



# Métodos semianalíticos para el estudio de formación de estructura cósmica a grandes escalas — Teorías efectivas

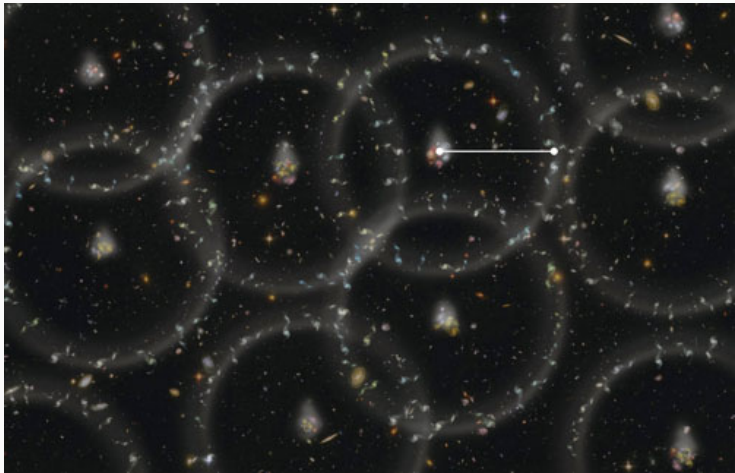
---

Alejandro Avilés (CONACyT/ININ)

13 de junio de 2018

2da Escuela Mexicana de Perturbaciones Cosmológicas. IF-UNAM, CDMX, México

# Motivación

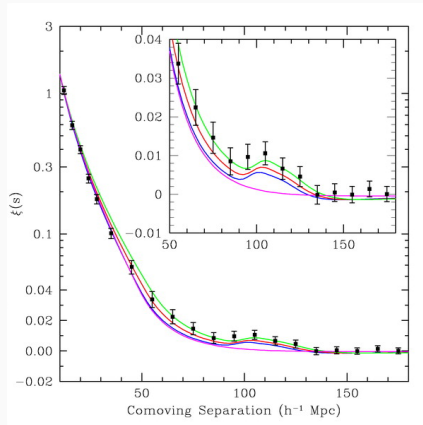


# Motivación

Función de correlación:

$$\xi(r) = \langle \delta(\mathbf{x} + \mathbf{r})\delta(\mathbf{x}) \rangle$$

$$\rho = \bar{\rho}(1 + \delta)$$



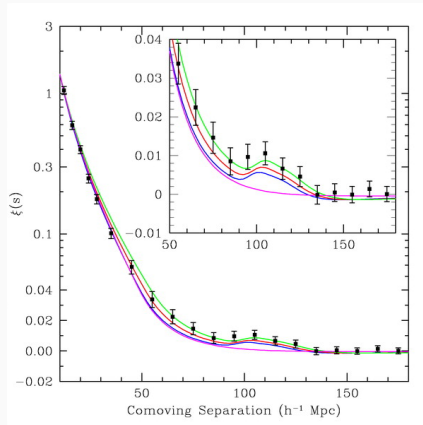
SDSS collaboration (Eisenstein et al 2005)

# Motivación

Función de correlación:

$$\xi(r) = \langle \delta(\mathbf{x} + \mathbf{r})\delta(\mathbf{x}) \rangle$$

$$\rho = \bar{\rho}(1 + \delta)$$



SDSS collaboration (Eisenstein et al 2005)

$$\mathcal{P}_a = \bar{n}dV_a \quad \longrightarrow \quad \mathcal{P}_{ab} = \bar{n}^2(1 + \xi(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b))dV_adV_b$$

# Motivación

Cuando tratamos de entender analíticamente la formación de estructura cósmica a grandes escalas encontramos dos principales obstáculos

- La teoría de perturbaciones no es válida más allá de  $k \sim 0.1 h/\text{Mpc}$ .
- No observamos directamente a la estructura de materia oscura. Debemos inferirla a partir de observaciones de *trazadores sesgados*, como galaxias, clusters, bosques de Ly- $\alpha$ , 21-cm, ...

# Motivación

Cuando tratamos de entender analíticamente la formación de estructura cósmica a grandes escalas encontramos dos principales obstáculos

- La teoría de perturbaciones no es válida más allá de  $k \sim 0.1 h/\text{Mpc}$ .
- No observamos directamente a la estructura de materia oscura. Debemos inferirla a partir de observaciones de *trazadores sesgados*, como galaxias, clusters, bosques de Ly- $\alpha$ , 21-cm, ...

Teorías efectivas de formación de estructura

# Outline

- Teoría de perturbaciones (PT)
- Teorías de campo efectivas (EFTofLSS)
- Trazadores sesgados

PT

Teoría de perturbaciones



# Jerarquía de Boltzmann

Consideramos la función de distribución  $f$  de partículas de materia oscura clásicas, no relativistas y no interactuantes. Ecuación de Boltzmann

$$\frac{df}{d\tau}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \tau) = \frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{1}{am} \mathbf{p} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} - am \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0.$$

# Jerarquía de Boltzmann

Consideramos la función de distribución  $f$  de partículas de materia oscura clásicas, no relativistas y no interactuantes. Ecuación de Boltzmann

$$\frac{df}{d\tau}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \tau) = \frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{1}{am} \mathbf{p} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} - am \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0.$$

Descripción de fluido:

$$\rho(\mathbf{x}, \tau) = ma^{-3} \int d^3 p f, \quad \rho \langle u^i \rangle_p(\mathbf{x}, \tau) = a^{-4} \int d^3 p p^i f \equiv \rho v^i$$

Del segundo momento se obtiene el tensor de estreses

$$\rho \langle u^i u^j \rangle_p = a^{-5} \int d^3 p \frac{1}{m} p^i p^j f = \rho v^i v^j + \rho \sigma^{ij}.$$

$$\sigma^{ij} = \langle \Delta u^i \Delta u^j \rangle_p, \quad \text{with} \quad \Delta u^i(\mathbf{x}, \tau) \equiv v^i - u^i$$

# Ecuaciones hidrodinámicas

- Ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \bar{\rho} \delta$$

- Ecuación de continuidad

$$\partial_\tau \delta(\mathbf{x}, \tau) + \partial_j ((1 + \delta) v^j) = 0.$$

- Ecuación de Euler

$$\partial_\tau v^i(\mathbf{x}, \tau) + v^j \partial_j v^i + \mathcal{H} v^i + \partial^i \phi = -\frac{1}{\rho} \partial_j (\rho \sigma^{ij}).$$

- ...

