1. Setzen Sie bei den folgenden Zahlenpaaren einen Vergleichsoperator ($>$, $=$, $<$) ein. Falls ein Vergleich keinen Sinn macht, verwenden Sie das Ungleichheitszeichen ($\neq$).

   a) 12 AE $\quad 2.5 \cdot 10^9$ m $\qquad$ b) 2.7 kg/cm^3 $\quad$ 2.7 g/mm^3 $\qquad$ c) 3.5 dl $\quad$ 350 g

   d) 1.5 kW $\quad$ 5.4 MJ/h $\qquad$ e) 5 kWh $\quad 5 \cdot 10^3$ W $\qquad$ f) 240 kcal $\quad$ 837.36 J

2. Geben Sie die Entfernung des Sternes Beteigeuze (α-Ori) in Astronomischen Einheiten (vgl. FoTa S. 205 und folgende) an.
3. Die grosse Halbachse einer Ellipse ist 10% grösser als die kleine Halbachse. Berechnen Sie die numerische Exzentrizität der Ellipse.
4. Berechnen Sie die Perihel - und die Apheldistanz der Erde von der Sonne. Wie gross ist die lineare Exzentrizität der Bahnellipse der Erde um die Sonne?
5. Zwei Planeten bewegen sich um den gleichen Stern. Ihre Umlaufzeiten verhalten sich wie 2 : 1. Um welchen Faktor unterscheiden sich ihre grossen Halbachsen?
6. Der Jupitermond Io kreist auf einer Bahn mit grosser Halbachse 442000 km in 1.8 Tagen einmal um den Planeten. Der Mond Ganymed braucht für eine Umkreisung 7.2 Tage. Wie gross ist die grosse Halbachse der Umlaufbahn von Ganymed?
7. Der Planetoid Eros besitzt eine Umlaufzeit von 643 Tagen. Berechnen Sie seine mittlere Entfernung von der Sonne in Astronomischen Einheiten (AE).
8. Berechnen Sie die mittlere Bahngeschwindigkeit von Merkur unter der Annahme, er bewege sich auf einer Kreisbahn mit der grossen Halbachse als Radius. Wie gross ist die Abweichung (in Prozent) zum Wert in der FoTa?
9. Ein Space Shuttle umkreist die Erde auf einer Höhe von etwa 400 km über der Erdoberfläche. Berechnen Sie die Dauer einer Umrundung, also die Umlaufzeit.
10. * Drücken Sie das Verhältnis der Geschwindigkeiten eines Planeten im Perihel und im Aphel seiner Bahn, v_P und v_A, durch die numerische Exzentrizität ϵ dieser Bahn aus. Wie ist das Verhältnis bei der Erde?

Lösung

1. a) $>$ b) $=$ c) $\neq$ d) $=$ e) $\neq$ f) $>$ **2.** $2.70 \cdot 10^7$ AE **3.** 0.42 **4.** $147.1 \cdot 10^6$ km, $152.1 \cdot 10^6$ km, $2.5 \cdot 10^9$ m **5.** 1.6 **6.** $1.11 \cdot 10^6$ km **7.** 1.46 AE **8.** 47.86 km/s, 0.02% **9.** 100 min **10.** 1.0340

Musterlösung

1. Setzen Sie bei den folgenden Zahlenpaaren einen Vergleichsoperator (>, =, <) ein. Falls ein Vergleich keinen Sinn macht, verwenden Sie das Ungleichheitszeichen ($\neq$).

   a) 12 AE $\quad 2.5 \cdot 10^9$ m $\qquad$ b) 2.7 kg/cm^3 $\quad$ 2.7 g/mm^3 $\qquad$ c) 3.5 dl $\quad$ 350 g

   d) 1.5 kW $\quad$ 5.4 MJ/h $\qquad$ e) 5 kWh $\quad 5 \cdot 10^3$ W $\qquad$ f) 240 kcal $\quad$ 837.36 J

2. Geben Sie die Entfernung des Sternes Beteigeuze (α-Ori) in Astronomischen Einheiten (vgl. FoTa S. 209 und folgende) an.
   Lösung: 1 AE = mittlere Entfernung Sonne - Erde = $1.496 \cdot 10^{11}$ m
   1 LJ = Weg des Lichtes in einm Jahr = 63240AE
   Entfernung von Ori: $s = 427\,\text{LJ} = 427\,\text{LJ} \cdot 63240\,\text{AE/LJ} = 2.70 \cdot 10^7$ AE

3. Die grosse Halbachse einer Ellipse ist 10% grösser als die kleine Halbachse. Berechnen Sie die numerische Exzentrizität der Ellipse.
   Lösung: $\epsilon = e/a = \sqrt{a^2 - b^2}/a = \sqrt{1^2 - 1/1.1^2} = 0.4166 = 0.42$

4. Berechnen Sie die Perihel - und die Apheldistanz der Erde von der Sonne. Wie gross ist die lineare Exzentrizität der Bahnellipse der Erde um die Sonne?
   Lösung: Grosse Halbachse: $a = 149.6 \cdot 10^9$ m (Fota)
   Kleine Halbachse: $b = \sqrt{a^2 - e^2} = 149.6 \cdot 10^9$ m
   $a - b = a - \sqrt{a^2 - e^2} = a - a\sqrt{1 - \epsilon^2} = 21000$ km, 0.02 %
   $\epsilon = 0.016722$ (Fota s. 212)
   $e = \epsilon \cdot a = 2.5 \cdot 10^9$ m
   $RP = a - e = 147.1 \cdot 10^6$ km
   $RA = 2a - RP = a + e = 152.1 \cdot 10^6$ km

