

Perturbaciones en la época de Inflación

Jorge Mastache
jhmastache@mctp.mx

Mesoamerican Centre for Theoretical Physics

2^a Escuela Mexicana de Perturbaciones Cosmológicas, IFUNAM, 2018



- ➊ Resumen del Modelo Cosmológico Estándar
- ➋ Motivaciones para inflación
 - ▶ Problema de la planitud
 - ▶ Problema de la homogeneidad
- ➌ La física de inflación
- ➍ Inflación y Perturbaciones cosmologicas
- ➎ Conclusiones.

Bases del Modelo Cosmológico Estándar

Ecuación de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu}$$

Métrica FRW:

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]$$

Ecuaciones de Friedmann:

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P)$$

Ecuación de conservación:

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + P)$$

Ecuación de estado:

$$P = \omega\rho$$

Ecuaciones de Friedmann

Las ecuaciones de Friedmann la podemos reescribir como:

$$\Omega - 1 = \frac{k}{a^2 H^2},$$

donde $\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_{\text{cr}}}$; y $\rho_{\text{cr}} \equiv 3H^2/8\pi G$. Y podemos resolver para:

$$\text{Ec. de continuidad} \rightarrow \rho = \rho_0 \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3(1+\omega)}$$

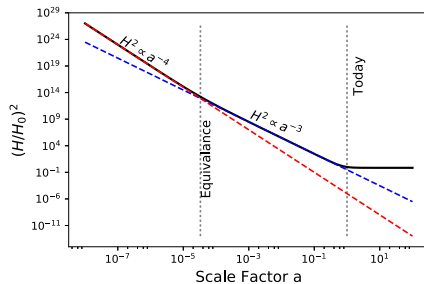
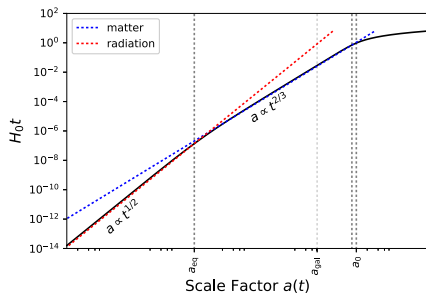
$$\text{Ec. de Friedmann} \rightarrow a = a_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2/3(1+\omega)}$$

El contenido del Universo consiste en:

$$\text{Materia} \quad \omega = 0$$

$$\text{Radiación} \quad \omega = \frac{1}{3}$$

Evolución del Universo



Contenido del Universo

Las recientes observaciones del Universo nos arrojan los siguientes valores cosmológicos:

$$h = 0.67 \pm .01$$

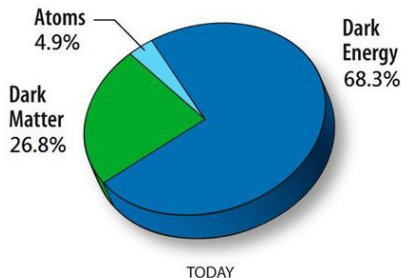
$$\Omega_k = 0.000 \pm 0.005$$

$$\Omega_r h^2 = 4.2 \times 10^{-5}$$

$$\Omega_c h^2 = 0.1199 \pm 0.0027$$

$$\Omega_b h^2 = 0.02205 \pm 0.00028$$

$$\Omega_\Lambda = 0.685 \pm 0.013$$



Condiciones iniciales

Extrapolemos las ecuaciones de Einstein hasta la época donde

$$H^2 \propto \rho_r \propto a^{-4}.$$

$$\Omega - 1 \propto \frac{k}{a^2 a^{-4}} \propto k a^2$$

y calculemos el valor de $\Omega - 1$ en diferentes épocas, $T_{\text{planck}} \sim 10^{19}$ GeV,
 $T_{\text{nuc}} \sim 1$ MeV, $T_0 \sim 10^{-13}$ GeV

$$\frac{|\Omega - 1|_{\text{planck}}}{|\Omega - 1|_{\text{today}}} \approx \left(\frac{a_{\text{planck}}^2}{a_0^2} \right) \approx \left(\frac{T_0}{T_{\text{planck}}} \right) \approx \mathcal{O}(10^{-64})$$

$$\frac{|\Omega - 1|_{\text{nuc}}}{|\Omega - 1|_{\text{today}}} \approx \left(\frac{a_{\text{nuc}}^2}{a_0^2} \right) \approx \left(\frac{T_0}{T_{\text{nuc}}} \right) \approx \mathcal{O}(10^{-16})$$

Si la densidad inicial del Universo pudo tomar cualquier valor, parece extremadamente sorprendente descubrir que $\Omega \sim 1$ en cualquier momento!.

