

Tradução do artigo “Modelagem Dinâmica de Robôs Móveis de Tração Diferencial usando as Metodologias de Lagrange e Newton-Euler: Uma Abordagem Unificada” - Rached Dhaouadi e Ahmad Abu Hatab

Mateus Soares Marques

27 de março de 2023

Resumo

Este artigo apresenta uma abordagem unificada de modelagem dinâmica para robôs móveis de tração diferencial (DDMR, differential drive mobile robot). Duas formulações para a dinâmica do robô são desenvolvidas; uma é baseada na mecânica Lagrangeana e a outra na mecânica de Newton-Euler. As maiores dificuldades na modelagem de sistemas não-holonômicos em ambos os métodos são ilustradas e os procedimentos de projeto descritos. Mostra-se que as duas formulações são matematicamente equivalentes verificando-se a consistência de ambas. O trabalho apresentado leva a uma melhoria na compreensão da dinâmica de robôs móveis de tração diferencial, o que ajuda estudante de engenharia na modelagem e projeto de controladores adequados para navegação e rastreamento de trajetória dos DDMR.

Palavras-chave:

Tração diferencial; Robô móvel; Dinâmica; Modelagem; Lagrange; Newton-Euler.

Introdução

Nos últimos anos, tem havido um interesse considerável na área de robôs móveis e tecnologias educacionais [1-7]. Para engenheiros e pesquisadores da área de controle, há uma literatura rica sobre controle de robôs móveis com rodas (WMR, wheeled mobile robot) e suas aplicações. No entanto, enquanto o tema da modelagem cinemática do WMR

é bem documentado e de fácil compreensão por estudantes, o tema da modelagem dinâmica do WMR não tem sido tratado adequadamente na literatura. A dinâmica do WMR é altamente não linear e envolve restrições não holonômicas que dificultam sua modelagem e análise, especialmente para novos estudantes de engenharia começando suas pesquisas nesse campo. Portanto, um modelo dinâmico detalhado e preciso descrevendo o movimento do WMR precisa ser desenvolvido para oferecer aos estudantes uma abordagem geral para análise de simulação e projeto de sistema de controle baseado em modelo.

No caso do robô móvel de tração diferencial (DDMR), por exemplo, não há nenhum livro didático disponível que investigue completamente a abordagem da modelagem dinâmica levando em consideração as restrições não holonômicas em um procedimento passo-a-passo. A análise está disponível principalmente em revistas científicas, artigos de congresso e relatórios técnicos [8]. Além disso, o material apresentado varia de um artigo para o outro com relação à nomenclatura, o sistema de coordenadas de referência usado e suposições tomadas. Somado a isso, alguns artigos apresentam diferentes resultados para um mesmo DDMR usado, o que aumenta a confusão na modelagem dinâmica. Para o caso do DDMR, os métodos usados são ou a abordagem Lagrangiana [9-15] ou a abordagem de Newton-Euler [16-19]. Outros formalismos como o método de Kane também já foram sugeridos como abordagens viáveis à modelagem do DDMR [20]. Portanto, não é claro para novos estudantes de engenharia e pesquisadores qual conceito

usar e qual método oferece uma melhor percepção física do comportamento dinâmico do sistema e o efeito das restrições não holonômicas. Também não é claro se os dois métodos levam ao mesmo modelo dinâmico final.

No método de Newton-Euler, deve-se levar em consideração dois tipos de forças aplicadas ao sistema: as forças dadas e as forças de restrição. As forças dadas incluem as forças externas exercidas pelos atuadores enquanto as forças de restrição são as forças da interação entre a plataforma do robô e o chão através das rodas. Além disso, em um sistema com elementos interconectados, os componentes podem interagir entre si através de engrenagens, molas e elementos ficcionais. Portanto, precisamos levar em consideração todas essas forças. É evidente que a abordagem Newtoniana inclui algumas dificuldades práticas, uma vez que na maioria dos casos essas forças não são facilmente quantificáveis. A metodologia desenvolvida por Lagrange supera esses problemas ao expressar forças em termos de energias no sistema, isto é, a energia cinética e a energia potencial, que são quantidades escalares facilmente expressadas em termos das coordenadas do sistema. A derivação das equações de Lagrange requer também que as coordenadas generalizadas sejam independentes.

A abordagem de Lagrange usualmente provém um método poderoso e versátil para a formulação de equações de movimento para sistemas holonômicos. No entanto para sistemas não holonômicos, o método usual é introduzir as equações da restrição de movimento nas equações dinâmicas usando os multiplicadores de Lagrange adicionais. Esses multiplicadores não são constantes e geralmente são funções de todas as coordenadas generalizadas e, frequentemente do tempo também. Eles representam um conjunto de variáveis cujos valores devem ser obtidos como parte da solução. Para resolver essa complexidade computacional, métodos adicionais foram sugeridos para remover a presença dos multiplicadores das equações dinâmicas do sistema dado [21, 22].

O foco desse artigo é derivar equações dinâmicas simples e bem estruturadas para o DDMR levando em conta as restrições não holonômicas. Primeiro, a fórmula de Lagrange é apresentada. Transformações de coordenadas são usadas para cancelar os multiplicadores de Lagrange para se obter equações bem estruturadas. Em seguida, o método

de Newton-Euler é usado para derivar as equações dinâmicas do DDMR. As maiores dificuldades em se usar cada método são apresentadas e os procedimentos são descritos para oferecer uma abordagem sistemática para a modelagem dinâmica do DDMR, sem maior complexidade matemática. É mostrado que ambos os métodos levam a equações dinâmicas equivalentes para o robô móvel, fornecendo uma checagem na consistência dos métodos.

