8. Die Parabel p: $y = ax - x^3$ schliesst im 1.Quadranten mit der x-Achse eine Fläche vom Inhalt A = 9 ein. Berechne a und skizziere die Parabel.

9. Eine Parabel 3.Ordnung hat in P(1/0) die Steigung m = 1 und berührt die x-Achse im Koordinatenursprung.
   a) Bestimme die Parabelgleichung, skizziere die Parabel.
   b) Berechne den Inhalt der Fläche zwischen der Parabel und der x-Achse.

10. Eine zur y-Achse symmetrische Parabel 4.Ordnung, die zwei Nullstellen hat, schneidet die x-Achse bei x = 4, die y-Achse bei y = 2 und schliesst mit der x-Achse eine Fläche vom Inhalt A = 44.8 ein.
    Bestimme die Parabelgleichung und skizziere die Parabel.

11. Eine Parabel 3.Ordnung berührt die x-Achse im Ursprung, hat ein Extremum bei x = 2 und schliesst im 1.Quadranten mit der x-Achse eine Fläche vom Inhalt A = 27 ein. Wie heisst die Gleichung dieser Parabel?

12. Die Parabel p: $y = \frac{1}{8}(x^3 - 12x + a)$ ist gegeben.
    a) Für welchen Wert von a berührt die Parabel p die x-Achse im 1. Quadranten?
    b) Ermittle Nullstellen, Extrema, Wendepunkte; zeichne diese Parabel.
    c) Berechne den Inhalt der Fläche zwischen Parabel und x-Achse.

13a) Bestimme a so, dass die Parabel p: $y = 2x^3 - 6x + a$ die x-Achse in einem Tiefpunkt berührt. Skizziere die Parabel.
  b) Berechne den Inhalt der Fläche zwischen Parabel und x-Achse.

14. Berechne den Inhalt des Flächenstückes, das die Graphen der Funktionen f_1 und f_2 einschliessen.
    a) f_1: $y = x$, f_2: $y = x^2$ b) f_1: $y = x$, f_2: $y = x^3$
    c) f_1: $y = 2x - 3$, f_2: $y = x^2 - 2x - 8$ d) f_1: $y = x^3$, f_2: $y = 2x - x^2$
    e) f_1: $y = x^2 - 3x$, f_2: $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ f) f_1: $y = x^2 - 9$, f_2: $y = x^3 - 9x$

15a) Bestimme die Extrema der Parabel p: $y = x^3 - 3x^2 + 6$ und skizziere die Parabel.
  b) Welchen Inhalt hat die Fläche zwischen Parabel und Tangente im Tiefpunkt?

16. Welchen Inhalt hat das Flächenstück, das die Parabel p: $y = 3x - x^2$ mit ihren Tangenten in den Nullstellen einschliesst?

17. Die Parabel p: $y = 3x^2 - x^3$ zerlegt das im 1.Quadranten liegende Quadrat ABCD mit A(0/0) und B(4/0) in drei Teile.
    Zeige dies und ermittle den Inhalt der drei Flächen.

18. Skizziere die Parabel p: $y = 3x(x^2 - 3x+2)$ und berechne den Inhalt der Fläche, welche begrenzt wird von der y-Achse, der Parabel und der Wendetangente.

19. Welchen Inhalt hat die Fläche, die von der Parabel p: $x^2 - 3y = 0$, der Kurventangente in $P(6/y_P)$ und der x-Achse begrenzt wird?

20. In welchem Verhältnis teilt die y-Achse das von der Parabel p: $y = x^3 - 2x - 4$ und der Tangente in der einzigen Nullstelle begrenzte Flächenstück?

21. Skizziere die Parabeln p_1: $y = x^3 - 5x^2 + 6x$ und p_2: $y = x^3 - 7x^2 + 12x$ im gleichen Koordinatensystem anhand ihrer Nullstellen und Schnittpunkte und ermittle den Inhalt der Fläche, welche die Parabeln einschliessen.

