos estos $b_n = \sup X_n < \beta$ ya que la sucesión es acotada, para $a_n = \inf X_n$ se razona de la misma forma para llegar a que $a_n \leq a_{n+1}$, espero que esto sea suficiente para entender digamos un poco este tema, es algo que en un inicio cuesta, pero que entenderlo bien es muy muy clave, este tipo de aclaraciones Omar al menos la suele dar en clase, pero en este curso no todos los profesores son tan buenos.

Definición 1. Definimos el límite inferior (denotado por $\liminf x_n$) y el límite superior (notado por $\limsup x_n$) de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ como

$$\begin{aligned}\liminf x_n &= \sup a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad y \\ \limsup x_n &= \inf b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.\end{aligned}$$

A continuación presentamos una definición un poco más chingona de límites superior e inferior, son equivalentes en realidad las definiciones, pero esta definición es agradable porque nos evita pensar en X_n y desviar nuestra atención.

Definición 2. Definimos el límite inferior (denotado por $\liminf x_n$) y el límite superior (notado por $\limsup x_n$) de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ como:

$$\begin{aligned}\liminf x_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{k \geq n} x_k \right) \\ \limsup x_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{k \geq n} x_k \right)\end{aligned}$$

1.7. Quiz 6:



Verdadero:

Demostración. Tenemos que (a_n) es convergente, luego:

$$\begin{aligned}
a &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} \\
&= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^2 - \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n-1} \\
&= 2a^2 - a \\
&= a(2a - 1)
\end{aligned}$$

Entonces $(2a - 1) = 1$, por tanto $a = 1$. □

✎ Verdadero:

Demostración. Tenemos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $a_n = b_n$ para todo $n \geq m$, luego como a_n es convergente, para todo $\epsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > \max\{N, m\}$, entonces:

$$|b_n - a| = |a_n - a| < \epsilon$$

Luego b_n es convergente y además converge a a □

Nota. Usamos el máximo ya si m es el máximo entonces a partir del punto en que $a_n = b_n$ ya tenemos convergencia, si N es el máximo entonces desde antes de tener convergencia ya teníamos que $a_n = b_n$, luego es conveniente escoger $n > \max\{N, m\}$, para que se de n en adelante tengamos tanto convergencia como que las sucesiones son iguales.

✎ Falso: Considere (\mathbb{R}, d_1) , (note que en \mathbb{R} , $d_2 = d_1$), entonces si tomamos una sucesión constante, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (-1)^n a_n$ no converge, por ejemplo: si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = 1$, entonces:

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = \{-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots\}$$

Vemos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no converge, para ello veamos que el límite superior no es igual al límite inferior

Note que $\lim_{n \rightarrow \infty} (\inf_{k \geq n} x_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} -a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} -1 = -1$ y por otro lado el $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sup_{k \geq n} x_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$

✎ Verdadero:

Demostración. Observe que para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \epsilon$, entonces si $n > N$:

$$\left| \frac{1}{n} \right| < \epsilon$$

Luego:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{k \geq n} \frac{(-1)^k}{k} \right)$$

Veamos entonces quien es el $\sup_{k \geq n} \frac{(-1)^k}{k}$.

$$\begin{aligned} \sup X_2 &= \sup \left\{ \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\} \\ \sup X_3 &= \sup \left\{ -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \dots \right\} \\ \sup X_4 &= \sup \left\{ \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots \right\} \\ \sup X_5 &= \sup \left\{ -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{7}, \dots \right\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Note que si n es par entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{k \geq n} \frac{(-1)^k}{k} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Si n es impar:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{k \geq n} \frac{(-1)^k}{k} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} = 0$$

No es necesario probar este límite ya que probamos el caso general $\frac{1}{n}$ da 0.

