1. Mit einem Massstab wird eine Strecke von 15.4 cm mit einer Genauigkeit von 1 mm abgemessen. Wie gross ist der relative Fehler der Messung?
2. Die Masse eines Elektrons soll mit einer Genauigkeit von 2‰ bestimmt werden. Wie gross darf der absolute Fehler höchstens sein?
3. Eine Grösse a wird mit einer Genauigkeit von 1% gemessen. Wie gross sind die relativen Fehler der Grössen a^2 und $\sqrt{a}$?
4. Berechnen Sie die Dichte eines Würfels der Kantenlänge (3.20 ± 0.10) cm, dessen Masse (88.21 ± 0.35) g beträgt. Um welches Material handelt es sich?
5. Ein Wägelchen legt in 1.08 s eine Strecke von 3.29 m zurück. Die Zeitangaben sind auf 0.03 s genau, die Positionsangaben auf 4 cm. Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Wägelchens.
6. Eine Kugel hat einen Radius von (5.34 ± 0.12) cm. Wie gross ist das Volumen der Kugel?
7. Ein kugelähnliches Objekt hat ein Volumen von $(783.0 \pm 1.8)\,\mathrm{cm}^3$. Wie gross ist der Radius einer volumengleichen Kugel?
8. Bestimmen Sie durch Ausprobieren den Fehler von $\cos(\omega \cdot t)$ nach (4.32 ± 0.02) s, wenn die Winkelgeschwindigkeit $\omega = (7.18 \pm 0.01)\,\mathrm{s}^{-1}$ beträgt.
9. * Bei einer Messung des Luftwiderstands bestimmen Sie für verschiedene Geschwindigkeiten die Widerstandskraft. Der Fehler bei der Geschwindigkeitsmessung beträgt 0.04 m/s, bei der Kraftmessung 1.0 mN. Erstellen Sie anhand der Tabelle ein Diagramm und entscheiden Sie, ob der Luftwiderstand proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit ist.

v (m/s)	1	2	2.5	3	3.5
F_L (mN)	8.0	33.9	48.7	72.3	99.8

Hinweis: Alle Resultate müssen in korrekter Form mit absolutem Fehler angegeben werden!

Lösung

1. 0.7% **2.** $1.9 \cdot 10^{-33}$ kg **3.** 2%; 0.5% **4.** $(2.7 \pm 0.3)\,\mathrm{g/cm}^3$ **5.** $(3.0 \pm 0.2)\,\mathrm{m/s}$ **6.** $(638 \pm 43)\,\mathrm{cm}^3$ **7.** $(5.718 \pm 0.005)\,\mathrm{cm}$ **8.** 0.92 ± 0.09

Musterlösung

1. Der relative Fehler beträgt: $r_s = \frac{\Delta s}{s} = \frac{0.1\,\mathrm{m}}{15.4\,\mathrm{cm}} = 0.064 = 0.64\% \approx \underline{\underline{0.7\%}}$

2. Der absolute Fehler beträgt: $\Delta m = r_m \cdot m = 0.002 \cdot 9.109382 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg} = \underline{\underline{1.9 \cdot 10^{-33}\,\mathrm{kg}}}$.

3. Der relative Fehler auf a ist $r_a = 1\% = 0.01$.

   Mit Fehlerfortplanzung: Der relative Fehler der Grössen a^2 beträgt: $r_a^2 = \frac{\Delta a^2}{a^2} = 2 \cdot r_a = \underline{\underline{2\%}}$. (relativer Fehler mit Potenz multiplizieren).

   Mit Intervallarithmetik: $A = a^2 = a \cdot a$ und $A_{max} = a_{max} \cdot a_{max} = (a + \Delta a) \cdot (a + \Delta a) = (a + r_a \cdot a) \cdot (a + r_a \cdot a) = a^2 \cdot (1 + r_a)^2 = a^2 \cdot (1.01)^2 = a^2 \cdot 1.0201$. Der absolute Fehler beträgt: $\Delta A = 0.0201 \cdot a^2$. Der relative Fehler beträgt dann: $r_a^2 = \frac{\Delta A}{A} = \frac{0.0201 \cdot a^2}{a^2} = 0.0201 \approx 2\%$

   Der relative Fehler der Grössen $\sqrt{a} = a^{0.5}$ beträgt: $r_{a^{0.5}} = \frac{\Delta a^{0.5}}{a^{0.5}} = 0.5 \cdot r_a = \underline{\underline{0.5\%}}$. (Potenz multiplizieren)

4. Gegeben sind die Kantenlänge $a = (3.20 \pm 0.10)$ cm und Masse des Würfels $m = (88.21 \pm 0.35)$ g.

   Die Dichte beträgt: $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{a^3} = \frac{88.21\,\mathrm{g}}{(3.20\,\mathrm{cm})^3} = 2.69196\,\mathrm{g/cm^3} = 2.69\,\mathrm{g/cm^3}$.

   Mit Intervallarithmetik: $\rho_{max} = \frac{m_{max}}{V_{min}} = \frac{m + \Delta m}{(a - \Delta a)^3} = \frac{88.56\,\mathrm{g}}{(3.10\,\mathrm{cm})^3} = 2.97271\,\mathrm{g/cm^3}$. Die Abweichung entspricht den absoluten Fehler: $\Delta\rho = \rho_{max} - \rho = 0.28075\,\mathrm{g/cm^3} \approx 0.3\,\mathrm{g/cm^3}$ (immer aufrunden).

   Die Dichte beträgt dann: $\underline{\underline{\rho = (2.7 \pm 0.3)\,\mathrm{g/cm^3}}}$. Es ist wahrscheinlich Aluminium (siehe FoTa).

