Podstawowe pojęcia matematyczne

1 Spójniki logiczna

Spójniki logiczne służą do składania ze sobą zdań w zdania złożone, których wartość logiczna (prawda lub fałsz) zależy **tylko** od wartości logicznych zdań składowych. Odpowiadają im spójniki, z których korzystamy w języku mówionym:

1. $\wedge$ (koniunkcja) oznacza spójnik "oraz" i sprawdza, czy oba zdania są prawdziwe,
2. $\vee$ (alternatywa) oznacza "lub" i sprawdza, czy choć jedno zdanie jest prawdziwe,
3. $\implies$ (implikacja) oznacza "jeżeli ..., to ..." i sprawdza, czy nie zachodzi taka sytuacja, że pierwsze zdanie jest prawdziwe, a drugie fałszywe,
4. $\iff$ (równoważność) oznacza "wtedy i tylko wtedy" i sprawdza, czy oba zdania są wspólnie prawdziwe lub fałszywe,
5. $\neg$ (negacja) oznacza "nieprawda, że..." i odwraca wartość logiczną zdania.

Dokładne wartości w zależności od argumentów przedstawia tabela (przyjmując, że 1 oznacza prawdę, a 0 fałsz):

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \implies q$	$p \iff q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

p	$\neg p$
1	0
0	1

Przykłady

Symbol $\equiv$ oznacza, że to, co go poprzedza i po nim następuje, ma tę samą wartość logiczną. Wprowadzony on jest, aby nie używać znaku równości, który piszemy często w zdaniach.

1. $(1 \wedge 0) \implies 1 \equiv 0 \implies 1 \equiv 0$,
2. $(1 \wedge 0) \implies (0 \wedge 1) \equiv 0 \implies 0 \equiv 1$,

3. $(3 = 4) \implies (3 = 3) \equiv 0 \implies 1 \equiv 0$,

4. *Jeżeli 2 jest liczbą parzystą, to 3 jest liczbą parzystą* $\equiv 1 \implies 0 \equiv 0$,

5. *Jeżeli 2 jest liczbą parzystą oraz 3 jest liczbą nieparzystą, to 3 jest liczbą nieparzystą* $\equiv (1 \wedge 1) \implies 1 \equiv 1$,

6. *Jeżeli 2 jest liczbą parzystą oraz 3 jest liczbą parzystą, to 2 jest liczbą parzystą* $\equiv (1 \wedge 0) \implies 1 \equiv 0 \implies 1 \equiv 1$.

Zadania

1. Oblicz

$$
\begin{aligned}
(1 \vee 0) &\implies (0 \vee 1), & (\neg 1 \vee 0) &\implies (1 \implies 0),\\
(\neg 1 \vee \neg 1) &\implies \neg(1 \wedge 1), & (1 \vee 0) \wedge 1 &\implies ((1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1)),\\
((1 \implies 0) \wedge (0 \implies 1)) &\implies (1 \iff 0), & ((0 \implies 0) \wedge (0 \implies 0)) &\implies (0 \iff 0).
\end{aligned}
$$

2. Sprawdź, że dla każdych wartości p, q, r prawdą jest, że

$$
\begin{aligned}
&p \wedge \neg p & &(\neg p \vee q) \iff (p \implies q)\\
&((\mathrm{p} \implies q) \wedge (q \implies r)) \implies (p \implies r) & &(\mathrm{p} \wedge q) \implies p\\
&\neg(p \vee q) \iff (\neg p \wedge \neg q) & &\neg(p \vee q) \iff (\neg p \vee \neg q)
\end{aligned}
$$

   Zdania, które niezależnie od wartości logicznych zdań składowych są prawdziwe, nazywają się tautologiami. Dwie ostatnie tautologie mają swoją własną nazwę, nazywają się prawami de Morgana.

3. Za pomocą negacji i alternatywy wyraź wszystkie omówione spójniki.

4. Za pomocą negacji i koniunkcji wyraź wszystkie omówione spójniki.

5. * Za pomocą spójnika | o tabelce

p	q	$p\|q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

   wyraź wszystkie omówione spójniki.

2 Kwantyfikatory

Często w matematyce pojawiają się zmienne, czyli symbole oznaczające pewną wartość z jakiejś dziedziny. Często oznaczane są końcowymi literami alfabetu łacińskiego x, y, z. Na przykład jeżeli x oznacza liczbę naturalną, to nie możemy orzec o prawdziwości napisu $x = 3$ ani *x jest liczbą parzystą*. W celu jakiegoś uchwycenia zmiennych wprowadza się kwantyfikatory $\forall, \exists$.

