Überlagerung von Schwingungen Lie.

a) Superposition zweier gleichfrequenter, harmonischer Schwingungen entlang einer Geraden

Das Experiment zeigt, dass die resultierende Bewegung ebenfalls eine harmonische Schwingung gleicher Frequenz ist.

$$\hat{y}_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + \hat{y}_2 \sin(\omega t + \varphi_2) = \hat{y}_3 \sin(\omega t + \varphi_3) \qquad \text{(G1)}$$

Wie gross sind die Amplitude $\hat{y}_3$ und Phase φ_3? Gleichung (G1) muss zu jedem Zeitpunkt erfüllt sein. Setzt man t = 0, so erhält man Gleichung (G2), setzt man $\omega t = \pi/2$ und beachtet, dass $\sin(\alpha + \pi/2) = \cos(\alpha)$ ist, so ergibt sich (G3):

$$\hat{y}_3 \sin(\varphi_3) = \hat{y}_1 \sin(\varphi_1) + \hat{y}_2 \sin(\varphi_2) \qquad \text{(G2)}$$

$$\hat{y}_3 \cos(\varphi_3) = \hat{y}_1 \cos(\varphi_1) + \hat{y}_2 \cos(\varphi_2) \qquad \text{(G3)}$$

Dividieren wir nun entsprechende Seiten von (G2) und (G3) durcheinander, so erhalten wir eine Gleichung für die Anfangsphase φ_3 der resultierenden Schwingung:

$$\tan(\varphi_3) = \frac{\hat{y}_1 \sin(\varphi_1) + \hat{y}_2 \sin(\varphi_2)}{\hat{y}_1 \cos(\varphi_1) + \hat{y}_2 \cos(\varphi_2)} \qquad \text{(G4)}$$

Die Richtige der zwei Lösungen $\varphi_3 = \arctan(..)$ und $\varphi_3 = \arctan(..) + \pi$ von (G4) kann man finden, indem man φ_3 probeweise in (G2) einsetzt.

Quadrieren wir (G2) und (G3) beidseits und addieren die Gleichungen, so erhalten wir eine Gleichung für die Amplitude $\hat{y}_3$ der resultierenden Schwingung:

$$(\hat{y}_3)^2 \left\{\sin^2(\varphi_3) + \cos^2(\varphi_3)\right\} = \left\{\hat{y}_1 \sin(\varphi_1) + \hat{y}_2 \sin(\varphi_2)\right\}^2 + \left\{\hat{y}_1 \cos(\varphi_1) + \hat{y}_2 \cos(\varphi_2)\right\}^2 \qquad \text{(G5)}$$

Beachtet man, dass $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ und $\sin\alpha \sin\beta + \cos\alpha \cos\beta = \cos(\alpha - \beta)$ ist, folgt:

$$(\hat{y}_3)^2 = (\hat{y}_1)^2 + (\hat{y}_2)^2 + 2\hat{y}_1 \hat{y}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \qquad \text{(G6)}$$

Werden mehr als zwei Schwingungen überlagert, so kann man diese so lange paarweise zusammenfassen, bis man die resultierende Bewegung hat.

Spezialfälle:

Die Schwingungen erfolgen im Gleichtakt oder **in Phase**.

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi \cdot k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ .. \qquad \hat{y}_3 = \hat{y}_1 + \hat{y}_2$$

Die Schwingungen erfolgen im Gegentakt oder **gegenphasig**.

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \pi + 2\pi \cdot k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ .. \qquad \hat{y}_3 = |\hat{y}_1 - \hat{y}_2|$$

In allen anderen Fällen sind die Schwingungen **ausser Phase**.

Aufgabe:

i) Sei $\hat{y}_1$ = 1.3 cm, φ_1 = 1.4 rad, $\hat{y}_2$ = 2.5 cm, φ_2 = 0.26 rad

Berechnen Sie $\hat{y}_3$ sowie φ_3.

ii) Dasselbe für $\hat{y}_1$ = 1.3 cm, φ_1 = 1.4 rad, $\hat{y}_2$ = 2.5 cm, φ_2 = 2.6 rad

b) Superposition zweier harmonischer Schwingungen mit leicht unterschiedlicher Frequenz entlang einer Geraden: Schwebungen

$$y(t) = \hat{y}_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \hat{y}_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Die Kreisfrequenzen sollen verschieden, aber ähnlich gross sein.
Wir behandeln nur den Spezialfall $\hat{y}_1 = \hat{y}_2 = \hat{y}$ und $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ ausführlich.

$\hat{y}\sin(\omega_1 t) + \hat{y}\sin(\omega_2 t)$ ist gleich $2\hat{y} \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right)$

Den Term rechts können wir folgendermassen interpretieren: (Abb. 1)

$2\hat{y} \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) = A(t)$ ist eine langsam veränderliche Amplitude, da nach Voraussetzung $|\omega_1 - \omega_2|$ wesentlich kleiner als ω_1 oder ω_2 ist.