Distancias en el Universo

Las distancias *físicas* en el Universo está dadas por:

$$d_{\text{ph}}(t) = a(t)d_c,$$

donde d_c es la distancia comovil.

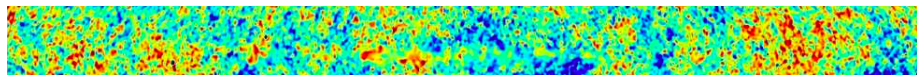
$$\frac{d_{\text{ph}}(t)}{d_{\text{ph}}(t_0)} = \frac{a(t)}{a_0}$$

ó

$$d_{\text{ph}}(t) = \frac{a(t)}{a_0} d_{\text{ph}}(t_0).$$

Problema del Horizonte

De acuerdo con el modelo estándar cosmológico los γ se desacoplaron de los e^\pm a una temperatura de $T_{\text{cmb}} \sim 0.3 \text{ eV}$.



El radio de Hubble es aproximadamente el tamaño de nuestro Universo visible y esta definido como $r_h(t_0) = H_0^{-1}$. El radio de Hubble (hoy) en la época del CMB la podemos calcular:

$$r_h(T_{\text{cmb}}) = r_h(t_0) \left(\frac{a_{\text{cmb}}}{a_0} \right) = r_h(t_0) \left(\frac{T_0}{T_{\text{cmb}}} \right)$$

El radio de Hubble en la época del CMB, es decir, el tamaño del Universo visible en la época del CMB es ($\lambda_h(t_{\text{cmb}}) = H^{-1}(t_{\text{cmb}})$). Dado que

$$H^2 = H_0^2 \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3} = H_0^2 \left(\frac{T}{T_0} \right)^3.$$

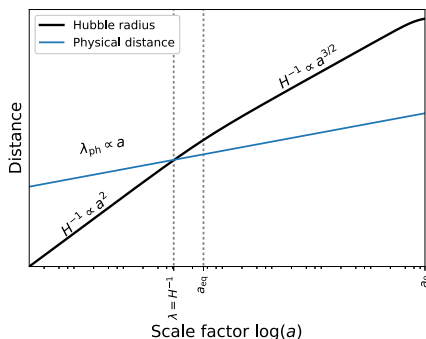
$$\lambda_h(t_{\text{cmb}}) = r_h(t_0) \left(\frac{T_{\text{cmb}}}{T_0} \right)^{-3/2}$$

Problema del Horizonte

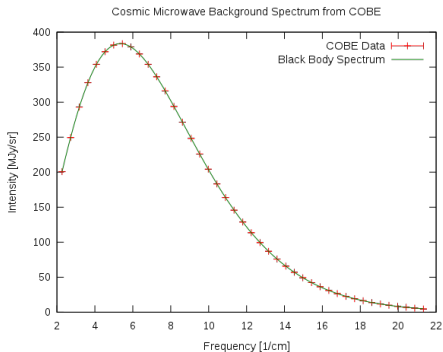
calculando el cociente de los volúmenes,

$$\frac{r_h^3(T_{\text{cmb}})}{\lambda_h^3(t_{\text{cmb}})} = \left(\frac{T_{\text{cmb}}}{T_0} \right)^{3/2} \sim \mathcal{O}(10^6)$$

Esto quiere decir, que nuestro volumen (visible) contiene 10^6 regiones causalmente desconectados!!