Sistema de Coordenadas

A fim de descrever a posição do WMR no espaço, dois sistemas de coordenadas precisam ser definidos.

1. Sistema de Coordenadas Inercial: Este sistema de coordenadas é global e é fixado no espaço ou no plano no qual o WMR se move. Além disso, este sistema é tomado como sistema de coordenadas de referência e é denotado por X_I, Y_I .
2. Sistema de Coordenadas do Robô: Este sistema de coordenadas é local e preso ao WMR, logo, move-se com ele. Este sistema de coordenadas é denotado por X_r, Y_r .

Os dois sistemas definidos são mostrados na Figura 1. A origem do sistema de coordenadas do robô é colocada no ponto médio A no eixo entre as rodas. Assume-se que o centro de massa C do robô está ao longo do eixo de simetria, a uma distância d da origem A .

Como mostrado na Figura 1, a posição e a orientação do robô no Sistema de Coordenadas Inercial pode ser definida como

$$q^I = \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ \theta \end{bmatrix} \quad (1)$$

Um problema importante que precisa ser explicado nesse estágio é o mapeamento entre esses dois sistemas de coordenadas. A posição de qualquer ponto no robô pode ser definida no sistema de coordenadas do robô e no sistema de coordenadas inercial como mostrado abaixo.

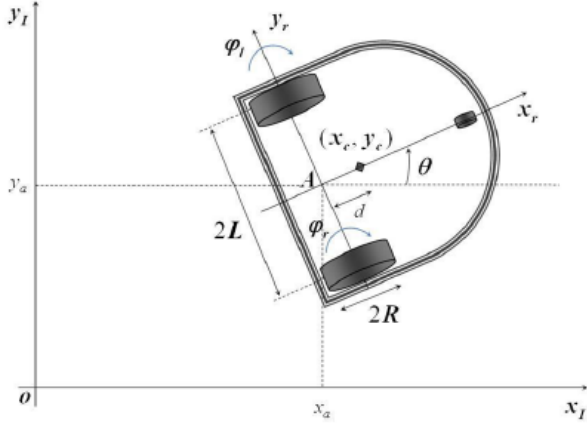


Figura 1: Robô Móvel de Tração Diferencial (DDMR).

Sejam $X^r = \begin{bmatrix} x^r \\ y^r \\ \theta^r \end{bmatrix}$ e $X^I = \begin{bmatrix} x^I \\ y^I \\ \theta^I \end{bmatrix}$ as coordenadas de um dado ponto no robô nos sistemas de coordenadas do robô e o inercial, respectivamente.

Então os dois sistemas de coordenadas são relacionados pela seguinte transformação:

$$X^I = R(\theta)X^r \quad (2)$$

Onde $R(\theta)$ é a matriz ortogonal

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Esta transformação também nos permite lidar com o movimento entre os sistemas de coordenadas.

$$\dot{X}^I = R(\theta)\dot{X}^r \quad (4)$$

Na próxima seção será visto que a equação (4) é muito importante na derivação dos modelos cinemático e dinâmico do DDMR uma vez que ela descreve a relação entre as velocidades no Sistema de Coordenadas Inercial e o Sistema de Coordenadas do robô.

Restrições Cinemáticas do Robô de Tração Diferencial

O movimento de um robô de tração diferencial é caracterizado por duas equações de restrição não holonômicas, que são obtidas de duas suposições:

- Não há movimento de deslizamento lateral: Esta restrição significa que o robô só pode se mover em uma trajetória curva (pra frente e para trás) mas não lateralmente. No sistema de coordenadas do robô, esta condição implica que a velocidade do ponto central A é zero ao longo do eixo lateral:

$$\dot{y}_a^r = 0 \quad (5)$$

Usando a matriz ortogonal $R(\theta)$, a velocidade no sistema de coordenadas inercial nos dá

$$-\dot{x}_a \sin(\theta) + \dot{y}_a \cos(\theta) = 0 \quad (6)$$

- Restrição de rolamento puro:

A restrição de rolamento puro representa o fato de que cada roda mantém um único ponto de contato P com o chão, como mostrado na Figura 2. Não há escorregamento da roda em seu eixo longitudinal (x_r) e não há derrapagem ao longo do eixo ortogonal (y_r). As velocidades dos pontos de contato no sistema de coordenadas do robô são relacionadas à velocidade das rodas por:

$$\begin{cases} v_{pR} = R\dot{\varphi}_R \\ v_{pL} = R\dot{\varphi}_L \end{cases} \quad (7)$$

No sistema de coordenadas inercial, as velocidades podem ser calculadas como uma função das velocidades do ponto central do robô A :

$$\begin{cases} \dot{x}_{pR} = \dot{x}_a + L\dot{\theta}\cos(\theta) \\ \dot{y}_{pR} = \dot{y}_a + L\dot{\theta}\sin(\theta) \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_{pL} = \dot{x}_a + L\dot{\theta}\cos(\theta) \\ \dot{y}_{pL} = \dot{y}_a + L\dot{\theta}\sin(\theta) \end{cases} \quad (9)$$

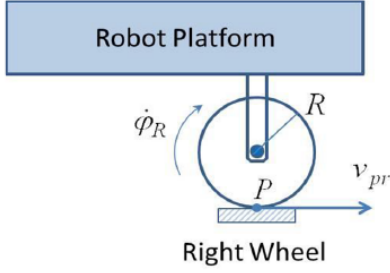


Figure 2: Pure Rolling Motion Constraint.

