# = TEORIE - ANALIZĂ =

① NOȚIUNEA DE CORP ORDONAT, CORP COMPLET ORDONAT, CORP ARHIMEDIAN.

- CORP ORDONAT: CVADRUPLUL $(S,+,\cdot,\le)$ S.N. "CORP ORDONAT" DACĂ:
  1) $(S,+,\cdot) \to$ CORP COMUTATIV
  2) $(S,\le) \to$ MULȚIME TOTAL ORDONATĂ
  3) i) DACĂ $x\le y$ ȘI $z\in S \Rightarrow x+z\le y+z$
     ii) DACĂ $x\le y$ și $z\ge 0 \Rightarrow x\cdot z\le y\cdot z$
- CORP COMPLET ORD: UN CORP ORDONAT $(S,+,\cdot,\le)$ S.N. "COMPLET ORD." DACĂ, $(\forall)\ A\subset S$ MĂRGINITĂ SUPERIOR(INFERIOR) $\Rightarrow (\exists)$ SUPREMUL(INFIMUL) LUI A.
- CORP ARHIMEDIAN: UN CORP ORD. $(S,+,\cdot,\le)$ S.N. "ARHIMEDIAN" DACĂ $(\forall)\ x\in S, (\exists)\ n\in\mathbb{N}$ a.î. $n\ge x$.

② • LIMITA UNUI ȘIR (ÎN $\mathbb{R}$): FIE $(x_n)_n\subseteq\mathbb{R}$ UN ȘIR DE NUMERE ȘI $l\in\mathbb{R}$. SPUNEM CĂ $(x_n)_n$ ARE LIMITA "$l$" (SAU CONVERGE LA "$l$") (ȘI SCRIEM $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$) DACĂ $(\forall)\ \varepsilon>0, (\exists)\ n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\ n\ge n_\varepsilon$, AVEM $|x_n-l|<\varepsilon$.

③ ENUMERAȚI PROPRIETĂȚILE ȘIRURILOR CONVERGENTE (=MONOTON+MĂRGINIT) ȘI DEMONSTRAȚI PRODUSUL:

FIE $(x_n)_n, (y_n)_n\subseteq\mathbb{R}$ și $a,b\in\mathbb{R}$.

1) DACĂ $x_n\to a \Rightarrow (x_n)_n$ MĂRGINIT;
2) DACĂ $x_n\to a$ și $y_n\to b \Rightarrow (x_n+y_n)\to a+b$
3) " ——— " ——— " $(x_n\cdot y_n)\to a\cdot b$
4) DACĂ $x_n\to a \Rightarrow |x_n|\to|a|$
5) DACĂ $(x_n)_n\ne 0, (\forall)\ n\in\mathbb{N}^*$ și $a\ne 0 \Rightarrow \frac{1}{x_n}\to\frac{1}{a}$

DEM: $x_n\to a, (\forall)\ \varepsilon>0, (\exists)\ n^1_\varepsilon\in\mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\ n\ge n^1_\varepsilon \Rightarrow |x_n-a|<\varepsilon$

$y_n\to b, (\forall)\ \varepsilon>0, (\exists)\ n^2_\varepsilon\in\mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\ n\ge n^2_\varepsilon \Rightarrow |y_n-b|<\varepsilon$

$n_\varepsilon=\max\{n^1_\varepsilon, n^2_\varepsilon\}$ și $n\ge n_\varepsilon$

$x_n\to a$ și $y_n\to b \Rightarrow (\exists)\ M\ge 0$ a.î. $|x_n|\le M$ și $|y_n|\le M, (\forall)\ n$

$$|x_n y_n - ab| = |x_n y_n - x_n b + x_n b - ab| \le |x_n| \underbrace{|y_n - b|}_{<\varepsilon} + |b| \underbrace{|x_n - a|}_{<\varepsilon} \le$$
$$\le \varepsilon(M + |b|)$$

## ④ TEOREMA PRIVIND CONVERGENȚA ȘIRURILOR MONOTONE (+DEM.)

• WEIERSTRASS: ORICE ȘIR MONOTON ȘI MĂRGINIT ESTE CONVERGENT (ARE LIMITĂ FINITĂ).

DEM: $(x_n)_n$ ȘIR CRESCĂTOR ȘI MĂRGINIT

$x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n \le x_{n+1} \le \ldots \le M$

$a = \sup\limits_{n \ge 1} x_n$

$(\forall)\, \varepsilon\, (\exists)\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\, n \ge n_\varepsilon$, AVEM:

$$a - \varepsilon < x_{n_\varepsilon} \le x_n \le a \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon, (\forall)\, n \ge n_\varepsilon$$

## ⑤ NOȚIUNILE DE DISTANȚĂ, SPAȚIU METRIC, BILĂ DE CENTRU "a" ȘI RAZĂ "r", ȘIR CONVERGENT, ȘIR CAUCHY.

• DISTANȚĂ: FIE "X" O MULȚIME. O FUNCȚIE $d: X \times X \to [0, \infty)$ S.N. "DISTANȚĂ" DACĂ:

1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2) $d(x, y) = d(y, x)$; $(\forall)\, x, y \in X$
3) $d(x, y) + d(y, z) \ge d(x, z)$; $(\forall)\, x, y, z \in X$

• SPAȚIU METRIC: O MULȚIME "X" PE CARE ESTE DEFINITĂ O DISTANȚĂ $d: X \times X \to [0, \infty)$ S.N. "SPAȚIU METRIC". NOTAȚIE: $(X, d)$.

