Apunts d'Àlgebra Lineal

MatCAD - Universitat Autònoma de Barcelona

17 de setembre de 2018

Índex

1 Introducció 1

2 Matrius i equacions lineals 2
2.1 Operacions amb matrius. Matriu invertible . . . 3
2.2 Transformacions elementals en matrius . . . 6
2.3 Criteri d'invertibilitat. Rang d'una matriu . . . 9
2.4 Resolució de sistemes d'equacions lineals . . . 12
2.5 Determinant d'una matriu quadrada . . . 15

1 Introducció

Encara que el curs serà força autocontingut es requerirà que l'alumne conegui la resolució de sistemes d'equacions lineals, l'aritmètica bàsica de números i polinomis, i que tingui destresa de càlcul amb expressions algebraiques simbòliques.

A tot aquest curs suposarem que treballem sobre un cos commutatiu $\mathbb{K}$ fixat, que podeu pensar és $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Els elements de K els anomenarem nombres o escalars. Les propietats que utilitzarem són:

- És commutatiu amb la suma: $a + b = b + a \ \forall a, b \in \mathbb{K}$.
- És commutatiu amb el producte: $ab = ba \ \forall a, b \in \mathbb{K}$.
- La suma té un element neutre que anomenem zero: $0 + a = a \ \forall a \in \mathbb{K}$.
- El producte té un elements neutre que anomenem u: $1a = a \ \forall a \in \mathbb{K}$.
- Tot element $a \in \mathbb{K}$ té un invers per la suma que anomenem $-a$: $a + (-a) = 0$.
- Tot element a diferent de zero té un invers per la multiplicació que anomenem $1/a$ o bé a^{-1}: $aa^{-1} = 1$.
- Hi ha les propietats associatives a la suma i al producte: $(a+b)+c = a+(b+c)$ i $(ab)c = a(bc)$ $\forall a, b, c \in \mathbb{K}$.
- Hi ha la propietat distributiva: $a(b + c) = ab + ac \ \forall a, b, c \in \mathbb{K}$.

També suposarem certa familiaritat amb el llenguatge dels conjunts. Si A és un conjunt i B un subconjunt d'A, escriurem $B \subset A$. $a \in A$ voldrà dir que a és un element d'A. També escriurem $A \setminus B = \{a \in A \mid a \notin B\}$ i llegirem els a que pertanyen a a i que no pertanyen a B (o bé el complementari de B en A).

2 Matrius i equacions lineals

El contingut d'aquesta secció el podem trobar a [1, Tema 1] i a [2, Tema 2].

Definició 2.1. Si m i n són dos nombres naturals, una *matriu* $m \times n$ *amb entrades a* $\mathbb{K}$ és una taula rectangular d'elements de $\mathbb{K}$ amb m files i n columnes. Denotem $M_{m\times n}(K)$ al conjunt de matrius que tenen m files i n columnes i els seus elements són de K.

Notació 2.2. Denotarem amb lletres majúscules en nom de les matrius i amb la mateixa lletra i subíndexs cadascun dels coeficients: si A és una matriu, anomenarem a_{ij} al nombre de la fila i, columna j. En el producte de matrius, a vegades utilitzarem la notació $(AB)_{ij}$ per a fer referència al coeficient de la posició (i, j) després de fer el producte.

Exemple 2.3. Si $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in M_{2\times 3}(\mathbb{Q})$, llavors $a_{11} = 1$, $a_{12} = 3$, $a_{13} = 0$, $a_{21} = 0$, $a_{22} = -1$ i $a_{23} = 1$.

A continuació fixem algunes notacions i definicions de casos particulars:

- Una *matriu quadrada* és una matriu amb el nombre de columnes igual al nombre de files. Denotarem per $M_n(\mathbb{K}) = M_{n\times n}(\mathbb{K})$.
- Un element està a la *diagonal d'una matriu quadrada* si la posició que ocupa té el mateix nombre de fila que de columna: si la matriu és A, els elements de la diagonal són els a_{ii}.
- Una *matriu diagonal* és una matriu quadrada on els únics elements no nuls estan a la diagonal: A, matriu quadrada, és diagonal si $a_{ij} = 0\ \forall i \neq j$.
- La *matriu identitat* $n \times n$ és una matriu diagonal on tots els elements de la diagonal valen 1 (i per tant els altres valen 0). La denotem per $\mathbf{1}_n$ la matriu identitat $n \times n$.
- En general, escriurem els vectors per columnes: un *vector de* $\mathbb{K}^n$ és una matriu amb n files i 1 columna.
- Direm que una matriu quadrada A és *triangular inferior* si tots els coeficients per sota de la diagonal valen 0, o sigui, $a_{ij} = 0$ si $i > j$.
- Direm que una matriu quadrada A és *triangular superior* si tots els coeficients per sobre de la diagonal valen 0, o sigui, $a_{ij} = 0$ si $i < j$.
- Donada una matriu $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, definim la *trasposada d'A* i la denotem per A^T com la matriu de $M_{n\times m}(\mathbb{K})$ que té per columnes les files d'A, o sigui, que a la posició (i, j) té el coeficient a_{ji}. Tenim la propietat:
$$(A^T)^T = A\,.$$
- Diem que una matriu A és *simètrica* si $A = A^T$ (en particular, ha de ser quadrada). Per exemple, la matriu identitat $\mathbf{1}_n$ és simètrica.