# Ecuaciones hidrodinámicas

- Ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \bar{\rho} \delta$$

- Ecuación de continuidad

$$\partial_\tau \delta(\mathbf{x}, \tau) + \partial_j((1 + \delta)v^j) = 0.$$

- Ecuación de Euler

$$\partial_\tau v^i(\mathbf{x}, \tau) + v^j \partial_j v^i + \mathcal{H} v^i + \partial^i \phi = -\frac{1}{\rho} \partial_j(\rho \sigma^{ij}).$$

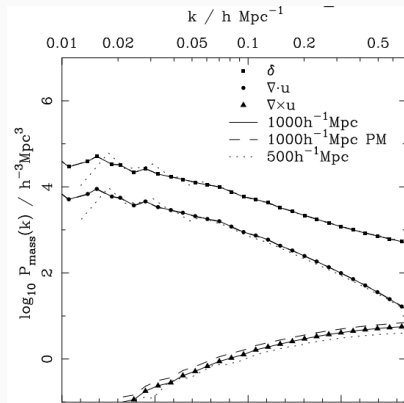
- ...

Podemos cerrar las ecuaciones de distintas maneras

- Ecuaciones constitutivas fenomenológicas ( $\sim$  *Navier-Stokes*)
- Fluido perfecto:  $\sigma^{ij} = 0$ .

# La velocidad es potencial

En teoría lineal  $\nabla \times \vec{v} \propto a^{-1}(t)$ .



[W.Percival & M.White 2009]

Es conveniente definir  $\theta \equiv \nabla \cdot \mathbf{v} \longrightarrow \theta = ik_i v^i \Rightarrow v^i = -i \frac{k^i}{k^2} \theta$

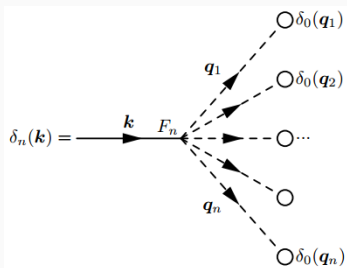
# Teoría de perturbaciones

Teoría de perturbaciones (PT):  $\phi = \lambda\phi^{(1)} + \lambda^2\phi^{(2)} + \lambda^3\phi^{(3)} + \dots$

$$\phi_{\mathbf{k}}^{(n)} \sim [\phi_{\mathbf{k}_1}^{(1)} \phi_{\mathbf{k}_2}^{(1)} \dots \phi_{\mathbf{k}_n}^{(1)}]_{\sum \mathbf{k}_i = \mathbf{k}}$$

Modos lineales interactúan y dan lugar a modos de orden mayor

$$\delta^{(n)}(\mathbf{k}) = \int \left( \prod_{m=1}^n \frac{d^3 q_m}{(2\pi)^3} \right) (2\pi)^3 \delta_{\mathbf{D}}(\mathbf{k} - \mathbf{q}_1 \dots \mathbf{q}_n) F_n(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n) \delta_L(\mathbf{q}_1) \dots \delta_L(\mathbf{q}_n)$$



# Espectro de potencias

$$(2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k} + \mathbf{k}') P(k) = \langle \delta(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{k}') \rangle$$

- A orden lineal los campos  $\delta$ 's son realizaciones de una distribución gaussiana (plática de Jorge Mastache)

$$\begin{aligned} \langle \delta(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{k}') \rangle &= \langle (\delta^{(1)}(\mathbf{k}) + \delta^{(2)}(\mathbf{k}) + \delta^{(3)}(\mathbf{k}) + \dots) (\delta^{(1)}(\mathbf{k}') + \delta^{(2)}(\mathbf{k}') + \delta^{(3)}(\mathbf{k}') + \dots) \rangle \\ &= (P_L(k) + 2P^{(13)}(k) + P^{(22)}(k) + \dots) (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \\ &= (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k} + \mathbf{k}') P_{1\text{-loop}}^{SPT}(k) + \dots \end{aligned}$$

donde  $(2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k} + \mathbf{k}') P^{(nm)}(k) = \langle \delta^{(n)}(\mathbf{k}) \delta^{(m)}(\mathbf{k}') \rangle$

- $P^{(12)} = \langle \delta^{(1)} \delta^{(2)} \rangle' = 0$ , dado que contiene términos  $\langle \delta^{(1)} \delta^{(1)} \delta^{(1)} \rangle'$

# Espectro de potencias

$$(2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k} + \mathbf{k}') P(k) = \langle \delta(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{k}') \rangle$$

- A orden lineal los campos  $\delta$ 's son realizaciones de una distribución gaussiana (plática de Jorge Mastache)

$$\begin{aligned} \langle \delta(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{k}') \rangle &= \langle (\delta^{(1)}(\mathbf{k}) + \delta^{(2)}(\mathbf{k}) + \delta^{(3)}(\mathbf{k}) + \dots) (\delta^{(1)}(\mathbf{k}') + \delta^{(2)}(\mathbf{k}') + \delta^{(3)}(\mathbf{k}') + \dots) \rangle \\ &= (P_L(k) + 2P^{(13)}(k) + P^{(22)}(k) + \dots) (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \\ &= (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k} + \mathbf{k}') P_{1\text{-loop}}^{SPT}(k) + \dots \end{aligned}$$

donde  $(2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{k} + \mathbf{k}') P^{(nm)}(\mathbf{k}) = \langle \delta^{(n)}(\mathbf{k}) \delta^{(m)}(\mathbf{k}') \rangle$

- $P^{(12)} = \langle \delta^{(1)} \delta^{(2)} \rangle' = 0$ , dado que contiene términos  $\langle \delta^{(1)} \delta^{(1)} \delta^{(1)} \rangle'$