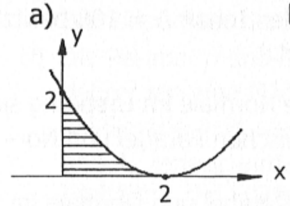
22. Eine Parabel 3.Ordnung schneidet die Parabel p: $y = (x - 2)^2$ bei x = 0 und berührt sie bei x = 2. Die beiden Parabeln schliessen im 1. Quadranten eine Fläche vom Inhalt A = 4 ein.
    Bestimme die Gleichung der Parabel 3.Ordnung.

23. Welchen Inhalt hat eines der beiden Flächenstücke, welches die Parabel p: $y = x^3 - x$ mit ihrer Normalen im Wendepunkt einschliesst?

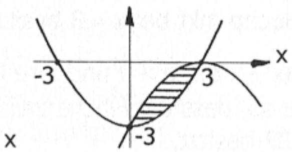
24. Eine Parabel 3.Ordnung geht durch den Ursprung. Sie hat ihren Wendepunkt bei x = 2; die Gerade g: $3x+y-8 = 0$ ist Wendetangente.
    a) Bestimme die Parabelgleichung, skizziere die Parabel.
    b) Welchen Inhalt hat das Flächenstück, das von Parabel, y-Achse und Wendetangente begrenzt wird?

25. Berechne den Inhalt der hervorgehobenen Fläche. Die Parabeln sind jeweils von kleinstmöglicher Ordnung.

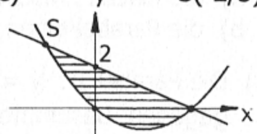
a)



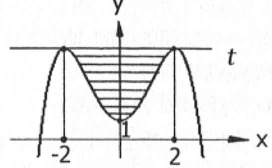
b)



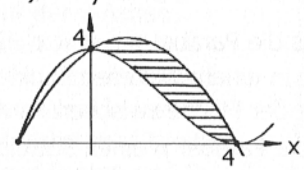
c) S(-2/3)



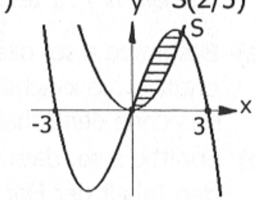
d) $t: y = 5$



e)

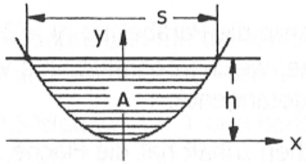


f) S(2/5)



26. Für den Flächeninhalt A des schraffierten Parabelsegments gilt:

$A = \frac{2}{3} h s$. Beweise dies.



27. Die Parabel p: $y = x^2$ wird von der Geraden g: $y = x+2$ in A und B geschnitten. In welchem Verhältnis stehen die Fläche des Parabelsegments und diejenige des Dreiecks OAB (O Koordinatenursprung)?

28. Eine Gerade durch den Ursprung schliesst mit der Parabel p: $y = x^2$ ein Flächenstück vom Inhalt A = 36 ein. Bestimme die Geradengleichung.

29. Eine Parallele zur x-Achse schliesst mit der Parabel p: $y = x^2$ eine Fläche vom Inhalt A = 36 ein. Welche Gleichung hat diese Parallele?

30. Für welchen Wert von a schliessen die Graphen der Funktionen f_1: $y = ax$ und f_2: $y = x^2 - ax$ eine Fläche vom Inhalt A = 36 ein?

31. Die Parabeln p_1: $y = x^2$ und p_2: $y = ax^2 + 9$ schliessen ein Flächenstück vom Inhalt A = 36 ein. Gesucht ist der Wert von a; aber es gibt ein Problem damit. Wie könnte die Aufgabestellung verändert werden?

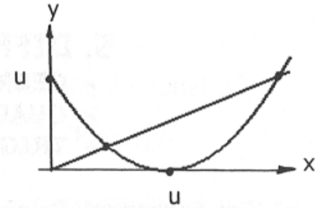
32. Die Parabel p: $x^2 - 2y = 0$ wird von einer Parabel 3.Ordnung im Ursprung berührt. Diese Parabel hat in P(3/4.5) ihren Hochpunkt.
   a) Bestimme die Parabelgleichung, skizziere beide Parabeln.
   b) Welchen Inhalt hat die von den Parabeln begrenzte Fläche A_1?
   c) Bestimme die reelle Zahl a > 3 so, dass die Gerade g: x = a mit den beiden Parabeln ein Flächenstück A_2 begrenzt, sodass gilt: $A_1 = A_2$.