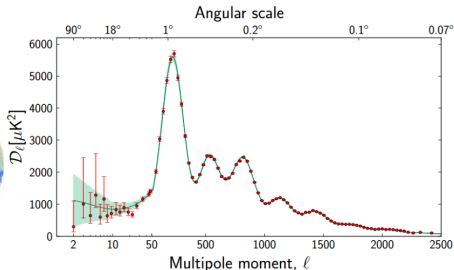
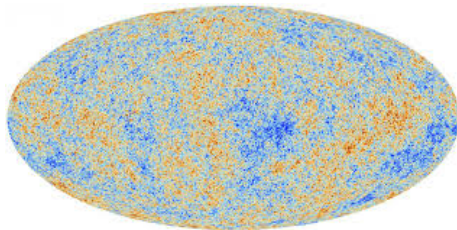


Problema del Horizonte



Es complicado pensar en un proceso en el Universo temprano que produzca un espectro de cuerpo negro cuando existen 10^6 regiones de fotones causalmente **desconectados**.

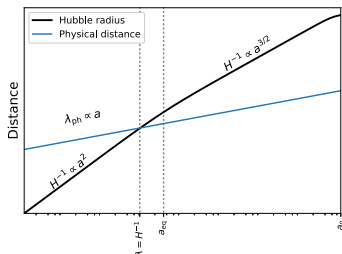
Problema del Horizonte



Cómo explicar que γ 's en el CMB que estaban causalmente desconectados tengan las mismas anisotropías.

Inflación

- Los problemas de planitud y de horizonte son deficiencias severas en la teoría estándar del Big Bang. Una teoría que resuelva estos problemas y que pueda dar una explicación dinámica de las condiciones iniciales de homogeneidad y planitud suena realmente atractiva!
- En particular queremos una época en donde las distancias físicas para los fotones λ_{ph} están causalmente conectados en el pasado, es decir, que la evolución del horizonte de Hubble, H^{-1} , sea menor que el de la distancia $\lambda_{\text{ph}} \propto a$ en esa época.



Inflación

- En particular queremos una época en donde las distancias físicas para los fotones λ_{ph} están causalmente conectados en el pasado, es decir, que la evolución del horizonte de Hubble, H^{-1} , sea menor que el de la distancia $\lambda_{\text{ph}} \propto a$ en esa época.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\lambda_{\text{ph}}}{H^{-1}} \right) = \ddot{a} > 0$$

Inflación: La época al inicio del Universo cuando éste se acelera.

$$\ddot{a} > 0 \rightarrow P < -\rho/3$$

Si tomamos el caso particular en el que $P = -\rho$ la ecuación de conservación nos dice que $\rho = \text{cte}$. De la ecuación de Friedmann $H = \text{cte}$. De aquí concluimos que:

$$a = a_i e^{\int_{t_i}^{t_f} H_i dt}$$

y definimos el número de e-folds como $N \equiv \int_{t_i}^{t_f} H_i dt$

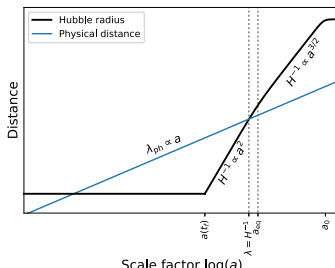
Problems revisited

- **Problema de Planitud.** Dado que $H \propto \text{cte.}$

$$\frac{|\Omega - 1|_{t_f}}{|\Omega - 1|_{t_i}} \approx \left(\frac{a_i}{a_f} \right)^2 = e^{-2N}$$

Si asumimos que $|\Omega - 1|_{t_0} \approx 1$, necesitaríamos una $N \sim 60$.

- **Problema del horizonte.** La escala de longitud que observamos hoy debió haber estado dentro del horizonte de Hubble en algún momento antes del CMB para así homogeneizar la temperatura (condiciones iniciales).



Dinámica de un campo escalar

Una de las manera más sencilla de tener una ecuación de estado, $P = -\rho$, es a través de un campo escalar. La acción que caracteriza al campo escalar ϕ (inflatón) es:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} R + \mathcal{L}_\phi \right]$$

donde

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi)$$

Las ecuaciones de Lagrange nos da la ecuación de movimiento de Klein-Gordon:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \frac{\nabla^2 \phi}{a^2} + V' = 0$$

donde $V' = \frac{dV}{d\phi}$.

