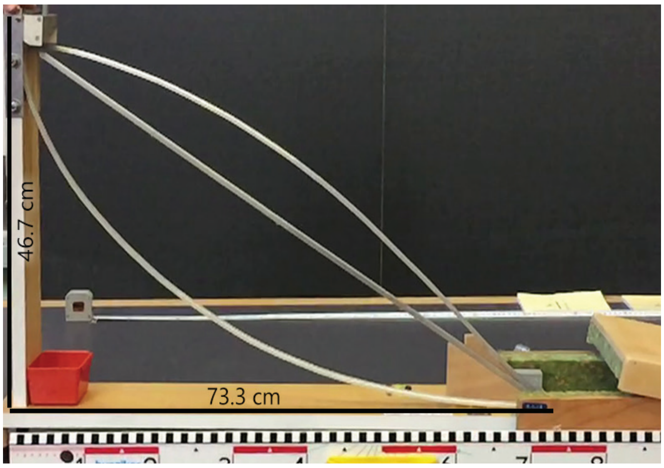
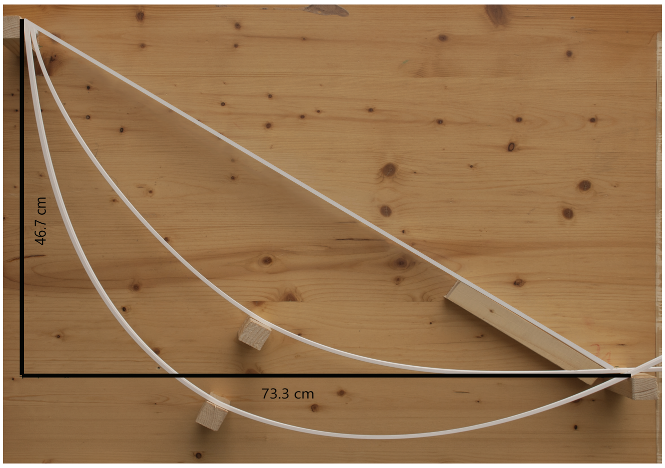
BRACHISTOCHRONE

PROJEKTUNTERRICHT IM FS 2015
SINA KLAMPT & TERESA WINTERGERSTE, 20. MAI 2015



Brachistochronenmodell der Schule:
- Gerade
- Brachistochrone
- umgekehrte Brachistochrone



Selbstgebautes Modell:
- Gerade
- Viertelkreis
- Kurve mit Länge 110cm

Bereits Galileo Galilei versuchte schon 1638 eine Antwort darauf zu finden, wie ein Massenpunkt A am schnellsten zu einem tiefergelegenen Punkt B gelangt. Für seine Lösung ging er von einer regelmässigen Kreislinie aus.
1696 veröffentlichte Johann Brenoulli die Fragestellung in der Leipziger Zeitschrift Acta Eruditorum: *„Wenn in einer verticalen Ebene zwei Punkte A und B gegeben sind, soll man dem beweglichen Punkte M eine Bahn AMB anweisen, auf welcher er von A ausgehend vermöge seiner eigenen Schwere in kürzester Zeit nach B gelangt."* Viele angesehene Mathematiker und Physiker dieser Zeit, wie Newton und Leibniz, antworteten auf die Fragestellung. Ihre Lösungen hatten alle gemeinsam, dass die schnellste Verbindung zwischen A und B die Kurve ist, die Teil einer Zykloide ist.

Modell	Zeit t [s]
Gerade (Schule)	0.55
Gerade (selbstgebaut)	0.668
Brachistochrone	0.4417
umgekehrte Brachistochrone	0.955
Viertelkreis	0.542
Kurve mit 110cm Länge	0.584

Parameterdarstellung der Brachistochrone:

$x = R(\varphi - \sin\varphi)$ und $y = R(-1 + \cos\varphi)$

Formel zur Berechnung der Zeit von A nach B

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_a^b \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{\sqrt{y(t)}}\, dt$$

Beispiel zur Berechnung des Viertelkreises:

Paramterform: $x(t) = 0.6146\cos t + 0.6108$ und $y(t) = 0.6146\sin t + 0.1165$.

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_a^b \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{\sqrt{y(t)}}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\cdot 9.81}} \int_0^{90} \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{\sqrt{y(t)}}\, dt = \mathbf{0.331s}$$