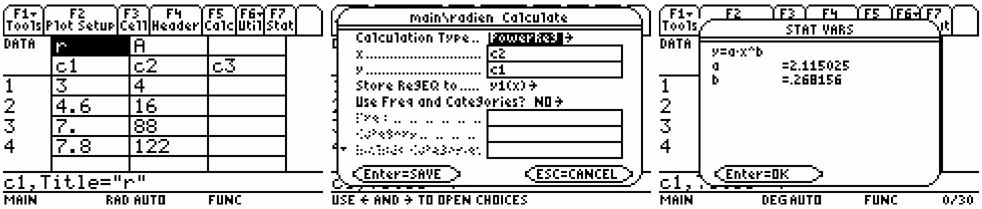
7.2 Kernphysik

Kerne und Kernumwandlungen, Nuklidkarte

24

a)

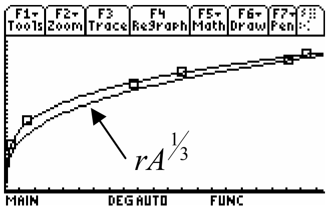


Resultat:
bester Exponent: $x = 0.27$, also nicht ganz 1/3
bester Radius: $r_1 = 2.1$ fm

b)

Material	Helium	Sauerstoff	Strontium	Antimon	Gold	Wismut
Kernradius r in fm	3.0	4.6	7.0	7.8	8.5	8.9
Nukleonenzahl	4	16	89	122	197	209
Näherung in fm	2.3	3.7	6.5	7.2	8.5	8.7
Relativer Fehler	23%	20%	7%	8%	0%	2%

Die Näherung ist für grosse Nukleonenzahlen A gut.



25

a) $\rho = \dfrac{m}{V} = \dfrac{m_n \cdot A}{\frac{4\pi}{3} r^3} = \dfrac{3m_n}{4\pi \cdot r_0^3} = 2.3 \cdot 10^{17}\ \text{kg/m}^3 \ \ (m_n = 1.661 \cdot 10^{-27}\ \text{kg})$

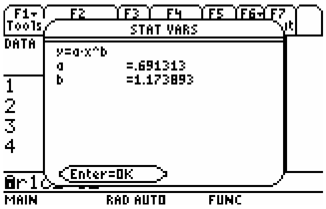
b) Die Masse der Erde beträgt $m = 5.97 \cdot 10^{24}\ \text{kg}$.

Ihr Volumen wäre dann $V = \dfrac{m}{\rho} = 2.61 \cdot 10^7\ \text{m}^3$.

Das ist eine Kugel mit dem Radius $R = \sqrt[3]{\dfrac{3V}{4\pi}} = 184\ \text{m}$.

26

a) Beachten Sie: $A = N + Z$



$N \cong 0.691 \cdot Z^{1.174}$

b) Ni hat 28 Protonen, und damit werden 35 ($\approx 0.691 \cdot 28^{1.174}$) Neutronen erwartet, die Nukleonenzahl müsste demnach 63 sein.
Tatsächlich hat Nickel 58 bis 65 Nukleonen.
Sn hat 50 Protonen, und damit werden 68 Neutronen erwartet, die Nukleonenzahl müsste demnach 118 sein. Tatsächlich hat Zinn 112 bis 124 Nukleonen.

27

${}^{4}_{2}\mathrm{He}$, ${}^{16}_{8}\mathrm{O}$, ${}^{40}_{20}\mathrm{Ca}$, ${}^{48}_{20}\mathrm{Ca}$, ${}^{208}_{82}\mathrm{Pb}$

${}^{56}_{28}\mathrm{Ni}$ ist magisch, hat aber zu wenige Neutronen und ist deshalb instabil.

${}^{132}_{50}\mathrm{Sn}$ ist auch magisch, hat aber zu viele Neutronen und ist instabil.