El *bispectrum* es puramente no lineal:

$$B(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) \sim \langle \delta^{(1)}(\mathbf{k}_1) \delta^{(1)}(\mathbf{k}_2) \delta^{(2)}(\mathbf{k}_3) \rangle' + \text{Permutaciones cíclicas}$$



# Diagramas

- $P_L$ :

$$\begin{array}{c} \text{---} \blacktriangleright \text{---} \bigcirc \times \bigcirc \text{---} \blacktriangleleft \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \blacktriangleright \bigotimes \blacktriangleleft \text{---} \end{array} \equiv (2\pi)^3 \delta_D(\mathbf{q} + \mathbf{q}') P_0(q),$$

- $P_{22}$ :

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 1} \times \text{Diagram 2} = 2 \times \text{Diagram 3} \\
 & = 2 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} F_2(q, k-q) F_2(-q, q-k) F_0(q) P_0(|k-q|)
 \end{aligned}$$

# Diagramas a 1 y 2 loops

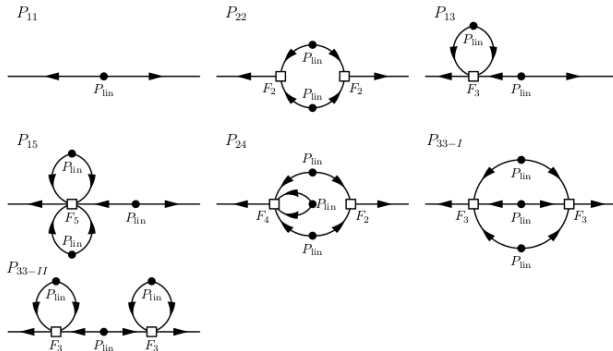


FIG. 1. Diagrams for the tree level, one- and two-loop expressions of the SPT power spectrum.

[Baldauf, Mercolli & Zaldarriaga (2016)]

# Inconvenientes de la teoría estándar de perturbaciones

- Las integrales de *loops* en general divergen. Para espectros de potencias  $P_L(k) \propto k^n$  con  $n \geq -1$  divergencias UV. Divergencias IR para  $n \leq -3$ .
- Afortunadamente para condiciones iniciales en LCDM las integrales convergen.
- Pero, códigos de N-cuerpos con condiciones iniciales “divergentes-(en SPT)” convergen.
- Para condiciones iniciales generales, SPT da errores infinitos. Para LCDM los errores son finitos.

# Inconvenientes de la teoría estándar de perturbaciones

- Las integrales de *loops* en general divergen. Para espectros de potencias  $P_L(k) \propto k^n$  con  $n \geq -1$  divergencias UV. Divergencias IR para  $n \leq -3$ .
- Afortunadamente para condiciones iniciales en LCDM las integrales convergen.
- Pero, códigos de N-cuerpos con condiciones iniciales “divergentes-(en SPT)” convergen.
- Para condiciones iniciales generales, SPT da errores infinitos. Para LCDM los errores son finitos.

La teoría de perturbaciones trata todas las escalas como si fueran perturbativas, incluso aquellas más allá de su alcance.

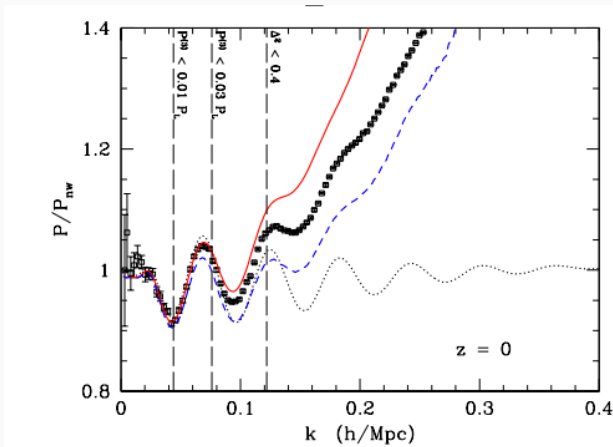
# Inconvenientes de la teoría estándar de perturbaciones

- Las integrales de *loops* en general divergen. Para espectros de potencias  $P_L(k) \propto k^n$  con  $n \geq -1$  divergencias UV. Divergencias IR para  $n \leq -3$ .
- Afortunadamente para condiciones iniciales en LCDM las integrales convergen.
- Pero, códigos de N-cuerpos con condiciones iniciales “divergentes-(en SPT)” convergen.
- Para condiciones iniciales generales, SPT da errores infinitos. Para LCDM los errores son finitos.

La teoría de perturbaciones trata todas las escalas como si fueran perturbativas, incluso aquellas más allá de su alcance.

La materia oscura es considerada como un fluido perfecto (con  $\sigma_{ij} = 0$ ). Aproximación que no es válida a escalas pequeñas ( $\lesssim 1\text{Mpc}$ ).

# Inconvenientes de la teoría estándar de perturbaciones



[Carlson, White & Padmanabhan (2009)]

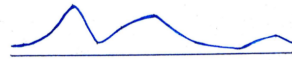
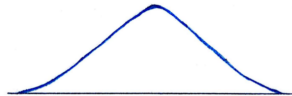
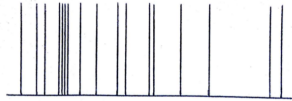
## EFTofLSS

Teorías efectivas para formación de estructura cósmica

$$\rho(x) = \sum_i m_i \delta_D(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$$

$$W_\Lambda(x) = \exp\left[-\frac{\Lambda^2 x^2}{2}\right]$$

$$\rho_\ell(x) = \int W_\Lambda(x-y)\rho(y)dy$$



[Adapted from S.Carroll conference]



- Las teorías de campo efectivas para la formación de estructura (EFTofLSS) integran las escalas pequeñas aplicando un filtro en el espacio de Fourier

$$X_\ell(\mathbf{k}) = W_\Lambda(\mathbf{k})X(\mathbf{k})$$

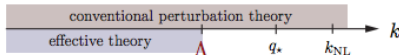


Figure 2: *Hierarchy of scales and perturbative expansions. The effective theory only contains modes with  $k < \Lambda$ , while conventional perturbation theory contains modes with  $k \sim k_{\text{NL}}$  where the perturbative expansion is known to break down.*