Figura 2: Restrição de movimento de rolamento puro

Usando a matriz de rotação $R(\theta)$, as equações de restrição de rolamento são arranjadas como:

$$\begin{cases} \dot{x}_p R \cos(\theta) + \dot{y}_p R \sin(\theta) = R \dot{\varphi}_R \\ \dot{x}_p L \cos(\theta) + \dot{y}_p L \sin(\theta) = R \dot{\varphi}_L \end{cases} \quad (10)$$

Usando a velocidade dos pontos de contato da equação 10 e substituindo em (x, y) , as três equações de restrição podem ser escritas na forma matricial:

$$\Lambda(q) \dot{q} = 0 \quad (11)$$

Aonde

$$\Lambda(q) = \begin{bmatrix} -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 & 0 \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & L & -R & 0 \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & -L & 0 & -R \end{bmatrix} \quad (12)$$

e

$$\dot{q} = [\dot{x}_a \quad \dot{y}_a \quad \dot{\theta} \quad \dot{\varphi}_R \quad \dot{\varphi}_L]^T \quad (13)$$

$$\begin{cases} v_R = R \dot{\varphi}_R \\ v_L = R \dot{\varphi}_L \end{cases} \quad (14)$$

A matriz de restrições $\Lambda(q)$ vai ser usada na próxima seção para modelar dinamicamente o DDMR.

Modelo Cinemático

A modelagem cinemática é o estudo do movimento de sistemas mecânicos sem considerar as forças que afetam o movimento. Para o DDMR, o maior propósito da modelagem cinemática é representar as velocidades do robô como uma função das velocidades das rodas de tração em conjunto com os parâmetros geométricos do robô.

A velocidade linear de cada roda de tração no Sistema de Coordenadas do Robô é, portanto, a velocidade linear do DDMR no Sistema de Coordenadas do Robô é a média das velocidades lineares das duas rodas

$$\frac{v = v_R + v_L}{2} = R \frac{(\dot{\varphi}_R + \dot{\varphi}_L)}{2} \quad (15)$$

e a velocidade angular do DDMR é

$$\omega = \frac{v_R - v_L}{2L} = R(\dot{\varphi}_R - \dot{\varphi}_L) \text{ over } 2 \quad (16)$$

As velocidades do DDMR no sistema de coordenadas do robô agora podem ser representadas em termos das velocidades do ponto central A no sistema de coordenadas do robô como a seguir:

$$\begin{cases} \dot{x}_a^r = R \frac{(\dot{\varphi}_R + \dot{\varphi}_L)}{2} \\ \dot{y}_a^r = 0 \\ \dot{\theta} = \omega = R \frac{(\dot{\varphi}_R - \dot{\varphi}_L)}{2L} \end{cases} \quad (17)$$

Logo

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_a^r \\ \dot{y}_a^r \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R}{2} & \frac{R}{2} \\ 0 & 0 \\ \frac{R}{2L} & -\frac{R}{2L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_R \\ \dot{\varphi}_L \end{bmatrix} \quad (18)$$

As velocidades do DDMR também podem ser obtidas no sistema de coordenadas inercial:

$$\dot{q}^I = \begin{bmatrix} \frac{R}{2} \cos(\theta) & \frac{R}{2} \cos(\theta) \\ \frac{R}{2} \sin(\theta) & \frac{R}{2} \sin(\theta) \\ \frac{R}{2L} & -\frac{R}{2L} \end{bmatrix} \quad (19)$$

A equação (19) representa o modelo de cinemática direta do DDMR. Outra alternativa para o modelo cinemático pode ser obtida ao representar as velocidades do DDMR em termos das velocidades lineares e angulares do DDMR no sistema de coordenadas do robô.

$$\dot{q}^I = \begin{bmatrix} \dot{x}_a^r \\ \dot{y}_a^r \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} \quad (20)$$

Modelagem Dinâmica do DDMR

A dinâmica é o estudo do movimento de sistemas mecânicos considerando as diferentes forças que afetam seu movimento, diferente da cinemática, onde as forças não são levadas em consideração. O modelo dinâmico do DDMR é essencial para a análise de simulação do movimento do DDMR e para o projeto de vários algoritmos de controle de movimento.

Um DDMR não holonômico com n coordenadas generalizadas (q_1, q_2, \dots, q_n) e sujeito a m restrições pode ser descrito pelas seguintes equações de movimento:

$$M(q)\ddot{q} + V(q, \dot{q})\dot{q} + F(\dot{q}) + G(q) + \tau_d = B(q)\tau - \Lambda^T(q)\lambda \quad (21)$$

onde:

$M(q)$ é uma matriz de inércia $n \times n$ simétrica positiva, $V(q, \dot{q})$ é a matriz de coriolis e centrípeta, $F(\dot{q})$ é a matriz de fricção superficial, $G(q)$ é o vetor gravitacional, τ_d é o vetor de perturbações desconhecidas finitas incluindo dinâmicas não estruturadas e não modeladas, $B(q)$ é a matriz de entrada, τ é o vetor de entrada, $\Lambda^T(q)$ é a matriz associada as restrições cinemáticas, e λ é o vetor de multiplicadores de Lagrange [21,22].

Abordagem dinâmica de Lagrange

A abordagem dinâmica de Lagrange é um método muito poderoso para a formulação de equações de movimento de sistemas mecânicos. Esse método, que foi introduzido por Lagrange, é usado para sistematicamente derivar as equações de movimento através das energias cinética e potencial do dado sistema.