□

✎ Falso:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{k \geq n} \frac{(-1)^k k}{k+1} \right)$$

Veamos entonces quién es el $\inf_{k \geq n} \frac{(-1)^k k}{k+1}$:

$$\begin{aligned}
\inf X_1 &= \inf \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \dots \right\} = -1 \\
\inf X_2 &= \inf \left\{ \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots \right\} = -1 \\
\inf X_3 &= \inf \left\{ -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, -\frac{5}{6}, \dots \right\} = -1 \\
\inf X_4 &= \inf \left\{ \frac{4}{5}, -\frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \dots \right\} = -1 \\
\inf X_5 &= \inf \left\{ -\frac{5}{6}, \frac{6}{7}, -\frac{7}{8}, \dots \right\} = -1 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Luego el $\inf_{k \geq n} \frac{(-1)^k k}{n+1}$ siempre es -1, por tanto:

$$\liminf \frac{(-1)^n n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{k \geq n} \frac{(-1)^k k}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} -1 = -1$$

✎ Verdadero: Primero note que:

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

Demostración. Para todo $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > \frac{1}{4\epsilon^2}$, luego si $n > N$:

$$\left| \frac{1}{2\sqrt{n}} \right| < \left| \frac{1}{2\sqrt{N}} \right| < \left| \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4\epsilon^2}}} \right| = \epsilon$$

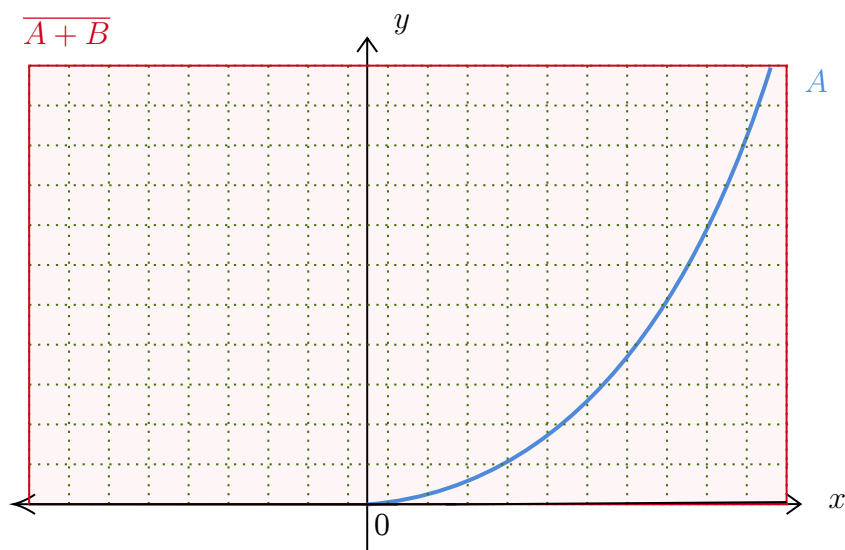
Luego en efecto $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 0$ □

✎ Falso: Contraejemplo: Sea $A = \{(x, e^x) : x \in \mathbb{R}\}$ y $B = \{(y, 0) : y \in \mathbb{R}\}$, luego note que $\overline{B} = B$ y $\overline{A} = A$.

$$A + B = \{(z, e^w) : z, w \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, y > 0\}$$

Luego $\overline{A + B} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, y \geq 0\} \neq \overline{A} + \overline{B}$

| .



1.8. Completez

8.1. Algunos ejercicios al lector

✎ Si (x_n) es una sucesión convergente, entonces (x_n) es una sucesión de Cauchy.

Demostración. Sea (x_n) una sucesión convergente, entonces para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m > N$, entonces $d(x_n, L) < \frac{\epsilon}{2}$ y $d(x_m, L) < \frac{\epsilon}{2}$. Así:

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, L) + d(L, x_m) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

□

✎ Si (x_n) es una sucesión de Cauchy, entonces toda subsucesión también es de Cauchy.

Demostración. Sea (x_n) una sucesión de Cauchy, entonces para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geq N$, $d(x_n, x_m) < \epsilon$.