- Las teorías de campo efectivas para la formación de estructura (EFTofLSS) integran las escalas pequeñas aplicando un filtro en el espacio de Fourier

$$X_\ell(\mathbf{k}) = W_\Lambda(\mathbf{k})X(\mathbf{k})$$

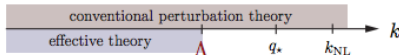


Figure 2: *Hierarchy of scales and perturbative expansions. The effective theory only contains modes with  $k < \Lambda$ , while conventional perturbation theory contains modes with  $k \sim k_{\text{NL}}$  where the perturbative expansion is known to break down.*

- En espacio de configuraciones

$$X_\ell(\mathbf{x}) = \int d^3x' W_\Lambda(\mathbf{x} - \mathbf{x}')X(\mathbf{x}')$$

- Separamos los campos relevantes en escalas grandes ( $\ell$ ) y pequeñas ( $s$ )

$$X = X_\ell + X_s \quad X = \delta, \rho v^i, \phi, \dots$$

Ecuación de Euler:  $\partial_\tau v^i(\mathbf{x}, \tau) + v^j \partial_j v^i + \mathcal{H} v^i + \partial^i \phi = 0$

$$\partial_\tau v_\ell^i(\mathbf{x}, \tau) + v_\ell^j \partial_j v_\ell^i + \mathcal{H} v_\ell^i + \partial^i \phi_\ell = -\frac{1}{\bar{\rho}} \partial_j \langle \tau^{ij} \rangle_\Lambda$$

- $\langle \tau^{ij} \rangle_\Lambda$  es función de cantidades con modos de números de onda cortos

$$\langle \tau^{ij} \rangle_\Lambda = \underbrace{\bar{\rho} c_s^2 \delta_\ell}_{\delta P_{\text{eff}}} \delta^{ij} - \underbrace{\bar{\rho} \frac{c_{bv}^2}{\mathcal{H}}}_{\zeta} \delta^{ij} \partial_k v_\ell^k - \underbrace{\bar{\rho} \frac{3}{4} \frac{c_{sv}^2}{\mathcal{H}}}_{\eta} \left( \partial^i v_\ell^j + \partial^j v_\ell^i - \frac{2}{3} \delta^{ij} \partial_k v_\ell^k \right)$$

Los coeficientes  $c_{bv}^2$ ,  $c_s^2$ ,  $c_{sv}^2$  pueden ser expresados en términos de promedios de ensamble en dominios de tamaño  $\Lambda^{-1}$  de cantidades con modos de Fourier grandes (escalas pequeñas) [Hertzberg, arXiv:1208.0839].

Ecuación de Euler:  $\partial_\tau v^i(\mathbf{x}, \tau) + v^j \partial_j v^i + \mathcal{H} v^i + \partial^i \phi = 0$

$$\partial_\tau v_\ell^i(\mathbf{x}, \tau) + v_\ell^j \partial_j v_\ell^i + \mathcal{H} v_\ell^i + \partial^i \phi_\ell = -\frac{1}{\bar{\rho}} \partial_j \langle \tau^{ij} \rangle_\Lambda$$

- $\langle \tau^{ij} \rangle_\Lambda$  es función de cantidades con modos de números de onda cortos

$$\langle \tau^{ij} \rangle_\Lambda = \underbrace{\bar{\rho} c_s^2 \delta_\ell}_{\delta P_{\text{eff}}} \delta^{ij} - \underbrace{\bar{\rho} \frac{c_{bv}^2}{\mathcal{H}}}_{\zeta} \delta^{ij} \partial_k v_\ell^k - \underbrace{\bar{\rho} \frac{3}{4} \frac{c_{sv}^2}{\mathcal{H}}}_{\eta} \left( \partial^i v_\ell^j + \partial^j v_\ell^i - \frac{2}{3} \delta^{ij} \partial_k v_\ell^k \right)$$

Los coeficientes  $c_{bv}^2$ ,  $c_s^2$ ,  $c_{sv}^2$  pueden ser expresados en términos de promedios de ensamble en dominios de tamaño  $\Lambda^{-1}$  de cantidades con modos de Fourier grandes (escalas pequeñas) [Hertzberg, arXiv:1208.0839].

- En EFTofLSS, la materia oscura es provista con un tensor de estreses efectivo, que conduce a una descripción de fluido no perfecto con viscosidad y perturbaciones de presión, que parametrizan la física (*desconocida*) de altas energías que ha sido marginalizada de la teoría.

# Espectro de potencias en EFTofLSS

Transformación de Fourier de  $\partial_i \partial_j \tau^{ij}$ .

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{\bar{\rho}}\partial_i\partial_j\tau^{ij}(\mathbf{x},\tau)\right](\mathbf{k},\tau) = k_i k_j \left[ c_s^2 \delta_\ell \delta^{ij} - \frac{c_{bv}^2}{\mathcal{H}} \delta^{ij} \theta_\ell - \frac{3}{4} \frac{c_{sv}^2}{\mathcal{H}} \left( k^i \frac{k^j \theta_\ell}{k^2} + k^j \frac{k^i \theta_\ell}{k^2} - \frac{2}{3} \delta^{ij} \theta_\ell \right) \right]$$

Recordamos  $\theta = \partial_i v^i$ . Entonces, para modos longitudinales  $v^i = -ik^i \theta / k^2$ .

# Espectro de potencias en EFTofLSS

Transformación de Fourier de  $\partial_i \partial_j \tau^{ij}$ .