Condiciones de rodamiento suave

Del tensor de energía momento $T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \mathcal{L}$ podemos calcular la densidad de energía y presión:

$$T_{00} = \rho_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) + \frac{(\nabla\phi)^2}{2a^2}$$
$$T_{ii} = P_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi) - \frac{(\nabla\phi)^2}{6a^2}$$

Asumiendo homogeneidad en el campo $\nabla\phi/a \rightarrow 0$. Así la ecuación de estado es:

$$\omega_\phi = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi} - V}{\frac{1}{2}\dot{\phi} + V}.$$

Si imponemos las condiciones $V \gg \dot{\phi}/2$ y $\ddot{\phi} \ll 0$, es decir, el campo rueda suavemente (*slow-roll*) entonces $\omega_\phi = -1$. Las ecuaciones de Friedmann se puede re-escribir como:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_\phi = \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right) \approx \frac{8\pi G}{3} V$$

Condiciones de rodamiento suave

La nueva ecuación de movimiento se puede re-escribir como:

$$3H\dot{\phi} = -V'_{\phi} \implies \ddot{\phi} \ll 3H\dot{\phi} \implies V'' \ll H^2$$

y

$$\dot{\phi}^2 \ll V(\phi) \implies \frac{(V'')^2}{V} \ll H^2$$

Así es como definimos los parámetros de inflación:

$$\epsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{1}{16\pi G} \left(\frac{V'}{V} \right)^2$$
$$\eta \equiv \frac{1}{8\pi G} \left(\frac{V''}{V} \right)$$

Notemos que $\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2 = (1 - \epsilon)H^2$, por lo tanto inflación sigue corriendo mientras $\epsilon < 1$, una vez que esta condición no se cumple, inflación termina.

PARTE II: INFLACIÓN Y PERTURBACIONES COSMOLÓGICAS

Perturbaciones cosmológicas

Las perturbaciones en el campo escalar las podemos escribir como

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \phi(t) + \delta\phi(\mathbf{x}, t).$$

La fluctuación se puede expandir en modos de Fourier

$$\delta\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \delta\phi_k(t)$$

Perturbando la Ec. de KG:

$$\delta\ddot{\phi}_k + 3H\delta\dot{\phi}_k + \frac{k^2}{a^2}\delta\phi_k + V''\delta\phi_k = 0$$

El último término se desprecia ya que $V'' \ll H^2$. Si además definimos la variable $v_k \equiv a\delta\phi_k$ obtenemos la ec. de Mukhanov-Sasaki:

$$v_k'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a}\right) v_k = 0$$

Disclaimer: Cambio de notación!

Perturbaciones cosmológicas

$$\delta\ddot{\phi}_k + 3H\delta\dot{\phi}_k + \frac{k^2}{a^2}\delta\phi_k = 0$$

- Dentro del horizonte, $\lambda \ll H^{-1} \implies k \gg aH$

$$\delta\ddot{\phi}_k + \frac{k^2}{a^2}\delta\phi_k = 0$$

La ec. de un oscilador armónico.

La solución son ondas planas:

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} v_k = \frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}}$$

Condiciones de vacío de Bunch-Davis.

- Fuera del horizonte, $k \ll aH$

$$\delta\ddot{\phi}_k + 3H\delta\dot{\phi}_k = 0$$

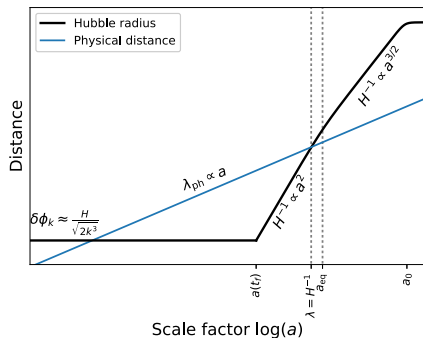
Perturbaciones cosmológicas

- Fuera del horizonte, $k \ll aH$

$$\delta\ddot{\phi}_k + 3H\delta\dot{\phi}_k = 0$$

$\delta\phi_k = v_k/a \sim C$. Donde $C = 1/a\sqrt{2k}$ si imponemos que $k = aH$. Por lo

tanto $\delta\phi_k \approx \frac{H}{\sqrt{2k^3}}$.