28

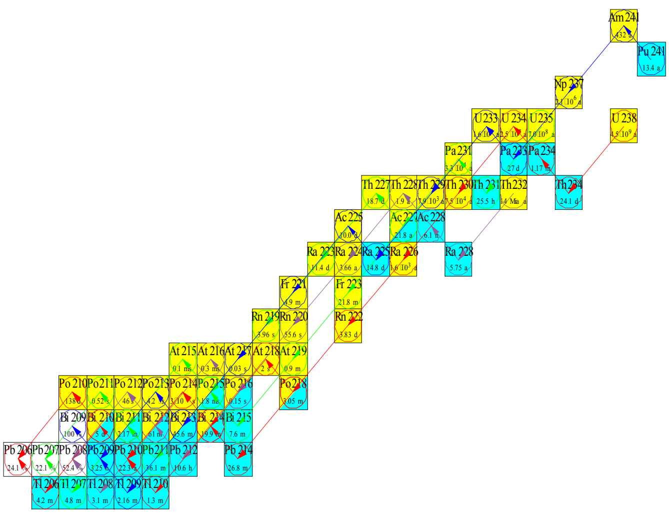
$(\alpha,\beta,\beta)\ {}^{218}_{84}\mathrm{Po} \to {}^{214}_{82}\mathrm{Pb} \to {}^{214}_{83}\mathrm{Bi} \to {}^{214}_{84}\mathrm{Po}$

$(\beta,\alpha,\beta)\ {}^{218}_{84}\mathrm{Po} \to {}^{218}_{85}\mathrm{At} \to {}^{214}_{83}\mathrm{Bi} \to {}^{214}_{84}\mathrm{Po}$

$(\beta,\beta,\alpha)\ {}^{218}_{84}\mathrm{Po} \to {}^{218}_{85}\mathrm{At} \to {}^{218}_{86}\mathrm{Rn} \to {}^{214}_{84}\mathrm{Po}$

29

a)



b) Uran-Radium Zerfallsreihe: ${}^{238}_{92}\mathrm{U}$, ${}^{226}_{88}\mathrm{Ra}$, ${}^{206}_{82}\mathrm{Pb}$
Neptunium-Zerfallsreihe: ${}^{241}_{94}\mathrm{Pu}$, ${}^{237}_{93}\mathrm{Np}$, ${}^{209}_{83}\mathrm{Bi}$
Uran-Actinium-Zerfallsreihe: ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$, ${}^{227}_{89}\mathrm{Ac}$, ${}^{207}_{82}\mathrm{Pb}$
Thorium-Reihe: ${}^{232}_{90}\mathrm{Th}$, ${}^{208}_{82}\mathrm{Pb}$

Bindungsenergie

30

a) Das ^{27}Al-Atom setzt sich aus 13 Protonen, 14 Neutronen und 13 Elektronen zusammen. Die Summe der Massen seiner Bestandteile beträgt
$13(m_p + m_e) + 14m_n = 27.22303u$
Das Massendefizit des Kerns beträgt demnach $27.22303u - 26.98154u = 0.24149u$.
b) Pro Nukleon sind dies 8.9441 mu, was einer Energie von $1.3348 \cdot 10^{-12}$ J entspricht.
c) Aluminium besteht zu 100% aus ^{27}Al-Atomen. 1.0 kg Aluminium enthält
$\frac{1000}{26.98} \cdot 6.02 \cdot 10^{23}$ Atome $= 2.23 \cdot 10^{25}$ Atome.
Jedes Atom weist eine Bindungsenergie von $0.2415u \mathrel{\hat{=}} 3.60 \cdot 10^{-11}$ J auf.
Ein Kilogramm Aluminium weist demnach die Bindungsenergie
$2.23 \cdot 10^{25} \cdot 3.60 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{J} = 8.03 \cdot 10^{14}$ J auf.
Rechnet man mit einem Energiepreis von 15 Rp/kWh, so entspricht dies einem Kapital von 33 Millionen Franken.