5. Zwei Planeten bewegen sich um den gleichen Stern. Ihre Umlaufzeiten verhalten sich wie 2 : 1. Um welchen Faktor unterscheiden sich ihre grossen Halbachsen?
   Lösung: $a_1/a_2 = \sqrt[3]{(T_1/T_2)^2} = \sqrt[3]{2^2} = 1.6$

6. Der Jupitermond Io kreist auf einer Bahn mit grosser Halbachse 442000 km in 1.8 Tagen einmal um den Planeten. Der Mond Ganymed braucht für eine Umkreisung 7.2 Tage. Wie gross ist die grosse Halbachse der Umlaufbahn von Ganymed?
   Lösung: 3. Kepler $(T_1/T_2)^2 = (a_1/a_2)^3$
   $a_2 = \sqrt[3]{\frac{a_1^3 \cdot T_2^2}{T_1^2}} = a_1 \cdot \sqrt[3]{16} = 442000\,\text{km} \cdot 2.5198 = 1113770\,\text{km} = 1.1 \cdot 10^6\,\text{km}$

7. Der Planetoid Eros besitzt eine Umlaufzeit von 643 Tagen. Berechnen Sie seine mittlere Entfernung von der Sonne in Astronomischen Einheiten (AE).
   Lösung: Die Kepler-Konstante (3. Kepler): $C_{Sonne} = \frac{T_{Eros}^2}{a_{Eros}^3} = \frac{T_{Erde}^2}{a_{Erde}^3}$. Nach a_{Eros} aufgelöst: $a_{Eros} = \frac{T_{Eros}^{2/3}}{T_{Erde}^{2/3}} \cdot a_{Erde} = (\frac{T_{Eros}}{T_{Erde}})^{2/3} \cdot a_{Erde} = (\frac{643}{365.25})^{2/3} \cdot 1\,\text{AE} = 1.458\,\text{AE} = 1.46\,\text{AE}$

8. Berechnen Sie die mittlere Bahngeschwindigkeit von Merkur unter der Annahme, er bewege sich auf einer Kreisbahn mit der grossen Halbachse als Radius. Wie gross ist die Abweichung (in Prozent) zum Wert in der FoTa?
   Lösung: Aus der FoTa: Grosse Halbachse: $a_{Merkur} = 57.9 \cdot 10^6$ m; Umlaufzeit $T_{Merkur} = 87.969$ d
   Bahngeschwindigkeit $v = 2\pi \cdot a_{Merkur}/T_{Merkur} = 47.86\,\text{km/s}$
   Abweichung $= 1 - vM/V_{FoTa} = (1 - 47.86/47.87) = 0.02\%$

9. Ein Space Shuttle umkreist die Erde auf einer Höhe von etwa 400 km über der Erdoberfläche. Berechnen Sie die Dauer einer Umrundung, also die Umlaufzeit.
Lösung: $C_{erde} = \frac{27.321662 \cdot 24 \cdot 3600\,\mathrm{km}^2}{(3.844 \cdot 10^8\,\mathrm{m})^3} = 9.81 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{s}^2/\mathrm{m}^3 = \frac{T^2}{a^3}$
$T = \sqrt{a^3 \cdot C_{erde}} = \sqrt{(6378100\,\mathrm{m} + 400000\,\mathrm{m})^3 \cdot C_{erde}} = 1.67\,\mathrm{h} = 100.45\,\mathrm{min} = 100\,\mathrm{min}$

10. Drücken Sie das Verhältnis der Geschwindigkeiten eines Planeten im Perihel und im Aphel seiner Bahn, v_P und v_A, durch die numerische Exzentrizität ϵ dieser Bahn aus. Wie ist das Verhältnis bei der Erde?
Lösung:

Das 2. Keplersche Gesetz lautet: Flächengeschwindigkeit ist konstant, also $\frac{\Delta A}{\Delta t} = konst$. Werden die Flächen im Perihel und Aphel durch gleichschenklige Dreiecke angenähert, erhält man die Fläche im Perihel und Aphel:

$$A_i = \frac{s_i \cdot r_i}{2} \qquad \text{mit} \qquad i = A, P \tag{1}$$

Es folgt:

$$A_A = A_P \tag{2}$$
$$\frac{s_P \cdot r_P}{2\Delta t} = \frac{s_A \cdot r_A}{2\Delta t} \tag{3}$$

Mit $s_P = v_P \cdot \Delta t$ und $s_A = v_A \cdot \Delta t$ erhält man:

$$v_P \cdot r_P = v_A \cdot r_A \tag{4}$$

$$\frac{v_\mathrm{P}}{v_\mathrm{A}} = \frac{r_\mathrm{A}}{r_\mathrm{P}} \tag{5}$$

Weil $r_A = a - e = a(1-\epsilon)$ und $r_P = a + e = a(1+\epsilon)$ ist, beträgt das Verhältnis der Perihel-und Aphelgeschwindigkeiten:

$$\frac{v_\mathrm{P}}{v_\mathrm{A}} = \frac{r_\mathrm{A}}{r_\mathrm{P}} = \frac{a(1+\epsilon)}{a(1-\epsilon)} = \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} = \frac{1+0.016722}{1-0.016722} = 1.0340 \tag{6}$$

Das Verhältnis ist grösser als 1! Schneller im Perihel als im Aphel.