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{\rho} \partial_i \partial_j \tau^{ij}(\mathbf{x}, \tau)\right](\mathbf{k}, \tau) = k_i k_j \left[ c_s^2 \delta_\ell \delta^{ij} - \frac{c_{bv}^2}{\mathcal{H}} \delta^{ij} \theta_\ell - \frac{3}{4} \frac{c_{sv}^2}{\mathcal{H}} \left( k^i \frac{k^j \theta_\ell}{k^2} + k^j \frac{k^i \theta_\ell}{k^2} - \frac{2}{3} \delta^{ij} \theta_\ell \right) \right]$$

Recordamos  $\theta = \partial_i v^i$ . Entonces, para modos longitudinales  $v^i = -ik^i \theta / k^2$ .

$$\text{La solución lineal } \delta^{(1)} = -\theta^{(1)} / \mathcal{H} \quad \implies$$

$$\mathcal{F}[\partial_i \partial_j \tau^{ij}(\mathbf{x}, \tau)](\mathbf{k}, \tau) = \frac{1}{2} \bar{\alpha}(\tau) \frac{k^2}{\Lambda^2} \delta_\ell(\mathbf{k}, \tau) \quad \text{con} \quad \frac{1}{2} \bar{\alpha} = \Lambda^2 (c_s^2 + c_{sv}^2 + c_{bv}^2)$$

# Espectro de potencias EFTofLSS

- Combinando las ecuaciones de Euler y continuidad

$$\ddot{\delta}_\ell + \mathcal{H}\dot{\delta}_\ell + \frac{3}{2}\mathcal{H}^2\delta_\ell = -\frac{1}{2}\bar{\alpha}(\tau)\frac{k^2}{\Lambda^2}\delta_\ell + \dots$$

# Espectro de potencias EFTofLSS

- Combinando las ecuaciones de Euler y continuidad

$$\ddot{\delta}_\ell + \mathcal{H}\dot{\delta}_\ell + \frac{3}{2}\mathcal{H}^2\delta_\ell = -\frac{1}{2}\bar{\alpha}(\tau)\frac{k^2}{\Lambda^2}\delta_\ell + \dots$$

Resolvemos integrando con la función de Green

$$G(\tau, \tau') = -\frac{2}{5} \frac{1}{\mathcal{H}^2(\tau)a(\tau)} \left[ \frac{a(\tau)}{a(\tau')} - \left( \frac{a(\tau)}{a(\tau')} \right)^{-3/2} \right] \Theta_H(\tau - \tau')$$

Obteniendo

$$\delta(\mathbf{k}) = \delta^{(1)}(\mathbf{k}) + \delta^{(2)}(\mathbf{k}) + \delta^{(3)}(\mathbf{k}) + \dots - \frac{1}{2}\alpha_{\text{EFT}}(\tau)\frac{k^2}{\Lambda^2}\delta^{(1)}(\mathbf{k}) + \dots$$

con 
$$\alpha_{\text{EFT}}(\tau) = \int_{\tau_i}^{\tau} d\tau' G(\tau', \tau_i) \bar{\alpha}(\tau') D_+(\tau', \tau_i)$$



# Espectro de potencias EFTofLSS

- Combinando las ecuaciones de Euler y continuidad

$$\ddot{\delta}_\ell + \mathcal{H}\dot{\delta}_\ell + \frac{3}{2}\mathcal{H}^2\delta_\ell = -\frac{1}{2}\bar{\alpha}(\tau)\frac{k^2}{\Lambda^2}\delta_\ell + \dots$$

Resolvemos integrando con la función de Green

$$G(\tau, \tau') = -\frac{2}{5} \frac{1}{\mathcal{H}^2(\tau)a(\tau)} \left[ \frac{a(\tau)}{a(\tau')} - \left( \frac{a(\tau)}{a(\tau')} \right)^{-3/2} \right] \Theta_H(\tau - \tau')$$

Obteniendo

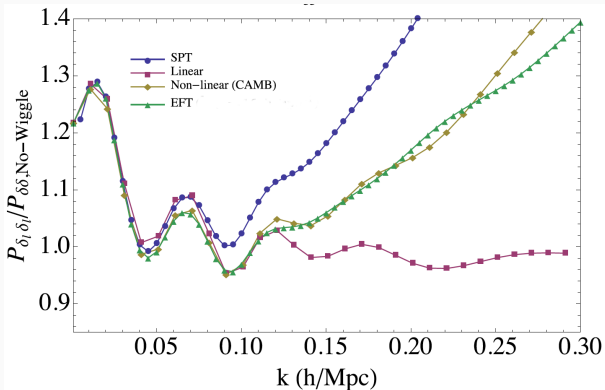
$$\delta(\mathbf{k}) = \delta^{(1)}(\mathbf{k}) + \delta^{(2)}(\mathbf{k}) + \delta^{(3)}(\mathbf{k}) + \dots - \frac{1}{2}\alpha_{\text{EFT}}(\tau)\frac{k^2}{\Lambda^2}\delta^{(1)}(\mathbf{k}) + \dots$$

con 
$$\alpha_{\text{EFT}}(\tau) = \int_{\tau_i}^{\tau} d\tau' G(\tau', \tau_i) \bar{\alpha}(\tau') D_+(\tau', \tau_i)$$

- Espectro de potencias

$$P_{1\text{-loop}}^{\text{EFT}}(k) = P_L(k) + {}^*P_{1\text{-loop}}^{\text{SPT}} - \alpha_{\text{EFT}}(\tau)\frac{k^2}{\Lambda^2}P_L(k)$$

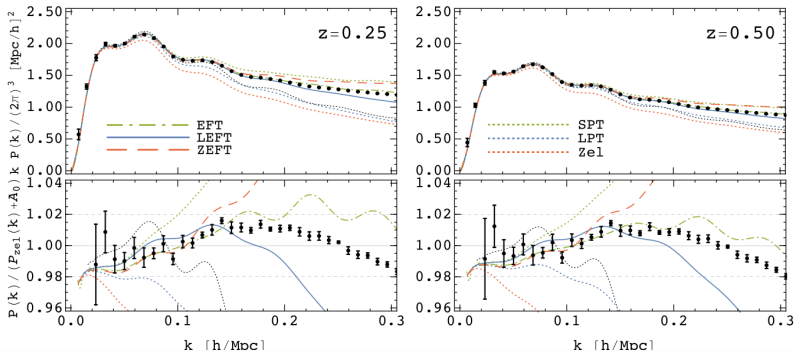
# Espectro de potencias en EFTofLSS



[Carrasco, Hertzberg & Senatore (2012)]