$\forall$ (kwantyfikator ogólny) oznacza, że pewna własność zachodzi dla wszystkich wartości zmiennej, na przykład $\forall x\ x = 1$ oznacza zdanie *Dla każdego x, x równa się 1*, co jest zdaniem fałszywym, niemniej jednak zdaniem.

$\exists$ (kwantyfikator szczegółowy) oznacza, że pewna własność jest spełniona dla pewnej wartości zmiennej, na przykład $\exists x\ x = 1$ oznacza zdanie *Istnieje x takie, że x równa się 1*, co jest zdaniem prawdziwym.

Zdanie może zaczynać się od kilku kwantyfikatorów, na przykład $\forall x \exists y\ x - y = 0$. W takich przypadkach kwantyfikatory czytamy od lewej. Przykładowe zdanie przeczytamy *Dla każdego x istnieje y takie, że x odjąć y równa się 0.* Jeżeli kilkukrotnie pojawi się ten sam kwantyfikator, to często go pomijamy i piszemy zmienne jedna po drugiej jak na przykład $\exists x, y\ x + y = 4$ lub $\forall x, y\ x^2 + y^2 \geqslant 0$.

Ocena prawdziwości zdań z kwantyfikatorami

Jeżeli będziemy mówić o abstrakcyjnym zdaniu z kwantyfikatorem, własność zmiennej często będziemy oznaczać literą $p(x), q(x), r(x)$. Domyślnie x będzie oznaczało liczbę naturalną.
Załóżmy, że chcemy zbadać prawdziwość zdania $\forall x\ p(x)$. Ręczne sprawdzenie wymagałoby sprawdzenia każdego własności $p(x)$ dla każdej wartości x, co w przypadku większości dziedzin jest niemożliwe. Dlatego sprawdzanie, czy zdania z kwantyfikatorem ogólnym wymaga zazwyczaj głębszego zrozumienia własności. Na przykład niech $p(x)$ oznacza *x jest liczbą parzystą lub reszta z dzielenia x przez 2 równa się 1.* Jesteśmy w stanie stwierdzić, znając teorię liczb, że własność $p(x)$ zachodzi dla każdej wartości x. Inny przykład, niech $p(x)$ będzie miało strukturę tautologii, wtedy również $p(x)$ jest spełnione dla każdej wartości x ze względy na strukturę własności $p(x)$.
Sprawdzanie prawdziwości zdań z kwantyfikatorem szczegółowym jest prostsze, wystarczy tylko podać jedną wartość, dla której zachodzi własność. Na przykład zdanie $\exists x\ x > 1$ jest prawdziwe, ponieważ świadczy o tym liczba x=2.
Sprawdzanie prawdziwości zdań z kilkoma kwantyfikatorami wymaga zrozumienia, o co w zdaniu chodzi oraz zastosowaniu odpowiedniej strategii. Na przykład weźmy zdanie

$$\forall x \exists y\ \neg(x = 0) \implies xy = 1.$$

Aby rozstrzygnąć jego prawdziwość musimy sprawdzić, czy dla każdej wartości x (tutaj w domyśle wymiernej) istnieje taka wartość y, że zachodzi opisana własność. Dla $x = 0$ możemy dobrać dowolne y, dla $x \neq 0$ wybieramy $y = \frac{1}{x}$.

Negacje zdań z kwantyfikatorami

Co znaczy, że nie jest prawdą, że dla każdego elementu zachodzi jakaś własność? Widzimy, że może tak się dziać, wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnego elementu nie zachodzi ta własność. Podobnie w przypadku zdania, że istnieje element posiadający pewną własność. Jest ono fałszywe tylko wtedy, gdy wszystkie elementy posiadają tę własność. Tę intuicję ujmuje prawo rachunku zdań

$$\neg\forall x\ p(x) \iff \exists x\ \neg p(x),$$

$$\neg\exists x\ p(x) \iff \forall x\ \neg p(x).$$

Zadania

1. Napisz definicję podzielności przez 2 za pomocą kwantyfikatorów.
2. Napisz definicję podzielności 2 liczb za pomocą kwantyfikatorów.
3. Wybierz kilka praw arytmetyki i zapisz je za pomocą kwantyfikatorów.
4. Rozstrzygnij prawdziwość zdań

$$\begin{array}{cc}
\exists x\ x > x & \forall x\ x = 0 \\
\forall x, y, z\ \big((x < y \wedge y < z) \implies x < z\big) & \exists x \forall y\ xy = 0 \\
\forall x \exists y\ xy = 1 & \forall x, y\ xy > x \\
(\exists x\ x^2 = -1) \iff (\exists x\ x^2 + 1 = 0) & (\exists x\ x + x = x) \implies (\exists x\ x^2 = x) \\
\forall x\ (x + x = 0 \implies x^2 = 0) & \forall x, y\ (xy = 0 \implies (x = 0 \vee y = 0)) \\
(\forall x\ p(x)) \implies (\exists x\ p(x)) & (\exists x\ p(x)) \implies (\forall x\ p(x))
\end{array}$$