A equação de Lagrange pode ser escrita na seguinte forma:

$$\frac{d}{dt}(\partial \dot{q}_i) + \frac{\partial L}{\partial q_i} = F - \Lambda^T(q)\lambda \quad (22)$$

Onde $L = T - V$ é a função Lagrangiana, T é a energia cinética do sistema, V é a energia potencial do sistema, q_i são as coordenadas generalizadas, F é o vetor de força generalizado, Λ é a matriz

de restrições, e λ é o vetor dos multiplicadores de Lagrange associados as restrições.

O primeiro passo para derivar o modelo dinâmico usando a abordagem de Lagrange é encontrar as energias potenciais e cinéticas que governam o movimento do DDMR. Além disso, uma vez que o DDMR se move no plano X_I - Y_I , a energia potencial do DDMR é considerada zero.

Para o DDMR, as coordenadas generalizadas são escolhidas como:

$$q = [x_a \quad y_a \quad \theta \quad \varphi_R \quad \varphi_L]^T \quad (23)$$

A energia cinética do DDMR é a soma da energia da plataforma do robô sem as rodas mais a energia cinética das rodas e atuadores.

A energia cinética da plataforma do robô é

$$T_c = \frac{1}{2}m_c v_c^2 + \frac{1}{2}I_c \dot{\theta}^2 \quad (24)$$

enquanto as energias cinéticas das rodas direita e esquerda são

$$T_{wR} = \frac{1}{2}m_w v_{wR}^2 + \frac{1}{2}I_m \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_w \dot{\varphi}_R^2 \quad (25)$$

$$T_{wL} = \frac{1}{2}m_w v_{wL}^2 + \frac{1}{2}I_m \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_w \dot{\varphi}_L^2 \quad (26)$$

onde, m_c é a massa do DDMR sem as rodas de tração e atuadores (motores DC), m_w é a massa de cada roda de tração (incluindo o atuador), I_c é momento de inércia do DDMR ao longo do eixo vertical que passa pelo centro de massa, I_w é o momento de inércia de cada roda de tração com o motor ao longo do eixo da roda, e I_m é o momento de inércia de cada roda de tração com o motor ao longo do diâmetro da roda.

Todas as velocidades serão primeiramente expressas como uma função das coordenadas generalizadas usando a equação geral da velocidade no sistema de coordenadas inercial.

$$v_i^2 = \dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 \quad (27)$$

Os componente X_I e Y_I do centro de massa e rodas podem ser obtidos em termos das coordenadas generalizadas como a seguir:

$$\begin{cases} x_c = x_a + d \cos(\theta) \\ y_c = y_a + d \sin(\theta) \end{cases} \quad (28)$$

$$\begin{cases} x_{wR} = x_a + L \sin(\theta) \\ y_{wR} = y_a + L \cos(\theta) \end{cases} \quad (29)$$

$$\begin{cases} x_{wL} = x_a - L \sin(\theta) \\ y_{wL} = y_a + L \cos(\theta) \end{cases} \quad (30)$$

Usando as equações (24)-(26) junto com as equações (27)-(30), a energia cinética total do DDMR é

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_a^2 + \dot{y}_a^2) - m_c d \dot{\theta}(\dot{y}_a \cos\theta - \dot{x}_a \sin\theta) + \frac{1}{2}I_w(\dot{\varphi}_R^2 + \dot{\varphi}_L^2) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 \quad (31)$$

onde os seguintes novos parâmetros são introduzidos

$m = m_c + 2m_w$ é a massa total do robô, e $I = I_c + m_c d^2 + 2m_w L^2 + 2I_m$ é a inércia equivalente total.

Usando a equação (22) junto com a função Lagrangeana $L = T$, as equações de movimento do DDMR são dadas por

$$m\ddot{x}_a - md\ddot{\theta}\sin\theta - md\dot{\theta}^2\cos\theta = C_1 \quad (32)$$

$$m\ddot{y}_a - md\ddot{\theta}\cos\theta - md\dot{\theta}^2\sin\theta = C_2 \quad (33)$$

$$I\ddot{\theta} - md\ddot{x}_a\sin\theta + md\ddot{y}_a\cos\theta = C_3 \quad (34)$$

$$I_w\ddot{\varphi}_R = \tau_R + C_4 \quad (35)$$

$$I_w\ddot{\varphi}_L = \tau_L + C_5 \quad (36)$$

onde $(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5)$, são coeficientes relacionados as restrições cinemáticas, que podem ser escritos em termos do vetor dos multiplicadores de Lagrange λ e a matriz das constantes cinemáticas Λ introduzida na seção Restrições Cinemáticas.

$$\Lambda^T(q) = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \end{bmatrix} \quad (37)$$

Agora, as equações de movimento (32)-(36) podem ser expressas na forma geral dada pela equação (21) como

$$M(q)\ddot{q} + V(q, \dot{q})\dot{q} = B(q)\tau - \Lambda^T(q)\lambda \quad (38)$$

Onde

$$M(q) = \begin{bmatrix} m & 0 & -md\sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & m & md\cos\theta & 0 & 0 \\ -md\sin\theta & md\cos\theta & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_w \end{bmatrix}$$

$$V(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & -md\dot{\theta}\cos\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -md\dot{\theta}\sin\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B(q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda^T(q)\lambda = \begin{bmatrix} -\sin\theta & \cos\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta & \sin\theta \\ 0 & L & -L \\ 0 & -R & 0 \\ 0 & 0 & -R \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{bmatrix}$$