$\sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) = \sin(\bar{\omega} \cdot t)$ ist eine Schwingung mit der mittleren Frequenz $\bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$

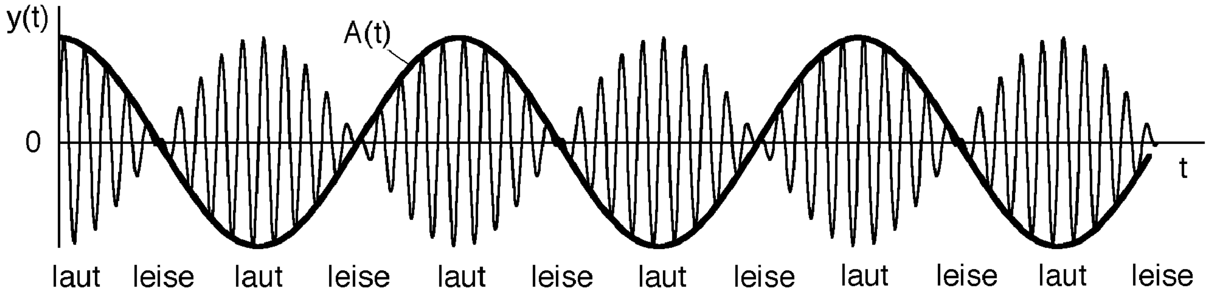


Abb. 1: Überlagerung zweier Schwingungen mit gleicher Amplitude und leicht verschiedener Frequenz ergibt eine sogenannte Schwebung. Die Einhüllende A(t) ist dazugezeichnet.

Schlägt man zwei leicht gegeneinander verstimmte Stimmgabeln an, so hört man eine schnelle Lautstärkevariation. Die Frequenz der hörbaren Lautstärkevariation oder **Schwebungsfrequenz** ist $f_S = |f_1 - f_2|$, also doppelt so gross wie die Frequenz der Amplitudenfunktion A(t), vergleiche Abb. 1. Diesen Effekt kann man zum Stimmen von Instrumenten brauchen. Die Schwebungsfrequenz wird umso kleiner, je näher sich die Frequenzen der zwei Teilschwingungen sind. Sind die zwei Frequenzen gleich, so tritt keine Schwebung mehr auf.

Aufgabe:
Sei $\omega_1 = 2\pi \cdot 10\ s^{-1}$ und $\omega_2 = 2\pi \cdot 9\ s^{-1}$ Zeichnen Sie die Schwebung auf dem Taschenrechner für die zwei Fälle $\hat{y}_1 = \hat{y}_2$ und $\hat{y}_1 \neq \hat{y}_2$

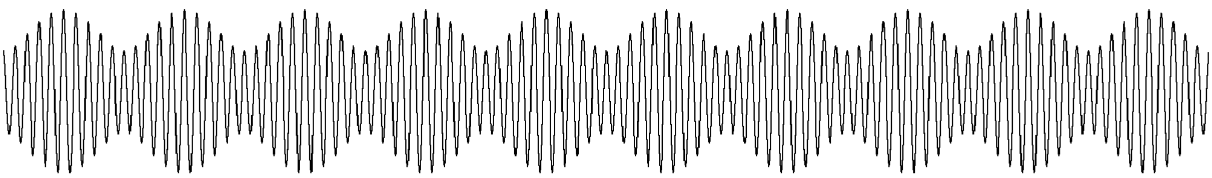


Abb. 2: Schwebung zweier Schwingungen mit unterschiedlichen Amplituden

c) Superposition vieler harmonischer Schwingungen entlang einer Geraden

$$y(t) = \hat{y}_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \hat{y}_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) + \hat{y}_3 \sin(\omega_3 t + \varphi_3) + \ldots$$

Dieser Ausdruck lässt sich nur in Spezialfällen vereinfachen (Abbildung 3).

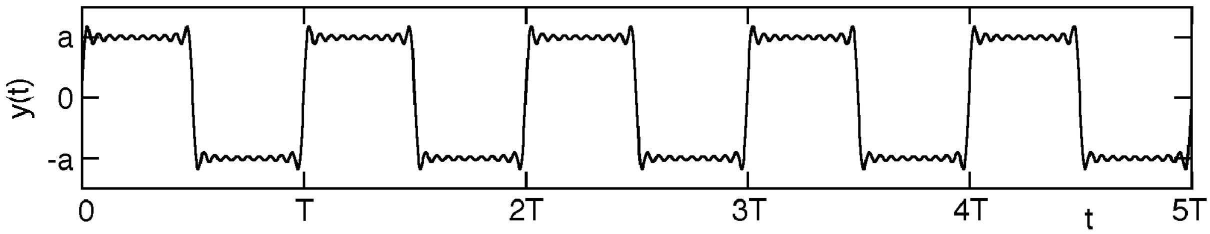


Abb. 3: Teilsumme der Reihe $y(t) = \frac{4a}{\pi}\left(\sin(\omega t) + \frac{\sin(3\omega t)}{3} + \frac{\sin(5\omega t)}{5} + \frac{\sin(7\omega t)}{7} + \ldots\right)$ bis 19ω. Bricht die Reihe nicht ab, so ergibt sich eine "Rechteckfunktion".