Exemple 2.4. Considerem un sistema d'equacions amb m equacions i n incògnites:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

D'aquí podem treure la matriu associada als coeficients del sistema:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

el vector de termes independents:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

o bé escriure-ho tot en una sola matriu (matriu ampliada), on habitualment separem els termes independents:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

2.1 Operacions amb matrius. Matriu invertible

Considerem $\lambda \in \mathbb{K}$ i $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Les primeres operacions que podem fer són les que corresponen a veure $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ com $\mathbb{K}$-espai vectorial (més endavant veurem què vol dir):

- Definim la matriu λA com la matriu que té per coeficients λa_{ij}.
- Definim la matriu $A + B$ com la matriu que té per coeficients $a_{ij} + b_{ij}$.

Exemple 2.5.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Exemple 2.6.

$$2\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Aquestes definicions, més les propietats dels elements de $\mathbb{K}$ impliquen:

- Existeix una matriu $\mathbf{0}_{mn}$ complint $A + \mathbf{0}_{mn} = A$, $\forall A \in M_{mn}(\mathbb{K})$ ($\mathbf{0}_{mn}$ té tots els coeficients zero).
- $0A = \mathbf{0}_{mn}$, $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$.
- $A + B = B + A$, $\forall A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$.
- $1A = A$, $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$.
- $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ i $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$

A més, a més, podem definir:

Definició 2.7. Si $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{n\times r}(\mathbb{K})$ (o sigui, el nombre de columnes de A és igual al nombre de files de B) podem definir el *producte* AB com la matriu $C \in M_{m\times r}$ que té per coeficients:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \,.$$

La matriu C és pot pensar que té per columnes combinacions lineals de columnes de A (B ens diu quines són aquestes combinacions lineals) o bé com una matriu que té per files combinacions lineals de files de B (A ens diu quines són aquestes combinacions lineals): la columna j de la matriu C és:

$$\begin{pmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{mj} \end{pmatrix} = b_{1j} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + b_{2j} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + b_{nj} \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

i la fila i de la matriu C és (separem amb comes per a que quedi més clar):

$$(c_{i1}, c_{i2}, \cdots, c_{ir}) = a_{i1}(b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{1r}) + a_{i2}(b_{21}, b_{22}, \ldots, b_{2r}) + \cdots + a_{in}(b_{n1}, b_{n2}, \ldots, b_{nr})$$

Exemple 2.8.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 11 & 4 \\ 1 & 17 & 6 \end{pmatrix}$$

Exemple 2.9. Podem escriure el sistema d'equacions:

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

Com $AX = B$ on

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ i } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Proposició 2.10. *El producte de matrius té les propietats següents:*

(a) *Element neutre: si* $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $\mathbf{1}_m A = A\mathbf{1}_n = A$.

(b) *Propietat associativa: si* $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{n\times r}(\mathbb{K})$, $C \in M_{r\times s}(\mathbb{K})$, *llavors* $(AB)C = A(BC)$.

(c) *Distributiva respecte el producte: si* $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B, C \in M_{n\times r}(\mathbb{K})$ *i* $D \in M_{r\times s}(\mathbb{K})$, *llavors* $A(B+C) = AB + AC$ *i* $(B+C)D = BD + CD$.

Demostració. Escriure les fórmules amb els coeficients i surt. Fem la propietat associativa com exemple: volem comparar el coeficient a la posició (i,j) d'$(AB)C$ amb el d'$A(BC)$, que denotem $((AB)C)_{ij}$ i $(A(BC))_{ij}$ respectivament:

$$((AB)C)_{ij} = \sum_{k=1}^{r}(AB)_{ik}c_{kj} = \sum_{k=1}^{r}(\sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lk})c_{kj} = \sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lk}c_{kj}$$

Mentre que:

$$(A(BC))_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il}(BC)_{lj} = \sum_{l=1}^{n} a_{il}(\sum_{k=1}^{r} b_{lk}c_{kj}) = \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{r} a_{il}b_{lk}c_{kj}$$

I els dos resultats són el mateix ja que podem commutar els sumatoris. $\square$

Observació 2.11. El producte de matrius, en general, no és commutatiu (veure l'Exemple 2.8).

Proposició 2.12. *Si $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ i $B \in M_{n\times r}(\mathbb{K})$, llavors tenim la relació següent entre productes i transposades*

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Demostració. Escrivim les fórmules dels coeficients:

$$((AB)^T)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki}$$

mentre que

$$(B^T A^T)_{ij} = \sum_{k=1}^{n}(B^T)_{ik}(A^T)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki}a_{jk}$$

i són iguals per la propietat commutativa del producte. $\square$

Definició 2.13. Si considerem $\vec{v}$ i $\vec{w}$ vectors de $\mathbb{K}^n$, que escrivim com una columna cadascun, definim el *producte escalar* $\vec{v}\cdot\vec{w}$ com:

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = \vec{v}^T\vec{w}$$

Per tant, si les coordenades són:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \text{ llavors } \vec{v}\cdot\vec{w} = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i\,.$$

Volem definir la inversa d'una matriu quadrada, però com que el producte no és commutatiu, hauríem de parlar d'inversa per l'esquerra o per la dreta.

Definició 2.14. Diem que una *matriu quadrada* $A \in M_n(\mathbb{K})$ *és invertible* si existeix una matriu $B \in M_n(\mathbb{K})$ tal que $AB = BA = \mathbf{1}_n$.

