Die Kugelschwebe

Aufbau und Durchführung

In einer halbkreisförmigen Rinne befinden sich eine Metall- und eine Holzkugel gleicher Grösse. Bei einer gleichförmige Drehung der Kugelschwebe um ihre senkrecht stehende Längsachse bewegen sich beide Kugeln in der halbkreisförmigen Rinne in die gleiche Höhe.

Abbildung 1: Halbkreisförmige Kunststoffrinne mit zwei Kugeln unterschiedlicher Masse. Bei Drehung steigen beide Kugeln auf die gleiche Höhe, die nur von der Drehzahl abhängig ist.

- Die Rinne wird in langsame Rotation versetzt. Die Kugeln steigen nicht in der Rinne hoch und bleiben am untersten Punkt liegen.
- Die Rinne wird in schnelle Rotation versetzt. Die Kugeln steigen an der gekrümmten Wand empor und bleiben in gleicher Höhe liegen
- Die Rotationsfrequenz wird weiter erhöht. Bei höherer Rotationsfrequenz vergrössert sich auch die Steighöhe

Theorie

Auf der Kugel wirken die Gewichtskraft F_G und die Normalkraft F_N. Die Resultierende Kraft (i.e. Zentripetalkraft) muss bei der Gleichgewichtslage (gleichförmige Kreisbewegung) horizontal sein. Hat die Kugel ihre Gleichgewichtslage erreicht, so ist das Verhältnis von Zentripetalkraft F_Z und Gewichtskraft F_G gleich dem Tangens des Winkels α, der von der Rotationsachse und der Verbindungsgeraden zwischen Kugelschalenmittelpunkt und Kugel eingeschlossen wird.

Es gilt also folgende Beziehung:

$$\tan\alpha = \frac{F_Z}{F_G} \tag{1}$$

$$\tan\alpha = \frac{m \cdot \omega^2 \cdot r}{mg} \tag{2}$$

$$\tag{3}$$

Dividiert man die Gleichung durch die Masse m des Körpers und beachtet, dass $r = R \cdot \sin\alpha$ ist, so

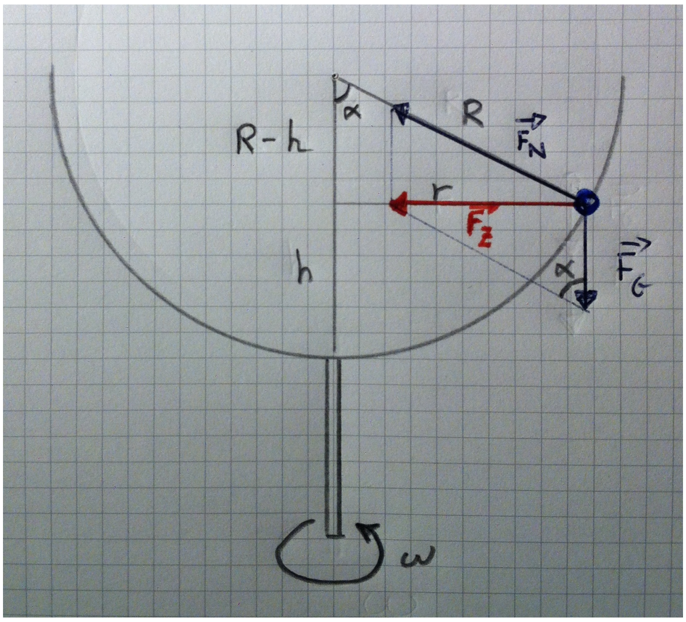

Abbildung 2: Kräftegleichgewicht bei der Kugelschwebe.