31

$\mathrm{n} \rightarrow \mathrm{p} + \beta^- + \bar{\nu}_e$

Masse des Neutrons: $m_n = 1.6749272 \cdot 10^{-27}$ kg

Masse des Protons: $m_p = 1.6726216 \cdot 10^{-27}$ kg

Masse des Elektrons: $m_e = 0.0009109 \cdot 10^{-27}$ kg

Masse des Neutrinos: $m_\nu \approx 0$

Das Massendefizit beträgt: $\Delta m = m_n - (m_p + m_e + m_\nu) = 1.3947 \cdot 10^{-30}$ kg

Die Zerfallsenergie ist $\Delta m \cdot c^2 = 1.2535 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{J} \mathrel{\hat{=}} 0.78237$ MeV.

Das ist die obere Grenze für die Energie des β^--Teilchens. Einen wesentlichen Teil dieser Energie nimmt das Neutrino mit. Einen kleinen Bruchteil erhält das Proton durch den Rückstoss.

32

Die Masse des Protons beträgt $1.672622 \cdot 10^{-27}$ kg. Das Deuterium weist eine Atommasse von 2.0141018 u auf. Das sind $3.344494 \cdot 10^{-27}$ kg. Dies entspricht gerade der Masse des Deuteriumkerns und des Positrons zusammen, weil das Deuteriumatom ein Elektron in der Schale hat. Das Massendefizit beträgt demnach
$\Delta m = 2 \cdot 1.672622 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg} - 3.344494 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg} = 7.5 \cdot 10^{-31}$ kg
$E = \Delta m \cdot c^2 = 6.74 \cdot 10^{-14}$ J pro Fusion.

Zusätzlich hat man die Energie $16.37 \cdot 10^{-14}$ J aus der Fusion des Positrons mit einem Elektron.
Das ergibt total $23.11 \cdot 10^{-14}$ J pro Fusion.
1 Gramm Deuterium enthält etwa $2.99 \cdot 10^{23}$ Atome. Die bei der Bildung von 1 Gramm Deuterium aus der Fusion von Protonen frei werdende Energie beträgt 69.1 GJ.

33

a) Die Atommasse von ^{235}U beträgt 235.044 *u*. Dieses Atom enthält 92 Protonen, 143 Neutronen und 92 Elektronen. Die Summe der Massen dieser Bestandteile beträgt 236.959 *u*. Das gesamte Massendefizit beträgt also 1.915 *u*. Das ergibt pro Nukleon 8.15 m*u*, was einer Kernbindungsenergie von$1.218 \cdot 10^{-12}$ J pro Nukleon entspricht.

b) Die Atommasse von ^{127}I beträgt 126.904 *u*. Dieses Atom enthält 53 Protonen, 74 Neutronen und 53 Elektronen. Die Summe der Massen dieser Bestandteile beträgt 128.056 *u*. Das gesamte Massendefizit beträgt also 1.152 *u*. Das ergibt pro Nukleon 9.07 m*u*, was einer Kernbindungsenergie von $1.356 \cdot 10^{-12}$ J pro Nukleon entspricht.

c) Pro Spaltung wird die Energie $235 \cdot (1.356 \cdot 10^{-12} - 1.218 \cdot 10^{-12})\,\mathrm{J} = 3.24 \cdot 10^{-11}$ J frei.

d) In einem Kilogramm ^{235}U sind $\dfrac{6.02 \cdot 10^{26}}{235}$ Kerne enthalten, die insgesamt eine Energie von $8.3 \cdot 10^{13}$ J liefern.

e) Die vom KKW Gösgen in einem Jahr produzierte elektrische Energie beträgt $E_{\mathrm{tot}} = 330 \cdot 24 \cdot 3600 \cdot 10^{9}$ J $= 2.9 \cdot 10^{16}$ J.

f) Das KKW benötigt also mindestens $\dfrac{E_{\mathrm{tot}}}{\eta} = 8.7 \cdot 10^{16}$ J pro Jahr aus der Kernspaltung. Weil aus 1 kg ^{235}U auch etwa 1 kg (999 g) Spaltprodukte entstehen, erzeugt das KKW Gösgen mindestens $\dfrac{8.7 \cdot 10^{16}}{8.3 \cdot 10^{13}}$ kg Spaltprudukte pro Jahr. Das ist rund 1 t pro Jahr.