Considere (x_{n_k}) una subsucesión de (x_n) , luego como $n_k \geq k$, para todo $k \in \mathbb{N}$, en efecto si $L, M \geq k \geq N$ entonces $n_L, n_M \geq N$ y como (x_n) es de Cauchy:

$$d(x_{n_L}, x_{n_M}) < \epsilon$$

□

1.9. Quiz 7:

✎ Verdadero:

Demostración. Sea (x_n) una sucesión de Cauchy en (\mathbb{Z}, d_1) , luego para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N$, entonces:

$$|x_n - x_m| < \epsilon$$

Por tanto $x_n = x_m$, es decir (x_n) es eventualmente constante, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_m$, como $x_m \in \mathbb{Z}$, acabamos. \square

✎ Verdadero: veamos un resultado más elegante. Sea (X, d_d) donde d_d es la métrica discreta, entonces X es completo.

Demostración. Sea (x_n) una sucesión de Cauchy en (X, d_d) , entonces para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geq N$, entonces:

$$d_d(x_n, x_m) < \epsilon$$

Sea $\epsilon = \frac{1}{2}$, entonces:

$$d_d(x_n, x_m) < \frac{1}{2}$$

Entonces $x_n = x_m$, luego (x_n) es eventualmente constante, por tanto converge en X . \square

✎ Verdadero:

Demostración. Supongamos que \mathbb{Q} es completo. Considere una sucesión (x_n) convergente definida en \mathbb{Q} , entonces es de Cauchy y como \mathbb{Q} es completo, entonces (x_n) converge en \mathbb{Q} , luego \mathbb{Q} es cerrado, contradicción. \square

✎ Verdadero:

Demostración. Sabemos que (\mathbb{R}^m, d_2) es completo, luego si (a_n) es de Cauchy, entonces es convergente, tenemos que (b_n) es convergente, por tanto $(a_n + b_n)$ es convergente, y toda sucesión convergente es de Cauchy. \square

✎ Verdadero:

Demostración. Sabemos que (\mathbb{R}^m, d_2) es completo, luego si (x_n) es una sucesión de Cauchy en (\mathbb{R}^m, d_∞) , para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$:

$$d_\infty(x_n, L) < \frac{\epsilon}{m}$$

Luego como $md_\infty(x, y) \geq d_2(x, y)$:

$$d_2(x_n, L) \leq md_\infty(x_n, L) < m \frac{\epsilon}{m} = \epsilon$$

i.e. (\mathbb{R}^m, d_∞) es completo. □

1.10. Compacidad

Aquí toca tener particular cuidado con el teorema de Bolzano y sus implicaciones, pero también con la prueba que se presenta de Heine-Borel. Es muy importante a la hora de hacer los ejercicios tener claras todas las equivalencias que se dan al final del capítulo.

1.11. Quiz 8:

✎ Verdadero:

Demostración. Supongamos que todo cubrimiento de F por conjuntos cerrados admite un subcubrimiento finito, entonces en particular el cubrimiento:

$$F \subseteq \bigcup_{x \in F} \{x\}$$

Admite un subcubrimiento finito, luego el conjunto F es finito y todo conjunto finito es compacto. □

✎ Verdadero:

Demostración. Considere el cubrimiento:

$$(0, 1] \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}, 2 \right)$$

Note que este cubrimiento abierto no admite un subcubrimiento finito.

Note que por Heine-Borel esto es trivial. □

✎ Falso: Considere el intervalo $(0, 1)$ en (\mathbb{R}, d_1) , este conjunto totalmente acotado en \mathbb{R} ya que es acotado, pero no es completo porque no es cerrado.

✎ Falso: (\mathbb{R}, d_1) es completo, pero no es acotado y por tanto no es totalmente acotado.

✎ Verdadero:

Demostración. Sea (X, d) un espacio métrico y (x_n) una sucesión de Cauchy en (X, d) , como (X, d) es secuencialmente compacto, (x_n) tiene una subsucesión convergente, como (x_n) es de Cauchy y tiene una subsucesión convergente, converge. □

✎ Falso: Note que (\mathbb{R}, d_1) es completo, pero no es compacto por Heine-Borel

✎ Falso: Sea (\mathbb{R}, d_d) donde d_d es la métrica discreta, luego \mathbb{R} es cerrado y acotado ya que $\mathbb{R} \subseteq B(0, 2)$, note que el cubrimiento de abiertos:

$$\mathbb{R} \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{R}} \{x\}$$

No admite un subcubrimiento finito.

