Teorie examen analiză

① **Definiție: NOȚIUNILE DE VECINĂTATE**

→ O mulțime $V \subset \overline{\mathbb{R}}$ s.n. vecinătate a lui $a \in \mathbb{R}$ dacă $(\exists)\ \varepsilon > 0$ a.î. $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset V$

→ O mulțime $V \subset \overline{\mathbb{R}}$ s.n. vecinătate a lui ∞ dacă $\exists\ M > 0$ a.î. ~~$[M,\infty)$~~ $(M, \infty] \subset V$

→ O mulțime $V \subset \overline{\mathbb{R}}$ s.n. vecinătate a lui $-\infty$ dacă $\exists$ ~~M>0 a.î.~~ $M \in \mathbb{R}$ a.î. $[-\infty, M) \subset V$

Definiție: LIMITA UNUI ȘIR DIN $\mathbb{R}$

Un șir $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ are limita $l \in \overline{\mathbb{R}}$ dacă $(\forall)\ V \in \mathcal{V}_l$ $(\exists)\ n_V$ ~~a.î.~~ a.î. $(\forall)\ n \geq n_V$ ~~a.î.~~ $x_n \in V$

Proprietăți: Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ și $a \in \mathbb{R}$, atunci $x_n \longrightarrow a \Rightarrow (\forall)\ \varepsilon > 0\ (\exists)\ n_\varepsilon$ a.î. $(\forall)\ n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$

Definiție: ȘIR CONVERGENT

TEOREMA LUI WEIERSTRASS: Orice șir monoton și mărginit este convergent.

→ Un șir $(x_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ s.n. convergent la $a \in \mathbb{R}$ și notăm $x_n \to a$ sau $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ dacă: $(\forall)\ \varepsilon > 0, (\exists)\ n_\varepsilon$ a.î. $(\forall)\ n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$

Proprietăți: Fie $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$, $(y_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ și $a, b \in \mathbb{R}$ a.î. $x_n \to a$ și $y_n \to b$. Atunci:

1) $x_n + y_n \to a + b$
2) $x_n \cdot y_n \to a \cdot b$
3) Dc $b \neq 0$ și $y_n \neq 0\ (\forall)\ n \geq 1 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \to \frac{a}{b}$
4) $|x_n| \to |a|$
5) $x_n \leq y_n \Rightarrow a \leq b$

② **Definiție: NOȚIUNILE DE DISTANȚĂ:**

Fie X o mulțime. O funcție $d: X \times X \to [0, +\infty)$ s.n. distanță dacă:

1) $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$
2) $d(x,y) = d(y,x)$, $(\forall)\ x, y \in X$
3) $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$, $(\forall)\ x, y, z \in X$

Definiție: NORMĂ

O funcție $\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ s.n. normă dacă:

1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2) $\|ax\| = |a| \cdot \|x\|$ $\qquad (\forall)\ a \in \mathbb{R}, x, y \in \mathbb{R}^n$
3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
4) $d_{\|\cdot\|}(x,y) = \|x - y\|$

Definiție: ȘIR CONVERGENT ÎNTR-UN SPAȚIU METRIC

Fie (X,d) un spațiu metric. Un șir $(x_n)_n \subset X$ s.n. convergent la a (vom scrie $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ în (X,d)) dacă $(\forall)\ \varepsilon > 0,\ (\exists)\ n_\varepsilon$ a.î. $(\forall)\ n \geq n_\varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon \Leftrightarrow d(x_n, a) \to 0$

Definiție: ȘIR CAUCHY ÎNTR-UN SPAȚIU METRIC

Fie (X,d) un spațiu metric. Un șir $(x_n)_n \subset X$ s.n. CAUCHY dacă $(\forall)\ \varepsilon > 0,\ (\exists)\ n_\varepsilon$ a.î. $(\forall)_{m,n}\ m \geq n_\varepsilon \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$

Definiție: SPAȚIU METRIC

Se numește spațiu metric o mulțime nevidă X pe care se definește cel puțin o distanță $d: X \times X \to [0, +\infty)$.