Aufgabe: Was gibt $y(t) = \frac{4a}{\pi}\left(\sin(\omega t) - \frac{\sin(3\omega t)}{3^2} + \frac{\sin(5\omega t)}{5^2} - \frac{\sin(7\omega t)}{7^2} + \frac{\sin(9\omega t)}{9^2} - \ldots\right)$?

Satz von Fourier: (Jean Baptiste Joseph Baron de Fourier, 1768-1830)

Jede periodische Bewegung ist als Summe harmonischer Schwingungen darstellbar.

$$y(t) = \hat{y}_0 + \hat{y}_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \hat{y}_2 \sin(2\omega_1 t + \varphi_2) + \hat{y}_3 \sin(3\omega_1 t + \varphi_3) + \ldots$$

ω_1 ist gleich $2\pi/T$ und T ist die Periodendauer der Funktion y(t).

Fourierreihen schreibt man oft auch so:

$y(t) = a_0 + a_1\cos(\omega t)+b_1\sin(\omega t) + a_2\cos(2\omega t)+b_2\sin(2\omega t) + a_3\cos(3\omega t)+b_3\sin(3\omega t) + \ldots$

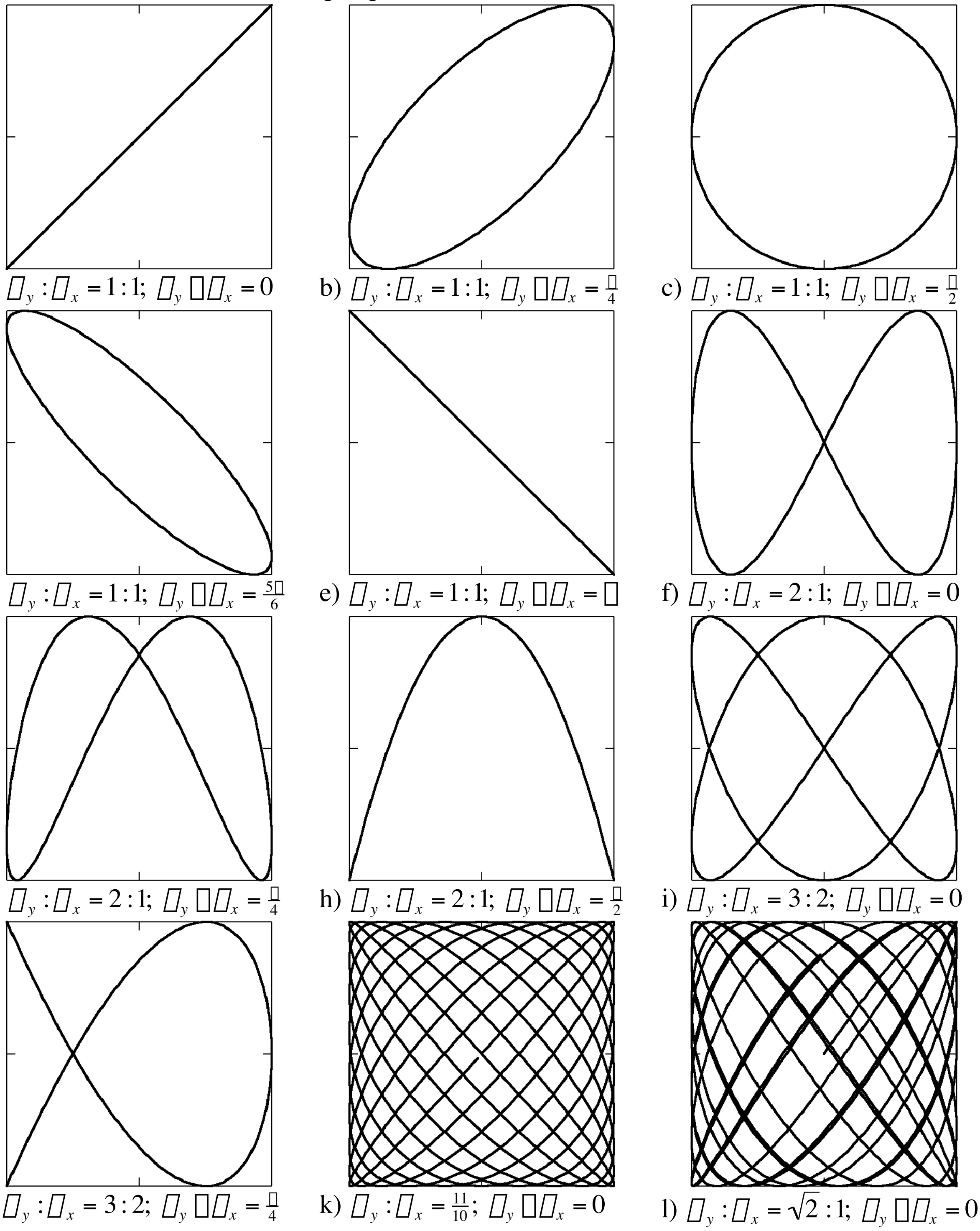
Die zwei Darstellungen sind äquivalent, aber die zweite lässt sich rechnerisch leichter behandeln. Mathematische Details wie Konvergenz der Reihen und Einschränkungen bzgl. y(t) möge man in der Fachliteratur nachlesen. Man beachte, dass in der Fourier-Reihe nur die Frequenzen 0, f_1, $2f_1$, $3f_1$, $4f_1$, $5f_1$, etc. vorkommen. Frequenzen, die ganzzahlige Vielfache einer Grundfrequenz $f_1 = 1/T$ sind, nennt man **Harmonische** der Grundfrequenz. Wir sehen am Satz von Fourier, warum ein gutes Verständnis der harmonischen Schwingungen so zentral ist: Jede Bewegung kann als Überlagerung harmonischer Schwingungen beschrieben werden. Dies gilt sogar für aperiodische Bewegungen, bei diesen ist nämlich nur die Periodendauer unendlich gross.