Nota. No te preocupes si no entiendes la prueba de Heine-Borel, de hecho muy pocas veces un ejercicio de parcial será tan fácil como usar ese teorema, lo que recomendaría sería entender bien todos los conceptos aquí plasmados, en particular el teorema de Bolzano y las equivalencias presentadas al final de la sección.

Nota. A continuación presentamos una serie de ejercicios tanto de parciales anteriores como algunos que se nos van ocurriendo junto con su solución, claramente los invitamos a pensar cómo resolverlos antes de leerlos aquí.

1.12. Ejercicios adicionales:

Esto es como una clase de preparación para lo que sería un segundo parcial.

Para cada una de las siguientes afirmaciones diga si es falso o verdadero, si es verdadero escriba la demostración y si es falso de el contraejemplo, si la afirmación dice demuestre pues esa sí demuéstrela xd:

☠ Sea (X, d) un espacio métrico, si $S \subseteq X$ es acotado entonces es totalmente acotado:

Falso: Considere (\mathbb{R}, d_d) los reales con la métrica discreta, luego \mathbb{R} es acotado ya que $\mathbb{R} \subseteq B(0, 2)$, pero \mathbb{R} no es totalmente acotado ya que si $\epsilon = \frac{1}{2}$, no existe $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, tal que

$$R \subseteq \bigcup_{i=1}^n B\left(a_i, \frac{1}{2}\right) = \bigcup_{i=1}^n \{a_i\} = A$$

ya que de lo contrario \mathbb{R} sería finito.

☠ Sea \mathbb{R} con la métrica usual, entonces $\limsup(a_n + b_n) = \limsup(a_n) + \limsup(b_n)$:

Falso: Sean $(a_n) = (-1)^n$ y $(b_n) = -(-1)^n$, luego $\limsup(a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sup_{k \geq n} 0) = 0$, pero $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sup_{k \geq n} (-1)^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sup_{k \geq n} -(-1)^n) = 1$, luego $\limsup(a_n) + \limsup(b_n) = 2 \neq 0$.

☠ Sea (X, d) un espacio métrico y $A, C \subseteq X$, si $A \subseteq C \subseteq \overline{A}$, entonces para todo $c \in C$ y para todo $r > 0$, $B(c, r) \cap A \neq \emptyset$:

Demostración. Sea $c \in C$, entonces $c \in \overline{A}$, luego c es un punto adherente, es decir para todo $r > 0$, $B(c, r) \cap A \neq \emptyset$. \square

☠ Sea (X, d) un espacio métrico y $A, C \subseteq X$, entonces $(A \cup C)' = A' \cup C'$:

Demostración.

$$\begin{aligned} (A \cup C)' &= \{x \in X : \text{para todo } r > 0, (B(x, r) \setminus \{x\}) \cap (A \cup C) \neq \emptyset\} \\ &= \{x \in X : \text{para todo } r > 0, ((B(x, r) \setminus \{x\}) \cap A \cup (B(x, r) \setminus \{x\}) \cap C) \neq \emptyset\} \\ &= A' \cup C' \end{aligned}$$

\square

☠ Sea (X, d) un espacio métrico, si $S \subseteq X$, entonces $(S')' = S'$.

Falso: Sea $S = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}^+\}$, entonces $S' = \{0\}$ y $(S')' = \emptyset$.

☠ Demuestre que si (X, d) es un espacio métrico completo y $Y \neq \emptyset$ es un subconjunto cerrado de X , entonces (Y, d_y) es completo.

Demostración. Sea (x_n) una sucesión de Cauchy definida en Y , entonces (x_n) converge en X ya que (X, d) es completo, por tanto (x_n) es una sucesión convergente definida en Y y Y es cerrado si y solo si toda sucesión convergente definida en Y converge en Y , por tanto (x_n) converge en Y , es decir (Y, d_y) es completo. \square

☠ Se (X, d) es un espacio métrico completo, entonces (X, d') con $d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1+d(x, y)}$ es completo.

