Die Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung Lie.

James Clerk Maxwell (1831-1879) hat im Jahr 1860 theoretisch hergeleitet, wie die Geschwindigkeiten in einem idealen Gas statistisch verteilt sind. Abbildung 1 zeigt die Verteilung in Stickstoff bei 100 K und 300 K. Die Verteilung wird mit höherer Temperatur breiter und flacher, bewahrt aber sonst ihre Form. Die Verteilung hat ein Maximum bei Geschwindigkeit û und ist ziemlich breit. Gase enthalten somit immer Teilchen mit sehr grossen und sehr kleinen Geschwindigkeiten.

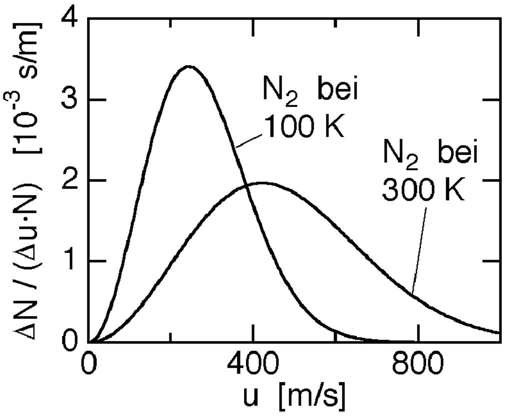

Abb. 1: Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung in reinem Stickstoff für zwei Temperaturen. Die Fläche unter jeder der Kurven ist Eins (= 100 %).

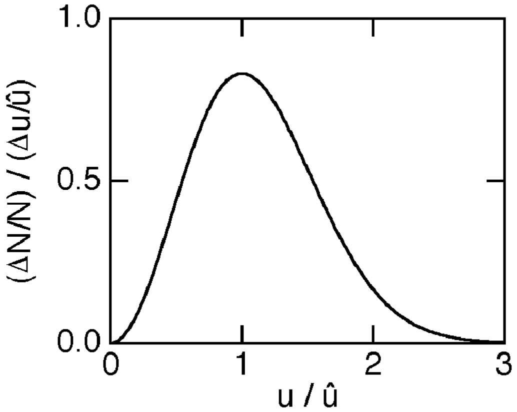

Abb. 2: Normierte Darstellung der Maxwellschen Geschwindigkeitsverteilung. Die Fläche unter der Kurve ist Eins, da jedes Teilchen mit Sicherheit eine Schnelligkeit hat.

Die Maxwell'sche Formel liefert die mittlere Zahl ΔN aus insgesamt N Teilchen eines idealen Gases, die eine Geschwindigkeit im schmalen Intervall [u, u+Δu] haben.

$$\Delta N = N \cdot \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{u^2}{\hat{u}^2} \cdot \exp\left(-\frac{u^2}{\hat{u}^2}\right) \cdot \frac{\Delta u}{\hat{u}} \qquad \text{mit} \qquad \hat{u} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

T ist die absolute Temperatur, k die Boltzmannkonstante und m die Teilchenmasse. Für Stickstoffmoleküle der Masse $4.65 \cdot 10^{-26}$ kg erhält man û = 422 m/s bei 300 K. Die Verteilung sieht für alle Temperaturen gleich aus, wenn man relative Häufigkeiten ΔN/N verwendet sowie alle Geschwindigkeiten auf û bezieht (Abb. 2).

An dieser Verteilung lassen sich verschiedene "Durchschnittswerte" demonstrieren:
Die Verteilung hat ein Maximum bei û, der wahrscheinlichsten oder **häufigsten** Schnelligkeit. (Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Teilchen genau û hat, ist Null.)
Das **arithmetische Mittel** der Geschwindigkeiten $\vec{u}$ ist Null, da alle Richtungen gleich häufig vorkommen und sich beim Mitteln kompensieren. Man sagt zwar Geschwindigkeitsverteilung, meint aber die Verteilung der Schnelligkeiten $u = |\vec{u}|$.
Das arithmetische Mittel der Schnelligkeiten ist $\hat{u} \cdot 4/\sqrt{\pi}$.
Das **quadratische Mittel** der Geschwindigkeit (Wurzel des arithmetischen Mittels von u^2) ist $(3kT/m)^{1/2}$. Dieser Wert folgt aus der mittleren Translationsenergie.