33. Die Parabel p: $y = x(x-a)^2$ mit a > 0 ist gegeben. Bestimme a so, dass
   a) die Fläche zwischen Parabel und x-Achse den Inhalt A = 108 besitzt,
   b) die Parabel einen Hochpunkt bei x = 3 besitzt.

34a) Die Parabel p: $y = ax^2 - x$ mit a > 0 und ihre Normale im Ursprung sind gegeben. Bestimme a so, dass die Fläche zwischen Parabel und Normale den Inhalt A = 27 besitzt.
b) Zeige, dass die x-Achse die Fläche zwischen Parabel und Normale im Verhältnis 7 : 1 teilt, unabhängig vom Wert von a.

35a) Bestimme a so, dass die Parabel p: $y = x^3 - 2x^2 + ax$, die den Ursprung enthält, die x-Achse in einem weiteren Punkt *berührt*.
Berechne den Inhalt der Fläche zwischen Parabel p und x-Achse.
b) Ermittle a so, dass die Parabel p einen Sattelpunkt S besitzt; berechne den Inhalt der Fläche zwischen y-Achse, Parabel und Tangente in S.

36. Die Gerade g: $y = 0.5x$ und eine quadratische Parabel p schneiden sich in S_1 und S_2. Diese haben lauter ganzzahlige Koordinaten. Berechne den Inhalt der von g und p begrenzten Fläche für den kleinsten möglichen Wert von u.



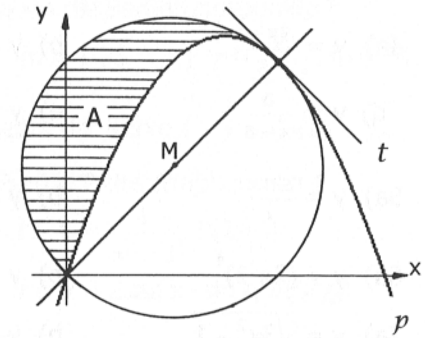
37a) Welchen Inhalt hat die Fläche, die begrenzt wird von den Parabeln

p_1: $y = \frac{x^2}{a} - a$ und p_2: $y = x^2 - a^2$ $(0 < a < 1)$?

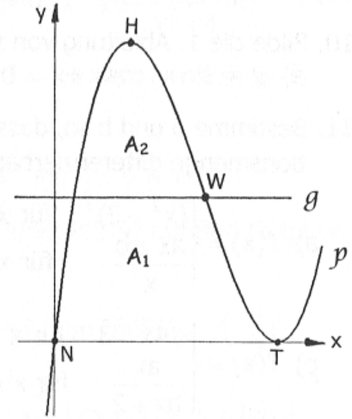
b) Für welchen Wert von a wird der Flächeninhalt maximal?
c) Was würde sich ändern, falls $a \geq 1$ statt $0 < a < 1$?

Zum Abschluss folgen zwei Maturaufgaben.

38. Ein Kreis mit dem Mittelpunkt M(2/2) und eine quadratische Parabel p sind gegeben (siehe Bild rechts).
Im Punkte P besitzen sie eine gemeinsame Tangente t.
Bestimme die Gleichung der Parabel p und den Inhalt der hervorgehobenen Fläche A.



39. Die Parabel p: $y = \frac{1}{4} x \cdot (x-6)^2$ ist rechts skizziert, ebenso eine Gerade g, die den Wendepunkt W enthält und parallel zur x-Achse verläuft.
   a) Berechne die Koordinaten der Nullstellen und Extrema sowie des Wendepunktes der Parabel p.
   b) Die Parabel p und die x-Achse begrenzen eine Fläche, die durch die Gerade g in die Teilflächen A_1 und A_2 zerlegt wird. Ermittle das Verhältnis der Flächeninhalte von A_1 und A_2.
   c) Der Punkt P liegt auf der x-Achse zwischen den Punkten N und T. Das Dreieck NPW soll ganz *innerhalb* der Teilfläche A_1 liegen und einen möglichst grossen Flächeninhalt haben. Gesucht sind die Koordinaten von P.