Em seguida, o sistema descrito por (38) é transformado em uma forma alternativa que é mais conveniente para as finalidades de controle e simulação. O principal objetivo é eliminar o termo de restrição $\Lambda^T(q)\lambda$ na equação (38) uma vez que os multiplicadores de Lagrange λ_i são desconhecidos. Isto é feito ao, primeiramente, definir o vetor reduzido

$$\eta = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_R \\ \dot{\varphi}_L \end{bmatrix} \quad (39)$$

e em seguida, expressando as velocidades em coordenadas generalizadas usando o modelo de cinemática direta (19). Assim temos

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{y}_a \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi}_R \\ \dot{\varphi}_L \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} R\cos\theta & R\cos\theta \\ R\sin\theta & R\sin\theta \\ \frac{R}{L} & -\frac{R}{L} \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_R \\ \dot{\varphi}_L \end{bmatrix} \quad (40)$$

Isto pode ser escrito a forma

$$\dot{q} = S(q)\eta \quad (41)$$

Pode ser verificado que a matriz de transformação $S(q)$ está no espaço nulo da matriz de restrição $\Lambda(q)$. Portanto, temos

$$S^T(q)\Lambda^T(q) = 0 \quad (42)$$

Depois, tomando a derivada no tempo da equação (42) nos dá

$$\ddot{q} = \dot{S}(q)\dot{\eta} + S(q)\ddot{\eta} \quad (43)$$

Substituindo as equações (41) e (43) na equação principal (38) nós obtemos

$$M(q)[\dot{S}(q)\dot{\eta} + S(q)\ddot{\eta}] + V(q, \dot{q})[S(q)\dot{\eta}] = B(q)\tau - \Lambda^T(q)\lambda \quad (44)$$

Depois, rearranjando a equação e multiplicando ambos os membros chegamos a

$$S^T(q)M(q)S(q)\ddot{\eta} + S^T(q)[M(q)\dot{S}(q) + V(q, \dot{q})S(q)]\dot{\eta} = S^T(q)B(q)\tau - S^T(q)\Lambda^T(q)\lambda \quad (45)$$

onde o último termo é igualmente zero. Agora, definindo as novas matrizes

$$\begin{aligned} \bar{M}(q) &= S^T(q)M(q)S(q) \\ \bar{V} &= S^T(q)M(q)\dot{S}(q) + S^T(q)V(q, \dot{q})S(q) \\ \bar{B} &= S^T(q)B(q) \end{aligned}$$

As equações dinâmicas são reduzidas a forma

$$\bar{M}(q)\ddot{\eta} + \bar{V}(q, \dot{\eta})\dot{\eta} = \bar{B}(q)\tau \quad (46)$$

Onde

$$\begin{aligned} \bar{M}(q) &= \begin{bmatrix} I_w + \frac{R^2}{4L^2}(mL^2 + I) & \frac{R^2}{4L^2}(mL^2 - I) \\ \frac{R^2}{4L^2}(mL^2 - I) & I_w + \frac{R^2}{4L^2}(mL^2 + I) \end{bmatrix} \\ \bar{V}(q, \dot{\eta}) &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{R^2}{2L}m_c d\dot{\theta} \\ -\frac{R^2}{2L}m_c d\dot{\theta} & 0 \end{bmatrix}, \bar{B}(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A equação (46) mostra que a dinâmica do DDMR é expressa unicamente em função das velocidades angulares das rodas direita e esquerda ($\dot{\varphi}_R, \dot{\varphi}_L$), a velocidade angular $\dot{\theta}$ e os torques dos motores de tração (τ_R, τ_L). As equações de movimento

também podem ser transformadas numa forma alternativa que é representada pelas velocidades lineares e angulares (v, ω) do DDMR. Usando as equações (15) e (16) dos modelos cinemáticos, é facilmente demonstrado que as equações (46) do modelo podem ser rearranjadas na seguinte forma compacta

$$\begin{cases} (m + \frac{2I_w}{R^2})\dot{v} - m_c d \omega^2 = \frac{1}{R}(\tau_R + \tau_L) \\ (I + \frac{2L^2}{R^2}I_w)\dot{\omega} + m_c d \omega v = \frac{L}{R}(\tau_R - \tau_L) \end{cases} \quad (47)$$

Abordagem de Newton-Euler

O primeiro e mais importante passo na modelagem dinâmica de Newton-Euler é desenhar um diagrama de corpo livre do sistema e analisar as forças agindo sobre ele. O diagrama de corpo livre do robô móvel de tração diferencial é mostrado na 3. Usando o sistema de coordenadas local do robô X_r, Y_r , as notações seguintes são introduzidas.

(v_u, v_w) representam a velocidade do centro de massa C do veículo no sistema de coordenadas local; v_u é a velocidade longitudinal e v_w é a velocidade lateral; (a_u, a_w) representam a aceleração do centro de massa C do veículo; (F_{u_R}, F_{u_L}) são as forças exercidas longitudinalmente no veículo pelas rodas direita e esquerda; (F_{w_R}, F_{w_L}) são as forças laterais exercidas sobre o veículo pelas rodas esquerda e direita; θ é a orientação do robô; ω é a velocidade angular; m é a massa do robô; e J é o momento de guinada de inércia com respeito ao centro de massa.

Como podemos ver pelo diagrama de corpo livre, as únicas forças agindo sobre o robô são as forças do atuador agindo sobre as rodas.