Teorema 2.15. *Si A és una matriu quadrada $n\times n$ i B és una matriu també $n\times n$. Llavors $AB = \mathbf{1}_n$ si i només si $BA = \mathbf{1}_n$. En particular, si això passa, A és invertible i la inversa és única. Denotem la matriu B com A^{-1}.*

Demostració. La primera part la demostrarem quan tinguem el concepte de rang d'una matriu (Observacio 2.28). Vegem ara que si és tal que $AB = \mathbf{1}_n$, i C tal que $CA = \mathbf{1}_n$), llavors $B = C$:

$$C = C\mathbf{1}_n = C(AB) = (CA)B = \mathbf{1}_n B = B\,.$$

Això implica que la inversa és única: Suposem B' tal que $AB' = \mathbf{1}_n$, llavors, pel raonament d'abans, $B' = C = B$. $\square$

Proposició 2.16. (a) *Si $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ és invertible, llavors A^T també ho és i $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.*

(b) *Si $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ són matrius invertibles, llavors el producte AB també ho és i $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

Demostració. Demostrem primer (a): com que ens proposen una inversa, tant sols cal comprovar si podem veure que ho és:

$$(A^T)(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = \mathbf{1}_n^T = \mathbf{1}_n\,.$$

per tant, $(A^{-1})^T$ és inversa d'A^T (com que A^T és quadrada, pel Teorema 2.15, tant sols cal comprovar-ho per un dels cantons).

Demostrem ara (b): com que A i B són invertibles, existeixen les matrius inverses A^{-1} i $B^{-1} \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ respectivament. Llavors:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = A\mathbf{1}_n A^{-1} = AA^{-1} = \mathbf{1}_n$$

Igual que (a), això ja demostra que $B^{-1}A^{-1}$ és inversa d'AB. $\square$

Observació 2.17. D'aquí es dedueix que si $A_1, \ldots, A_r \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ són invertibles, el seu producte també ho és i $(A_1 \cdots A_r)^{-1} = A_r^{-1} \cdots A_1^{-1}$.

2.2 Transformacions elementals en matrius

Considerem una matriu organitzada per files (encara que tot el que farem aquí també es pot fer per columnes) i definim les *transformacions elementals*:

T1. Multiplicar una de les files per $\lambda \neq 0$.

T2. Sumar a una de les files μ vegades una altra fila.

T3. Intercanviar dues files.

Observació 2.18. Si considerem la matriu d'un sistema d'equacions i apliquem qualsevol de les transformacions elementals, no modifiquem les solucions.

Observació 2.19. Les tres transformacions elementals es poden desfer mitjançant una transformació elemental:

1. Multiplicar una de les files per $1/\lambda \neq 0$.

2. Sumar a una de les files $-\mu$ vegades una altra fila.

3. Intercanviar dues files.

Aquestes transformacions elementals es poden fer (i desfer) multiplicant per una matriu invertible P per l'esquerra. Suposem que A és una matriu amb m files:

T1. si apliquem aquest canvi a la fila i d'$\mathbf{1}_m$ tindrem una matriu P on hem modificat el 1 de la fila i per $\lambda \neq 0$. Llavors PA té els mateixos valors que A, però amb la fila i multiplicada per λ. En aquest cas, P^{-1} és una matriu identitat amb un $1/\lambda$ a la posició (i, i).

T2. si sumem a la fila i de la matriu $\mathbf{1}_n$ μ vegades la fila $k \neq i$ tindrem una matriu P tal que PA té a la fila i la fila i d'A més μ vegades la fila k d'A. En aquest cas, P^{-1} és una matriu amb 1 a la diagonal, 0 fora, excepte la posició (k, i), que val $-\mu$.

T3. si intercanviem les files i i k de la matriu $\mathbf{1}_n$ $(i \neq k)$ obtenim una matriu P tal que PA és el resultat d'intercanviar les files i i k d'A. En aquest cas, $P^{-1} = P$.

Amb aquests raonaments hem demostrat:

Proposició 2.20. *Si considerem la matriu identitat $\mathbf{1}_m$ i li apliquem transformacions elementals per files, la matriu P que obtenim és invertible. Si apliquem exactament les mateixes transformacions elementals a una altra matriu $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, la matriu que resulta és exactament PA.*

Definició 2.21. Diem que *dues matrius A i B són equivalents per files* si es pot passar d'A a B mitjançant transformacions elementals per files. Escriurem $A \sim B$.

Proposició 2.22.

- *$A \sim A$.*
- *$A \sim B$ si i només si $B \sim A$.*
- *$A \sim B$ i $B \sim C$ implica $A \sim C$.*

Demostració. La primera és **T3** per a $\mu = 0$.

La segona és que la inversa d'una transformació elemental és una transformació elemental (i les componem en ordre invers): si $P_1, \ldots P_r$ són les transformacions elementals que apliquem a A per obtenir B, resulta que:

$$P_r \cdots P_1 A = B$$

llavors

$$A = P_1^{-1} \cdots P_r^{-1} B$$

Però si P_i és una transformació elemental, P_i^{-1} també i per tant $B \sim A$.

La tercera és per definició de $\sim$, ja que passem de A a C fent primer els canvis elementals que transformen A en B i després els que transformen B en C. □

Definició 2.23. Diem que una matriu A està *en forma reduïda per files* si compleix que:

- El primer element no nul de cada fila val 1, i l'anomenem *pivot*.
- Si una columna té un pivot, aquest és l'únic element no nul de la seva columna.
- Si una fila conté un pivot a la columna j, les files superiors també tenen un pivot a una columna $j' < j$.

Exemple 2.24. De les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ i } C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la matriu A és reduïda per files, mentre que B i C no ho són.