8. $a=6$ 9. $y=x^3-x^2$ $A=1/12$

10. $y = -\frac{1}{8}(x^4 - 15x^2 - 16)$ **11.** $y = -4x^3 + 12x^2$

12a) 16 **b)** N(-4/0), T(2/0), H(-2/4), W(0/2) **c)** 13.5 **13a)** 4 **b)** 13.5

26

14a) $\frac{1}{6}$ **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** 36 **d)** $\frac{37}{12}$ **e)** $11.8\overline{3}$ **f)** $49.\overline{3}$

15a) T(2/2), H(0/6) **b)** 6.75 **16.** 2.25

17. T(0/0),H(2/4),N(3/0); $A_{1,2,3}$: 4, 6.75, 5.25 **18.** N(0/0),N(2/0),N(1/0)=W; A = 0.75

27

19. 6 **20.** $A_{links} : A_{rechts} = 8 : 1$ **21.** Schnittpunkte S(0/0), S(3/0); A = 9

22. $y = 3x^3 - 11x^2 + 8x + 4$ **23.** A = 1 **24a)** $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ **b)** A = 4

25a) $p: y = 0.5(x-2)^2$, $A = 1.\overline{3}$ **b)** $p_1: y = \frac{1}{3}x^2 - 3$, $p_2: y = -\frac{1}{3}(x-3)^2$, A = 3

c) $g: y = -0.5x+2$, $p: y = 0.25x^2 - x$, A = 9 **d)** $p: y = -0.25x^4 + 2x^2 + 1$, $A = 8.5\overline{3}$

e) $p_1: y = -0.5x^2 + x + 4$, $p_2: y = 0.125x^3 - 0.75x^2 + 4$, $A = 5.\overline{3}$

28

f) $p_1: y = 1.25x^2$, $p_2: y = -0.5x^3 + 4.5x$, $A = 3.\overline{6}$

26. $p: y = \frac{4h}{s^2}x^2$ **27.** 3 : 2

28. $g: 6x \pm y = 0$ **29.** y = 9 **30.** $a = \pm 3$

31. Siehe Aufgabe 29 ! a = 0, d.h. es gibt keine Parabel p_2 für die Bedingung A = 36. Parabel p_2 existiert für A < 36 (für a < 0) oder A > 36 (für a > 0).

32a) $y = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2$ **b)** 2.25 **c)** 4 **33a)** a = 6 **b)** a = 9

34a) $a = \frac{2}{9}$ **b)** $A_u = \frac{1}{6a^2}$, $A_o = \frac{7}{6a^2}$, also $A_o : A_u = 7 : 1$

35a) $a = 1$, $A = \frac{1}{12}$ **b)** $a = \frac{4}{3}$, $S(\frac{2}{3}/\frac{8}{27})$, $A = \frac{4}{81}$

36. u = 4, $p: y = 0.25(x-4)^2$, $S_1(2/1)$, $S_2(8/4)$; A = 9

37a) $A = \frac{4}{3}(a^2 - a^3)$ **b)** $a = \frac{2}{3}$ **c)** $0 \le A \le \infty$ für $1 \le a \le \infty$, wobei $A = \frac{4}{3}(a^3 - a^2)$

29

38. $p: y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$, $A = 4\pi - \frac{16}{3} \approx 7.23$

39a) $N_1(0/0)$, N_2=T(6/0), H(2/8), W(4/4)

b) $g: y = 4$; $g \cap p$: bei $x_1 = 4$, $x_2 \approx 0.536$, $x_3 \approx 7.464$; $A_1 = 18$, $A_2 = 9$, $A_1 : A_2 = 2 : 1$

c) Max. Flächeninhalt, falls P auf Wendetangente t liegt. $t: y = -3x+16$, also $P(5.\overline{3}/0)$