erhält man

$$\tan\alpha = \frac{\omega^2 \cdot r}{g} \tag{4}$$

$$\tan\alpha = \frac{\omega^2 \cdot R \cdot \sin\alpha}{g} \tag{5}$$

$$\tag{6}$$

Nun gilt $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ und folglich ist

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\omega^2 \cdot R \cdot \sin\alpha}{g} \tag{7}$$

$$\tag{8}$$

Offenbar hat diese Gleichung eine Lösung für $\alpha = 0$. Das heisst also, für $\alpha = 0$ ist ω beliebig wählbar; die Kugel bleibt stets im untersten Punkt liegen. Sei daher $\alpha \neq 0$; dann ist $\sin\alpha \neq 0$ und aus

$$\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{\omega^2 \cdot R}{g} \tag{9}$$

$$\alpha = \arccos(\frac{g}{\omega^2 \cdot R}) \tag{10}$$

Einer Winkelgeschwindigkeit ω ist also gemäss vorstehender Gleichung (10) genau ein Winkel α zugeordnet und man erkennt, dass bei wachsendem ω der Winkel α wächst, denn die Funktion arccos ist mit cos eine (streng monoton) fallende Funktion.

Die Steighöhe h beträgt

$$h = R - R \cdot \cos\alpha = R - \frac{g}{\omega^2} \tag{11}$$

Diskussion

Ferner muss hier beachtet werden, dass arccos nur für Werte ≤ 1 definiert ist, d.h. also (10) ist nur definiert für

$$\frac{g}{\omega^2 \cdot R} \leq 1 \tag{12}$$

$$\omega \geq \sqrt{\frac{g}{R}} \tag{13}$$

Falls nun $\omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$, so hat man $\alpha = \arccos(1) = 0$, im Widerspruch zur Voraussetzung $\alpha \neq 0$. Es muss also $\omega > \sqrt{\frac{g}{R}}$ gelten, damit die Kugel in der Rinne steigen kann. Für den Fall $R = 11\,\text{cm}$ ergibt sich die Bedingung $\omega > 9.44\,\text{Hz}$, d.h. $f > 1.5\,\text{Hz}$.

Bei Winkelgeschwindigkeit $\omega \leq \sqrt{\frac{g}{R}}$ wird die Kugel nicht ausgelenkt.

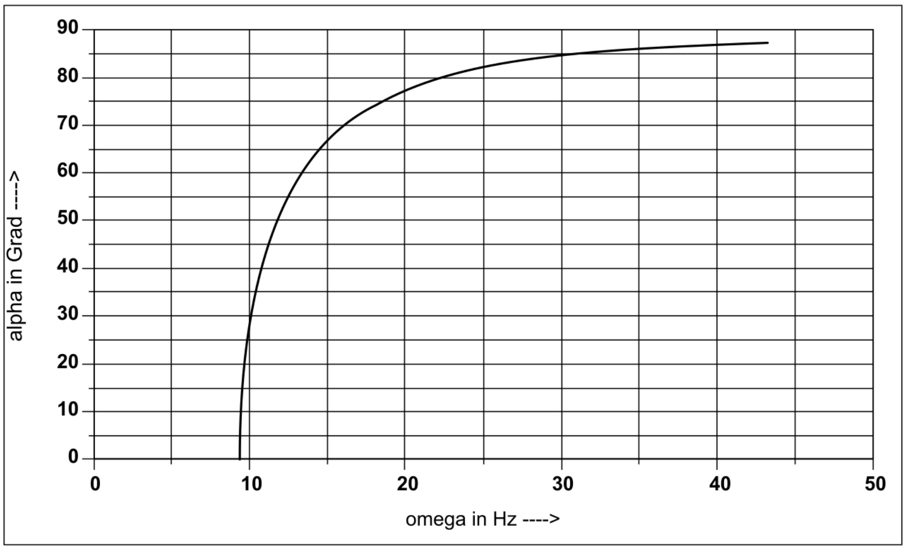

Abbildung 3: Der Graph der Funktion $\alpha(\omega)$ ist für R = 11 cm wiedergegeben. Hier kann man sehen, dass die Kugel mit steigender Winkelgeschwindigkeit niemals den Winkel $\alpha = 90°$ erreichen kann, sich diesem Wert aber mit wachsendem ω immer mehr annähert. $\alpha = 90°$ ist eine Asymptote der Funktion $\alpha(\omega)$.