Definiție: BILĂ

Fie (X,d) un spațiu metric, un element x_0 din spațiul metric și un nr. real $r > 0$.

a) S.n. bilă deschisă de centru x_0 și rază r mulțimea
$B(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}$

b) S.n. bilă închisă de centru x_0 și rază r mulțimea
$B[x_0, r] = \{x \in X \mid d(x, x_0) \leq r\}$

③ **PROPRIETĂȚILE ȘIRURILOR CONVERGENTE ȘI ȘIRURILOR CAUCHY ÎNTR-UN SPAȚIU METRIC:**

Fie (X,d) un spațiu metric. Atunci:

a) Orice șir Cauchy din X este mărginit

b) Orice șir convergent din X este Cauchy.

c) Orice șir convergent din X este mărginit.

d) Un șir Cauchy care are un subșir convergent este convergent.

④ **Definiție: TOPOLOGIE**

Fie $X \neq \emptyset$ o mulțime și $\tau \subset \mathcal{P}(X)$. τ s.n. topologie dacă:

1) $\emptyset, X \in \tau$

2) $D_1, D_2 \in \tau \Rightarrow D_1 \cap D_2 \in \tau$

3) $(D_i)_{i\in I} \subset \tau \Rightarrow \bigcup_{i\in I} D_i \in \tau$

Definiție: MULȚIME DESCHISĂ

Fie $X \neq \emptyset$ și $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ o topologie pe X, o mulțime $G \subseteq X$ s.n. mulțime deschisă dacă $G \in \tau$

MULȚIME ÎNCHISĂ

Fie $X \neq \emptyset$ și $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ o topologie pe X, o mulțime $F \subseteq X$ s.m. mulțime închisă dacă $X \setminus F \in \mathcal{T}$.

Definiție. VECINĂTATE: $V \subset \mathbb{R}$ s.n. vecinătate a lui a dacă $(\exists)\ \varepsilon > 0$ a.î. $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset V$

Definiție. A', $Fr(A)$; $\bar{A}$; $\mathring{A}$; $iz(A)$

$A \subset X$, $(X, \mathcal{T})$ spațiu topologic:

$\to A' = \{a \in X \mid (\forall)\ V \in \mathcal{V}_a \Rightarrow V \cap A \setminus \{a\} \neq \emptyset\}$ → pcte de acumulare

$\to \bar{A} = \{a \in X \mid (\forall)\ V \in \mathcal{V}_a \Rightarrow V \cap A \neq \emptyset\}$ → închiderea lui A

$\to \mathring{A} = \{a \in X \mid A \in \mathcal{V}_a\}$ → interiorul lui A

$\to Fr(A) = \cancel{\bar{A} \setminus \mathring{A}}\ \bar{A} \setminus \mathring{A}$ → Frontiera lui A

$\to iz(A) = \bar{A} \setminus A'$ → punctele izolate

⑤ <u>Definiție</u>. LIMITA SUPERIOARĂ ȘI INFERIOARĂ

⊛ Fie (X, d) un spațiu metric și $(x_n)_n$ un șir din X. a s.m. PUNCT LIMITĂ pt. $(x_n)_{n\geq 1}$ dc. $(\exists)\ x_{n_k} \to a$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}((x_n)_{n\geq 1}) = \{a \mid (\exists)\ x_{n_k} \text{ a.î. } x_{n_k} \to a\}$$

⊛ Fie $(x_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ (mărginit) $\sup \mathcal{L}$ s.m. limita superioară și se notează cu $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sup x_n$

⊛ Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ (mărginit) $\inf \mathcal{L}$ s.m. limita inferioară și se notează cu $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \inf x_n$

↳ 1) Cel mai mare pct. lim$(x_n)_n$ s.n. limită superioară ($\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$)

2) Cel mai mic pct. lim$(x_n)_n$ s.n. limită inferioară ($\underline{\lim}\, x_n$)

PROPRIETĂȚI $\overline{LIM}$, $\underline{LIM}$:

1) $\underline{\lim}\, x_n \leq \overline{\lim}\, x_n$

2) $(x_n)_n$ are limită $\Leftrightarrow \underline{\lim} = \overline{\lim} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$

LIMITA SUPERIOARĂ: Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ și $u_n = \sup\limits_{k \to n} x_k$. Atunci:

$$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} u_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$$

LIMITA INFERIOARĂ: Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ și $u_m = \inf_{k \to m} x_k$. Atunci:

$\underline{\lim}_{m \to \infty} x_n = \lim_{m \to \infty} u_m = \underline{\lim}_{m \to \infty} x_n$

PROPRIETĂȚILE $\overline{\lim}$ și $\underline{\lim}$:

1) $\overline{\lim}(-x_n) = -\underline{\lim}(x_m)$

2) $\overline{\lim}(x_n + y_m) \le \overline{\lim}(x_n) + \overline{\lim}(y_n)$

3) $\overline{\lim}(x_n + y_n) \ge \underline{\lim}(x_m) + \overline{\lim}(y_m)$ $\Rightarrow$ 4)

4) Dacă $(\exists) \lim(x_m) \Rightarrow \overline{\lim}(x_m + y_m) = \lim x_m + \overline{\lim}\, y_m$

5) $\underline{\lim}(x_m + y_m) \ge \underline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_m$

6) $\underline{\lim}(x_m + y_m) \le \overline{\lim}\, x_m + \underline{\lim}\, y_m$

7) $\overline{\lim} \frac{1}{x_m} = \frac{1}{\underline{\lim}\, x_m}$ $(x_m > 0)$

8) $\overline{\lim}\, x_n \cdot y_n \le \overline{\lim}\, x_n \cdot \overline{\lim}\, y_n$ $(x_n, y_n > 0)$

CARACTERIZAREA LIMITEI SUPERIOARE

Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ un șir mărginit și $a = \overline{\lim}_{m \to \infty} x_n$. Atunci:

1) $(\exists)\ x_{m_k} \to a$

2) $(\forall)\ \varepsilon > 0, (\exists)\ m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\ m \ge m_\varepsilon \Rightarrow x_m < a + \varepsilon$

⑥ Definiție. FUNCȚIE CONTINUĂ.

Fie $(X_1, \mathcal{T}_1)$ și $(X_2, \mathcal{T}_2)$ spații topologice, $a \in X_1$ și $f: X_1 \to X_2$. f. s.n. CONTINUĂ în a dacă $V \in \mathcal{V}_{f(a)} \Rightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_a$

Definiție. FUNCȚIE UNIFORM CONTINUĂ

Fie (X_1, d_1); (X_2, d_2) spații metrice, $f: X_1 \to X_2$ s.n. uniform continuă dacă $(\forall)\ \varepsilon > 0, (\exists)\ \delta_\varepsilon > 0$, a.î. $d_1(x,y) < \delta_\varepsilon \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$

Teoremă. MĂRGINIREA UNEI FUNCȚII CONTINUE

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$, continuă pe $[a,b] \Rightarrow (\exists)\ c \in [a,b]$ a.î. $f(c) = \sup f(x), x \in [$

Teoremă. UNIFORM CONTINUITATEA UNEI FUNCȚII CONTINUE

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$, continuă ~~pe $[a,b]$~~ $\Rightarrow f$ - uniform continuă.

(7) TEOREMA DE CARACTERIZARE A CONTINUITĂȚII ~~ÎNTRE~~ ÎNTR-UN SPAȚIU METRIC

Fie (X_1, d_1) și (X_2, d_2) spații metrice, $a \in X_1$ și $f: X_1 \to X_2$. Atunci următoarele afirmații sunt ~~corect~~echivalente:

1) f este continuă în a
2) $(\forall)\ \varepsilon > 0 \Rightarrow (\exists)\ \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $d_1(x, a) < \delta_\varepsilon \Rightarrow d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$
3) $(\forall)\ (x_n)_n \subset X_1,\ x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a)$

(7) Definiție. LIMITA UNEI FUNCȚII

Fie (X, τ_X) și (Y, τ_Y), $A \subset X$, $f: A \to Y$ și $a \in A'$. Spunem că f are limită $\alpha \in Y$ în a și notăm $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \alpha$ dacă $(\forall)\ V \in \mathcal{V}_\alpha \Rightarrow$ $\Rightarrow (\exists)\ W \in \mathcal{V}_a$ a.î. $(\forall)\ x \in W \cap A \setminus \{a\} \Rightarrow f(x) \in V$

TEOREMA DE CARACTERIZARE A CONTINUITĂȚII ÎNTR-UN SPAȚIU TOPOLOGIC

Fie (X_1, τ_1) și (X_2, τ_2) spații topologice și $f: X_1 \to X_2$. Urm. afirmații sunt echivalente:

1) f e continuă pe X_1
2) $(\forall)\ D \in \tau_2 \Rightarrow f^{-1}(D) \in \tau_1$
3) $(\forall)\ F = \overline{F} \subset X_2 \Rightarrow f^{-1}(F) = \overline{f^{-1}(F)}$