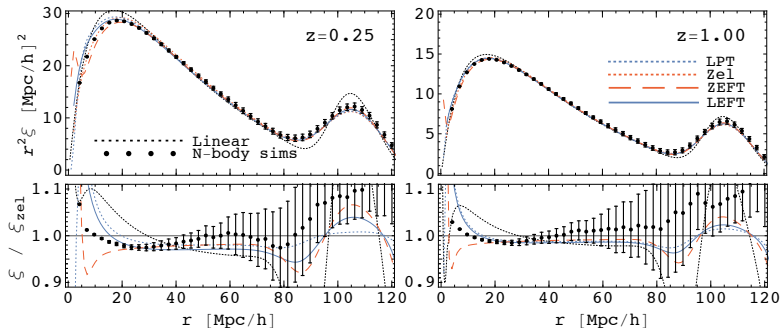
# Espectro de potencias en EFTofLSS

- CLEFT-code: <https://github.com/alejandroaviles/CLEFT>



# Función de correlación en EFTofLSS

- Convolution Lagrangian Effective Field Theory (CLEFT)



[Z.Vlah, M.White & A.Aviles (2015)]

# EFTofLSS: higher loops

$n$ -loop EFT:

$$\begin{aligned} P_{\text{EFTofLSS}} &= P_{\text{L}} + \sum_n P_{(n)\text{-loop}} + \dots \\ &\quad - \alpha_1 k^2 P_{\text{L}} - \alpha_3 k^6 P_{\text{L}} - \alpha_5 k^{10} P_{\text{L}} + \dots \\ &\quad + \alpha_2 k^4 P_{\text{L}} + \alpha_4 k^8 P_{\text{L}} + \alpha_6 k^{12} P_{\text{L}} + \dots \end{aligned}$$

- Degeneración entre  $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \dots$
- Degeneración entre  $\alpha_2, \alpha_4, \alpha_6, \dots$

## Bias Theory

Teoría efectiva para trazadores sesgados

# Bias como teoría efectiva

- Observamos trazadores sesgados de la distribución de materia oscura.
- Las propiedades de estos involucran efectos bariónicos y no lineales, fuera del alcance de PT.
- Las teorías de bias son teorías efectivas. (Parametrizamos la ignorancia).

# Campos suavizados

Escala de corte:  $R = \Lambda^{-1}$



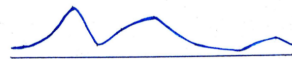
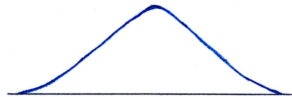
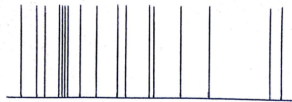
# Campos suavizados

Escala de corte:  $R = \Lambda^{-1}$

$$\delta(\mathbf{x}) =$$

$$W_R(x) = \exp\left[-\frac{x^2}{2R^2}\right]$$

$$\delta_R(\mathbf{x}) = \int W_R(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) \delta(\mathbf{y}) d^3y$$



# Bias expansion

Consideramos trazadores  $X$  con abundancia  $n(\mathbf{x})$ , la sobredensidad es

$$\delta_X(\mathbf{x}) = \frac{n_X(\mathbf{x}) - \bar{n}_X}{\bar{n}_X}, \quad \langle \delta_X(\mathbf{x}) \rangle = 0$$

Introducimos una función de bias local

$$1 + \delta_X(\mathbf{x}) = F(\delta_R)$$

y parametros de *bias local*

$$c_n = F^{(n)}(0)$$

Expandiendo en Taylor alrededor de  $\delta_R = 0$

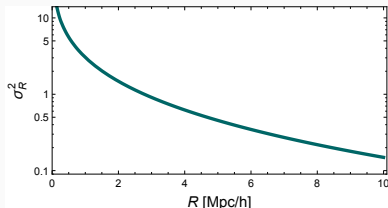
$$1 + \delta_X(\mathbf{q}) = c_0 + c_1 \delta_R(\mathbf{q}) + \frac{1}{2} c_2 \delta_R^2(\mathbf{q}) + \frac{1}{6} c_3 \delta_R^3(\mathbf{q}) + \dots$$

$$\begin{aligned}
1 + \xi_X(q) &= \langle (1 + \delta_X(\mathbf{q}_1))(1 + \delta_X(\mathbf{q}_2)) \rangle \\
&= \langle (c_0 + c_1 \delta_R(\mathbf{q}_1) + \frac{1}{2} c_2 \delta_R^2(\mathbf{q}_1) + \frac{1}{6} c_3 \delta_R^3(\mathbf{q}_1) + \dots) \\
&\quad (c_0 + c_1 \delta_R(\mathbf{q}_2) + \frac{1}{2} c_2 \delta_R^2(\mathbf{q}_2) + \frac{1}{6} c_3 \delta_R^3(\mathbf{q}_2) + \dots) \rangle \\
&= (c_0 + \frac{1}{2} c_2 \sigma_R^2 + \dots)^2 + (c_1^2 + c_1 c_3 \sigma_R^2 + \dots) \xi_R(q) + (\frac{1}{2} c_2^2 + \dots) \xi_R^2(q)
\end{aligned}$$

$$\sigma_R^2 = \langle \delta_R(\mathbf{q}_1) \delta_R(\mathbf{q}_1) \rangle = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \tilde{W}^2(kR) P_L(k)$$

$$\begin{aligned}
1 + \xi_X(q) &= \langle (1 + \delta_X(\mathbf{q}_1))(1 + \delta_X(\mathbf{q}_2)) \rangle \\
&= \langle (c_0 + c_1 \delta_R(\mathbf{q}_1) + \frac{1}{2} c_2 \delta_R^2(\mathbf{q}_1) + \frac{1}{6} c_3 \delta_R^3(\mathbf{q}_1) + \dots) \\
&\quad (c_0 + c_1 \delta_R(\mathbf{q}_2) + \frac{1}{2} c_2 \delta_R^2(\mathbf{q}_2) + \frac{1}{6} c_3 \delta_R^3(\mathbf{q}_2) + \dots) \rangle \\
&= (c_0 + \frac{1}{2} c_2 \sigma_R^2 + \dots)^2 + (c_1^2 + c_1 c_3 \sigma_R^2 + \dots) \xi_R(q) + (\frac{1}{2} c_2^2 + \dots) \xi_R^2(q)
\end{aligned}$$

$$\sigma_R^2 = \langle \delta_R(\mathbf{q}_1) \delta_R(\mathbf{q}_1) \rangle = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \tilde{W}^2(kR) P_L(k)$$



La función de correlación depende en la escala de corte  $R$  aún para escalas mucho más grandes que ella  $q \gg R$  !!!