• ȘIR CONVERGENT: FIE $(X, d)$ UN SPAȚIU METRIC, $(x_n)_n \subset X$ UN ȘIR DE NUMERE ȘI $a \in X$. SPUNEM CĂ $x_n$ ESTE CONVERGENT LA "a" ($\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$) DACĂ $(\forall)\, \varepsilon > 0$, $(\exists)\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\, n \ge n_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon$.

• ȘIR CAUCHY: FIE $(X, d)$ UN SPAȚIU METRIC. ȘIRUL $(x_n)_n \subset X$ S.N. "CAUCHY" DACĂ $(\forall)\, \varepsilon > 0$, $(\exists)\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\, n, m \ge n_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$ (ORICE ȘIR CONVERGENT ESTE CAUCHY).

• BILA: BILA DE CENTRU $a \in X$ ȘI RAZĂ $r > 0$ SE DEFINEȘTE ASTFEL:

$$B(a, r) = \{x \in X \mid d(x, a) < r\}.$$

## ⑥ PROPRIETĂȚILE ȘIRURILOR CONVERGENTE ȘI CAUCHY ÎNTR-UN SPAȚIU METRIC (+DEM)

FIE $(X,d)$ UN SPAȚIU METRIC. ATUNCI:

1) ORICE ȘIR CONVERGENT DIN "X" ESTE CAUCHY.
2) ORICE ȘIR CAUCHY DIN "X" ESTE MĂRGINIT.
3) ORICE ȘIR CONVERGENT ESTE MĂRGINIT.
4) ORICE ȘIR CAUCHY CARE ARE UN SUBȘIR CONVERGENT ESTE CONV..

DEM: 1) $x_n \to a$

$(\forall)\ \varepsilon>0,\ (\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\ n \geq n_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$

FIE $n, m \geq n_\varepsilon$; $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, a) + d(a, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow (x_n)_n$ = ȘIR CAUCHY.

2) $(x_n)_n$ ȘIR CAUCHY $\Rightarrow (\forall)\ \varepsilon>0,\ (\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\ n, m \geq n_\varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$

$\varepsilon = 1 \Rightarrow (\forall)\ n \geq n_1 \Rightarrow d(x_n, x_{n_1}) < 1 \Leftrightarrow x_n \in B(x_{n_1}, 1)$

$r = \max\left\{1 + \max_{i=1}^{n_1} d(x_{n_1}, x_i)\right\}$ $(r > 1)$

$(\forall)\ n \geq 1 \Rightarrow x_n \in B(x_{n_1}, r) \Rightarrow$ ESTE MĂRGINIT

3) ① + ②

4) $(x_n)_n$ ȘIR CAUCHY $\Rightarrow (\forall)\ \varepsilon>0,\ (\exists)\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\ n, m \geq n_\varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$

FIE $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ a.î. $x_{n_k} \to a \Rightarrow (\forall)\ \varepsilon>0,\ (\exists)\ k_\varepsilon > 0$ a.î. $(\forall)\ k \geq k_\varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow d(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2}$

ALEGEM $k \geq k_\varepsilon$ a.î. $\left.\begin{matrix} n_k \geq n_\varepsilon \\ n \geq n_\varepsilon \end{matrix}\right\} \Rightarrow d(x_n, a) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, a) <$

$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

## ⑦

- LIMITA SUPERIOARĂ: FIE $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ și $u_n = \sup_{k \geq n} x_k$. ATUNCI:

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} u_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$$

- LIMITA INFERIOARĂ: FIE $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ și $v_n = \inf_{k \geq n} x_k$. ATUNCI:

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} v_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$$

## ⑧ PROPRIETĂȚILE $\overline{\lim}$ și $\underline{\lim}$:

1) $x_n \le y_n \Rightarrow \begin{cases} \overline{\lim}\, x_n \le \overline{\lim}\, y_n \\ \underline{\lim}\, x_n \le \underline{\lim}\, y_n \end{cases}$

2) $\overline{\lim}(-x_n) = -\underline{\lim}\, x_n$

$\left.\begin{array}{l} 3)\ \overline{\lim}\,(x_n + y_n) \le \overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n \\ 4)\ \overline{\lim}\,(x_n + y_n) \le \overline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ 5) DACĂ $(\exists)\, \lim y_n \Rightarrow \overline{\lim}\,(x_n + y_n) = \overline{\lim}\, x_n + \lim y_n$

6) $\underline{\lim}\,(x_n + y_n) \ge \underline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n$

7) $\underline{\lim}\,(x_n + y_n) \le \overline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n$

8) $\overline{\lim}\, \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\underline{\lim}\, x_n}$. $(x_n > 0)$

9) $\overline{\lim}\,(x_n \cdot y_n) \le \overline{\lim}\, x_n \cdot \overline{\lim}\, y_n \quad (x_n, y_n \ge 0)$

## ⑨ LIMITA SUPERIOARĂ A UNUI ȘIR ESTE PUNCT LIMITĂ:

$(X, d)$ = SPAȚIU METRIC; $(x_n)_n \subset X$

$a \in X$ și $a = \overline{\lim}\, x_n \Rightarrow (\exists)(x_{n_k})$ a.î. $x_{n_k} \to a$.

## ⑩ CARACTERIZARE LIMITA SUPERIOARĂ:

FIE $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ UN ȘIR MĂRGINIT și $a = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$. ATUNCI:

1) $(\forall)\varepsilon > 0, (\exists) n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\, n \ge n_\varepsilon \Rightarrow x_n < a + \varepsilon$

2) $(\exists)\ x_{n_k} \to a$

## ⑪ NOȚIUNILE DE VECINĂTATE, SPAȚIU TOPOLOGIC, MULȚIME DESCHISĂ și ÎNCHISĂ.

• VECINĂTATE: $V \subset \mathbb{R}$ S.N. VECINĂTATEA LUI "a" DACĂ $(\exists)\ \varepsilon > 0$ a.î. $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset V$.

