1. Ein 1.0 g schwerer Körper bewegt sich mit 90% der Lichtgeschwindigkeit. Wie gross sind seine Ruhe- und seine kinetische Energie sowie seine Gesamtenergie?
2. Wie schnell sind α-Teilchen mit einer kinetischen Energie von 5 MeV?
3. Berechnen Sie die Massenzunahme eines Satelliten ($m_0 = 1000\,\mathrm{kg}$), der auf seiner Erdumlaufbahn eine Geschwindigkeit von 28'000 km/h hat.
4. Auf welche Geschwindigkeit muss ein Elementarteilchen beschleunigt werden, damit sich seine Masse verdoppelt, verzehnfacht? Wie gross muss der Lorentzfaktor sein?
5. Wie gross ist der prozentuale Fehler, wenn man bei einer Geschwindigkeit von 0.1 c die relativistische Massenzunahme nicht berücksichtigt?
6. In einer Röntgenröhre werden Elektronen mit einer Spannung von 150 kV beschleunigt.
   (a) Welche Geschwindigkeit erreichen diese Elektronen dabei?
   (b) Welche Geschwindigkeit liefert die nichtrelativistische Rechnung?
   (c) Bei welcher Beschleunigungsspannung würden die Elektronen bei nichtrelativistischer Rechnung Lichtgeschwindigkeit erreichen?
7. Im neuen LHC in CERN haben die Protonen eine Gesamtenergie von 7.0 TeV.
   (a) Welcher Bruchteil davon ist Ruheenergie?
   (b) Wie gross ist der Lorentzfaktor γ?
   (c) Wie schnell sind die Protonen? Wie gross ist der Unterschied zur Lichtgeschwindigkeit: $c - v$?
8. Wechle Spannung muss ein Proton mindestens durchlaufen, damit nach dem Energiesatz ein neues Proton-Antiproton-Paar entstehen kann, wenn es auf eine anderes, ruhendes Proton prallt? ($p + p \;\rightarrow\; p + p + p + \bar{p}$)?

Lösung

1. 90 TJ, 116 TJ, 206 TJ **2.** 0.052 c **3.** $3.4 \cdot 10^{-7}$ kg **4.** $0.866c$, 0.995, 2, 10 **5.** 0.5%
6. a) 0.63 c b) 0.77 c c) 256 kV **7.** a) $1.3 \cdot 10^{-4}$ b) $7.5 \cdot 10^{3}$ c) 2.7 m/s **8.** 1.88 GV

Musterlösungen

1. Ruhenenergie: $E_0 = m_0 \cdot c^2 = 0.001\,\text{kg} \cdot (2.9979 \cdot 10^8\,\text{m/s})^2 = 8.9 \cdot 10^{13}\,\text{J} = \underline{\underline{90\,\text{TJ}}}$
   kinetische Energie $E_{kin} = (\gamma - 1) \cdot m_0 \cdot c^2 = (\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} - 1) \cdot m_0 \cdot c^2 = (\frac{1}{\sqrt{1-(0.9)^2}} - 1) \cdot 0.001\,\text{kg} \cdot (2.9979 \cdot 10^8\,\text{m/s})^2 = 8.9 \cdot 10^{13}\,\text{J} = \underline{\underline{116\,\text{TJ}}}$
   Gesamtenergie: $E_{kin} = \gamma \cdot m_0 \cdot c^2 = \frac{1}{\sqrt{1-(0.9)^2}} \cdot 0.001\,\text{kg} \cdot (2.9979 \cdot 10^8\,\text{m/s})^2 = 8.9 \cdot 10^{13}\,\text{J} = \underline{\underline{206\,\text{TJ}}}$

2. kinetische Energie: $E_{kin} = (\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} - 1) \cdot m_0 \cdot c^2$. Nach v aufgelöst:

$$\frac{E_{kin}}{m_0 \cdot c^2} = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} - 1 \quad (1)$$

$$(\frac{E_{kin}}{m_0 \cdot c^2} + 1)^2 = \frac{1}{1-(\frac{v}{c})^2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{(\frac{E_{kin}}{m_0 \cdot c^2} + 1)^2} = 1 - (\frac{v}{c})^2 \quad (3)$$

$$1 - \frac{1}{(\frac{E_{kin}}{m_0 \cdot c^2} + 1)^2} = (\frac{v}{c})^2 \quad (4)$$

$$\sqrt{1 - \frac{1}{(\frac{E_{kin}}{m_0 \cdot c^2} + 1)^2}} = \frac{v}{c} \quad (5)$$

$$(6)$$

Es folgt für die Geschwindigkeit v:

$$v = \sqrt{1 - \frac{1}{(\frac{E_{kin}}{m_0 \cdot c^2} + 1)^2}} \cdot c \quad (7)$$

$$= \sqrt{1 - \frac{1}{(\frac{5\,\text{MeV} \cdot 1.60217646 \cdot 10^{-13}\,\text{J/MeV}}{4.0026033\,\text{u} \cdot 1.66053886 \cdot 10^{-27}\,\text{kg/u} \cdot (2.9979 \cdot 10^8\,\text{m/s})^2} + 1)^2}} \cdot c \quad (8)$$

$$= 0.0517 \cdot c = \underline{\underline{0.052 \cdot c}} = \ \text{m/s} \quad (9)$$

3. .