Fourieranalyse nennt man die Bestimmung der Werte $\hat{y}_1$, φ_1, $\hat{y}_2$, φ_2, $\hat{y}_3$, φ_3, ... bei gegebenem y(t), **Fouriersynthese** die Bestimmung von y(t) aus der trigonometrischen Reihe. Besonders einprägsam ist dieser Vorgang in der musikalischen Akustik: Ein Klang besteht immer aus einem Grundton und vielen Obertönen. Viele Musikanlagen stellen deren Anteile am Klang graphisch dar (sog. Equalizer). Umgekehrt kann man alle möglichen Klänge durch Summation von Grund- und Obertönen darstellen. Synthesizer arbeiten aber meist nicht nach diesem Prinzip.

d) Superposition zweier Schwingungen entlang orthogonaler Geraden

$$x(t) = \hat{x}\sin(\omega_x t + \varphi_x) \qquad\qquad y(t) = \hat{y}\sin(\omega_y t + \varphi_y)$$

Demonstration: Gibt man eine sinusförmige Wechselspannung auf den x-Kanal eines Oszilloskops und eine zweite auf den y-Kanal, so beobachtet man die nach Jules Lissajous, 1822-1880, benannten Figuren (Abb. 4). Aus den 1815 von Nathaniel Bowditch beschriebenen Kurven kann man Phasenunterschiede und Frequenzverhältnisse der zwei Schwingungen herauslesen.



a) $\omega_y : \omega_x = 1:1;\ \varphi_y - \varphi_x = 0$
b) $\omega_y : \omega_x = 1:1;\ \varphi_y - \varphi_x = \frac{\pi}{4}$
c) $\omega_y : \omega_x = 1:1;\ \varphi_y - \varphi_x = \frac{\pi}{2}$
d) $\omega_y : \omega_x = 1:1;\ \varphi_y - \varphi_x = \frac{5\pi}{6}$
e) $\omega_y : \omega_x = 1:1;\ \varphi_y - \varphi_x = \pi$
f) $\omega_y : \omega_x = 2:1;\ \varphi_y - \varphi_x = 0$
g) $\omega_y : \omega_x = 2:1;\ \varphi_y - \varphi_x = \frac{\pi}{4}$
h) $\omega_y : \omega_x = 2:1;\ \varphi_y - \varphi_x = \frac{\pi}{2}$
i) $\omega_y : \omega_x = 3:2;\ \varphi_y - \varphi_x = 0$
j) $\omega_y : \omega_x = 3:2;\ \varphi_y - \varphi_x = \frac{\pi}{4}$
k) $\omega_y : \omega_x = \frac{11}{10};\ \varphi_y - \varphi_x = 0$
l) $\omega_y : \omega_x = \sqrt{2}:1;\ \varphi_y - \varphi_x = 0$

Abb. 4: Lissajous-Figuren. Die Bewegung nimmt nur dann immer wieder dieselbe Bahn, wenn das Frequenzverhältnis rational ist, z.B. $\omega_y:\omega_x = 11:10 \in Q$.