An
S. Byland
Physikinstitut
MNG Rämibühl
8001 Zürich

Gasgesetz von Boyle-Mariotte

Untersuchung des Zusammenhangs von Druck und Volumen bei isothermen Prozessen an einem idealen Gas und Bestimmung der universellen Gaskonstanten.

Physikbericht von Samuel Byland, Klasse 4pq, MNG Rämibühl

Zürich, 25. August 2010

Gasgesetz von Boyle-Mariotte

Das Verhalten eines idealen Gases bei einer isothermen Volumenänderung wird durch das Gesetz von Boyle-Mariotte beschrieben.

Ziele: Sie lernen die Vorteile verschiedener graphischer Darstellungen und Regressionsverfahren kennen und setzen diese Methoden gezielt ein.
Sie üben das Abschätzen und den Umgang mit Messfehlern.

Material:
- Glaszylinder mit verschiebbarem Kolben
- Digitalthermometer
- Faden und Massstab

Vorgehen:

a Bestimmen Sie die Lufttemperatur im Praktikumszimmer.

b Messen Sie den Umfang des Glaszylinders mit Hilfe des Fadens ab. Schätzen Sie die Dicke der Glaswand von Auge ab.

c Stellen Sie den Kolben auf eine möglichst weit ausgezogene Position ein, entlüften Sie den Zylinder und schliessen Sie das Ventil. Lesen Sie anschliessend für mindestens zehn verschiedene, weniger ausgezogene Kolbenpositionen den Luftdruck im Zylinder ab.

d Entlüften Sie den Zylinder in einer wenig ausgezogenen Position. Lesen Sie anschliessend für mindestens fünf verschiedene, weiter ausgezogene Kolbenpositionen den Luftdruck im Zylinder ab.

Aufgaben:

1. Berechnen Sie die Querschnittfläche der Luftsäule im Zylinder (inkl. Fehler!).
2. Erfassen Sie die beiden Messreihen je in zwei Listen für Länge der Luftsäule und Luftdruck im Tabellenkalkulationsprogramm (z.B. Excel). Berechnen Sie möglichst effizient die zugehörigen Volumina und deren Fehler.
3. Stellen Sie für beide Messreihen den Druck als Funktion des Luftvolumens graphisch dar. Ermitteln Sie mit einer Potenzregression eine Funktion, die Ihre Messwerte möglichst gut annähert. Wie gut erfüllt die ermittelte Potenz die theoretischen Erwartungen?
4. Stellen Sie wiederum für beide Messreihen den Druck als Funktion des Kehrwertes des Luftvolumens graphisch dar. Zeigen Sie anhand dieser Darstellung, dass das Produkt aus Druck und Volumen eine Konstante ist, und lesen Sie jeweils den Wert dieser Konstanten für die beiden Messreihen ab. Diskutieren Sie die Qualität Ihrer Messungen.
5. Berechnen Sie mit den Werten von 4. für die beiden Messreihen die universelle Gaskonstante. (Tipp: Zustandsgleichung für ideale Gase, Dichte von Luft aus „Formeln und Tafeln", Molmasse von Luft 28.8 g/mol).
Beurteilen Sie den Einfluss der verschiedenen Fehler bei dieser Berechnung und führen Sie mit den dominierenden Fehlern eine Fehlerrechnung für die Gaskonstante durch.

Bedingungen: Wenn Sie zu diesem Versuch einen Bericht schreiben, geben Sie diesen zusammen mit der Auswertung ab bis Mittwoch, 1. September 2010.

Andernfalls bearbeiten Sie mindestens die Schritte 2 und 3 und geben Ihre Auswertung ab bis Mittwoch, 8. September 2010.