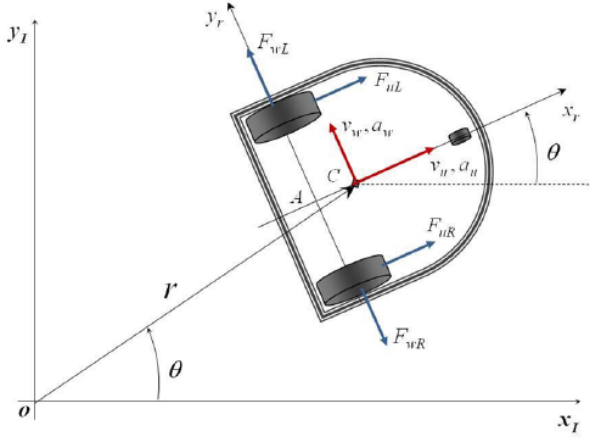


Figura 3: Diagrama de corpo livre para a modelagem dinâmica Newtoniana

Nós começamos a derivar as fórmulas representando o robô em coordenadas polares. Supondo que o robô é um corpo rígido, suas coordenadas polares no sistema de coordenadas inercial podem ser representadas usando o vetor complexo

$$\hat{r} = r e^{j\theta} \quad (48)$$

Diferenciando o vetor de posição acima com respeito ao tempo teremos a velocidade e a aceleração do robô no sistema de coordenadas inercial.

$$\dot{\hat{r}} = \dot{r} e^{j\theta} + j r \dot{\theta} e^{j\theta} \quad (49)$$

$$\ddot{\hat{r}} = \ddot{r} e^{j\theta} + 2j \dot{r} \dot{\theta} e^{j\theta} + j r \ddot{\theta} e^{j\theta} - r \dot{\theta}^2 e^{j\theta} \quad (50)$$

Simplificando e escrevendo os termos velocidade e a aceleração nos termos radiais e tangenciais, temos

$$\dot{\hat{r}} = [\dot{r}] e^{j\theta} + [r \dot{\theta}] e^{j(\theta + \frac{\pi}{2})} \quad (51)$$

$$\ddot{\hat{r}} = [\ddot{r} - r \dot{\theta}^2] e^{j\theta} + [2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}] e^{j(\theta + \frac{\pi}{2})} \quad (52)$$

A velocidades e aceleração radial e tangencial são definidas por

$$v_u = \dot{r} \quad (53)$$

$$v_w = r \dot{\theta} \quad (54)$$

$$a_u = \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 \quad (55)$$

$$a_w = 2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta} \quad (56)$$

Das equações acima, podemos escrever as seguintes relações entre as componentes radial e tangencial da velocidade do robô e a aceleração

$$a_u = \dot{v}_u - v_w \dot{\theta} \quad (57)$$

$$a_w = \dot{v}_w - v_u \dot{\theta} \quad (58)$$

As equações (57) e (58) acima são equações fundamentais de aceleração que também podem ser obtidas utilizando o teorema do movimento de um corpo rígido em um sistema de coordenadas rotativo [21,22].

O próximo passo é escrever a segunda lei de Newton do movimento no sistema de coordenadas do robô e encontrar a relação entre forças, torques e acelerações. O DDMR exibidois tipos de movimento: translações em direções radial e tangencial, e rotações em torno do eixo vertical no centro de massa. Seja M a massa total do robô incluindo as rodas e os atuadores e J o momento de inércia com respeito ao centro de massa. Então as equações dinâmicas são

$$M a_u = F_{uL} + F_{uR} \quad (59)$$

$$M a_w = F_{wL} - F_{wR} \quad (60)$$

$$J \ddot{\theta} = (F_{uR} - F_{uL})L + (F_{wR} - F_{wL})d \quad (61)$$

Substituindo os termos de aceleração das equações (57) e (58) chegamos a

$$\dot{v}_u = v_w \dot{\theta} + \frac{F_{uL} + F_{uR}}{M} \quad (62)$$

$$\dot{v}_w = -v_u \dot{\theta} + \frac{F_{wL} - F_{wR}}{M} \quad (63)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{L}{J} (F_{uR} - F_{uL}) + \frac{d}{J} (F_{wR} - F_{wL}) \quad (64)$$

A ausência de derrapagem (rolamento puro) na direção longitudinal a a ausência de escorregamento na direção lateral criam uma independência entre as velocidades longitudinal, lateral e angular e simplificam as equações dinâmicas. Essas restrições não holonômicas são levadas em consideração ao definirmos a velocidade do ponto central A no sistema de coordenadas local e foçando-a a zero. Usando a matriz de transformação $R(\theta)$, nós primeiro encontramos a velocidade do centro de massa C no sistema de coordenadas inercial como

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_u \\ v_w \end{bmatrix} \quad (65)$$

Em seguida, usando a equação (28), podemos encontrar a velocidade do ponto central A no sistema de coordenadas inercial. Pode-se provar que a velocidade do ponto A no sistema de coordenadas local é $v_w - d\dot{\theta}$. Portanto, na ausência de derrapamento lateral nós temos

$$v_w = d\dot{\theta} \quad (66)$$

Depois, substituindo (66) em (62) e (63) e combinando com (64) nós obtemos

$$\dot{v}_u = d\dot{\theta}^2 + \frac{1}{M}(F_{uL} + F_{uR}) \quad (67)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{L}{Md^2 + J}(F_{uR} - F_{uL}) - \frac{Mdv_u}{Md^2 + J}\dot{\theta} \quad (68)$$