Considerem ara l'algorisme següent (**Mètode de Gauss**), que aplica canvis elementals a una matriu A fins que obtenim una matriu en forma reduïda per files. A aquest mètode també li diem **triangular la matriu per files**.

Suposem que tenim una matriu $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ on la submatriu formada per les i_1 primeres files ja té forma reduïda.

G1 Busquem la primera columna que no sigui tota zero a la submatriu formada per les files i_1+1 fins la m (suposem columna j_1), i triem una fila a aquesta submatriu on hi hagi un element diferent de zero a aquesta columna. Si cal, apliquem el canvi **T3** per a que la fila i_1+1 tingui un valor diferent de zero a aquesta columna. Podem suposar, doncs, que $a_{i_1j_1} \neq 0$ i que $a_{ij} = 0$ si $i > i_1$ i $j < j_1$.

G2 Volem que a la posició (i_1, j_1) hi hagi un pivot ($=1$), per tant multipliquem tota la fila i_1 per $1/a_{i_1j_1}$ (canvi **T1**).

G3 Per a totes les files $i \neq i_1$ tals que $a_{ij_1} \neq 0$, hi restem la fila i_1 multiplicada per a_{ij_1} (canvi **T2**), de tal manera que farem que a la posició (i, j_1) hi hagi un zero per a tota $i \neq i_1$.

Ara hem aconseguit que la submatriu formada per les files $1, \ldots, i_1+1$ sigui en forma reduïda. Iterem aquest procediment fins que $i_1 = m$.

Aquest algorisme sempre acaba, ja que considerem matrius amb un nombre finit de files. A més, acabem de demostrar que:

Teorema 2.25. *Tota matriu $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ és equivalent a una matriu reduïda.*

Exemple 2.26. Considerem la matriu:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -5 & 4 \\ 2 & -3 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$

Apliquem el canvi **T3**, canviant la primera fila per la segona, obtenint:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$

Apliquem el canvi **T2**, restant a la tercera fila 2 cops la primera:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Com que a la segona fila, la primera posició ja és 1, podem utilitzar-la directament de pivot i sumar-la 2 cops a la primera fila, i restar-la a la tercera:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Les dues primeres files ja estan en forma reduïda, pel que podem considerar la tercera fila, i multiplicar-la per -1 per a que l'única posició no nul·la sigui un pivot:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalment restem la tercera fila a la primera multiplicada per 4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.3 Criteri d'invertibilitat. Rang d'una matriu

Considerem primer el resultat següent:

Teorema 2.27. *Donada una matriu quadrada $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, les condicions següents són equivalents:*

(a) *A és equivalent a $\mathbf{1}_n$.*

(b) *A és invertible.*

Demostració. Vegem primer (a) implica (b): si A és equivalent a $\mathbf{1}_n$, existeix P tal que $PA = \mathbf{1}_n$. Com que P és invertible, existeix P^{-1} i podem fer:

$$PA = \mathbf{1}_n \Rightarrow P^{-1}PA = P^{-1} \Rightarrow A = P^{-1} \Rightarrow AP = AP^{-1}P = \mathbf{1}_n$$

per tant P és la inversa d'A.

Vegem (b) implica (a): suposem que A no és equivalent a $\mathbf{1}_n$. Llavors, forçosament, quan l'esglaonem. hi haurà una fila sense pivot, i per tant, tot zeros. Llavors obtenim $PA = A'$, amb P invertible i A' una matriu que té l'última fila tot zeros. Si A fos invertible, voldria dir que existeix Q tal que $AQ = \mathbf{1}_n$, llavors, però llavors:

$$AQ = \mathbf{1}_n \Rightarrow PAQ = P \Rightarrow A'Q = P \Rightarrow A'(QP^{-1}) = \mathbf{1}_n$$

Observem ara que si A' té l'última fila tot zeros $A'(QP^{-1})$ també, i per tant no pot ser $\mathbf{1}_n$. □

Observació 2.28. Aquests resultats donen la demostració de la primera part del Teorema 2.15.

Observació 2.29. Si considerem $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ que es pot subdividir en 4 submatrius:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline \mathbf{0} & D \end{array}\right)$$

on la matriu $\mathbf{0}$ està formada per zeros i toca la diagonal (conté un coeficient amb coordenades (i,i)), llavors A no és invertible.

Demostració. Primer observem que per a que una matriu sigui invertible, l'esglaonament ha de fer que a totes les seves columnes (i files) hi hagi un pivot (es dedueix del Teorema 2.27).

Si fos invertible podríem fer els canvis elementals per files i obtenir $\mathbf{1}_n$. Com que la submatriu $\mathbf{0}$ toca la diagonal, llavors B té més columnes que files i D més files que columnes. Quan esgraonem la matriu A, el pivot de les primeres columnes ha de ser a B (sota hi ha zeros) i per tant no hi pot haver més pivots que files a B (a les columnes de B), per tant hi ha columnes de A sense pivot, i per tant no pot ser invertible. □

Podem utilitzar el concepte de matriu reduïda equivalent per a definir el rang d'una matriu A. Cal tenir en compte que necessitarem demostrar que la definició no depèn de quina matriu reduïda equivalent a A considerem.

Fem primer l'observació següent, que ens diu que les files diferent de zero d'una matriu en forma reduïda són *linealment independents*:

Observació 2.30. Si $A_1, \ldots, A_{i_1}$ són les files diferents de zero d'una matriu A reduïda per files, i considerem $\lambda_1, \ldots, \lambda_{i_1} \in \mathbb{K}$ tals que $\lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_{i_1} A_{i_1}$ té tots els coeficients zero, llavors $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{i_1} = 0$ (diem que les files $A_1, \ldots, A_{i_1}$ són *linealment independents*).