• SPAȚIU TOPOLOGIC: $(X, \mathcal{T})$. FIE $X$ = MULȚIME și $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ S.N. "TOPOLOGIE" DACĂ:

1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

2) $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow \Delta_1 \cap \Delta_2 \in \mathcal{T}$

3) $(\Delta_i)_{i\in I} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup\limits_{i\in I} \Delta_i \subset \mathcal{T}$

• MULȚIME DESCHISĂ:

$\begin{cases} \cdot\ \text{FIE } (X, d) \text{ UN SPAȚIU METRIC. } \Delta = \text{MULȚIME S.N. "DESCHISĂ" DACĂ } (\forall)\ a \in \Delta: \\ \quad \Rightarrow \Delta \in \mathcal{V}_a \Leftrightarrow (\forall)\ a \in \Delta, (\exists)\ r_a > 0 \text{ a.î. } B(a, r_a) \subset \Delta. \Leftrightarrow \Delta = \bigcup\limits_{i\in I} B(a_i, r_i) \\ \cdot\ \text{FIE } (X, \mathcal{T}) \text{ UN SPAȚIU TOPOLOGIC. } \Delta \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \Delta \text{ S.N. "DESCHISĂ".} \end{cases}$

• MULȚIME ÎNCHISĂ:

• FIE $(X,d)$ UN SPAȚIU METRIC. $F\subset X$ S.N. "ÎNCHISĂ" DACĂ $X\setminus F$ E DESCHISĂ.
• FIE $(X,\mathcal{T})$ UN „—"— TOPOLOGIC. $F$ „—" ——— " $X\setminus F\in\mathcal{T}$.

(12) TOPOLOGIA ASOCIATĂ UNUI SPAȚIU METRIC: FAMILIA BILELOR DIN SPAȚIUL METRIC $(X,d)$ DEFINESC O TOPOLOGIE ASOCIATĂ DISTANȚEI. MAI PRECIS, O MULȚIME "$\Delta$" ESTE DESCHISĂ ÎN ACEASTĂ TOPOLOGIE DACĂ $(\forall)\, x\in\Delta, (\exists)\, r_x>0$ a.î. $B(x,r_x)\subset\Delta \Rightarrow \mathcal{T}=\{\Delta\subset X \mid \Delta = \text{DESCHISĂ}\}$.

(13) PROPRIETĂȚILE VECINĂTĂȚILOR:

FIE $V_a$ = VECINĂTATEA LUI "a":

1) $V_1, V_2\in V_a \Rightarrow V_1\cap V_2\in V_a$
2) $V_1\subset V,\ V_1\in V_a \Rightarrow V\in V_a$
3) $(\forall)\, V\in V_a, (\exists)\, W\in V_a, W\subset V$ a.î. $W\in V_x, (\forall)\, x\in W$
4) $a\in V;\ (\forall)\, V_a \ni V$

(14) CARACTERIZAȚI MULȚIMILE DESCHISE ÎN $\mathbb{R}$:

O MULȚIME DIN $\mathbb{R}$ E "DESCHISĂ" DACĂ ȘI NUMAI DACĂ ESTE O REUNIUNE CEL MULT NUMĂRABILĂ DE INTERVALE DESCHISE ȘI DISJUNCTE.

$\Delta = \bigcup_{n\geq 1}(a_n, b_n);\ (a_k, b_k)\cap(a_l, b_l)=\emptyset;\ (\forall)\, k\neq l$

(15) $A\subset(X,\mathcal{T})$

• PUNCTE DE ACUMULARE: $A' = \{a\in X \mid (\forall)\, V\in V_a \Rightarrow V\cap A-\{a\}\neq\emptyset\}$
• ÎNCHIDEREA MULȚIMII: $\bar{A} = \{a\in X \mid (\forall)\, V\in V_a \Rightarrow V\cap A=\emptyset\} = A'\cup A$
• INTERIORUL „—"—: $\mathring{A} = \{a\in X \mid A\in V_a\}$
• FRONTIERA „—"—: $Fr(A) = \bar{A} - \mathring{A}$
• PUNCTE IZOLATE: $iz(A) = A - A'$

(16) • FUNCȚIE CONTINUĂ: FIE $(X,\mathcal{T}_X)$ ȘI $(Y,\mathcal{T}_Y)$ SPAȚII TOPOLOGICE, CU $a\in X$ ȘI $f: X\to Y$. "$f$" S.N. "CONTINUĂ" ÎN "a" DACĂ $(\forall)\, V\in V_{f(a)} \Rightarrow f^{-1}(V)\in V_a$

(17) PĂSTRAREA CONTINUITĂȚII PRIN COMPUNEREA A DOUĂ FUNCȚII (+DEM)

(COMPUNEREA A DOUĂ FUNCȚII E CONTINUĂ)

FIE $(X,\mathcal{T}_X), (Y,\mathcal{T}_Y), (Z,\mathcal{T}_Z)$ SPAȚII TOPOLOGICE ȘI $a\in X$.