Zerfallsgesetze

34

a) Anzahl «Atome» zu Beginn: N_0

Nach der n-ten Runde sind noch $(1-p)^n N_0$ «Atome» vorhanden.

Aus $(1-p)^n N_0 = N_0/2$ folgt $n = \dfrac{-\ln 2}{\ln(1-p)}$

b) Für $p = 1/6$: $n = \dfrac{-\ln 2}{\ln(1-p)}$; 4

Für $p = 1/3$: $n = \dfrac{-\ln 2}{\ln(1-p)}$; 2

c) $p = 1 - 2^{-1/n}$; 0.13

d) Der Aktivität entspricht die Zahl der Einerwürfe pro Runde. Diese «Atome» zerfallen nämlich in der Zeitspanne bis zum nächsten Wurf.

35

$$\frac{I}{I_0} = 0.05 = \frac{I_0 \cdot e^{-\mu \cdot x}}{I_0} = e^{-\mu \cdot x} \quad \Rightarrow x = -\frac{1}{\mu}\ln(0.05); \quad 0.46 \text{ mm}$$

36

$$d_W = \frac{d - d_K}{2}, \quad k = \frac{I_0}{I} = \mathrm{e}^{2\mu_W d_W + \mu_K d_K} = \mathrm{e}^{\mu_W (d - d_K) + \mu_K d_K} = \mathrm{e}^{\mu_W d + (\mu_K - \mu_W) d_K}; \quad d_K = \frac{\ln k - \mu_W d}{\mu_K - \mu_W}$$

37

a) 0.72 : 99.28

b) Halbwertszeit Uran-235: $7.04 \cdot 10^8$ a; Halbwertszeit Uran-238: $4.46 \cdot 10^9$ a

c) Anfangsverhältnis: q_0

Heutiges Verhältnis: q_h

Halbwertszeit Uran-235: τ_{235}

Halbwertszeit Uran-238: τ_{238}

$$t = \frac{\tau_{235}\tau_{238} \ln\left(\dfrac{q_0}{q_h}\right)}{(\tau_{238} - \tau_{235})\ln 2}; \quad 6.5 \cdot 10^9 \text{ a}$$

38

a) A: Die Anzahl Zerfälle pro Sekunde in der Probe (hier also 0.25 Bq)

A_0 : Die Anzahl Zerfälle pro Sekunde in der gleichen Menge einer frischen Pflanze (hier also 30.6 Bq)

$T_{1/2} = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$: Die Halbwertszeit (5730 Jahre für ^{14}C)

$$t = \frac{\ln\left(\dfrac{A}{A_0}\right)}{-\lambda}; \quad 40 \cdot 10^3 \text{ Jahre}$$

b) $\Delta t = \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\Delta A}{A}$; $3 \cdot 10^2$ Jahre, also [39'700 Jahre, 40'300 Jahre]

oder Sie wiederholen die Rechnung mit A' = 0.258 Bq und A'' = 0.242 Bq.
Dies ergibt: t' und t''.
Die Differenzen zu t betragen:
$t - t' = 3 \cdot 10^2$ Jahre
und
$t'' - t = 3 \cdot 10^2$ Jahre
(Achtung es ist nur eine Stelle signifikant)

39

a) Annahme: Alles Blei stammt aus dem Uran

N_0 : Anzahl Uran-Atome als der Stein erstarrte

N_{U} : aktuelle Anzahl Uran-Atome im Stein

N_{Pb} : aktuelle Anzahl Blei-Atome im Stein

$T_{1/2} = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$: Die Halbwertszeit von Uran-238

