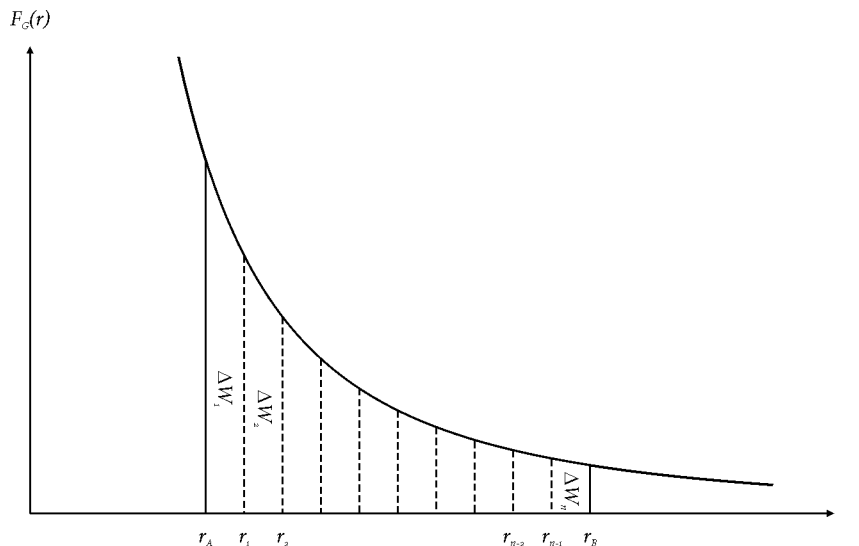


GRAVITATIONSARBEIT

Bei einem Raketenstart hängt die erforderliche Energie hauptsächlich davon ab, wie viel Arbeit gegen die Anziehungskraft des Planeten verrichtet werden muss. In der Nähe der Erdoberfläche entspricht dies der Hubarbeit.

Da aber die Gravitationskraft mit zunehmendem Abstand vom Planeten abnimmt, kann in grösserer Entfernung für die Berechnung der Arbeit nicht einfach die Kraft mit dem Weg multipliziert werden. Stellt man die Kraft als Funktion des Abstands dar, entspricht die Arbeit jedoch gerade der Fläche unter der Kurve.



Zur Berechnung der Arbeit zwischen zwei Punkten A und B im Abstand r_A bzw. r_B vom Zentrum des Planeten unterteilen wir den Weg in n Abschnitte: von r_A nach r_1 , von r_1 nach r_2 , ..., und schliesslich von r_{n-1} nach r_B . Für die Arbeit auf dem Wegstück i wird ein Mittelwert für die Kraft bestimmt und dieser mit der zurückgelegten Strecke multipliziert:

$$\Delta W_i = \bar{F}_i \cdot \Delta r_i = \bar{F}_i \cdot (r_i - r_{i-1})$$

Als Mittelwert für die Kraft wählen wir das geometrische Mittel¹ der Gravitationskräfte am Anfangs- und Endpunkt des betrachteten Wegstücks:

$$\bar{F}_i = \sqrt{F_i \cdot F_{i-1}} = \sqrt{G \frac{M m}{r_i^2} \cdot G \frac{M m}{r_{i-1}^2}} = G \frac{M m}{r_i r_{i-1}}$$

Die Arbeit auf dem Wegstück i ist damit

$$\Delta W_i = G \frac{M m}{r_i r_{i-1}} \cdot (r_i - r_{i-1}) = G M m \cdot \left(\frac{1}{r_{i-1}} - \frac{1}{r_i} \right)$$

Schliesslich beträgt die gesamte Arbeit von r_A nach r_B

$$\begin{aligned} W_{A \rightarrow B} &= \Delta W_1 + \Delta W_2 + \dots + \Delta W_n \\ &= G M m \cdot \left[\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_1} \right) + \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{r_{n-1}} - \frac{1}{r_B} \right) \right] = M m \cdot \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) \end{aligned}$$

Arbeit zum Verschieben einer Masse m im Gravitationsfeld einer Masse M (Gravitationsarbeit):

$$W_{A \rightarrow B} = G M m \cdot \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

¹ Grundsätzlich kann z.B. auch das arithmetische Mittel gewählt werden, allerdings stimmt dann das Ergebnis der Rechnung nur näherungsweise, bzw. die Wegstücke müssten „unendlich klein“ sein.