$f: X\to Y$ CONTINUĂ ÎN "a"; $g: Y\to Z$ CONTINUĂ ÎN $f(a) \Rightarrow$
$\Rightarrow g\circ f$ CONTINUĂ ÎN "a"

DEM: $\left.\begin{array}{l} g \text{ CONTINUĂ ÎN } f(a) \Rightarrow (\forall) V \in V_{g(f(a))} \Rightarrow g^{-1}(V) \in V_{f(a)} \\ f \text{ " — " — " } a \Rightarrow (\forall) W \in V_{f(a)} \Rightarrow f^{-1}(W) \in V_a \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow W = g^{-1}(V), (\forall) V \in V_{g\circ f(a)} \Rightarrow f^{-1}(W) = \underbrace{f^{-1}(g^{-1}(V))}_{= (g\circ f)^{-1}(V)} \in V_a$

⑱ PROPRIETĂȚILE FUNCȚIILOR CONTINUE DE VALORI $\mathbb{R}$:

$(X, \tau) \to$ SP. TOPOLOGIC, $a \in X$. $f, g : X \to \mathbb{R}$, CONTINUE ÎN "a".

1) "f" – LOCAL MĂRGINITĂ ÎN "a"

2) $|f| \to$ CONTINUĂ ÎN "a"

3) $f+g$ și $f \cdot g \to$ CONTINUE ÎN "a"

⑲ CONTINUITATEA ÎNTR-UN SPAȚIU METRIC ȘI TOPOLOGIC:

• $(X_1, d_1)$ și $(X_2, d_2) \to$ SP. METRICE; $f : X_1 \to X_2$ și $a \in X_1$. ATUNCI URMĂTOARELE AFIRMAȚII SUNT ECHIVALENTE:

1) $f \to$ CONTINUĂ ÎN "a"

2) $(\forall) \varepsilon > 0 \Rightarrow (\exists) d_\varepsilon > 0$ a.î. $d_1(x, a) < d_\varepsilon \Rightarrow d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$

3) $(\forall) (x_n)_n \subset X$, $x_n \xrightarrow{d_1} a \Rightarrow f(x_n) \to f(a)$

• $(X_1, \tau_1)$ și $(X_2, \tau_2) \to$ SP. TOPOLOGICE; $f : X_1 \to X_2$. A.U.A.S.E.:

1) $f \to$ CONTINUĂ PE $X_1$

2) $(\forall) D \in \tau_2 \Rightarrow f^{-1}(D) \in \tau_1$

3) $(\forall) F \subset X_2$ ÎNCHISĂ $\Rightarrow f^{-1}(F)$ ÎNCHISĂ.

⑳ • CONVERGENȚA SIMPLĂ:

FIE $(X, d)$ UN SP. METRIC ȘI $f, f_n : A \to X$:

$f_n$ CONVERGE SIMPLU LA $f$ ($f_n \xrightarrow{\Delta} f$) DACĂ $(\forall) x \in A$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ SAU $(\forall) x \in A, (\forall) \varepsilon > 0, (\exists) n_{\varepsilon, x}$ a.î. $(\forall) n \geq n_{\varepsilon, x} \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$.

• CONVERGENȚA UNIFORMĂ:

$f_n$ CONV. UNIFORM LA $f$ ($f_n \xrightarrow{u} f$) DACĂ $(\forall) \varepsilon > 0, (\exists) n_\varepsilon$ a.î. $(\forall) n \geq n_\varepsilon \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$, $(\forall) x \in A \Leftrightarrow \sup_{x \in A} d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$

## (21) TEOREMĂ PRIVIND PĂSTRAREA CONTINUITĂȚII PRIN CONV. UNIFORMĂ (+DEM):

FIE $f_n, f : (a,b) \to \mathbb{R}$ A.Î. $f_n \xrightarrow{u} f$ ȘI $c \in (a,b)$ A.Î. $f_n$ = CONTINUĂ ÎN "$c$", $(\forall)\ n \geq 1$. ATUNCI, "$f$" = CONTINUĂ ÎN "$c$".

DEM: $f_n \xrightarrow{u} f \Rightarrow (\forall)\ \varepsilon > 0, (\exists)\ n_\varepsilon$ A.Î. $(\forall)\ n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, (\forall)\ x \in (a,b)$

FIE $n \geq n_\varepsilon$ FIXAT; $f_n$ CONT. ÎN "$c$" $\Rightarrow (\forall)\ \varepsilon > 0, (\exists)\ \delta_\varepsilon > 0$ A.Î. $|x - c| < \delta_\varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow |f_n(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$

PRESUPUN $|x - c| < \delta_\varepsilon$

$$|f(x) - f(c)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(c) + f_n(c) - f(c)| \leq$$
$$\leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}\ (\text{CONV. U.})} + \underbrace{|f_n(x) - f_n(c)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}\ (\text{CONT.})} + \underbrace{|f_n(c) - f(c)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}\ (\text{CONV. U.})} < \varepsilon$$

## (22) MULȚIME COMPACTĂ:

$K \in (X, \mathcal{T})$ S.N. "COMPACTĂ" DACĂ $(\forall)\ (D_i)_{i \in F} \subset \mathcal{T}$ A.Î. $K \subset \bigcup_{i \in F} D_i \Rightarrow$
$\Rightarrow (\exists)\ J \subset F$ FINITĂ A.Î. $K \subseteq \bigcup_{i \in J} D_i$ (= ÎNCHISĂ + MĂRGINITĂ).

## (23) MĂRGINIRE FUNCȚII CONTINUE (+DEM):

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$, CONT. PE $[a,b] \Rightarrow (\exists)\ c \in [a,b]$ A.Î. $f(c) = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$.

DEM: (PAS 1: ABSURD) $\sup_{x \in [a,b]} f(x) = \infty \Rightarrow (\forall)\ n \in \mathbb{N}, (\exists)\ x_n \in [a,b]$ A.Î.
$f(x_n) \geq n$.