As duas equações acima são as equações dinâmicas do robô considerando as restrições não holonômicas. Estas equações podem agora ser facilmente transformadas para nos dar os torques aplicados pelos atuadores sobre as rodas em notação similar a adotada na abordagem Lagrangeana.

$$M\dot{v}_u\dot{\theta} - Md\dot{\theta}^2 = \frac{1}{R}(\tau_R + \tau_L) \quad (69)$$

$$(Md^2 + J)\ddot{\theta} + Mdv_u\dot{\theta} = \frac{L}{R}(\tau_r - \tau_L) \quad (70)$$

Depois, estas duas equações podem ser escritas na forma matricial como segue

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & Md^2 + J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}_u \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -Md\dot{\theta} \\ Md\dot{\theta} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}_u \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ L & -L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_R \\ \tau_L \end{bmatrix} \quad (71)$$

Como pode ser observado, a equação (66) é similar a equação (47), que foi obtida usando a abordagem Lagrangeana. Note que na abordagem de Newton-Euler as massas e as inércias das rodas não foram levadas em consideração e o robô é considerado um corpo rígido. Portanto, ambas as formulações são equivalentes se a inércia e a massa são definidas como

$$M = m_c \quad (72)$$

$$J = I_c \quad (73)$$

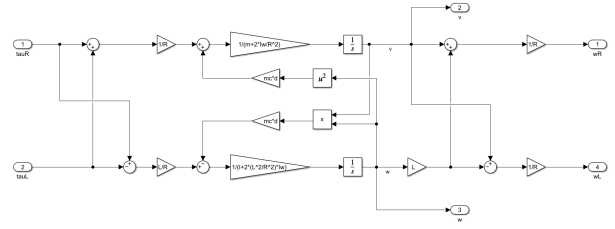


Figura 4: Modelo Dinâmico do DDMR

Depois, usando as equações da cinemática direta (15) e (16), nós podemos facilmente reescrever as equações gerais da dinâmica (71) em termos das velocidades de rotação das rodas e dos torques dos atuadores. Isto leva a seguinte formulação

$$\left[\frac{R(Md^2 + J)}{4L^2} + \frac{MR}{4} \right] \ddot{\varphi}_R + \left[-\frac{R(Md^2 + J)}{4L^2} + \frac{MR}{4} \right] \ddot{\varphi}_L - \left(\frac{MdR^2}{4L^2} \right) \dot{\varphi}_L^2 + \left(\frac{MdR^2}{4L^2} \right) \dot{\varphi}_R \dot{\varphi}_L = \frac{1}{R} \tau_R \quad (74)$$

$$\left[\frac{R(Md^2 + J)}{4L^2} + \frac{MR}{4} \right] \ddot{\varphi}_L + \left[-\frac{R(Md^2 + J)}{4L^2} + \frac{MR}{4} \right] \ddot{\varphi}_R - \left(\frac{MdR^2}{4L^2} \right) \dot{\varphi}_R^2 + \left(\frac{MdR^2}{4L^2} \right) \dot{\varphi}_R \dot{\varphi}_L = \frac{1}{R} \tau_L \quad (75)$$

As equações acima são também equivalentes aquelas derivadas da abordagem Lagrangeana, como mostrado na equação (46).

A Figura 4 mostra o modelo dinâmico do DDMR representando as equações de movimento (69) e (70). Este modelo mostra claramente o acoplamento entre os torques dos motores, as velocidades linear e angular do robô e as velocidades das rodas. Esse modelo pode ser adequadamente usado para simular e analisar o DDMR.

Modelagem do Atuador

Os motores DC que são geralmente usados para tracionar as rodas do sistema do robô móvel de tração diferencial são considerados como servo atuadores. Em um motor DC controlado por armadura, que é o caso do sistema do nosso DDMR, a tensão de armadura v_a é usada como entrada de controle enquanto as condições no circuito de campo são mantidas constantes. Em particular, para um motor DC permanentemente magnético,

nós temos as seguintes equações para a armadura do circuito

$$\begin{cases} v_a = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + e_a \\ e_a = K_b \omega_m \\ \tau_m = K_t i_a \\ \tau = N \tau_m \end{cases} \quad (76)$$

onde, i_a é a corrente de armadura, (R_a, L_a) é a resistência e indutância da bobina de armadura, respectivamente, e_a é a força eletromotriz inversa, ω_m é a velocidade angular do rotor, τ_m é o torque do motor, (K_t, K_b) são as constantes de torque e da força eletromotriz inversa, respectivamente, N é a razão das engrenagens e τ é o torque de saída aplicado a roda.

Uma vez que os motores do DDMR são acoplados as rodas do robô através das engrenagens, as equações mecânicas do movimento dos motores são diretamente ligadas a dinâmica mecânica do DDMR. Portanto, cada motor DC terá

$$\begin{cases} \omega_{mR} = N \dot{\phi}_R \\ \omega_{mL} = N \dot{\phi}_L \end{cases} \quad (77)$$

As equações dinâmicas totais do DDMR com os atuadores são obtidas ao combinar-se a equação (76) para cada motor com a dinâmica mecânica do DDMR. Perturbações adicionais ao torque atuando nas rodas podem ser incluídas como termos aditivos aos torques dos motores. A Figura 5 mostra um diagrama de blocos representando o sistema completo. O modelo de cinemática direta (19) pode ser adicionado em cascata ao modelo dinâmico para formar um modelo completo de simulação e análise do DDMR.