Demostración. Sea (x_n) una sucesión de Cauchy en X , entonces como (X, d) es completo, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$:

$$d(x_n, L) < \epsilon$$

Note que:

$$\frac{d(x_n, L)}{1 + d(x_n, L)} \leq d(x_n, L) < \epsilon$$

Luego (x_n) también converge en (X, d') , por tanto (X, d') es completo. \square

☠ Demuestre que si (X, d) es un espacio métrico y $\{x, y, u, v\} \subseteq X$, entonces:

$$|d(x, v) - d(y, u)| \leq d(x, y) + d(u, v)$$

Demostración. Supongamos que $d(x, v) - d(y, u) < 0$, luego:

$$\begin{aligned} |d(x, v) - d(y, u)| &= d(y, u) - d(x, v) \\ &\leq d(y, x) + d(x, u) - d(x, v) \\ &\leq d(y, x) + d(x, v) + d(v, u) - d(x, v) \\ &= d(x, y) + d(u, v) \end{aligned}$$

Ahora si $d(x, v) - d(y, u) \geq 0$, entonces:

$$\begin{aligned} |d(x, v) - d(y, u)| &= d(x, v) - d(y, u) \\ &\leq d(x, y) + d(y, v) - d(y, u) \\ &: \leq d(x, y) + d(y, u) + d(u, v) - d(y, u) \\ &= d(x, y) + d(u, v) \end{aligned}$$

□

Nota. Note que esto fue aplicar desigualdad triangular varias veces pero de la forma adecuada.

1.13. Conexidad

Nota. Muchos teoremas en cálculo requieren de conexidad en su hipótesis, por eso es importante este capítulo, nos ayuda a formalizar y entender la idea de conexidad sobre al menos espacios métricos. Como bien lo dicen las notas, esto intuitivamente se puede pensar como que el conjunto es un solo pedazo en caso sea conexo, en este capítulo al menos no hay mucho que decir, pasemos a los ejercicios.

1.14. Quiz 9

✎ El espacio métrico $(\mathbb{Z}, d_1 |_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}})$ es conexo:

Falso: Sea $A = \{0\}$, note que $B(0, 1) = \{0\}$, luego A es abierto, Ahora observe que A es cerrado ya que su complemento es abierto.

✎ \mathbb{R} con la métrica discreta es conexo:

Falso: Nuevamente $A = \{0\}$ es abierto y cerrado al tiempo.

✎ Si A es conexo en (\mathbb{R}^n, d_2) , entonces A es conexo en (\mathbb{R}_n, d_1)

Demostración. Sabemos que d_1 y d_2 son métricas equivalentes en \mathbb{R}^n , es decir, que un conjunto es abierto en (\mathbb{R}^n, d_2) si y sólo si es abierto en (\mathbb{R}^n, d_1) . Supongamos que A es conexo en (\mathbb{R}^n, d_2) y no es conexo en (\mathbb{R}^n, d_1) . Como A no es conexo en (\mathbb{R}^n, d_1) , existen X, Y abiertos en (\mathbb{R}^n, d_1) tales que $X \cup Y = A$ y $X \cap Y = \emptyset$. Como X, Y son abiertos en (\mathbb{R}^n, d_1) , también lo son en (\mathbb{R}^n, d_2) , luego, A no es conexo en (\mathbb{R}^n, d_2) . Contradicción. \square

- ✎ Si $X \subseteq \mathbb{R}$ es conexo con la métrica usual entonces $\mathbb{R} \setminus X$ es conexo con la métrica usual:
Falso: Obviamente los singleton son conexos, por ejemplo $\{0\}$ es conexo, pero $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ya no lo es, note que:

$$\mathbb{R} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

Dos abiertos y disyuntos distintos de vacío.

- ✎ Si $A \subseteq \mathbb{R}$ es conexo con la métrica usual, entonces $A \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ donde $a_i \in A$ para todo i es conexo.

Falso: Considere $A = (-1, 1)$ conexo en \mathbb{R} con la métrica usual, y considere $A - \{0\} = (-1, 0) \cup (0, 1)$, luego $A - \{0\}$ es unión de abiertos disyuntos en \mathbb{R} con la métrica usual, por lo tanto no es conexo

- ✎ Sean (E, d) un espacio métrico y $A \subseteq E$, si A es conexo, entonces $\text{int}(A)$ es conexo.