$(x_n)_n < [a,b] \Rightarrow$ ARE UN SUBȘIR CONV. $x_{n_k} \to d \in [a,b]$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = f(d) \quad (\text{"}f\text{" CONT. "}d\text{"}) \\ \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \infty \end{array}\right\} \Rightarrow f(d) = \infty \ \text{✗}$$

(PAS 2) FIE $\alpha = \sup_{x \in [a,b]} f(x) \Rightarrow (\forall)\ \varepsilon > 0, (\exists)\ x_\varepsilon \in [a,b]$ A.Î. $\alpha - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \leq \alpha$

$$\left.\begin{array}{l} y_n = x_{\frac{1}{n}};\ f(y_n) \to \alpha \quad (\alpha - \frac{1}{n} < f(y_n) \leq \alpha) \\ (y_n)_n \in [a,b] \Rightarrow (\exists)\ y_{n_k} \to c \in [a,b] \Rightarrow f(x_{n_k}) \to f(c) \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = f(c)$$

## (24) PROPRIETĂȚI MULȚIMI COMPACTE ÎNTR-UN SP. METRIC:

FIE $(X,d)$ = SP. METRIC ȘI $A\subset X$. A.U.A.S.E.:

1) $A$ = COMPACTĂ $\Rightarrow$ $A$ = ÎNCHISĂ

2) $(\forall)\, \varepsilon>0 \Rightarrow x_1,\dots x_n \in X$ (SAU "A") a.î. $A\subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i,\varepsilon)$ (PRECOMPACTĂ) și $A$ = COMPLETĂ ($(\forall)$ ȘIR CAUCHY DIN "A" E CONV.)

3) $A$ = SECVENȚIAL COMPACTĂ.

## (25) · FUNCȚIE UNIFORM CONTINUĂ:

$(X_1,d_1),(X_2,d_2)\to$ SP. METRICE. $f:X_1\to X_2$ S.N. "UNIFORM CONT." DACĂ $(\forall)\, \varepsilon>0, (\exists)\, \delta_\varepsilon>0$ a.î. $d_1(x,y)<\delta_\varepsilon \Rightarrow d_2(f(x),f(y))<\varepsilon$.

## (26) FUNCȚIE CONTINUĂ E UNIFORM CONT. (+DEM)

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ CONTINUĂ $\Rightarrow$ $f$ = UNIFORM CONT..

DEM: (ABSURD) $f\neq$ UNIFORM CONT. ($f$ = U.C. $\Leftrightarrow (\forall)\,\varepsilon>0, (\exists)\,\delta_\varepsilon>0$ a.î. $|x-y|<\delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$)

$(\exists)\,\varepsilon>0$ a.î. $(\forall)\,\delta>0 \overset{(\exists)}{\Rightarrow} x_\delta$ și $y_\delta\in[a,b]$ a.î. $|x_\delta-y_\delta|<\delta$ și $|f(x_\delta)-f(y_\delta)|\geq\varepsilon$

$\delta=\frac{1}{n}$; $x_n'=x_{\frac{1}{n}}$; $y_n'=y_{\frac{1}{n}}$

$(x_n')_n\subset[a,b] \overset{(\exists)}{\Rightarrow} (x'_{n_k})$ a.î. $x'_{n_k}\to c\in[a,b]$

$|y_n-x_n|<\frac{1}{n} \Rightarrow y'_{n_k}\to c$

$0<\varepsilon\leq|f(x_{n_k})-f(y_{n_k})|\leq|f(x_{n_k})-f(c)|+|f(c)-f(y_{n_k})| \xrightarrow[\text{DIN CONT. LUI "}f\text{"}]{} 0$ Abs

## (27) DERIVABILITATEA LIMITEI UNUI ȘIR DE FUNCȚII:

$f_n, g:(a,b)\to\mathbb{R}$ a.î.:

1) $(\exists)\, f_n$ a.î. $f_n'\to g$

2) $(\exists)\, c\in(a,b)$ a.î. $(f_n(c))_{n\geq1}$ SĂ FIE CONV..

ATUNCI, $(\exists)\, f:(a,b)\to\mathbb{R}$ a.î.:

1) $f_n \overset{u}{\rightrightarrows} f$

2) $f'=g$

## (28) • T. CAUCHY-HADAMARD:

FIE $\Delta(x)=\sum_{n\geq 0} a_n \cdot x^n$ ȘI $\rho$ = RAZA EI DE CONV.. ATUNCI:

1) DACĂ $\rho=0 \Rightarrow \Delta=\{0\}$

„—"— $\rho=\infty \Rightarrow \Delta=\mathbb{R}$

„—"— $0<\rho<\infty \Rightarrow (-\rho,\rho)\subset \Delta \subset[-\rho,\rho]$

2) „—"— $0<R<\rho\ (\rho>0) \Rightarrow$ SERIA "$\Delta$" = UNIFORM CONV. PE $[-R,R]$

3) FIE $\Delta_1(x)=\sum_{n\geq 1} n\cdot a_n \cdot x^{n-1} \Rightarrow \rho_1=\rho \Rightarrow \Delta=\Delta_1$.

4) $\Rightarrow \Delta\in C^\infty$ PE $(-\rho,\rho)=\Delta^0$ ȘI $\Delta^{(n)}(x)=\Delta_n(x)=\sum_{k\geq n} k(k-1)\dots(k-n-1)\cdot a_k\cdot x^{k-n}$

## (29) POLINOM TAYLOR:

FIE $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ DERIVABILĂ DE $(n-1)$ ORI PE $(a,b)$ ȘI DE "$n$" ORI ÎN $c\in(a,b)$. S.N. "POLINOM TAYLOR ASOCIAT FUNCȚIEI "$f$" DE ORDIN "$n$" ÎN "$a$" " ȘI SE NOTEAZĂ: $T_{f,n,a}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(c)}{k!}\cdot(x-c)^k$.