Conclusão

Nós apresentamos uma derivação detalhada do modelo dinâmico de um robô móvel de tração diferencial usando os métodos de Lagrange e de Newton-Euler. Eles foram demonstrados como consistentes e matematicamente equivalentes. As equações de movimento dos atuadores motores DC também foram adicionadas para formar um modelo

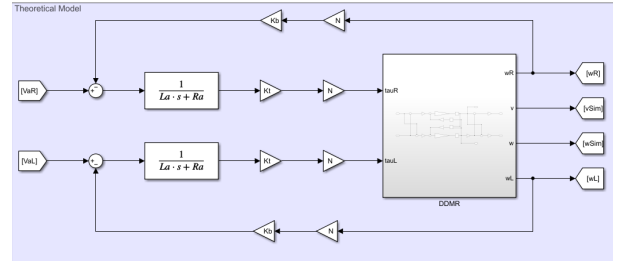


Figura 5: Modelo dinâmico do DDMR com atuadores.

dinâmico completo do DDMR. A compreensão adquirida nesse estudo irá guiar estudantes de engenharia e pesquisadores na modelagem e projeto de controladores para a navegação do DDMR e rastreamento de trajetória.

Referências

- [1] Mitchell R, Warwick K, Browne WN, Gasson MN, Wyatt J (2010) Engaging Robots: Innovative Outreach for Attracting Cybernetics Students. IEEE Transactions on Education 53: 105-113
- [2] Dhaouadi R, Sleiman M (2011) Development of a modular mobile robot platform for motion-control education. IEEE Industrial Electronics Magazine 5: 35-45.
- [3] Shibata T, Murakami T (2012) Power-Assist Control of Pushing Task by Repulsive Compliance Control in Electric Wheelchair. IEEE Trans. Ind. Electron 59: 511-520.
- [4] Yang SX, Zhu A, Yuan G, Meng MQH (2012) A Bioinspired Neurodynamics- Based Approach to Tracking Control of Mobile Robots. IEEE Trans. Ind. Electron 59: 3211-3220.
- [5] Fang Y, Liu X, Zhang X (2012) Adaptive Active Visual Servoing of Nonholonomic Mobile Robots. IEEE Trans. Ind. Electron 59: 486-497.
- [6] Huang HP, Yan JY, Hu Cheng T (2010) Development and Fuzzy Control of a Pipe Inspection Robot. IEEE Trans. Ind. Electron 57: 1088-1095.
- [7] Li THS, Yeh YC, Da Wu J, Hsiao MY, Chen CY (2010) Multifunctional Intelligent Autonomous

- Parking Controllers for Carlike Mobile Robots. *IEEE Trans. Ind. Electron* 57: 1687-1700
- [8] Campion G, Bastin G, Novel BD (1996) Structural properties and classification of kinematic and dynamic models of wheeled mobile robot. *IEEE Transactions on Automatic Control* 12: 47-62.
 - [9] Fukao T, Nakagawa H, Adachi N (2000) Adaptive Tracking Control of a Nonholonomic Mobile Robot. *IEEE Transaction on Robotics and Automation* 16: 609-615.
 - [10] Hou ZG, Zou AM, Cheng L, Tan M (2009) Adaptive Control of an Electrically Driven Nonholonomic Mobile Robot Via Back stepping and Fuzzy Approach. *IEEE Transaction on Control Systems Technology* 17: 803-815.
 - [11] Fierro R, Lewis FL (1997) Control of a nonholonomic mobile robot: back stepping kinematics into dynamics. *Journal of Robotic Systems* 14: 149-163.
 - [12] Yamamoto Y, Yun X (1992) On Feedback Linearization of Mobile Robots. Technical Report No. MS- CIS-92-45, Philadelphia, PA.
 - [13] Yamamoto Y, Yun X (1992) Coordinating Locomotion and Manipulation of a Mobile Manipulator Technical Report No. MS-CIS-92-18 Philadelphia, PA.
 - [14] Sarkar N, Yun X, Kumar V (1994) Control of mechanical systems with rolling constraints: Application to dynamic control of mobile robots *Int. J. Robot. Res* 13: 55-69.
 - [15] Yun X, Yamamoto Y (1993) Internal dynamics of a wheeled mobile robot. *IEEE/ RSJ International Conference on Intelligent Robots and System (IROS'93)* 2: 1288-1294.
 - [16] DeSantis RM (1995) Modeling and Path-tracking Control of a mobile Wheeled Robot with a Differential Drive. *Robotica* 13: 401-410.
 - [17] de Vries TJA, van Heteren C, Huttenhuis L (1999) Modelling and control of a fast moving, highly maneuverable wheelchair. *Proceedings of the International Bio mechatronics Workshop* 6: 110-115.
 - [18] Albagul A, Wahyudi A (2004) Dynamic Modelling and Adaptive Traction Control for Mobile Robots. *International Journal of Advanced Robotic Systems* 1: 149-154.
 - [19] Thanjavur K, Rajagopalan R (1997) Ease of dynamic modelling of wheeled mobile robots (WMRs) using Kane's approach. *IEEE International Conference on Robotics and Automation* 4 : 2926-2931
 - [20] Thanjavur K, Rajagopalan R (1997) Ease of dynamic modelling of wheeled mobile robots (WMRs) using Kane's approach. *IEEE International Conference on Robotics and Automation* 4: 2926-2931
 - [21] Neimark JJ, Fufaev NA (1972) Dynamics of Nonholonomic Systems: Translations of Mathematical Monographs. American mathematical Society
 - [22] Bloch A, Crouch P, Baillieul J, Marsden J (2003) *Nonholonomic Mechanics and Control*.