Fehlerrechnung

Lie.

Eine Museumsbesucherin fragt einen Aufseher nach dem Alter eines Saurierskeletts. "180 Millionen Jahre und 34 Tage." "Warum 34 Tage?" "Als ich hier anfing, war es 180 Millionen Jahre alt, das war vor 34 Tagen." Wenn Sie den Witz lustig finden, verstehen Sie bereits, worum es in der Fehlerrechung geht.

1. Fehlerarten

Man unterscheidet grobe, systematische und zufällige Fehler. Ein grober Fehler liegt z.B. vor, wenn ein Massstab falsch abgelesen wird. Grobe Fehler lassen sich durch sorgfältiges Arbeiten vermeiden. Systematische Fehler beruhen auf fehlerhaften Apparaturen oder Methoden, z.B. Messung mit einem verzogenen Massstab. Systematische Fehler kann man durch Wechsel der Messmethode erkennen. Zufällige Fehler entstehen zum Beispiel, weil elektronische Messgeräte rauschen, da die Elektronen Wärmebewegungen ausführen. Zufällige Fehler lassen sich nicht verhindern. Ihr Einfluss lässt sich aber verringern durch Wiederholungen der Messung und Bildung eines Mittelwerts.

2. Absolute Fehlerschranken Δa

$a \pm \Delta a$ bedeutet, dass der Messwert a sicher im Intervall $[a-\Delta a, a+\Delta a]$ liegt.
Beispiel: $N_A = (6.022 \pm 0.014)\cdot 10^{23}\ mol^{-1}$ (Zehnerpotenz und Einheit ausklammern).
Absolute Fehler werden mit einer, max. zwei wesentlichen Ziffern angegeben. Der Messwert wird auf dieselbe Zehnerstelle gerundet. Ist keine Fehlerschranke notiert, nimmt man an, dass der Messwert gerundet ist und der Fehler etwa eine halbe Einheit der letzten Stelle beträgt.
Beispiel: 5.038 kg heisst (5.038 ± 0.0005) kg
Gelegentlich werden relative Fehlerschranken $\Delta a/a$ benützt: $a \pm \Delta a = a\,(1 \pm \Delta a/a)$
Relative Fehler werden oft in Prozent angebeben, z.B. 35.8 kg (1 ± 2%)

Absolute Fehlerschranken festzusetzen ist eine Kunst, in der auch Profis mal irren können. Sie hängen nicht nur von der Auflösung des Messgeräts (Skalenein-teilung) ab, sondern auch vom Messvorgang, dem Messobjekt und dem Sicherheitsbedürfnis.
Beispiel: Ein Massstab habe eine Zentimeter-Einteilung. Damit kann ein Metallstab sicher auf 0.2 cm genau gemessen werden. Misst man aber die Länge eines Menschen, so wäre eine Fehlerschranke von 1 cm sinnvoller. Da nur die Experimentatoren die Versuchsbedingungen genau kennen, müssen jene auch die Fehlerschranken während des Versuchs festsetzen.

3. Fehlerrechnung

Beispiel: Die Messfehler von Masse und Volumen schlagen auf die berechnete Dichte durch (Fehlerfortpflanzung). Die Fehlerrechnung liefert den Fehler der Dichte.
Faustregel: Das Resultat einer Rechnung sollte etwa gleich viele wesentliche Ziffern aufweisen wie die ungenaueste Ausgangsgrösse. Beispiel: 28.3 / 5.7304 = 4.94
Es gibt aber Ausnahmen von dieser Regel, z.B. 18.9 - 18.7 = 0.2 und nicht 0.200!

Näherung für kleine Fehler: Bei Multiplikation und Division addieren sich die rel. Fehler. Bei Potenzierung wird der relative Fehler mit dem Exponenten multipliziert.

Intervallarithmetik

Beispiel: Ein Quader hat Grundfläche A = (23.52 ± 0.11) cm^2, Masse m = (1.77 ± 0.12) kg und Dichte ρ = (8732 ± 13) kg/m^3. Wie gross ist seine Höhe h?

Wir rechnen zuerst so, als ob es keine Fehler gäbe. Dann suchen wir das grösste, mit den Fehlerschranken verträgliche Resultat. Die Differenz nehmen wir als Fehlerschranke des Resultats. Erst am Schluss wird gerundet.

$$h = \frac{m}{\rho A} = \frac{1.77\ \text{kg}}{8732\ \text{kg/m}^3 \cdot 23.52 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2} = 8.61831 \cdot 10^{-2}\ \text{m}$$

Fehlerschranken addiert oder subtrahiert, damit das Resultat möglichst gross wird:

$$h_{\max} = \frac{(1.77 + 0.12)\ \text{kg}}{(8732 - 13)\ \text{kg/m}^3 \cdot (23.52 - 0.11) \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2} = 9.24598 \cdot 10^{-2}\ \text{m}$$

$$\Delta h = h_{\max} - h = 9.24598 \cdot 10^{-2}\ \text{m} - 8.61831 \cdot 10^{-2}\ \text{m} = 0.62767 \cdot 10^{-2}\ \text{m}$$

$$h = (8.61831 \pm 0.63) \cdot 10^{-2}\ \text{m} = \underline{\underline{(8.62 \pm 0.63)\ \text{cm}}}$$

Es gibt gelegentlich kritische Fälle, bei denen man sorgfältiger vorgehen muss.

4. Graphische Darstellung von Fehlern mit Fehlerbalken

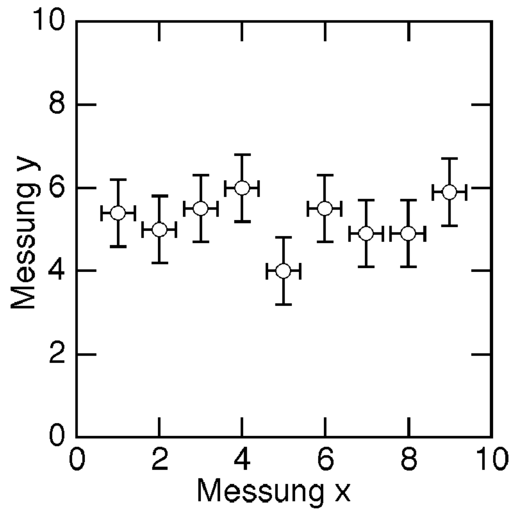

Abb. 1: Man trägt die Fehlerschranken ausgehend vom Messwert in Form von Balken nach oben, unten, links und rechts ab. Die Intervalle, in denen die Messwerte liegen, werden so anschaulich dargestellt.

5. Ausblick

Absolute Fehlerschranken werden in der Praxis für Überschlagsrechnungen verwendet. Sie liefern in den meisten Fällen zu grosse Fehler und werden der Qualität eines Experiments nicht gerecht. Man verfeinert die Fehlerrechnungen, indem man statt absoluter Fehlerschranken Standardabweichungen im Sinne der Gauss'schen Normalverteilung einführt [FoTa] und anders rechnet.

Auch wenn wir jetzt Fehlerrechnungen durchführen können, so entbindet uns dies nicht von einer kritischen Würdigung des Resultats. Falls Messungen nicht wirklich neue Resultate produzieren, kann man sie mit Literaturwerten vergleichen. Die Intervalle, in denen die zwei Werte liegen dürfen, müssen sich überlappen. Ist dies nicht der Fall, muss man auf die Suche nach einer Erklärung gehen. Es ist z.B. möglich, dass systematische Fehler vergessen gingen.