(8) • CONVERGENȚA SIMPLĂ

Fie $f_n, f: A \to \mathbb{R}$, f_n converge simplu către f ($f_n \xrightarrow{s} f$) dacă $(\forall)\ x \in A$ $f_n(x) \to f(x)$, $(\forall)\ x \in A$, $(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ n_{\varepsilon, x}$ a.î. $(\forall)\ n \geq n_{\varepsilon, x} \Rightarrow$ $\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

• CONVERGENȚA UNIFORMĂ

Fie $f_n, f: A \to \mathbb{R}$, f_n converge uniform către f ($f_n \xrightarrow{u} f$) dacă $(\forall)\ \varepsilon > 0, (\exists)\ n_\varepsilon$ a.î. $(\forall)\ n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, (\forall)\ x \in A \Leftrightarrow$

$$a_n = \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

TEOREMA PRIVIND PĂSTRAREA CONTINUITĂȚII PRIN CONVERGENȚA UNIFORMĂ

Fie $f_n, f: (a,b) \to \mathbb{R}$ a.î. $f_n \xrightarrow{u} f$ și $c \in (a,b)$ a.î. f_n continuă în c, $(\forall)\ n \geq 1$ f continuă în ~~a~~ c

DERIVABILITATEA LIMITEI UNUI ȘIR DE FUNCȚII: $f_n, g: (a,b) \to \mathbb{R}$ a.î.:

1) $(\exists)\ f_n'$ a.î. $f_n' \to g$
2) $(\exists)\ c \in (a,b)$ a.î. $(f_n(c))_{n \geq 1}$ să fie convergent

Atunci, $(\exists)\ f: (a,b) \to \mathbb{R}$ a.î.:

1) $f_n \xrightarrow{u} f$
2) $f' = g$

INTEGRABILITATEA LIMITEI UNUI ŞIR DE FUNCŢII:

Fie $f_n, f : [a,b] \to \mathbb{R}$ a.î. $f_n \xrightarrow{u} f$. Atunci f este integrabilă Riemann şi $\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$

⑨ TEOREMA LUI FERMAT: Fie $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $c\in(a,b)$ un punct de extrem local pentru f. Dacă $(\exists)\ f'(c) \Rightarrow f'(c)=0$.

TEOREMA LUI ROLLE: Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, derivabilă pe (a,b), continuă în a şi b ($\Rightarrow f$ continuă pe $[a,b]$) şi $f(a)=f(b)$. Atunci $(\exists)\ c\in(a,b)$ a.î. $f'(c)=0$

TEOREMA LUI LAGRANGE: Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, derivabilă pe (a,b), continuă în a şi b ($\Rightarrow f$ continuă pe $[a,b]$). Atunci $(\exists)\ c\in(a,b)$ a.î. $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

TEOREMA LUI CAUCHY: Fie $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ derivabile pe (a,b) continue pe $[a,b]$ a.î. $g'(x)\neq 0$, $(\forall)\ x\in(a,b)$. Atunci $(\exists)\ c\in(a,b)$ a.î.

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

TEOREMA LUI DARBOUX: Fie $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ derivabilă pe (a,b). Atunci f' are <u>proprietatea lui Darboux</u>:

Fie ~~Ezam G un~~ J un interval. Se spune că funcţia $f: J\to\mathbb{R}$ are pp. lui Darboux ~~d~~ pe intervalul J, dacă $(\forall)\ a<b$ din J şi $(\forall)\ \lambda\in(f(a), f(b))$ $(\exists)$ cel puţin un pct. x_λ din (a,b) a.î. $f(x_\lambda)=\lambda$

TEOREMA LUI L'HOSPITAL: Fie $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ ($b\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$) a.î. $\lim_{x\to b} f(x) = \lim_{x\to b} g(x) \in \{0, \pm\infty\}$. Dacă $(\exists)\ f'$ şi g' pe (a,b), $g'(x)\neq 0$, $(\forall)\ x\in(a,b)$ şi $(\exists)\ l = \lim_{x\to b}\frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow (\exists) \lim_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to b}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

TEOREMA CAUCHY-HADAMARD.

Fie $s(x)=\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ și $\rho = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$ raza ei de convergență și Δ - domeniul de convergență.