# Renormalización

- McDonald (2006). Reorganización de los parámetros de bias

$$b_0 = c_0 + \frac{1}{2}c_2\sigma_R^2 + \dots$$

$$b_2 = c_2 + \dots$$

$$b_1 = c_1 + \frac{1}{2}c_3\sigma_R^2 + \dots$$

$$b_3 = c_3 + \dots$$

- Función de correlación:

$$1 + \xi_X(q) = b_0^2 + b_1^2\xi_R(q) + \frac{1}{2}b_2^2\xi_R^2(q) + \dots$$

Argumento Peak Background Split (PBS) [Schmidt, Jeong, Desjacques (2013)]:

- Los parámetros de bias físicos cuantifican la respuesta en la abundancia de trazadores  $n_X$  ante cambios pequeños en la densidad de fondo.

$$\bar{\rho} \rightarrow \bar{\rho} + \bar{\rho}D : \quad \delta_R \rightarrow \delta_R + D$$

$$b_n = \left\langle \frac{d^n F(\delta_R + D)}{dD^n} \Big|_{D=0} \right\rangle$$

- Se puede encontrar una relación entre  $c_n$  y  $b_n$

# Bias à la Matsubara (2008b)

Sea  $\tilde{F}(\lambda)$  la transformación de Fourier de  $F(\delta)$

$$\tilde{F}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} d\delta_R e^{-i\lambda\delta_R} F(\delta).$$

Llamamos  $\lambda$  parámetro espectral de bias local y definimos

$$b_n \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda}{2\pi} e^{-\lambda^2 \sigma_R^2/2} (i\lambda)^n \tilde{F}(\lambda)$$

En la definición de bias de Matsubara automáticamente las varianzas desaparecen de la función de correlación:

$$\xi_X(q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^2}{n!} (\xi_R(q))^n \quad \text{(TBD)}$$

$$b_n \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda}{2\pi} e^{-\lambda^2 \sigma_R^2/2} (i\lambda)^n \tilde{F}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\delta_R}{\sqrt{2\pi}\sigma_R} e^{-\delta_R^2/2\sigma_R^2} \frac{d^n F}{d\delta_R^n} = \langle F^{(n)}(\delta_R) \rangle$$

Donde en la última igualdad usamos gaussianidad de los campos  $\delta_R$ . Comparar esto con  $c_n = F^{(n)}(0)$

$$c_n = F^{(n)}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda}{2\pi} (i\lambda)^n \tilde{F}(\lambda)$$



$$b_n \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda}{2\pi} e^{-\lambda^2 \sigma_R^2/2} (i\lambda)^n \tilde{F}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\delta_R}{\sqrt{2\pi}\sigma_R} e^{-\delta_R^2/2\sigma_R^2} \frac{d^n F}{d\delta_R^n} = \langle F^{(n)}(\delta_R) \rangle$$

Donde en la última igualdad usamos gaussianidad de los campos  $\delta_R$ . Comparar esto con  $c_n = F^{(n)}(0)$

$$c_n = F^{(n)}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda}{2\pi} (i\lambda)^n \tilde{F}(\lambda)$$

Obtenemos [A.A. (2018)]

$$b_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma^{2k}}{2^k k!} c_{n+2k}$$

$$\begin{aligned}
1 + \xi_X(q) &= \langle (1 + \delta_X(\mathbf{q}_2))(1 + \delta_X(\mathbf{q}_1)) \rangle = \langle F(\delta_2)F(\delta_1) \rangle \\
&= \int \frac{d\lambda_1}{2\pi} \frac{d\lambda_2}{2\pi} \langle e^{iX} \rangle \tilde{F}(\lambda_1) \tilde{F}(\lambda_2) = \int \frac{d\lambda_1}{2\pi} \frac{d\lambda_2}{2\pi} e^{-\frac{1}{2} \langle X^2 \rangle + \dots} \tilde{F}(\lambda_1) \tilde{F}(\lambda_2)
\end{aligned}$$

$$\text{con} \quad X = \lambda_1 \delta_1 + \lambda_2 \delta_2,$$

$$\begin{aligned}
 1 + \xi_X(q) &= \langle (1 + \delta_X(\mathbf{q}_2))(1 + \delta_X(\mathbf{q}_1)) \rangle = \langle F(\delta_2)F(\delta_1) \rangle \\
 &= \int \frac{d\lambda_1}{2\pi} \frac{d\lambda_2}{2\pi} \langle e^{iX} \rangle \tilde{F}(\lambda_1) \tilde{F}(\lambda_2) = \int \frac{d\lambda_1}{2\pi} \frac{d\lambda_2}{2\pi} e^{-\frac{1}{2} \langle X^2 \rangle + \dots} \tilde{F}(\lambda_1) \tilde{F}(\lambda_2)
 \end{aligned}$$

$$\text{con} \quad X = \lambda_1 \delta_1 + \lambda_2 \delta_2,$$

hence

$$-\frac{1}{2} \langle X^2 \rangle = -\frac{1}{2} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \sigma_R^2 - \lambda_1 \lambda_2 \xi_r(q)$$

$$\begin{aligned}
 1 + \xi_X(q) &= \langle (1 + \delta_X(\mathbf{q}_2))(1 + \delta_X(\mathbf{q}_1)) \rangle = \langle F(\delta_2)F(\delta_1) \rangle \\
 &= \int \frac{d\lambda_1}{2\pi} \frac{d\lambda_2}{2\pi} \langle e^{iX} \rangle \tilde{F}(\lambda_1) \tilde{F}(\lambda_2) = \int \frac{d\lambda_1}{2\pi} \frac{d\lambda_2}{2\pi} e^{-\frac{1}{2} \langle X^2 \rangle + \dots} \tilde{F}(\lambda_1) \tilde{F}(\lambda_2)
 \end{aligned}$$