5. Die Strecke beträgt: $s = (3.29 \pm 0.04)\,\mathrm{m}$ und die Zeitdauer beträgt: $t = (1.08 \pm 0.03)\,\mathrm{s}$.

   Die Geschwindigkeit des Wägelchens ist $v = \frac{s}{t} = \frac{3.29\,\mathrm{m}}{1.08\,\mathrm{s}} = 3.0463\,\mathrm{m/s}$.

   Mit Intervallarithmetik: $v_{max} = \frac{s_{max}}{t_{min}} = \frac{s + \Delta s}{t - \Delta t} = \frac{(3.29 + 0.04)\,\mathrm{m}}{(1.08 - 0.03)\,\mathrm{s}} = 3.1714\,\mathrm{m/s}$. Die Abweichung entspricht den absoluten Fehler: $\Delta v = v_{max} - v = 0.125\,\mathrm{m/s} \approx 0.13\,\mathrm{m/s}$ (immer aufrunden).

   Die Geschwindigkeit dann: $\underline{\underline{v = (3.0 \pm 0.2)\,\mathrm{g/cm^3}}}$.

6. Gegeben ist der Kugelradius von $r = (5.34 \pm 0.12)$ cm. Gesucht ist das Volumen der Kugel. $V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = 637.84\,\mathrm{cm^3} = 638\,\mathrm{cm^3}$.

   Mit Fehlerfortplanzung gilt: $r_V = \frac{\Delta V}{V} = 3 \cdot \frac{\Delta r}{r}$. Aufgelöst nach ΔV gibt: $\Delta V = 3 \cdot \frac{\Delta r}{r} \cdot V = 3 \cdot \frac{\Delta r}{r} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = 4\pi \cdot r^2 \cdot \Delta r = 43.0\,\mathrm{cm^3}$.

   Das Volumen beträgt dann: $\underline{\underline{V = (638 \pm 43)\,\mathrm{cm^3}}}$.

7. Aus dem Volumen $V = (783.0 \pm 1.8)\,\mathrm{cm^3}$ kann man den Radius berechnen: $r = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot V}{4 \cdot \pi}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 783.0\,\mathrm{cm^3}}{4 \cdot \pi}} = 5.7177\,\mathrm{cm}$

   Der relative Fehler beträgt: $r_r = \frac{\Delta r}{r} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\Delta V}{V}$. Nach Δr umgeformt gibt: $\Delta r = \frac{1}{3} \cdot \frac{\Delta V}{V} \cdot r = \frac{1}{3} \cdot \frac{1.8\,\mathrm{cm^3}}{783.0\,\mathrm{cm^3}} \cdot 5.7177\,\mathrm{cm} = 0.00438\,\mathrm{cm} = 0.005\,\mathrm{cm}$. (Fehler immer aufrunden auf höchstens 2 signifikante Stellen).

   Der Radius beträgt: $\underline{\underline{r = (5.718 \pm 0.005)\,\mathrm{cm}}}$.

8. Wir definieren die Funktion $f(t, \omega) = \cos(\omega \cdot t)$ Wir berechnen die Funktion bei t_0 und ω_0:

   $f_0 = f(t = t_0, \omega = \omega_0) = \cos(\omega_0 \cdot t_0) = 0.9217$.

   Da die Funktion Cosinus nicht monoton ist, muss man alle Kombinationen von t und ω betrachten, um die f_{max} und f_{min} zu finden.

$$f_1 = f(t_{max}, \omega_{max}) = \cos(7.19 \cdot 4.34) = 0.97775 = f_{max} \quad (1)$$
$$f_2 = f(t_{min}, \omega_{min}) = \cos(7.17 \cdot 4.30) = 0.83375 = f_{min} \quad (2)$$
$$f_3 = f(t_{max}, \omega_{min}) = \cos(7.19 \cdot 4.30) = 0.878096 \quad (3)$$
$$f_4 = f(t_{min}, \omega_{max}) = \cos(7.17 \cdot 4.34) = 0.95589 \quad (4)$$

   Die grösste Abweichung von f_0 ist $\Delta f = f_0 - f_{min} = 0.08795 \approx 0.09$ (Fehler immer aufrunden auf höchstens 2 signifikante Stellen). Es folgt: $\underline{\underline{f = 0.92 \pm 0.09}}$.

9. Die Messpunkte weichen nur geringfügig von der Geraden ab und liegen innerhalb der Fehlerbalken. Der Luftwiderstand ist also proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit.

   Für die Fehlerrechnung von v^2 gilt: $\frac{\Delta(v^2)}{v^2} = 2 \cdot \frac{\Delta v}{v}$. Es folgt: $\Delta(v^2) = 2 \cdot \Delta v \cdot v$. Die berechnete Kraft beträgt: $F = m \cdot v^2$, mit m die Steigung der Anpassungskurve (hier $m = 8.0844\,\mathrm{mN} \cdot \mathrm{s}^2/\mathrm{m}^2$).

Aufgabe 9 Fehlerrechnung

v (m/s)	F (mN)	v^2 (m^2/s^2)	ΔF (mN)	Δv(m/s)	Δv^2(m^2/s^2)	F_th (mN)
1	8.0	1	1.0	0.04	0.08	8.0844
2	33.9	4	1.0	0.04	0.16	32.3376
2.5	48.7	6.25	1.0	0.04	0.2	50.5275
3	72.3	9	1.0	0.04	0.24	72.7596
3.5	99.8	12.25	1.0	0.04	0.28	99.0339