$\Delta = \{x \mid s(x) \text{ este semiconvergentă}\}$

1) $\rho = 0 \Rightarrow \Delta = \{0\}$

$\rho = \infty \Rightarrow \Delta = \mathbb{R}$

$\rho \in (0,\infty) \Rightarrow (-\rho,\rho) \subset \Delta \subset [-\rho,\rho]$

2) $0 < R < \rho \Rightarrow$ seria "s" este uniform convergentă pe $[-R,R]$

3) Fie $s_1(x)=\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1} \Rightarrow \rho_1 = \rho \Rightarrow s' = s_1$, unde ρ_1 raza lui ρ

4) $s \in C^\infty$ pe $(-\rho,\rho) = s^0$ și $s' = s_1$, $s^{(k)} = s_k$, unde $s_k = \sum_{n\geq 1} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n x^{n-k}$

TEOREMA LUI TAYLOR

I Fie $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ a.î. $(\exists)$ $f^{(n)}$ pe (a,b) și $f^{(n+1)}(c)$. Atunci $(\exists)$ $g:(a,b)\to\mathbb{R}$ a.î.

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}c}{k!}(x-c)^k}_{} + (x-c)^{n+1} g(x)$$

$T_{f,n+1,c}$ = polinomul Taylor asociat lui f de ordin $n+1$ în c.

unde $\lim_{x\to c} g(x) = 0$ și $g(x) = \frac{f(x)-f(c)-f'(c)(x-c)}{|x-c|}$

II TEOREMA LUI TAYLOR CU REST LAGRANGE: Fie $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ derivabilă de $n+1$ ori pe (a,b) și $c\in(a,b)$. $(\forall)$ $x\in(a,b) \Rightarrow (\exists)$ $\alpha \in (x,c)$ (sau (c,x)) a.î. $f(x) = T_{f,n,c}(x) + R_{f,n,c}(x)$, unde $R_{f,n,c} = \frac{f^{(n+1)}(\alpha)(x-c)^{n+1}}{(n+1)!}$

restul Taylor de rang n și asociat lui f și c.

TEOREMA TAYLOR: Seria Taylor asociată lui f în c este convergentă $(\forall)$ $x\in i$, $x\neq c$ dacă $\lim_{n\to\infty} R_{f,n,c}(x) = 0$

POLINOMUL TAYLOR: Fie $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ a.î. $(\exists)$ $f^{(n)}$ pe (a,b) și $(\exists)$ $f^{(n+1)}(c)$.

Se numește POLINOMUL TAYLOR de ordin $n+1$ asociat lui f în c:

$$T_{f,n+1,c}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}c}{k!}(x-c)^k$$

TEOREMĂ. NATURA EXTREMELOR LOCALE.

Fie $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ derivabilă pe (a,b), $c\in(a,b)$ a.î. $(\exists)\ f''(c)$. Atunci

1) C - MIN LOCAL $\Rightarrow f'(c)=0$ și $f''(c)\geq 0$

2) C - MAX LOCAL $\Rightarrow f'(c)=0$ și $f''(c)\leq 0$

3) Dc. $f'(c)=0$ și $f''(c)>0 \Rightarrow$ C - MIN LOCAL

4) Dc. $f'(c)=0$ și $f''(c)<0 \Rightarrow$ C - MAX LOCAL

(10) DEFINIȚIE. DERIVABILITATE

Fie $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ și $c\in(a,b)$. Spunem că f este derivabilă în c dacă $(\exists)\ \lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$ și notăm $f'(c)=\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$

Definiție. DERIVATA

Fie $D\subset\mathbb{R}^n$ deschisă, $f:D\to\mathbb{R}^m$, $a\in D$. Spunem că f este derivabilă în a dacă $(\exists)\ T\in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ a.î. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)-T(x-a)}{\|x-a\|_2}=0$, unde $\|x-a\|_2=d_2(x,a)$

$T=f'(a)=$ derivata/diferențiala

DERIVATA PARȚIALĂ: $v\in\mathbb{R}^n$, $v\neq 0$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a)=\lim_{t\to 0}\frac{f(a+tv)-f(a)}{t}\qquad v=e_i=(0,\dots,1,\dots)$$

$$(*)\ \frac{\partial f}{\partial a_i}(a)=\frac{\partial f}{\partial x_i}=f'_{x_i}=\lim_{x_i\to a_i}\frac{f(a_1,\dots,a_{i-1},x_i,a_{i+1},\dots,a_n)-f(a_1,\dots,a_n)}{x_i-a_i=t}$$