3 Zbiory

W matematyce często rozważa się kolekcje liczb lub innych obiektów. Takie kolekcje (zazwyczaj) nazywamy zbiorami. Przykładami zbiorów są:

1. $\{1, 2, 3\}$ - zbiór złożony z liczb 1, 2 i 3,
2. $\{\}$ - zbiór pusty (ten zbiór jest bardzo ważnym obiektem i ma specjalne oznaczenie $\emptyset$),
3. $\{\emptyset\}$ - zbiór, którego elementem jest zbiór pusty (zbiory jednoelementowe nazywamy singletonami — w tym przypadku jest to singleton zbioru pustego),
4. $\{0, 1, \emptyset\}$ - zbiór złożony z liczb 0 i 1 oraz zbiory pustego. Nie jest to bardzo użyteczny obiekt, ale istniejący,
5. $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$ - zbiór zawierający widać co,
6. $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ - odpowiednio zbiory liczb naturalnych, wymiernych oraz rzeczywistych.

Aby powiedzieć, że coś jest elementem jakiegoś zbioru używamy symbolu $\in$, a żeby stwierdzić, że coś do niego nie należy używamy symbolu $\notin$. Na przykład weźmy zbiór $\{1, 2, 3, \{4\}\}$. Zachodzi

$1 \in \{1, 2, 3, \{4\}\}$,

$100 \notin \{1, 2, 3, \{4\}\}$,

$\{4\} \in \{1, 2, 3, \{4\}\}$,

$4 \notin \{1, 2, 3, \{4\}\}$, ponieważ należy do niego tylko singleton czwórki.

Wypisywanie wszystkich elementów zbioru nie jest najlepszym sposobem na przedstawianie dużych zbiorów, ani nie jest w ogóle możliwym sposobem na przedstawienie zbioru nieskończonego. W tym celu matematycy wymyślili 2 inne rodzaje notacji. Pierwszy z nich wygląda następująco:

$$A = \{x \in D \ : p(x)\}$$

Zbiór A jest kolekcją wszystkich elementów zbioru D, które spełniają własność $p(x)$. Niech $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ oraz $p(x)$ oznacza $\exists y \ 2y = x$. Wtedy mamy

$$A = \{x \in \{1, 2, 3, 4, 5\} : \ \exists y \ 2y = x\} = \{2, 4\}.$$

Często zbiory, z których wycinamy elementy, są nieskończone. Na przykład $\{x \in \mathbb{N} : \exists y \ 2y = x\}$ oznacza zbiór liczb parzystych (w szczególności nie $\mathbb{N}$), zaś zbiór $\{x \in \mathbb{Q} : \ \exists y \ 2y = x\}$ zawiera wszystkie liczby wymierne.
Drugi sposób polega na opisaniu działania funkcji na zbiorze i zapisuje się następująco

$$A = \{f(x) : \ x \in D\}.$$

Tak zdefiniowane A jest kolekcją elementów postaci $f(x)$ gdzie x przebiega cały zbiór D, na przykład

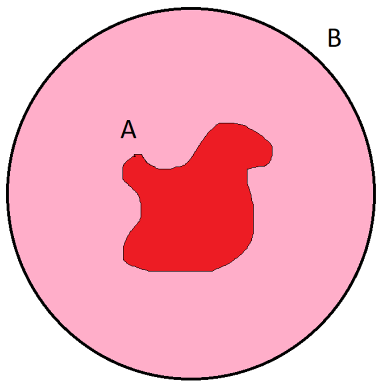
$$A = \{x + 3 : x \in \{1, 2, 3\}\} = \{4, 5, 6\}.$$

Równość i zawieranie zbiorów

Zbiory są zdefiniowane tylko i wyłącznie przez swoje elementy. Oznacza, to, że 2 zbiory są takie same, jeżeli należą do nich dokładnie te same obiekty. Możemy to zapisać symbolicznie

$$\forall A, B \ (A = B \iff \forall x \ x \in A \iff x \in B))$$

W szczególności oznacza to, że gdy wypisując elementy zbioru, wypiszemy pewien element podwójnie, to będzie to ten sam zbiór, co w przypadku, gdyby ten element był wypisany jednokrotnie.
Niektóre zbiory są większe niż inne. Oznaczamy to symbolem $\subseteq$. Napis $A \subseteq B$ oznacza, że wszystkie elementy zbioru A są elementami zbioru B. Tę definicję obrazuje ilustracja.