## (30) • DERIVATA:

FIE $\Delta\subset\mathbb{R}^n$ DESCHISĂ; $f:\Delta\to\mathbb{R}^n$, $a\in\Delta$. SPUNEM CĂ "$f$" E DERIVABILĂ-N "$a$" $\Leftrightarrow (\exists)\, T\in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ a.î. $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-T(x-a)}{d_2(x,a)}=0$

• DERIVATA PARȚIALĂ: $v\in\mathbb{R}^n$, $v\neq 0$

$$\frac{\delta f}{\delta v}(a)=\lim_{t\to 0}\frac{f(a+t\cdot v)-f(a)}{t}$$

## (31) PROPRIETĂȚI DERIVATE + DERIVATE PARȚIALE:

1) DERIVATA E UNICĂ.

2) DACĂ $(\exists)\, f'(a) \Rightarrow$ "$f$" = CONTINUĂ ÎN "$a$"

3) „ ——" —" $\Rightarrow (\exists)\, \frac{\delta f}{\delta v}(a)=f'(a)(v)$.

## (32) T. DE INVERSARE LOCALĂ:

FIE $\Delta\subset\mathbb{R}^n$ DESCHISĂ ȘI $a\in\Delta$ ȘI $f:\Delta\to\mathbb{R}^n$. DACĂ $(\exists)$ "$f'$" PE $\Delta$, "$f'$" = CONT. ÎN "$a$" ȘI $(\exists)\,(f'(a))^{-1} \Rightarrow (\exists)\, \Delta_1$ ȘI $\Delta_2$ MULȚIMI DESCHISE a.î. $f:\Delta_1\to\Delta_2$ BIJ; $a\in\Delta_1$ ȘI $(\exists)\,(f^{-1})'(f(a)) \Rightarrow (f^{-1})'(f(a))=(f'(a))^{-1}$.

## (33) T. LUI FERMAT:

FIE $f:B(a,r)\to\mathbb{R}$. DACĂ $(\exists)\, f'(a)$ ȘI "$a$" = PCT. EXTREM LOCAL $\Rightarrow$ $\Rightarrow f'(a)=0$.

## (34) CONDIȚII NECESARE ȘI SUFICIENTE CA UN PUNCT SĂ FIE EXTREM LOCAL:

FIE $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ DESCHISĂ, $a \in \Delta$; $f:\Delta \to \mathbb{R}$ DERIVABILĂ A.Î. $(\exists)$ $f''(a)$. ATUNCI:

1) DACĂ $a$ = PCT. MIN. LOCAL $\Rightarrow f'(a)=0$ ȘI $f''(a) \geq 0$
2) DACĂ $f'(a)=0$ ȘI $f''(a) > 0 \Rightarrow a$ = MIN LOCAL
3) DACĂ $a$ = MAX LOCAL $\Rightarrow f'(a)=0$ ȘI $f''(a) < 0$
4) DACĂ $f'(a)=0$ ȘI $f''(a) < 0 \Rightarrow a$ = MAX LOCAL.

## (35) • DERIVATA DE ORDIN 2:

E DERIVATA DERIVATEI DE ORDIN 1. FIE $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ DESCHISĂ; $f:\Delta \to \mathbb{R}^m$; $a \in \Delta$ ȘI $u, v \in \mathbb{R}^n - \{a\}$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta u \delta v}(a) = \frac{\delta}{\delta u}\left(\frac{\delta f}{\delta v}\right)(a)$$

DACĂ $u = v \Rightarrow \frac{\delta^2 f}{\delta u^2}$

• DERIVATA PARȚIALĂ DE ORDIN 2:

FIE $f:\Delta \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^2$ DESCHISĂ A.Î. $(\exists)$ ÎN $\mathbb{R}^2$ $\frac{\delta f}{\delta x_i}$, $(\forall)\, i = \overline{1,p}$ ÎN TOATE PUNCTELE DIN $\Delta$ ȘI FIE $c \in \Delta$.

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x_j x_i}(c) = \frac{\delta}{\delta x_j}\left(\frac{\delta f}{\delta x_i}\right)(c);\ (\forall)\ i,j \in \{1,2,\dots,p\}$$

## (36) • NORMA:

$(\|\ \|): \mathbb{R}^n \to [0;\infty)$ DACĂ:

1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2) $\|ax\| = |a| \cdot \|x\|$; $(\forall)\, a \in \mathbb{R}$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}^n$
3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$
4) $d_{\|\|}(x,y) = \|x-y\|$

## (37) • DERIVATA FUNCȚIILOR COMPUSE:

FIE $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ DESCHISĂ, $G \subset \mathbb{R}^m$ DESCHISĂ; $f:\Delta \to G$ ȘI $g: G \to \mathbb{R}^p$ ȘI $a \in \Delta$. DACĂ $(\exists)$ $f'(a)$ ȘI $g'(a) \Rightarrow (\exists)\ (g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \circ f'(a)$

• DERIVATA FUNCȚIILOR INVERSE:

FIE $\Delta = \mathring{\Delta}$ ȘI $G \subset \mathbb{R}^n$ DESCHISĂ; $f:\Delta \to G$ BIJ. ȘI $a \in \Delta$. DACĂ $(\exists)$ $f'(a)$ ȘI E INVERSABILĂ ȘI $f^{-1}$ E CONTINUĂ ÎN "$a$" $\Rightarrow (\exists)(f^{-1})'(f(a)) = (f'(a))^{-1}$.