Falso: Considere $(E, d) = (\mathbb{R}^2, d_2)$ y sea $A = B[-1; 1] \cup B[1; 1]$ conexo. Note que $\text{int}(A) = B(-1, 1) \cup B(1, 1)$, luego $\text{int}(A)$ es unión de abiertos disyuntos en (\mathbb{R}^2, d_2) y por lo tanto no es conexo

- ✎ Sean (E, d) un espacio métrico y $A \subseteq E$, si $\text{int}(A)$ es conexo entonces A es conexo.

Falso: Sea (\mathbb{R}, d_1) , recuerde que $\text{int}(\mathbb{N}) = \emptyset$, que es conexo, pero \mathbb{N} no es conexo ya que no es un intervalo.

1.15. Ejercicios 3:

Nota. Esta sección está pendiente

Capítulo 2

Funciones entre espacios métricos

2.1. Funciones continuas sobre espacios métricos

A lo largo de este capítulo se notará un uso recurrente de todo lo que se ha visto en el curso... diría que este capítulo es el que conceptualmente es más complejo por esto mismo, en este punto es necesario tener claros todos los conceptos para no perderse.

Nota. Para este capítulo es importante saberse todas las propiedades que se presentan al inicio ya que serán usadas en muchas demostraciones posteriores, también es importante tener claras las definiciones equivalentes de continuidad...

2.2. Quiz 10

☞ Consideremos (\mathbb{N}, d_1) y (E, d) espacio métrico. Si $f : \mathbb{N} \rightarrow E$, entonces f es continua.

Demostración. Note que todos los puntos en (\mathbb{N}, d_1) son aislados, puesto que, visto \mathbb{N} como subespacio de (\mathbb{R}, d_1) , dado $n \in \mathbb{N}$, podemos tomar $B(n; \frac{1}{2}) \cap \mathbb{N} = \{n\}$, por lo tanto, $f : \mathbb{N} \rightarrow E$ es continua, ya que cualquier función entre espacios métricos es continua en puntos aislados \square

☞ Sean (E_1, d_1) , (E_2, d_2) espacios métricos. Si $f : E_1 \rightarrow E_2$ es continua, entonces f envía conjuntos abiertos de E_1 en conjuntos abiertos de E_2 .

Falso: Considere $(E_1, d_1) = (E_2, d_2) = (\mathbb{R}, d_1)$ y

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 1 \end{aligned}$$

Esta función es continua, sin embargo, podemos tomar por ejemplo $A = (0, 1)$ abierto de (\mathbb{R}, d_1) , sin embargo, $f(A) = \{1\}$ que no es abierto en (\mathbb{R}, d_1)

☞ Sean (E_1, d_1) , (E_2, d_2) espacios métricos. Si $f : E_1 \rightarrow E_2$ es continua, entonces $f^{-1}(B)$ es cerrado en E_1 si B es cerrado en E_2 .

Demostración. Considere B cerrado en E_2 , luego, B^c es abierto en E_2 . Como f es continua, entonces $f^{-1}(B^c)$ es abierto en E_1 , además tenemos la relación $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$ y por lo tanto, $f^{-1}(B)$ es cerrado en E_1 . \square

En (\mathbb{R}, d_1) la función

$$\chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

es continua.

Falso: Considere $A = (0, 2)$ abierto en (\mathbb{R}, d_1) . Tenemos que $\chi_{\mathbb{Q}}^{-1}(A) = \mathbb{Q}$ que no es abierto en (\mathbb{R}, d_1) , luego $\chi_{\mathbb{Q}}$ no es continua.

Sean (E_1, d_1) , (E_2, d_2) espacios métricos. Si $f : E_1 \longrightarrow E_2$ es continua, entonces f envía conjuntos acotados de E_1 en conjuntos acotados de E_2 .

Falso: Considere $(E_1, d_1) = (\mathbb{R}^+, d_1)$, $(E_2, d_2) = (\mathbb{R}, d_1)$ y la función

$$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \ln(x)$$

Esta función es continua. Sea $A = (0, 1)$ acotado en (\mathbb{R}^+, d_1) , sin embargo $f(A) = (-\infty, 0)$ que es no acotado en (\mathbb{R}, d_1) .