Aus $N_{\mathrm{U}} = N_0 e^{-\lambda t}$ und $N_0 = N_{\mathrm{U}} + N_{\mathrm{Pb}}$ folgt

$$t = \frac{\ln\left(\dfrac{N_U}{N_{\mathrm{Pb}} + N_U}\right)}{-\lambda} = \frac{\ln\left(1 + \dfrac{N_{\mathrm{Pb}}}{N_{\mathrm{U}}}\right)}{\lambda} = \frac{\ln\left(1 + \dfrac{m_{\mathrm{Pb}} M_U}{m_U M_{\mathrm{Pb}}}\right)}{\lambda}; \quad 3.24 \text{ Milliarden Jahre}$$

b) Angenommen, der Stein hat schon Blei enthalten, dann ist der Stein jünger.
Bei den 3.24 Milliarden Jahren handelt es sich also um eine obere Grenze.

Aktivität

40

a) $A_0 = \frac{N_0 \ln 2}{T_{1/2}} = \frac{mN_A \ln 2}{MT_{1/2}} = 3.66 \cdot 10^{10}$ Bq (man definiert 1Ci = $3.70 \cdot 10^{10}$ Bq)

b) Bis heute (2004) sind seit 1898 106 Jahre verstrichen. $A = A_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}} = 0.956 A_0$; Abnahme um 4.45%

41

a) $A_0 = \frac{N_0 \ln 2}{T_{1/2}} = \frac{mN_A \ln 2}{MT_{1/2}} = 1.7 \cdot 10^{11}$ Bq

b) $E_\alpha = 5.30 \text{ MeV} \mathrel{\hat{=}} 8.49 \cdot 10^{-13} \text{ J} = \frac{\text{m}}{2} v^2 \Rightarrow v = 1.6 \cdot 10^7$ m/s

c) $P = A_0 \cdot E_\alpha = 0.14$ W

d) $\Delta T = \frac{P \ t}{cm_{\text{Pb}}} = 3.9$ °C

42

1 Gramm ^{131}I hat eine Aktivität von $A_0 = \frac{mN_A \ln 2}{M \cdot T_{1/2}} = 4.6 \cdot 10^{15}$ Bq

Damit kann man rund 10^{12} Liter Milch vergiften. Das entspricht der gesamten schweizerischen Milchproduktion von über 280 Jahren!

43

$\frac{I}{I_0} = \mathrm{e}^{-\lambda t} = 0.10$ mit $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \Rightarrow t = \frac{\ln 10}{\ln 2} \cdot T_{1/2}$; 5300 a

44

Index 1 für ^{108}Ag und Index 2 für ^{110}Ag.

$A_1 + A_2 = A_0$=35 kBq, $\frac{A_1}{A_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\frac{N_1}{N_2} = \frac{T_{2,1/2}}{T_{1,1/2}}\frac{N_1}{N_2}$, $\frac{N_1}{N_2} = \frac{51.839 \cdot 110}{48.161 \cdot 108}$,

$T_{1,1/2}$: 24.6 s und $T_{2,1/2}$: 2.37 min

$A_1 = \frac{A_0}{1 + \frac{N_2 T_{1,1/2}}{N_1 T_{2,1/2}}}$; 5.6 kBq $\qquad A_2 = \frac{A_0}{1 + \frac{N_1 T_{2,1/2}}{N_2 T_{1,1/2}}}$; 29 kBq

Zu Beginn gehen 5.6 kBq auf das Konto von ^{108}Ag und 29 kBq auf das von ^{110}Ag.

Radiometrische Grössen

45

a) 2 Wochen b) 26 mSv

46

a) In 18 g Wasser hat es 2 mol Wasserstoffatome.

In 1 Liter Wasser hat es $\frac{1000}{18} \cdot 2 \cdot 6.02 \cdot 10^{23} = 6.65 \cdot 10^{25}$ Wasserstoffatome.