PROPRIETĂȚILE DERIVATEI ȘI ALE DERIVATEI PARȚIALE

1) Derivata este unică

2) Dacă $(\exists)\ f'(a)\Rightarrow f$ continuă în a

3) Dacă $(\exists)\ f'(a)\Rightarrow(\exists)\ \dfrac{\partial f}{\partial v}(a)=f'(a)(v)$; $(\forall)\ v\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$

4) Fie $a\in\mathbb{R}^n$, $\varepsilon>0$, $f:B(a,\varepsilon)\to\mathbb{R}^m$. Dacă $(\exists)\ \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ pe $B(a,\varepsilon)$ și $(\exists)\ M\geq 0$ a.î. $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right|\leq M$ pe $B(a,\varepsilon)\Rightarrow f$ este continuă în a

5) Fie $f:B(a,\varepsilon)\to\mathbb{R}^m$ a.î. $(\exists)\ \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ pe $B(a,\varepsilon)$ $(\forall)\ i=\overline{1,n}$ și $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ continuă în a $\Rightarrow(\exists)\ f'(a)=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a)\dots\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$

(11) PROPRIETĂȚILE PRIVIND OPERAȚIILE CU FUNCȚII DERIVABILE

• DERIVAREA FUNCȚIILOR COMPUSE

Fie $D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^n$, $G = \mathring{G} \subset \mathbb{R}^m$, $f: D \to G$, $g: G \to \mathbb{R}^m$ și $a \in D$

Dacă (∃) $f'(a)$ și $g'(f(a)) \Rightarrow$ (∃) ~~fog~~ $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \circ f'(a)$

• DERIVAREA FUNCȚIILOR INVERSE

Fie $D = \mathring{D}$, $G = \mathring{G} \subset \mathbb{R}^n$, $f: D \to G$ bijectivă și $a \in D$. Dacă (∃) $f'(a)$ și este inversabilă și f^{-1} este continuă în a $\Rightarrow$ (∃) $(f^{-1})'(f(a)) = (f'(a))^{-1}$

$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$ continuă

• TEOREMA DE INVERSARE LOCALĂ

Fie $D \subset \mathbb{R}^n$ deschisă și $a \in D$ și $f: D \to \mathbb{R}^n$. Dacă (∃) f' pe D și f' continuă în a și (∃) $(f'(a))^{-1} \Rightarrow$ (∃) D_1 și D_2 mulțimi deschise a.î. $f: D_1 \to D_2$ bij $a \in D$ și (∃) $(f^{-1})'(f(a)) \Rightarrow (f^{-1})'(f(a)) = (f'(a))^{-1}$

(13) TEOREMA LUI YOUNG

Fie $f: D \to \mathring{D} \subset \mathbb{R}^n$ derivabilă pe D, $a \in D$ și $u, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Dacă (∃) $f''(a) \Rightarrow$ $\Rightarrow$ (∃) $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$ (∀) $u, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(a) = f''(a)(u,v) = f''(a)(v,u)$

TEOREMA LUI SCHWARZ

Fie $f: D \to \mathring{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $u, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ și $a \in D$ a.î. (∃) $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$ să fie continue în a. Atunci (∃) $\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(a)$

TEOREMA MULTIPLICATORILOR LUI LAGRANGE

Fie $D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^n$, $f: D \to \mathbb{R}$; $f \in C^1$; $g: D \to \mathbb{R}^m$, $g \in C^1$ și $(m < n)$. Dacă $a \in D$ este un pct. de extrem local pt. f pe mulțimea $A = \{x \in D \mid g(x) = 0\}$ și rang $g' = m$ (maxim) atunci (∃) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ a.î. $h'_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}(a) = 0$, unde

$h_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} = f + \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \dots + \alpha_m g_m$

$g = (g_1, g_2, \dots, g_m)$

(14) SUMA RIEMANN

Fie $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ o fcție mărginită, $\Delta = (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$ o diviziune a intervalului $[a,b]$ și $\{\alpha_i\}_{i=\overline{0,n-1}}$ un sistem de puncte intermediare asociat diviziunii cu $\alpha_i \in [x_i, x_{i+1}]$ (∀) $i = \overline{0,n-1}$

$T_\Delta(f, (\alpha_i)_{i=\overline{0,n-1}}) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\alpha_i)(x_{i+1} - x_i)$ s.n. SUMA RIEMANN asociată f

SUMELE DARBOUX SUPERIOARĂ ȘI INFERIOARĂ

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ mărginită și $\Delta=(a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b)$

1) $S_\Delta(f)=\sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1}-x_i)$, unde $M_i=\sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x)$