(38) T. FUNCȚIILOR IMPLICITE:

FIE $\Delta \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ DESCHISĂ; $(a,b) \in \Delta$ $(a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m)$; $g:\Delta \to \mathbb{R}^m$ a.î. $g(a,b)=0$; $g \in C^1$ și $(\exists)\left(\frac{\delta g}{\delta y}\right)^{-1}(a,b) \Rightarrow (\exists)\ \Delta_1 \subset \mathbb{R}^n$ și $\Delta_2 \subset \mathbb{R}^m$ a.î. $(a,b) \in \Delta_1 \times \Delta_2 \subset \Delta$ și $(\exists!)\ f:\Delta_1 \to \Delta_2$ a.î. $g(x, f(x))=0$. ($f \in C^1$ ÎN $(a,b)$).

(39) T. MULTIPLICATORILOR LUI LAGRANGE:

FIE $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ DESCHISĂ; $f:\Delta \to \mathbb{R}$ și $g:\Delta \to \mathbb{R}^m$ $(m<n)$ a.î. $f, g \in C^1$. DACĂ "a" = EXTREM LOCAL PT. "f" PE MULȚIMEA $A=\{g(x)=0 \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ și RANG $g' = m$ (MAXIM) ATUNCI $(\exists)\ \lambda = (\lambda_1 \dots \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ a.î. $h_\lambda'(a)=0$, UNDE $h_\lambda = f + \lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_m g_m$.

**COMPLETARE:** ÎN APLICAȚII, PUTEM FOLOSI, FĂRĂ DEMONSTRAȚIE, CONVERGENȚELE URMĂTOARELOR SERII DE NR $\mathbb{R}$:

1) **SERIA GEOMETRICĂ:** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q^{n} \begin{cases} \nearrow \text{CONVERGENTĂ}; & q \in (-1;1) \\ \searrow \text{DIVERGENTĂ}; & q \in \mathbb{R}-(-1;1) \end{cases}$ (*PRIN CONVENȚIE, DOAR ÎN ACEST **CAZ**: $0^0 = 1$)

2) **SERIA ARMONICĂ GENERALIZATĂ:** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \begin{cases} \nearrow \text{CONVERGENTĂ}; & \alpha > 1 \\ \searrow \text{DIVERGENTĂ}; & \alpha \leq 1 \end{cases}$

## = CRITERII DE CONVERGENȚĂ PENTRU SERII CU TERMENI POZITIVI =

1) CR. RAPORTULUI:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (SERIE), $a_n > 0$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$ a.î. $(\exists) \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \overset{\text{not.}}{=} l$.

- $l < 1 \Rightarrow$ SERIE CONVERGENTĂ
- $l > 1 \Rightarrow$ DIVERGENTĂ
- $l = 1 \Rightarrow$ CRITERIUL NU DECIDE

2) CR. RADICALULUI:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$ a.î. $(\exists) \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \overset{\text{not.}}{=} l$.

- $l < 1 \Rightarrow$ CONV.
- $l > 1 \Rightarrow$ DIV.
- $l = 1 \Rightarrow$ NU DECIDE

3) CR. RAABE-DUHAMEL:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$ a.î. $(\exists) \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \overset{\text{not.}}{=} l$

- $l < 1 \Rightarrow$ DIV.
- $l > 1 \Rightarrow$ CONV.
- $l = 1 \Rightarrow$ NU DECIDE

4) CR. CONDENSĂRII:

$(a_n)_{n\geq 0} \subset [0;\infty)$ = ȘIR MONOTON DESCRESCĂTOR, ATUNCI SERIILE $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ AU ACEEAȘI NATURĂ ( i.e. SUNT AMBELE CONV. 

## = CRITERII DE COMPARAȚIE PT. SERII CU TERMENI POZITIVI =

### 1) CR. DE COMPARAȚIE CU INEGALITĂȚI:

(SERIILE) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, $a_n \in \mathbb{R}_+$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$, $b_n \in \mathbb{R}_+$ $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$

a.î. $(\exists)\, n_0 \in \mathbb{N}$ CU PROPRIETATEA CĂ, $(\forall)\, n \geq n_0$, AVEM $a_n \leq b_n$.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ = CONV. $\Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ESTE CONV.

b) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ = DIV. $\Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ = DIV.

### 2) CR. DE COMP. CU LIMITĂ:

(SERIILE) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, $a_n \in \mathbb{R}_+$, $b_n \in \mathbb{R}_+^*$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$ a.î. $(\exists)$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \overset{not.}{=} l$.

- $l \in (0; +\infty)$ $\Rightarrow$ (SERIILE) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ AU ACEEAȘI NATURĂ.
- $l = 0$ și $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ = CONV. $\Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ = CONV.
- $l = 0$ și $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ = DIV. $\Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ = DIV.

## = CRITERII DE CONVERGENȚĂ PENTRU SERII CU TERMENI OARECARE =

### 1) CRITERIILE ABEL-DIRICHLET:

I) $(x_n)_{n\geq 0} \subseteq \mathbb{R}$, $(y_n)_{n\geq 0} \subseteq \mathbb{R}$. PRESUPUNEM CĂ:

- $(\exists)\, M > 0$ a.î. $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$, AVEM $|y_0 + y_1 + \ldots + y_n| \leq M$.
- (ȘIRUL) $(x_n)_{n\geq 0}$ E MONOTON DESCRESCĂTOR ȘI $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ $\Bigg\}\Rightarrow$

$\Rightarrow$ (SERIA) $\sum_{n=0}^{\infty} x_n \cdot y_n$ = CONV.