Demostració. Com que A està en forma reduïda, cada fila i diferent de zero conté un pivot (=1), i d'aquí resulta que s'ha de complir $\lambda_i = 0$. Això es pot aplicar a cada i. $\square$

Proposició 2.31. *Si A i B són dues matrius en forma reduïda que són equivalents, llavors $A = B$.*

Demostració. Vegem primer que tenen el mateix nombre de files diferent se zero: suposem que no, que una de les matrius té més files diferents de zero que l'altra. Podem suposar que A té i_1 files diferent de zero, que B té i_2 files diferent de zero i que $i_1 > i_2$.

A més, com que les dues matrius són equivalents, existeix una matriu invertible P (la composició de les transformacions elementals) tal que $PA = B$.

Quan fem $PA = B$, estem dient que les files de B són combinacions lineals de les d'A (que denotem per $A_1, \ldots A_m$). Tenim que:

$$0 = B_{i_2+1} = p_{i_2+1,1}A_1 + p_{i_2+1,2}A_2 + \cdots p_{i_2+1,i_1}A_{i_1}$$

i per l'Observació 2.30, $p_{i_2+1,1} = p_{i_2+1,2} = \cdots = p_{i_2+1,i_1} = 0$. Podem fer el mateix raonament per totes les files entre $i_2 + 1$ i n, per tant tenim que la matriu P és de la forma de l'Observació 2.29, i per tant no és invertible, arribant a contradicció.

Com que la contradicció ver de suposar que A i B tenen diferent nombre de files diferent de zero, vol dir que han de tenir el mateix nombre de files no nul·les.

Falta veure que les files no nul·les són iguals: com que són equivalents, existeix una matriu invertible P tal que $PA = B$, per tant, les files de B són combinació lineal de les d'A (i les d'A també són combinació de les de B). Això vol dir, en particular, que els pivots estan a les mateixes columnes (si no, posant les matrius una sobre l'altre $\left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}\right)$), l'esglaonament tindria més files diferent de zero).

Mirem la primera fila d'A i B: la posició del pivot bé donada per la primera columna no nul·la, i, com que són equivalents, ha de ser la mateixa, per tant (només escric com a combinació lineal de les files no nul·les, i que per tant tenen un pivot):

$$(b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{1n}) = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}) + \lambda_2(a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}) + \cdots + \lambda_{i_1}(a_{i_1 1}, a_{i_1 2}, \ldots, a_{i_1 n})$$

Utilitzem ara que els pivots estan a les mateixes columnes, que per tant tenen el corresponent $b_{ij=0}$ per a veure que $\lambda_2 = \cdots = \lambda_{i_1} = 0$.

Aquest argument es pot utilitzar a totes les files no nul·les: totes tenen un pivot a la mateixa posició i zero on hi ha el pivot de les altres files. $\square$

Ara ja podem definir el rang d'una matriu:

Definició 2.32. Donada una matriu A, definim el *rang d'A* com el nombre de files diferent de zero d'una matriu reduïda equivalent a A.

Corol·lari 2.33. *Si fem transformacions elementals a una matriu $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, el rang de la matriu resultant és el mateix. Això també ho podem enunciar dient que si $P \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ és una matriu invertible i $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, llavors* $\operatorname{Rang}(A) = \operatorname{Rang}(PA)$.

Corol·lari 2.34. *Una matriu quadrada $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ és invertible si i només si té rang n.*

Demostració. Considerem el Teorema 2.27, i per tant és invertible si i només si és equivalent a $\mathbf{1}_n$, per tant, si i només si té rang n. □

El Mètode de Gauss ens dóna una manera de calcular la inversa d'una matriu: suposem que ens donen una matriu $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Considerem la matriu formada per una matriu identitat $n \times n$ al costat de la matriu A:

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{1}_n & A \end{array} \right) \in M_{n\times 2n}(\mathbb{K})$$

Si apliquem canvis per files a aquesta matriu (cada fila té $2n$ coeficients) obtindrem matrius que podem escriure com:

$$\left(\begin{array}{c|c} P & A' \end{array} \right) \in M_{n\times 2n}(\mathbb{K})$$

amb $P, A' \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ i que compleixen que $PA = A'$.

Com a cas particular tenim que, si A és invertible, podem arribar a la situació

$$\left(\begin{array}{c|c} P & \mathbf{1}_n \end{array} \right) \in M_{n\times 2n}(\mathbb{K}) \tag{1}$$

i tindrem que $P = A^{-1}$.

Si la matriu A no fos invertible, no seria possible arribar a la situació de l'Equació (1): qualsevol matriu en forma reduïda equivalent a A tindria una fila tot zeros.

Exemple 2.35. Considerem la matriu:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -8 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Escrivim la matriu amb una còpia de la matriu identitat a l'esquerra:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \end{array} \right)$$

Esglaonem la part matriu de la dreta segon el mètode de Gauss, però els canvis afecten a tota la matriu:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -8 \\ -5 & 0 & 1 & 0 & -4 & -30 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ -5 & 0 & 1 & 0 & -4 & -30 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ -5 & -4 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ -5/2 & -2 & 1/2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -24 & -18 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 20 & 15 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ -5/2 & -2 & 1/2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Per tant:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -24 & -18 & 5 \\ 20 & 15 & -4 \\ -5/2 & -2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Exercici 2.1. Tot el que hem fet per files té el seu anàleg per columnes. Una manera senzilla d'adaptar totes les definicions i resultats és dir que la transposada compleix la definició per files. Per exemple:

La matriu A és *en forma reduïda per columnes* si A^T és en forma reduïda per files.