2) $s_\Delta(f)=\sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1}-x_i)$, unde $m_i=\inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x)$

INTEGRALA RIEMANN

O fcție mărginită $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ s.n. integrabilă Riemann dacă $(\exists)\ I\in\mathbb{R}$ a.î. $(\forall)\ \varepsilon>0\ (\exists)\ \eta_\varepsilon$ a.î. $\|\Delta\|=\max_{i=\overline{0,n-1}}(x_{i+1}-x_i)<\eta_\varepsilon \Rightarrow |I-T_{\Delta,f,\alpha_i}|<\varepsilon$

$I=\int_a^b f(x)dx$

1. INTEGRALA SUPERIOARĂ $\overline{\int_a^b} f=\inf_\Delta S_\Delta(f)$

2. INTEGRALA INFERIOARĂ $\underline{\int_a^b} f=\sup_\Delta s_\Delta(f)$

(15) TEOREMA ȘI LEMA DARBOUX

TEOREMA: Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ mg. Atunci urm. afirmații sunt echivalente

1) f este integrabilă Riemann

2) $\overline{\int_a^b} f=\underline{\int_a^b} f$

3) $(\forall)\ \varepsilon>0\Rightarrow(\exists)\ \eta_\varepsilon>0$ a.î. $\|\Delta\|<\eta_\varepsilon\Rightarrow S_\Delta(f)-s_\Delta(f)<\varepsilon$

4) $(\forall)\ \varepsilon>0\Rightarrow(\exists)\ \Delta$ a.î. $S_\Delta(f)-s_\Delta(f)<\varepsilon$

LEMA: Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o fcție mg. a.î. pt. $(\forall)$ șir de diviziuni Δ_n cu $\lim_{n\to\infty}\|\Delta_n\|=0$ avem $\lim_{n\to\infty}(S_{\Delta_n}(f)-s_{\Delta_n}(f))=0$. Atunci $(\exists)\ J\in\mathbb{R}$ a.î. ~~putem~~ pt. $(\forall)$ șir $\Delta_1<\Delta_2\ldots$ cu $\lim_{n\to\infty}\|\Delta_n\|=0$ avem $\lim_{n\to\infty}s_{\Delta_n}(f)=\lim_{n\to\infty}S_{\Delta_n}(f)=J$

TEOREMA LUI LEBESGUE: Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ mg. f este int. Riemann $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow D_f=\{x\mid f$ discontinuă în $x\}$ este neglijabilă LEBESGUE

TEOREMA PRIVIND INTEGRABILITATEA FCT CONTINUE ȘI MONOTONE

1. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continuă. Atunci f este integrabilă Riemann.

2. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ monotonă. Atunci f este integrabilă Riemann.

PROPRIETĂȚILE FUNCȚIILOR INTEGRABILE

Fie $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrabile Riemann. Atunci $f+g$, αf, $f\cdot g$, $|f|$ s
integrabile Riemann. 1) $\int_a^b f+g = \int_a^b f + \int_a^b g$

2) $\int_a^b \alpha f = \alpha\int_a^b f$

(16) TEOREMA LUI FUBINI

Fie $A\in \mathcal{J}(\mathbb{R}^m)$ și $B\in\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $A\times B\in \mathcal{J}(\mathbb{R}^{m+n})$ și $f:A\times B\to\mathbb{R}$ integra-
bilă Riemann și $\overline{F}, \underline{I}:A\to\mathbb{R}$;

$\overline{F}(x)=\overline{\int_B} f(x,y)dy$ și $\underline{I}(x)=\underline{\int_B} f(x,y)dy$. ATUNCI:

1) $\overline{F}$ și $\underline{I}$ sunt integrabile Riemann.

2) $\iint_{A\times B} f(x,y)\,dx\,dy = \int_A \overline{F}(x)dx = \int_A\left(\overline{\int_B} f(x,y)\,dy\right)dx = \int_A \underline{I}(x)\,dx$

Dacă f este uniform continuă $\iint_{A\times B} f(x,y)\,dx\,dy = \int_A\left(\int_B f(x,y)dy\right)dx$

TEOREMA DE SCHIMBARE DE VARIABILĂ.

Fie $D=\mathring{D}$ și $G=\mathring{G}$ mulțimi deschise în $\mathbb{R}^n$. $\varphi:D\to G$ bij, $A\subset\mathbb{R}^n$ a.
$A\in\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $\overline{A}\subset D$ și $f:\varphi(A)\to\mathbb{R}$ int. Riemann.