Die Massenzunahme beträgt nur 0,34 Milligramm:
Da auch hier noch $v \ll c$ ist, darf man die Näherung $1/\sqrt{1 - v^2/c^2} \approx 1 + v^2/2c^2$ benutzen.
Aus $m = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2} \approx m_0(1 + \frac{1}{2}(v/c)^2)$ folgt
$\Delta m = m - m_0 = \frac{1}{2}(v/c)^2\, m_0$
$= \frac{1}{2}(7{,}8\,\text{km/s}/300000\,\text{km/s})^2 \cdot 1000\,\text{kg}$
$= 3{,}4 \cdot 10^{-7}\,\text{kg}.$

4. .

Aus $m/m_0 = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ folgt
$v/c = \sqrt{1 - (m_0/m)^2}$:

m/m_0	2	10	100
v/c	0,866	0,995	0,999 95

5. .

Der prozentuale Fehler berechnet sich zu

$(m - m_0)/m_0 = m/m_0 - 1$

$= 1/\sqrt{1 - v^2/c^2} - 1 = 0{,}005 = 0{,}5\,\%$

für $v/c = 0{,}1$.

Weitere Werte:

v/c	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9	0,99
Fehler	2,1%	9,1%	25%	67 %	129%	609%

6. .

a) Die kinetische Energie der Elektronen beträgt demnach 150 keV. Relativistisch versteht man unter der kinetischen Energie:

$$E_{\text{kin}} = \Delta m \cdot c^2 = (m - m_0) \cdot c^2 \,.$$

Dies muss gleich der den Elektronen zugeführte Energie $W = e \cdot U$ sein. Somit erhalten wir die Gleichung:

$$e \cdot U = (m - m_0) \cdot c^2 = \left(\frac{m_0}{\gamma} - m_0\right) \cdot c^2 = m_0 \cdot \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) \cdot c^2 \,.$$

Nach γ aufgelöst:

$$\gamma = \left(1 + \frac{e \cdot U}{m_0 \cdot c^2}\right)^{-1} \,.$$

Und mit $\gamma = \sqrt{1 - \beta^2}$ folgt schliesslich

$$\beta = \sqrt{1 - \gamma^2} = \sqrt{1 - \left(1 + \frac{e \cdot U}{m_0 \cdot c^2}\right)^{-2}} = \sqrt{1 - \left(1 + \frac{150\,\text{keV}}{511\,\text{keV}}\right)^{-2}} = \underline{\underline{0.63}} \,.$$

Also bekommen wir $\underline{\underline{\boldsymbol{v = 0.63\,c}}}$.

b) Es gilt

$$e \cdot U = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \,.$$

Daraus folgt

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot e \cdot U}{m}} = \underline{\underline{2.298 \cdot 10^8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}} \,.$$

Oder: $\beta = \frac{v}{c} = 0.766$ und damit $\underline{\underline{\boldsymbol{v = 0.77\,c}}}$.

c) Mit

$$e \cdot U = \frac{1}{2} \cdot m \cdot c^2$$

bekommt man

$$U = \frac{m \cdot c^2}{2 \cdot e} = \underline{\underline{256\,\text{kV}}} \,.$$

7. (a) Die Ruheenergie ist:

$$\begin{aligned} E_0 = m_0 \cdot c^2 &= 1.672621637 \cdot 10^{-27}\,\text{kg} \cdot (2.9979 \cdot 10^8\,\text{m/s})^2 = 1.5 \cdot 10^{-10}\,\text{J} && (10) \\ &= 938.272013\,\text{MeV/c}^2 \cdot c^2 = 938.272013\,\text{MeV} && (11) \end{aligned}$$

Daraus folgt für das Verhältnis der Ruheenergie zur Gesamtenergie:

$$\frac{E_0}{E_{tot}} = \frac{m_0 \cdot c^2}{E_{tot}} = \frac{938.3\,\text{MeV}}{7\,\text{TeV}} = \underline{\underline{1.3 \cdot 10^{-4}}} \qquad (12)$$

(b) Aus $E_{tot} = \gamma \cdot E_0$ folgt für den Lorentzfaktor:

$$\gamma = \frac{E_{tot}}{E_0} = \frac{E_{tot}}{m_0 \cdot c^2} = \frac{7\,\text{TeV}}{938.3\,\text{MeV}} = \underline{\underline{7460}} = 7.5 \cdot 10^3 \tag{13}$$

(c) Die Geschwindigkeit der Protonen bei dieser (maximale) LHC-Energie berechnen wir aus dem Lorentzfaktor γ:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{14}$$

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{\gamma^2} \tag{15}$$

$$v = c \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \tag{16}$$

$$v = 0.999999991 \cdot c \tag{17}$$

Der Unterschied zwischen der Geschwindigkeit und (Vakuum) Lichtgeschwindigkeit beträgt:

$$c - v = c - 0.999999991 \cdot c = \underline{\underline{2.69\,\text{m/s}}} \tag{18}$$

Mit der Näherung für den Lorentzfaktor ergibt sich:

$$c - v = c \cdot (1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}) \tag{19}$$

$$c - v \approx c \cdot (1 - (1 - \frac{1}{2 \cdot \gamma^2})) = \frac{c}{2 \cdot \gamma^2} \tag{20}$$

$$c - v \approx \frac{2.9979 \cdot 10^8\,\text{m/s}}{2 \cdot 7460^2} = 2.69\,\text{m/s} \tag{21}$$

$$\tag{22}$$

8. $2 \cdot m_0 \cdot c^2 + e \cdot U = 4 \cdot m_0 \cdot c^2$. Es folgt für die Spannung:

$$U = \frac{2 \cdot m_0 \cdot c^2}{e} = \frac{2 \cdot 0.938272\,\text{GeV}}{e} = \underline{\underline{1.88\,\text{GV}}} \tag{23}$$

Hier benützen wir am besten die Masse vom Proton in GeV/c^2 (siehe Fota).