2.3. Funciones entre espacios métricos compactos

Este capítulo de las notas contiene ya uno de los acercamientos a lo que conocimos en cálculo diferencial, en particular el teorema del valor intermedio, aquí se puede intuir geométricamente la importancia de la conexidad para este resultado y muchos más a lo largo del capítulo

2.4. Quiz 11:

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3$ entonces f es uniformemente continua.

Demostración. Note que $[a, b]$ es compacto porque es cerrado y acotado en \mathbb{R} , además x^3 es continua, por tanto x^3 es uniformemente continua en $[a, b]$. \square

Si $f : (1, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3$ entonces f es uniformemente continua

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, considere $\delta = \frac{\varepsilon}{12}$. Sean $x, y \in (1, 2)$, note que si $|x - y| < \delta$:

$$\begin{aligned}
|x^3 - y^3| &= |x - y||x^2 + xy + y^2| \\
&< \delta|x^2 + xy + y^2| \\
&< \delta|4 + 4 + 4| \\
&= \frac{\varepsilon}{12}(12) \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

□

- ☞ Sean $(E_1, d_1), (E_2, d_2)$ espacios métricos y $f : E_1 \rightarrow E_2$ función continua. Si K es compacto en E_2 , entonces $f^{-1}(K)$ es compacto en E_1 .

Falso: Considere:

$$\begin{aligned}
f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto 1.
\end{aligned}$$

Claramente f es continua y $\{1\}$ es compacto en (\mathbb{R}, d_1) , pero $f^{-1}(\{1\}) = \mathbb{R}$, que no es compacto en (\mathbb{R}, d_1)

- ☞ Sean $(E_1, d_1), (E_2, d_2)$ espacios métricos y $f : E_1 \rightarrow E_2$ función continua. Si K es compacto en E_1 , entonces $f(K)$ es cerrado y acotado en E_2 .

Demostración. En efecto como f es continua y K es compacto, $f(K)$ es compacto, por tanto es cerrado y acotado. □

- ☞ Sean $(E_1, d_1), (E_2, d_2)$ espacios métricos y $f : E_1 \rightarrow E_2$ función continua. Si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en E_1 , entonces $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en E_2 .

Falso: Sean $(E_1, d_1) = (E_2, d_2) = (\mathbb{R}^+, d_1)$, considere la sucesión de Cauchy $\{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ y la función continua $f(x) = \frac{1}{x}$, note que $\{f(\frac{1}{n})\}_{n \in \mathbb{N}} = \{n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que no es de Cauchy porque no es acotada.

- ☞ Sean $(E_1, d_1), (E_2, d_2)$ espacios métricos y $f : E_1 \rightarrow E_2$ función continua. Si E_1 es compacto y $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en E_1 , entonces $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente en E_2

Demostración. Note que E_1 es compacto y por tanto completo, luego $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $L \in E_1$, además:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = f(L)$$

Por tanto $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge

□

- ☞ El conjunto $B(0, 1) \setminus \{0\}$ es conexo en (\mathbb{R}^n, d_2) para $n \geq 2$.

Demostración. Tenemos que $B(0, 1)$ es conexo en (\mathbb{R}^n, d_2) , luego como $B(0, 1)$ es abierto, en particular es arcoconexo, veamos que $B(0, 1) \setminus \{0\}$ es arcoconexo en (\mathbb{R}^n, d_2) .

Sean $x, y \in B(0, 1)$, note que como $B(0, 1)$ es arcoconexo, existe $z \in B(0, 1) \setminus \{0\}$ tal que $\alpha : [a, b] \mapsto B(0, 1) \setminus \{0\}$ tal que $\alpha(a) = x$ y $\alpha(b) = z$ y $\beta : [a, b] \mapsto B(0, 1) \setminus \{0\}$ tal que $\alpha(a) = z$ y $\alpha(b) = y$, luego como composición de funciones continuas es continua $\alpha \circ \beta : [a, b] \mapsto B(0, 1) \setminus \{0\}$ es un camino tal que $\alpha \circ \beta(a) = x$ y $\alpha \circ \beta(b) = y$, así $B(0, 1) \setminus \{0\}$ es arcoconexo y por tanto conexo. \square