II) $(x_n)_{n\geq 0} \subseteq \mathbb{R}$, $(y_n)_{n\geq 0} \subseteq \mathbb{R}$. PRESUPUNEM CĂ:

- (ȘIRUL) $(x_n)_{n\geq 0}$ ESTE MONOTON ȘI MĂRGINIT
- (SERIA) $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ = CONV. $\Bigg\}\xrightarrow{\text{(ATUNCI)}}$

$\Rightarrow$ (SERIA) $\sum_{n=0}^{\infty} x_n \cdot y_n$ = CONV.

TEOREMA LUI FERMAT: $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ și $c\in(a,b)$ a.î. $(\exists)\ f'(c)$ și "c" = PCT. EXTREM LOCAL $\Rightarrow f'(c)=0$.

DEM: PRESUPUN "c" = PCT. MIN. LOCAL $\Rightarrow (\exists)\ \varepsilon>0$ a.î. $(\forall)$ $x\in(c-\varepsilon, c+\varepsilon) \Rightarrow f(x)\geq f(c)$

$$\left.\begin{array}{l} x\in(c-\varepsilon, c) \Rightarrow f(x)-f(c)\geq 0 \\ x-c<0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{\substack{x\to c\\ x<c}} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}\leq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow f'(c)\leq 0$

$x\in(c, c+\varepsilon) \Rightarrow \frac{f(x)-f(c)}{x-c}\geq 0 \Rightarrow f'(c)=\lim_{\substack{x\to c\\ x>c}} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}\geq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow f'(c)=0$

T. LUI ROLLE: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $f$ CONTINUĂ ÎN "a" și "b"; $f$ DERIVABILĂ PE $(a,b)$ și $f(a)=f(b) \Rightarrow (\exists)\ c\in(a,b)$ a.î. $f'(c)=0$.

DEM: $f$ CONT. PE $[a,b] \Rightarrow$ MĂRGINITĂ PE $[a,b]$

Fie $M=\sup_{x\in[a,b]} f(x)$ și $m=\inf_{x\in[a,b]} f(x)$

I) $M>f(a)=f(b) \Rightarrow (\exists)\ c\in(a,b)$ a.î. $f(c)=M$, și $c\notin\{a,b\} \Rightarrow$
$\Rightarrow$ "c" = PCT. MAX. LOCAL $\xRightarrow{\text{T. FERMAT}} f'(c)=0$

II) $m<f(a) \Rightarrow (\exists)\ c\in(a,b)$ a.î. $f(c)=m \Rightarrow$ "c" = PCT. MIN. LOCAL $\Rightarrow$
$\xRightarrow{\text{FERMAT}} f'(c)=0$

III) $M=m=f(a)=f(b) \Rightarrow (\forall)\ c\in(a,b),\ f'(c)=0$

T. LUI LAGRANGE: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, DERIVABILĂ PE $(a,b)$ și CONTINUĂ PE $[a,b]$. $\Rightarrow (\exists)\ c\in(a,b)$ a.î. $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$. (PT. $f(a)=f(b) \Rightarrow$ T. ROLLE)

DEM: $h:[a,b]\to\mathbb{R}$; $h(x)=f(x)-\alpha\cdot x$

$h$ CONTINUĂ PE $[a,b]$ și DERIVABILĂ PE $(a,b)$. $h(a)=h(b) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f(a)-\alpha\cdot a=f(b)-\alpha\cdot b \Rightarrow \alpha=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \xRightarrow{\text{ROLLE}} (\exists)\ c\in(a,b)$ a.î.
$h'(c)=0 \Rightarrow f'(c)=\alpha=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ($h'(x)=f'(x)-\alpha$)

CONSECINȚE: $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ DERIVABILĂ. ATUNCI:

1) $f'=0 \Leftrightarrow f=\text{CONST.}$

2) $f'\geq 0 \Leftrightarrow f \nearrow$

3) $f'<0 \Leftrightarrow f \searrow$

MULȚIME PCT. ACUMULARE

4) $f=\text{ST.}\nearrow \Leftrightarrow f'>0$ și $\{x \mid f'(x)>0\}=(a,b)$

T. LUI CAUCHY: $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$, CONTINUE PE $[a,b]$; DERIVABILE PE $(a,b)$ a.î. $g'(x)\neq 0$, $(\forall)\,x\in(a,b) \Rightarrow g(b)\neq g(a)$ și $(\exists)\,c\in(a,b)$ a.î.

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}. \quad (g(x)=x \Rightarrow \text{LAGRANGE})$$

DEM: DIN T. LAGRANGE APLICATĂ LUI "g" PE $[a,b] \Rightarrow (\exists)\, d\in(a,b)$ a.î.

$$\frac{g(b)-g(a)}{b-a}=g'(d)\neq 0 \Rightarrow g(b)\neq g(a).$$

$h:[a,b]\to\mathbb{R}$, $h(x)=f(x)-\alpha\cdot g(x)$

$h$ CONTINUĂ PE $[a,b]$, DERIVABILĂ PE $(a,b)$

$\alpha=?$ a.î. $h(a)=h(b)$

$$f(a)-\alpha\cdot g(a)=f(b)-\alpha\cdot g(b) \Rightarrow f(b)-f(a)=\alpha(g(b)-g(a)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

DIN T. ROLLE $\Rightarrow (\exists)\, c\in(a,b)$ a.î. $h'(c)=0 \Rightarrow f'(c)-\alpha\cdot g'(c)=0.$

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\alpha=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

TEOREMĂ: $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, DERIVABILĂ PE $(a,b) \Rightarrow$ "$f'$" ARE PROP. LUI DARBOUX.