Atunci: $f\circ\varphi\cdot\det(\varphi):A\to\mathbb{R}$ este int. Riemann și

$$\int_{\varphi(A)} f(y)\,dy = \int_A (f\circ\varphi)(x)\cdot|\det \varphi(x)|\,dx$$

(17) INTEGRALA IMPROPRIE

Fie $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ s.n. INTEGRALĂ IMPROPRIE dacă:

1) $(\forall)\ b>a \Rightarrow f|_{[a,b]}$ este int. Riemann

2) $(\exists)\ \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx = \int_a^\infty f(x)dx$

CRITERIUL COMPARAȚIEI PENTRU INTEGRALA IMPROPRIE

Fie $f,g:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ int. Riemann pe $[a,c]$. Dacă $(\exists)\ \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}\in(0,$

$\Rightarrow(\exists)\int_a^\infty f \Leftrightarrow (\exists)\int_a^\infty g$

(18) NOȚIUNEA DE DREPTUNGHI

O mulțime $\Delta = \overset{m}{\underset{i \geq 1}{\times}} [a_i, b_i]$ se numește dreptunghi $(a_i < b_i)$

$\rightarrow \overline{\Delta} = \overset{m}{\underset{i \geq 1}{\times}} [a_i, b_i] \rightarrow$ dreptunghi închis

$\rightarrow \overset{\circ}{\Delta} = \overset{m}{\underset{i \geq 1}{\times}} (a_i, b_i) \rightarrow$ dreptunghi deschis

VOLUMUL UNUI DREPTUNGHI

$$v(\Delta) = v(\overline{\Delta}) = v(\overset{\circ}{\Delta}) = \prod_{i=1}^{m} (b_i - a_i)$$

MULȚIME ELEMENTARĂ

O mult. $E = \bigcup_{i=1}^{m} \Delta_i$ s.m. elementară, unde Δ_i - dreptunghi. $\mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$ - mult. elem.

VOLUMUL UNEI MULȚIMI ELEMENTARE

$$v(E) = \sum_{i=1}^{m} v(\Delta_i) \text{ dc. } \Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset, (\forall)\ i \neq j$$

MULȚIME MĂSURABILĂ JORDAN

Def 1: O mult. elem. măsurabilă în sens Jordan în $\mathbb{R}^m$ este o mulțime $E \subseteq \mathbb{R}^m$

$E = \bigcup_{l=1}^{\ell} I_l$, unde $I_l = [a_1^l, b_1^l] \times \ldots \times [a_m^l, b_m^l]$, $l = \overline{1, \ell}$ a.î. $E = \bigcup_{l=1}^{\ell} I_l$ și

$I_j \cap I_l = \emptyset$, $(\forall)\, j, l \in \{1, 2, \ldots \ell\}$ $(j \neq l)$

Def 2: MĂSURA JORDAN a mulțimii elementare E este nr. $\mu(E) = \sum_{l=1}^{\ell} \mu(I_l)$,

unde $\mu(I_l) = \prod_{k=1}^{m} (b_k^l - a_k^l)$

MĂSURA SUPERIOARĂ JORDAN: Fie $A \subset \mathbb{R}^m$ mărginită

$$\mu^*(A) = \inf_{\substack{E \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^m) \\ A \subseteq E}} v(E) \qquad \mu_*(A) = \sup_{\substack{E \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^m) \\ E \subseteq A}} v(E)$$

NOȚIUNEA DE SPAȚIU CU MĂSURĂ ADITIVĂ

$(\mathbb{R}^m, \mathcal{E}(\mathbb{R}^m), v)$ și $(\mathbb{R}^m, \mathcal{J}(\mathbb{R}^m), \mu)$ sunt spații cu măsură aditivă

INEL DE MULȚIMI

$\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ este un inel de mulțimi

$\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ s.n. inel de mulț. dacă $(\forall)$ $A_1, A_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow A_1 \cap A_2, A_1 \cup A_2, A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{A}$

MĂSURA:

$\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty)$ s.n. măsură dc. $A, B \in \mathcal{A}$ a.î. $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mu(A \cup B) =$
$= \mu(A) + \mu(B)$

SPAȚIU CU MĂSURĂ ADITIVĂ

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ s.n. spațiu cu măsură aditivă $\Rightarrow \mu(\emptyset) = 0$, $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$

$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$