La ec. de Mukhanov-Sasaki puede ser obtenida de la acción:

$$S_k = \int dx^4 \frac{1}{2} \left[v'^2 - (\nabla v)^2 + \frac{a''}{a} v^2 \right] \quad (1)$$

Es la acción canónica para un oscilador armónico simple con las relaciones de conmutación $[v_k, v_{k'}] = -i\delta_{kk'}$

Perturbaciones cosmológicas

Modelos de inflación con un solo campo y rodamiento suave también son obtenidos por la acción:

$$S = \frac{1}{2} \int dx^4 \sqrt{-g} \left[R - (\nabla\phi)^2 - 2V(\phi) \right]$$

Podemos escoger una norma donde:

$$\delta\phi = 0, \quad g_{ij} = a^2[(1 - 2\mathcal{R})\delta_{ij} + h_{ij}], \quad \partial_i h_{ij} = 0$$

es decir, todos los grados de libertad escalares están parametrizados por las fluctuaciones de la métrica $\mathcal{R}(t, x)$. \mathcal{R} mide la curvatura espacial de hipersuperficies con ϕ constante.

Si perturbamos la acción a un segundo orden (métrico y ec. de KG) en \mathcal{R} obtenemos:

$$S_{(2)} = \frac{1}{2} \int dx^4 a^3 \frac{\dot{\phi}}{H^2} \left[\dot{\mathcal{R}}^2 - a^{-2} (\partial_i \mathcal{R})^2 \right]$$

Además, definimos la variable de Mukhanov, $v \equiv z\mathcal{R}$, donde $z^2 = 2a^2\epsilon$.
Uno vuelve a obtener la Ec. (1).

Retomando...

$$S_k = \int dx^4 \frac{1}{2} \left[v'^2 - (\nabla v)^2 + \frac{a''}{a} v^2 \right] = \int dx^4 \mathcal{L}$$

Uno puede quantizar canónicamente la acción, definiendo un momentum canónico y reglas de conmutación $[\hat{v}, \pi] = i\hbar$. Podemos descomponer los modos v en

$$\hat{v}(\eta, x) = \int \frac{dk^3}{(2\pi)^3/2} \left[v_k(\eta) \hat{a}_k e^{ik \cdot x} + v_k^*(\eta) \hat{a}_k^\dagger e^{-ik \cdot x} \right]$$

Aplicando las reglas de conmutación a los operadores de creación y destrucción podemos demostrar que

$$\hat{a}_k |0\rangle = 0,$$

para toda k .

Recordando: La fluctuación se puede expandir en modos de Fourier

$$\delta\phi(x, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \delta\phi_k(t)$$

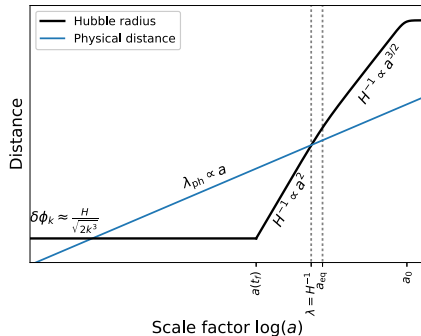
El espectro de potencia primordial, $\mathcal{P}_g(k)$ esta dado por:

$$\begin{aligned}\langle \delta\phi(x, t)^2 \rangle &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} |\delta\phi_k|^2 \\ &= \int \frac{dk}{k} \frac{k^3}{2\pi^2} |\delta\phi_k|^2 \\ &\equiv \int \frac{dk}{k} \mathcal{P}_{\delta\phi}(k)\end{aligned}$$

Esto define el espectro de potencia como: $\mathcal{P}_{\delta\phi}(k) \equiv \frac{k^3}{2\pi^2} |\delta\phi_k|^2$

Espectro de Potencia

$$P_{\delta\phi}(k) \equiv \frac{k^3}{2\pi^2} |\delta\phi_k|^2$$



Entonces podemos decir que:

$$\mathcal{P}_{\delta\phi}(k) = \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2$$