(a) Enuncieu l'anàleg per columnes de cada resultat que s'ha vist a aquest capítol per files.

(b) Demostreu que $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A^T)$.

2.4 Resolució de sistemes d'equacions lineals

Recordem la notació d'un sistema d'equacions:

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

Que també escrivim com $AX = B$, on

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ i } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Volem esbrinar si el sistema té solució o no, i, en cas de tenir-ne, saber quantes en té i calcular-les.

Una primera interpretació és considerar que tenim una solució X i fer el càlcul següent:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = B = AX = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

Per tant, una solució ens dóna B com a combinació lineal de les columnes d'A, i al revés: si podem escriure B com a combinació lineal de les columnes d'A, tenim una solució.

Argumentant amb el rang per columnes, ja tenim un criteri per saber si un sistema d'equacions lineals té solució o no:

Proposició 2.36. *El sistema d'equacions:*

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

té solució si i només si:

$$\text{Rang}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \text{Rang}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Demostració. Com que el rang d'una matriu és el mateix que el de la seva transposada, podem comparar el rang de les transposades: denotem per A la matriu associada al sistema i per $\overline{A}$ la matriu ampliada. Com que A^T està formada per les primeres n files d'$\overline{A}^T$ i $\overline{A}^T$ tant sols té una fila més (la dels termes independents), tenim que $\text{Rang}(A) \leq \text{Rang}(\overline{A}) \leq \text{Rang}(A) + 1$.

Si $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(\overline{A})$, vol dir que $\text{Rang}(A^T) = \text{Rang}(\overline{A}^T)$, per tant, la fila dels termes independents (el vector B^T) és combinació lineal de les files d'A^T, i per tant el vector B és combinació lineal de les columnes de A, que és el que volíem veure.

En canvi, si $\text{Rang}(A) < \text{Rang}(\overline{A})$, vol dir que $\text{Rang}(A^T) < \text{Rang}(\overline{A}^T)$ i el vector B^T no és combinació lineal de les files d'A^T, pel que B no ho és de les columnes d'A i el sistema no té solució. $\square$

El resultat anterior també es pot enunciar dient que si esglaonem per files la matriu ampliada del sistema, no queda cap fila on l'únic element no nul sigui a la columna de termes independents.

Com que les transformacions elementals per files a la matriu ampliada no modifiquen les solucions del sistema, suposem que hem esglaonat la matriu inicial del sistema. llavors, obtenint una matriu reduïda $\overline{A}'$:

(a) El sistema té solució si i només si l'última columna d'$\overline{A}'$ no té cap pivot. Si el sistema té solució, diem que el *sistema és compatible*, i quan no té solució, diem que és un *sistema incompatible.*

(b) Suposem que el sistema té solució, llavors cada pivot ens permet aïllar la variable corresponent a la seva columna.

(c) Continuem suposant que el sistema té solució: les columnes (de la matriu sense ampliar) que no tenen pivot definiran el que anomenem *paràmetres lliures*. N'hi haurà tants com $k := n-\text{Rang}(A)$, on n és el número de incògnites. En aquest cas direm que *la solució té dimensió k.*
En el cas particular que $k = 0$ diem que té solució única i diem que és un *sistema compatible determinat.*
Si $k > 0$ diem que és un *sistema compatible indeterminat amb k paràmetres lliures.*

Exemple 2.37. Considerem el sistema d'equacions:

$$\begin{aligned} x + y + 2z + 3t &= 21 \\ -x + 2y + z + 5t &= 26 \\ 3x + y - 2z + t &= -9 \\ 3x + 2y + z + 9t &= 38 \end{aligned}$$

Considerem la matriu ampliada i esglaonem:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 21 \\ -1 & 2 & 1 & 5 & 26 \\ 3 & 1 & -2 & 1 & -9 \\ 3 & 2 & 1 & 9 & 38 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 21 \\ 0 & 1 & 3 & 8 & 47 \\ 0 & 4 & -8 & -8 & -72 \\ 0 & 5 & -5 & 0 & -25 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & 11 & 68 \\ 0 & 1 & 3 & 8 & 47 \\ 0 & 0 & -20 & -40 & -260 \\ 0 & 0 & -20 & -40 & -260 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & 11 & 68 \\ 0 & 1 & 3 & 8 & 47 \\ 0 & 0 & -20 & -40 & -260 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & 11 & 68 \\ 0 & 1 & 3 & 8 & 47 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Com que el rang de la matriu associada és 3 i el de l'ampliada també, el sistema és compatible. Com que tenim 4 incògnites, té 4-3=1 paràmetre lliure (per tant, sistema compatible indeterminat). Amb l'esglaonament que hem fet, la t és el paràmetre lliure i podem escriure la solució:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ amb } t \in \mathbb{K}.$$

Exemple 2.38. Per tal d'aprofitar els càlculs del sistema anterior, tant sols fem una petita modificació al l'últim terme independent:

$$\begin{aligned} x + y + 2z + 3t &= 21 \\ -x + 2y + z + 5t &= 26 \\ 3x + y - 2z + t &= -9 \\ 3x + 2y + z + 9t &= 39 \end{aligned}$$

Considerem la matriu ampliada i esglaonem (són els mateixos passos d'abans, pel que tant sols escrivim la primera i última matriu):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 21 \\ -1 & 2 & 1 & 5 & 26 \\ 3 & 1 & -2 & 1 & -9 \\ 3 & 2 & 1 & 9 & 38 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

si som estrictes en el concepte de reduïda, falta utilitzar l'1 de l'última fila per a posar zeros a l'última columna. En qualsevol cas, veiem que la matriu ampliada té rang 4, mentre que l'associada té rang 3, pel que el sistema és incompatible.