Symboliczna definicja zawierania wygląda tak

$$\forall A, B\ (A \subseteq B \iff (\forall x\ x \in A \implies x \in B)).$$

Znając te definicje możemy udowodnić pierwsze twierdzenie.

Twierdzenie 1. *Dla każdego zbioru A zachodzi $A \subseteq A$ oraz $\emptyset \subseteq A$.*

Dowód. 1) $A \subseteq A$. Ustalmy dowolny x. Jeżeli $x \notin A$, to wtedy $x \in A \implies x \in A$ jest prawdziwe, jeżeli zaś zachodzi $x \in A$ to zdanie to jest również prawdziwe. Wobec tego dla każdego x jest ono prawdziwe, co kończy dowód tego podpunktu.
2) $\emptyset \subseteq A$. Zauważmy, że dla każdego x zachodzi $x \notin \emptyset$. Wobec tego zdanie $x \in \emptyset \implies x \in A$ jest prawdziwe niezależnie od x, co kończy dowód drugiego podpunktu. □

Działania na zbiorach

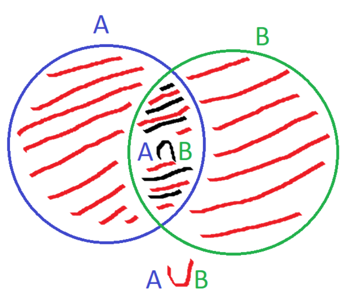
Działania na zbiorach odpowiadają kwantyfikatorom oraz spójnikom logicznym. Są nimi

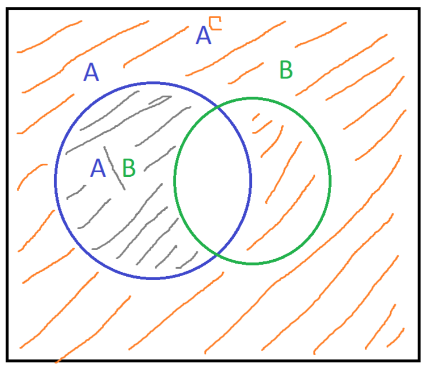
$\cup$ - suma 2 zbiorów jest równa zbiorowi, złożonemu z elementów, które znajdują się w przynajmniej jednym zbiorze. $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$.

$\cap$ - przekrój 2 zbiorów (lub iloczyn) jest równy zbiorowi, złożonemu z elementów, które znajdują się w obu zbiorach. $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$.

^{c} - dopełnienie zbioru oznacza zbiór tych elementów z ustalonej wcześniej przestrzeni, które nie znajdują się w zbiorze. $A^c = \{x : x \notin A\}$.

$\backslash$ - różnica 2 zbiorów jest równa zbiorowi złożonemu z elementów, które są w pierwszym, ale nie w drugim. $A \backslash B = \{x \in A : x \notin B\}$.





Sumę i przekrój można uogólnić na dowolną liczbę zbiorów. Niech A_i będzie rodziną zbiorów indeksowaną jakimś zbiorem I (można myśleć na przykład o wszystkich liczbach naturalnych). Wtedy

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x : \exists i\ i \in I \wedge x \in A_i\},$$

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x : \forall i\ i \in I \implies x \in A_i\}$$

Operacje te dają odpowiednio zbiór z elementów, które są w którymś zbiorze oraz zbiór elementów, które są we wszystkich zbiorach. Tutaj warto zrobić uwagę co do notacji kwantyfikatorów. Powszechnie stosowany jest skrót $\forall x \in A\ p(x)$, $\exists x \in A\ p(x)$. Oznaczają one odpowiednio $\forall x\ a \in A \implies p(x)$, $\exists x\ x \in A \wedge p(x)$.

Zadania

1. Zapisz na różne sposoby następujące zbiory: potęgi liczby 2, wielokrotności 3, dzielniki ustalonej liczby n, liczby pierwsze.

2. Rozpoznaj zbiory

$$\begin{array}{cc} \{2x+1 : x \in \mathbb{N}\} & \{\text{x}\in \mathbb{R} : 0 < x < 1\} \\ \{\text{A}\subseteq \mathbb{N} : 2 \in A\} & \{\text{q}\in \mathbb{Q} : q^2 < 2\} \\ \{1^x : x \in \mathbb{Q}\} & \{\text{x}\in \mathbb{N} : x > 1 \wedge \exists y\ xy = 1\} \end{array}$$

3. Udowodnij, że dla dowolnego zbioru A oraz dowolnej własności p zachodzi

$$\{x \in A : p(x)\} \subseteq A.$$

4. * Udowodnij, że dla każdej rodziny zbiorów A_i indeksowanej zbiorem I zachodzi

$$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c, \quad \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c.$$