Juan C. ya nos habló de la perturbaciones a la métrica

Metric Perturbations

- The metric tensor perturbations $g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu}(t) + \delta g_{\mu\nu}(x, t)$

$$\delta g_{00} = -2a^2 \phi \longrightarrow \text{Gravitational potential}$$

$$\delta g_{0i} = a^2 (B_i - S_i)$$

$$\delta g_{ij} = 2a^2 (-2\psi + E_{,ij} + F_{i,j} + h_{ij})$$

Potential shift

$\delta g_k^k = \text{Local scale factor}$

$$(\partial_i \partial_j - \frac{1}{3} \nabla^2)(E + B) = \text{Shear scalar } \sigma$$

- Geometrical quantities:

- Intrinsic Curvature of spatial hypersurfaces ${}^{(3)}R_1 = \frac{4}{a^2} \nabla^2 \psi_1$

- Acceleration

$$a_i = \phi_{,i}$$

- Expansion

- Proper time $d\tau = (1 + \phi)dt$

$$\theta = \frac{3}{a} \left[\mathcal{H} - \mathcal{H}\phi - \psi' + \frac{1}{3} \nabla^2 \sigma \right]$$

Perturbaciones en la curvatura \mathcal{R}

La curvatura espacial en hipersuperficies de τ constante y $k = 0$ es dado por

$$R = \frac{4}{a^2} \nabla^2 \psi \quad (2)$$

Gauges...what Gauges?

- Observers may measure different observables
- Observers that see **uniform scalar field**:

- Require:

$$\alpha_{\phi 1} = \frac{\delta \phi_1}{\bar{\phi}'}$$

- Result: Curvature perturbation in **Uniform field gauge**.

$$\tilde{\psi}_{\phi 1} = \psi_1 + \mathcal{H} \frac{\delta \phi_1}{\bar{\phi}'}$$

- Observers that experience **no shear**:

- Require

$$\alpha_{t1} = -\sigma_1 = B_1 - E_1'$$

- Result: Metric potentials in **Longitudinal or Newtonian Gauge**.

$$\tilde{\phi}_{t1} = \phi_1 + \mathcal{H} (B_1 - E_1') + (B_1 - E_1')' \equiv \Phi$$

$$\tilde{\psi}_{t1} = \psi_1 - \mathcal{H} (B_1 - E_1') \equiv \Psi$$

Perturbaciones en la curvatura \mathcal{R}

Perturbación de curvatura comovil: $\mathcal{R}_k = \psi_k + \mathcal{H} \frac{\delta\phi_k}{\phi'}$. Nos da las perturbaciones de la curvatura en rebanadas de tiempo comovil.

Perturbaciones a la acción:

$$S = \int d^4x \sqrt{-q} \left[\frac{1}{2} R + \mathcal{L}_\phi \right]$$

se puede escribir en términos de la variable (de Mukhanov)

$$v = a \left(\delta\phi + \frac{\phi'}{\mathcal{H}\psi} \right) = a \left(\frac{\phi'}{\mathcal{H}} \right) \mathcal{R} = z\mathcal{R}$$

$$S_k = \int dx^4 \frac{1}{2} \left[v'^2 - (\nabla v)^2 + \frac{z''}{z} v^2 \right]$$

si $\frac{z''}{z} \approx \frac{a''}{a}$, entonces todos los resultados de los cálculos anteriores no se modifican!.

Solo podemos generalizar el espectro de potencia.

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = \frac{k^3}{2\pi^2} \frac{|v_k|^2}{z^2} = \left(\frac{H^2}{\dot{\phi}^2} \right) \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2_{k=aH} \quad (3)$$

La solución completa a la ecuación: $v'^2 - (\nabla v)^2 + \frac{z''}{z} v^2$

$$v_k = e^{i(\nu-1/2)\pi/2} 2^{\nu-2/3} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(3/2)} \frac{1}{\sqrt{2k}} (-k\tau)^{1/2-\nu} \quad (4)$$

Por lo tanto podemos aproximar el espectro de potencia para $k \rightarrow 0$

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = \frac{1}{2\epsilon} \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2 \left(\frac{k}{aH} \right)^{n_{\mathcal{R}}-1} \equiv A_{\mathcal{R}}^2 \left(\frac{k}{aH} \right)^{n_{\mathcal{R}}-1} \quad (5)$$

con $n_{\mathcal{R}} - 1 = 2\eta - 6\epsilon$. (Ondas gravitacionales? $n_{\mathcal{T}} = -2\epsilon$)

GRACIAS!