$$\text{con} \quad X = \lambda_1 \delta_1 + \lambda_2 \delta_2,$$

hence

$$-\frac{1}{2} \langle X^2 \rangle = -\frac{1}{2} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \sigma_R^2 - \lambda_1 \lambda_2 \xi_r(q)$$

$$1 + \xi_X(q) = \int \frac{d\lambda_1}{2\pi} \frac{d\lambda_2}{2\pi} e^{-\frac{1}{2} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \sigma_R^2} \tilde{F}(\lambda_1) \tilde{F}(\lambda_2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (i\lambda_1)^n (i\lambda_2)^n (\xi_R(q))^n.$$

$$\begin{aligned}
 1 + \xi_X(q) &= \langle (1 + \delta_X(\mathbf{q}_2))(1 + \delta_X(\mathbf{q}_1)) \rangle = \langle F(\delta_2)F(\delta_1) \rangle \\
 &= \int \frac{d\lambda_1}{2\pi} \frac{d\lambda_2}{2\pi} \langle e^{iX} \rangle \tilde{F}(\lambda_1) \tilde{F}(\lambda_2) = \int \frac{d\lambda_1}{2\pi} \frac{d\lambda_2}{2\pi} e^{-\frac{1}{2} \langle X^2 \rangle + \dots} \tilde{F}(\lambda_1) \tilde{F}(\lambda_2)
 \end{aligned}$$

$$\text{con } X = \lambda_1 \delta_1 + \lambda_2 \delta_2,$$

hence

$$-\frac{1}{2} \langle X^2 \rangle = -\frac{1}{2} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \sigma_R^2 - \lambda_1 \lambda_2 \xi_R(q)$$

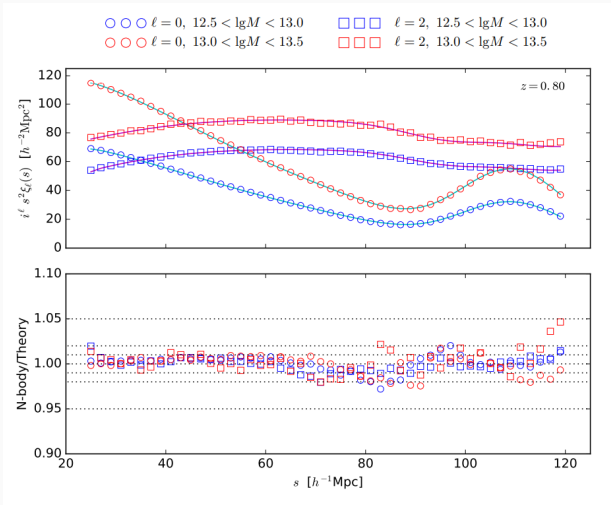
$$1 + \xi_X(q) = \int \frac{d\lambda_1}{2\pi} \frac{d\lambda_2}{2\pi} e^{-\frac{1}{2} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \sigma_R^2} \tilde{F}(\lambda_1) \tilde{F}(\lambda_2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (i\lambda_1)^n (i\lambda_2)^n (\xi_R(q))^n.$$

Obteniendo

$$\xi_X(q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^2}{n!} (\xi_R(q))^n$$

y  $b_0 = 1$ . Lo cual es consistente con  $\langle \delta_X \rangle = 0$ .

Mass	$b_1$	$b_2$	$b_{s^2}$	$\alpha_\xi$	$\alpha_v$	$\alpha_\sigma$
$12.5 < \lg M < 13.0$	0.68	-1.01	-0.92	-24	-52	-18
$13.0 < \lg M < 13.5$	1.28	-1.34	-0.14	-9	25	-3



[Vlah, Castorina, White (2016)]

# Conexión con PBS

Cómo responde el número de halos ante un cambio constante en la sobredensidad  $\delta$ :

$$F(\delta_R + D) = \int \frac{d\lambda}{2\pi} e^{i\lambda\delta_R} \tilde{F}(\lambda) e^{iD\lambda}$$

Tomando la  $n$ -ésima derivada

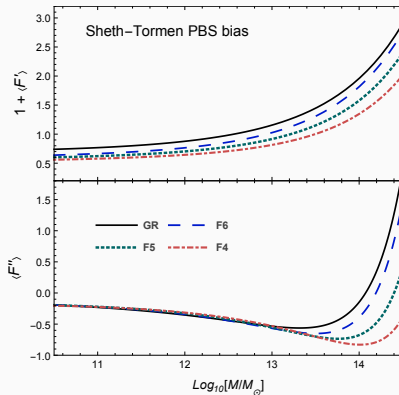
$$\left. \frac{d^n F(\delta + D)}{dD^n} \right|_{D=0} = \int \frac{d\lambda}{2\pi} e^{i\lambda\delta} (i\lambda)^n \tilde{F}(\lambda)$$

Tomar valor esperado, i.e. integrar con  $\int d\delta_R (\sqrt{2\pi}\sigma_R)^{-1} e^{-\delta_R^2/2\sigma_R^2}$

$$b_n^{\text{PBS}} = \left\langle \left. \frac{d^n F(\delta + D)}{dD} \right|_{D=0} \right\rangle = \int \frac{d\lambda}{2\pi} e^{-\lambda^2\sigma_R^2} (i\lambda)^n F(\tilde{\lambda}) = b_n$$

# Conexión con PBS

Función de masa:  $\nu f(\nu) d\nu = \frac{M}{2\bar{\rho}} \frac{n(M)}{dM} dM, \quad \nu = \frac{\delta_c}{\sigma_R(M)}$





# Lecturas Recomendadas

- **EFTofLSS:** *a)* D. Baumann, A. Nicolis, L. Senatore, M. Zaldarriaga (1004.2488); *b)* S. Carroll, S. Leichenauer, J. Pollack (1310.2920); *c)* Z.Vlah, M.White, A.A. (1506.05264)
- **Bias:** *a)* P.McDonald (astro-ph/0609413); *b)* T.Matsubara (0807.1733); *c)* F.Schmidt, D.Jeong, V.Desjacques (1212.0868); *d)* V.Desjacques, D.Jeong, F.Schmidt (1611.09787); *e)* A.A (1805.05304)