Considerem ara el cas particular en que $B = \mathbf{0}_m$ (un vector format per zeros).

Definició 2.39. (a) Diem que el sistema d'equacions lineals $AX = B$ *és homogeni* si $B = \mathbf{0}_m$.

(b) Si $AX = B$ és un sistema, parlem de *sistema homogeni associat* al sistema $AX = \mathbf{0}_m$.

Tenim els resultats següents:

(a) Si el sistema és homogeni, llavors $X = \mathbf{0}_n$ és una solució, per tant el sistema és compatible.

(b) Si X és solució del sistema homogeni i $\lambda \in \mathbb{K}$, llavors λX també és solució del sistema: si ho pensem com a multiplicació de matrius, tenim la igualtat $A(\lambda X) = \lambda(AX) = \lambda \mathbf{0}_m = \mathbf{0}_m$, per tant λX també és solució.

(c) Si X i Y són solucions d'un sistema homogeni, llavors $X+Y$ també és solució: tornem a escriure-ho en forma matricial: $A(X+Y) = AX + AY = \mathbf{0}_m + \mathbf{0}_m = \mathbf{0}_m$.

(d) Si $AX = B$ és un sistema, amb X i Y una solucions, llavors $X - Y$ és una solució del sistema homogeni associat: $A(X - Y) = AX - AY = B - B = \mathbf{0}_m$.

(e) Si $AX = B$ és un sistema i X una solució particular, qualsevol altre solució Y es pot escriure com $Y = X + Z$, amb Z solució del sistema homogeni associat: això es dedueix de l'apartat anterior: si X i Y són solucions, llavors $Z = Y - X$ és solució de l'homogeni. Si X és solució del sistema i Z de l'homogeni associat, llavors $AY = A(X + Z) = AX + AZ = B + \mathbf{0}_m = B$.

Exemple 2.40. Considerem el sistema d'equacions de l'Exemple 2.37:

$$\begin{aligned} x+y+2z+3t &= 21 \\ -x+2y+z+5t &= 26 \\ 3x+y-2z+t &= -9 \\ 3x+2y+z+9t &= 38 \end{aligned}$$

Veiem que el sistema homogeni associat és

$$\begin{aligned} x+y+2z+3t &= 0 \\ -x+2y+z+5t &= 0 \\ 3x+y-2z+t &= 0 \\ 3x+2y+z+9t &= 0 \end{aligned}$$

i té per solució

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ amb } t \in \mathbb{K}.$$

Tenint en compte que una solució particular és $(x, y, z) = (3, 8, 13)$, podem escriure:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ amb } t \in \mathbb{K}.$$

2.5 Determinant d'una matriu quadrada

Per definir el determinant necessitem una notació que utilitzarem a aquesta secció (es pot confondre amb una de les notacions utilitzades a les seccions anteriors, fixeu-vos amb la c del superíndex).

Notació 2.41. Si $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, notem per $A^c_{ij} \in M_{(n-1)\times(n-1)}$ la matriu que resulta d'eliminar la fila i i la columna j d'A.

El determinant serà una aplicació que a cada $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ li assignarà un escalar que escriurem com $\det(A)$ o bé $|A| \in \mathbb{K}$. El podem definir de manera recurrent com:

1. En el cas de matrius 1×1 $A = (a)$. Definim $\det(A) = a$.
2. Si tenim una matriu $A \in M_{n\times n}(A)$, definim el determinant com:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1j} \det(A_{1j})\,.$$

Exemple 2.42.

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc\,.$$

Proposició 2.43. *Si $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, podem desenvolupar el determinant per qualsevol fila o columna segons les fórmules següents:*

$$\det(A) = \textstyle\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) \quad \textit{(si desenvolupem per la fila } i\textit{)},$$

$$\det(A) = \textstyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) \quad \textit{(si desenvolupem per la columna } j\textit{)}.$$

Demostració. Per a demostrar això, mirem com són tots els sumands i els comparem. L'hem definit de manera recursiva, i cada cop que fem una iteració anem esborrant la fila i columna corresponent a aquell coeficient. Per tant, hi haurà un coeficient de la primera fila, un altre de la segona, ..., de tal manera que cada cop agafem una columna diferent, i per tant tindrem el sumand:

$$(-1)^{\epsilon} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \tag{2}$$

amb $j_k \neq j_l$ si $k \neq l$, iel signe ve determinat per la paritat de ϵ. [**Albert: aquest resultat necessita permutacions, les introduïm?**]

Aquesta expressió no depèn de per quina fila o columna desenvolupem, pel que el resultat final serà el mateix. □

Proposició 2.44. *L'aplicació determinant té les propietats següents:*

(a) *Si A té una fila (o columna) tot zeros,* $\det(A) = 0$.

(b) $\det(\mathbf{1}_n) = 1$.