☞ Sean $(E_1, d_1), (E_2, d_2)$ espacios métricos y $f : E_1 \rightarrow E_2$ una función. Si f envía conjuntos compactos en conjuntos compactos entonces f es continua

Falso: Sean $(E_1, d_1) = (E_2, d_2) = (\mathbb{R}, d_1)$, considere la función:

$$\chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Esta función mapea compactos en compactos ya que todo conjunto finito en (\mathbb{R}, d_1) es compacto, en particular $\{0, 1\}, \{0\}$ y $\{1\}$, pero sabemos que $\chi_{\mathbb{Q}}$ no es continua.

2.5. Homeomorfismos

Intuitivamente podemos pensar que los homeomorfismos nos permiten ver cuando dos espacios métricos tienen las mismas propiedades topológicas, esto ocurre ya que en muchas de las propiedades que se vieron en la sección anterior se probó que si f es continua entonces mapea compactos en compactos, devuelve abiertos en abiertos, también toda sucesión convergente la mapea a una sucesión convergente, mapea conexos en conexos, etc. Note que el homeomorfismo pide que f sea biyectiva y que f^{-1} sea continua también, es decir que la inversa también cumple todas las propiedades antes mencionadas, esto nos da una correspondencia explícita entre cada conjunto que cumple una de las propiedades mencionadas en el espacio de salida con uno en el de llegada y viceversa, por tanto preservan la información topológica que nos interesa en este contexto.

2.6. Quiz 12

☞ Dados $r_1, r_2 > 0$ y $a, b \in \mathbb{R}^n$, existe $f : B(a, r_1) \rightarrow B(b, r_2)$ homeomorfismo.

Falso: Tome (\mathbb{R}, d_1) y $r_1, r_2 = 1$ y $a, b = 0$, entonces $[-1, 1]$ es compacto, como f^{-1} es continua y biyectiva, $f^{-1}([-1, 1]) = (-1, 1)$, luego $(-1, 1)$ es compacto como subespacio de (\mathbb{R}, d_1) , contradicción ya que $(-1, 1) \cong \mathbb{R}$ y \mathbb{R} no es compacto.

☞ Existe un homeomorfismo entre \mathbb{R}^n y una bola cerrada en \mathbb{R}^n

Falso: Note que $\mathbb{R}^n \cong B(0, 1)$ (la bola en \mathbb{R}^n), luego tome (\mathbb{R}, d_1) y el argumento es igual al del punto anterior.

✎ El conjunto $B[a, r] - \{a\}$ es homeomorfo a $B[a, r]$.

Falso: Sea (\mathbb{R}, d_1) , note que $([-1, 1] \setminus \{0\}) = [-1, 0) \cup (0, 1]$ que no es homeomorfo a $[-1, 1]$ ya que $[-1, 1]$ es conexo.

✎ \mathbb{N} es homeomorfo a \mathbb{Z} .

Demostración. Considere la función:

$$f(n) : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$n \longmapsto \begin{cases} \frac{n-2}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Claramente es continua ya que todos los puntos de (\mathbb{N}, d_1) son aislados, no es difícil ver que es biyectiva (ejercicio), también en (\mathbb{Z}, d_1) todos los puntos son aislados luego la inversa también es continua y claramente biyectiva.

□

✎ (a, b) es homeomorfo con $B(p, r)$ (bola en \mathbb{R}^2).

Falso: $(-1, 1)$ no es homeomorfo con $B(0, 1)$ (bola en \mathbb{R}^2), ya que $B(0, 1) \setminus \{0\}$ es conexo y $(-1, 1) \setminus \{0\} = (-1, 0) \cup (0, 1)$ no lo es.

✎ $(0, 1) \cong B(0, 1)$ (bola en \mathbb{R}^2).

Falso: Note que esto es equivalente a ver que \mathbb{R} es homeomorfo a \mathbb{R}^2 , luego considere el contraejemplo del punto anterior.