Davon sind $2.22 \cdot 10^{8}$ Tritiumatome.

$A_0 = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot N_0 = 0.40$ Bq, also weniger als 1 Zerfall pro Sekunde.

b) Weil $T_{\text{Biol}} << T_{\text{Radiol}}$ ist, können Sie $T_{1/2} = T_{\text{Biol}} = 12$ d verwenden.

$$\frac{\Delta N}{N_0} = 1 - e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} t} = 1 - e^{-\frac{\ln 2}{12}} = 0.056 = 5.6\%$$

c) Pro Tag werden $4.44 \cdot 10^{8}$ Tritiumatome aufgenommen (siehe Teilfrage a)). So viele müssen in einem Tag wieder verschwinden, d.h. 5.6% von x muss $4.44 \cdot 10^{8}$ ergeben. Daraus folgt $x = 7.9 \cdot 10^{9}$ Tritiumatome im Körper.

d) Die Aktivität des Tritiums bleibt konstant: $A = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot x = 14$ Bq.

e) Die Äquivalentdosis in einem Jahr ist $H = \frac{q}{m} \cdot A \cdot \frac{1}{3} E_\beta \cdot \Delta t = 6.3$ nSv.

Diese Dosis ist gegenüber der restlichen „natürlichen“ Dosis von 4 mSv/a völlig irrelevant.

47

a) ${}^{40}\text{K} \rightarrow {}^{40}\text{Ca} + \beta^- + \bar{\nu}$

b) Die folgende Rechnung gilt für ein Körpergewicht von 75 kg. Darin hat es 150 g Kalium. Davon sind m = 18 mg ^{40}K. $A_0 = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot \frac{m}{M} \cdot N_A = 4.7$ kBq. Da die Halbwertszeit sehr gross ist, bleibt die Aktivität während eines Jahres nahezu konstant. In einem Jahr registriert der Körper also $A_0 \cdot \Delta t = 1.5 \cdot 10^{11}$ Zerfälle.

c) $H = \frac{1.5 \cdot 10^{11} \cdot 0.5 \cdot 1.6 \cdot 10^{-13}}{75}$ Sv/a $= 0.16$ mSv/a

48

a) $^{90}\text{Sr} \rightarrow {}^{90}\text{Y} + \beta^- + \overline{\nu}$

b) $A_0 = \dfrac{N_0 \ln 2}{T_{1/2}}$ mit $N_0 = \dfrac{10^{-6}\ \text{g}}{90\ \text{g}} \cdot 6.02 \cdot 10^{23} = 6.7 \cdot 10^{15}$ ergibt $A_0 = 5.1$ MBq

c) Wegen der relativ grossen Halbwertszeit von 28 Jahren, bleibt die Aktivität im ersten Jahr etwa konstant. Die Äquivalentdosis im ersten Jahr beträgt demnach

$$H \approx \frac{q}{m} \cdot A_0 \cdot \frac{1}{3} E_\beta \cdot \Delta t;\ 0.17\ \text{Sv}.$$

d) Leukämie ist eine Störung der Bildung von Blutkörperchen.

49

$$H_p = A \cdot t \cdot h_{10} \cdot \left(\frac{r_0}{r}\right)^2;\ 90\ \text{Bq} \cdot 8\ \text{h} \cdot 365 \cdot 0.3\ \frac{\text{mSv/h}}{10^9\,\text{Bq}} \cdot \left(\frac{1\ \text{m}}{0.5\ \text{m}}\right)^2;\quad 3 \cdot 10^{-4}\ \text{mSv}$$

also etwa $0.3\ \mu\text{Sv}$ pro Jahr. Die jährliche Strahlungsbelastung der Schweizer Bevölkerung ist im Mittel 4 mSv. Diese zusätzliche Belastung wäre also absolut vernachlässigbar.