(c) *Si A' té els mateixos coeficients que la matriu A excepte una fila (o columna) que és la mateixa multiplicada per λ, tenim* $\det(A') = \lambda \det(A)$ *(transformació elemental **T1**).*

(d) *Si A' és el resultat d'agafar una una de les files (respectivament columnes) d'A i sumar-la a una altra fila (respectivament columna) multiplicada per $\mu \in \mathbb{K}$, llavors* $\det(A') = \det(A)$ *(transformació elemental **T2**).*

(e) *Si A' és el resultat d'intercanviar dues files (o columnes) d'A, tenim* $\det(A') = -\det(A)$ *(transformació elemental **T3**).*

Demostració. Per demostrar (a), desenvolupem per la fila (o columna) on tots els coeficients són zero, i la fórmula de la Proposició 2.43.

Per demostrar (b): fem-ho per inducció: (cas $n = 1$) observem que $\det(\mathbf{1}_1) = 1$. Suposem cert fins $n - 1$, o sigui, $\det(\mathbf{1}_{n-1}) = 1$. Calculem $\det(\mathbf{1}_n)$ desenvolupant per la primera fila i obtenim $\det(\mathbf{1}_n) = \det(\mathbf{1}_{n-1})$, per tant, per la hipòtesi d'inducció, $\det(\mathbf{1}_n) = 1$.

Per demostrar (c), sigui i (respectivament j) la fila (respectivament columna) de A que s'ha multiplicat per λ per obtenir A'. Desenvolupem els determinants d'A i A' per la fila i (o columna j). Veiem que els coeficients $a'_{ij} = \lambda a_{ij}$, pel que el determinant d'A' queda multiplicat per λ.

Vegem ara (e): suposem que intercanviem les files i_1 i i_2. Si i_1 i i_2 tenen la mateixa paritat, $(-1)^{i_1+j} = (-1)^{i_2+j}$, però $\det(A^c_{i_1j}) = -\det(A^c_{i_2j})$, per tant canvia el signe del determinant. Si i_1 i $_2$ tenen paritat diferent, $(-1)^{i_1+j} = -(-1)^{i_2+j}$ i $\det(A^c_{i_1j}) = \det(A^c_{i_2j})$, per tant també canvia el signe del determinant. Per columnes, el raonament és igual.

Amb el mateix raonament deduïm que si una matriu A té dues files iguals, i_1 i i_2 (o columnes iguals), el determinant és zero: com que els coeficient a_{i_1j} i a_{i_2j} són iguals, cada sumand de l'Equació (2) apareix dos cops i amb signe canviat, pel que la suma és zero.

Finalment vegem (d): si desenvolupem per la fila a la que hem afegit μ per una altra fila, obtenim el $\det(A') = \det(A) + \mu \det(B)$, on B és una matriu que té dues files iguals, pel que $\det(B) = 0$. □

Això ens permet calcular el determinant de qualsevol matriu utilitzant la triangulació: comencem amb la matriu A i anem fent les transformacions elementals per fila fins que tinguem la identitat (o una fila tot zeros) i apliquem (a) o (b) de la proposició anterior.

Exemple 2.45. Calculem el determinant d'A, on:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -8 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -8 \\ 5 & 6 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -8 \\ 0 & -4 & -30 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & -4 & -30 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2\det(\mathbf{1}_3) = -2\,.$$

Vegem ara més propietats dels determinants:

Proposició 2.46. *Si $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, llavors:*

(a) $\det(A) = 0$ *si i només si A no és invertible.*

(b) $\det(A) \neq 0$ *si i només si les files (i les columnes) d'A són linealment independent (diem que $\vec{v}_1$, $\dots$, $\vec{v}_r$, vectors de $\mathbb{K}^n$ són* linealment independents *si l'única manera d'escriure $\vec{0} = \lambda_1\vec{v}_1 + \dots + \lambda_r\vec{v}_r$ és posant $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$).*

(c) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Demostració. Recordem que una matriu és invertible si i només si podem aconseguir la identitat mitjançant transformacions elementals. En aquest cas, cada transformació modifica el determinant canviant-li el signe o multiplicant per un $\lambda \neq 0$. Llavors:

Si A és invertible, $\det(A) = \lambda\det(\mathbf{1}_n) = \lambda \neq 0$.

Si A no és invertible, $\det(A) = \lambda\det(B)$, on B és una matriu amb l'última fila tot zeros, per tant $\det(B) = 0$, d'on es dedueix que $\det(A) = 0$.

El raonament de files (o columnes) linealment independents és el mateix, tenint en compte que les files (o columnes) són linealment independents si i només si la matriu A és equivalent a la identitat.

[**Albert: escriure el producte**] □

Índex alfabètic

determinant, 15

element
    diagonal, 2

independència lineal, 10, 17

mètode de Gauss, 8
matriu, 2
    diagonal, 2
    identitat, 2
    inversa, 5, 9
    matriu reduïda, 7
    matrius equivalents, 7
    operacions, 3
    pivot, 7
    producte de matrius, 4
    producte per escalar, 3
    quadrada, 2
    rang, 10
    simètrica, 2
    suma, 3
    transformacions elementals, 6
    trasposada, 2
    triangular inferior, 2
    triangular superior, 2

producte escalar, 5

sistema d'equacions, 2, 4
    existència de solució, 12
    matriu ampliada, 3
    matriu associada, 3
    paràmetres lliures, 13
    sistema homogeni, 14
    sistema homogeni associat, 14
    termes independents, 3

vector, 2

Referències

[1] Otto Bretscher, *Linear Algebra with Applications*, 1997, Prentice-Hall International Inc.

[2] Enric Nart, Xavier Xarles, *Apunts d'àlgebra lineal*, 2016, Col.lecció Materials, 237, UAB.