Einleitung

Im Gegensatz zu festen Körpern und Flüssigkeiten, welche praktisch inkompressibel sind, ändert sich das Volumen von Gasen schon bei vergleichsweise geringen Druckänderungen recht deutlich. Bereits 1660 stellte der englische Naturforscher Robert Boyd (1627 – 1691) anhand von systematischen Untersuchungen fest, dass das Produkt aus Gasdruck und Gasvolumen bei konstanter Temperatur konstant ist, zumindest für gewisse "ideale" Gase. Unabhängig von Boyd gelangte auch der französische Physiker Edmé Mariotte 1676 zum selben Resultat. Er setzte sich auch intensiv mit dessen Interpretation auseinander [Enc2001].

Zusammen mit anderen Gasgesetzen, welche das Verhalten eines Gases auch bei Temperaturänderungen beschreiben (Amontons, Gay-Lussac, …) führte das Boyle-Mariott'sche Gesetz zur Zustandsgleichung für ideale Gase, welche das Verhalten wichtiger realer Gase (z.B. Sauerstoff, Wasserstoff, Luft, …) bei normalen Bedingungen ausreichend exakt beschreibt und damit erlaubt, Vorgänge wie die Druckentwicklung beim Erhitzen von Gasflaschen rechnerisch zu bestimmen.

Einen wichtigen Beitrag leistete die Zustandsgleichung auch bei der theoretischen Untersuchung von Wärmekraftmaschinen zu Beginn der Industrialisierung. Der französische Physiker und Ingenieur Sadi Carnot (1796 – 1832) konnte mit ihrer Hilfe zeigen, dass der maximale Wirkungsgrad einer zyklisch arbeitenden Maschine, die Wärme in Arbeit umwandelt, nur von den Temperaturen, zwischen denen die Maschine arbeitet, abhängt.

Theorie

Ein Gas gilt als *ideal*, wenn es die folgenden Bedingungen erfüllt:

- Die Gasteilchen sind punktförmig, d.h. ihr Volumen ist verschwindend klein.
- Zwischen den Gasteilchen wirken keine anziehenden Kräfte.
- Alle Stösse der Gasteilchen sind vollkommen elastisch.
- Alle Bewegungsrichtungen sind gleich wahrscheinlich.

Natürlich erfüllt kein reales Gas diese Kriterien perfekt, doch zeigen viele reale Gase zumindest unter gewissen Bedingungen (tiefe Temperatur und Druck) ein annähernd ideales Verhalten. Ein gutes Beispiel dafür ist Luft bei Normalbedingungen.

Für ein ideales Gas gilt die bekannte *Zustandsgleichung*

$$pV = nRT\,, \tag{1}$$

wobei p der Gasdruck, V das Gasvolumen, n die Stoffmenge, R die universelle Gaskonstante und T die Gastemperatur sind. Beim Rechnen mit SI-Einheiten ist darauf zu achten, dass die Gastemperatur in Kelvin eingesetzt wird.

Zur Berechnung der universellen Gaskonstanten aus den Messwerten muss Gleichung (1) nach der gesuchten Grösse aufgelöst werden:

$$R = \frac{pV}{nT}\,. \tag{2}$$

Setzen wir $pV = k$ für das (konstante) Produkt aus Druck und Volumen sowie $n = m/M$, wobei m die Gasmasse und M die Molmasse von Luft ist, in Gleichung (2) ein, so erhalten wir

$$R = \frac{k}{m/M \cdot T} = \frac{kM}{mT}. \tag{3}$$

Ersetzen wir schliesslich noch die Gasmasse m durch die Dichte ρ_0 und das Volumen V_0 der Luft bei Normalbedingungen, finden wir als Schlussformel:

$$R = \frac{kM}{\rho_0 V_0 T} \tag{4}$$

Darin sind alle Grössen aus dem Experiment bzw. aus der Literatur bekannt.

Experiment

In unserem Experiment benützen wir einen ca. 30 cm langen Glaszylinder, an dessen einem Ende ein Manometer zur Druckmessung sowie ein Entlüftungsventil angebracht sind. Das andere Ende ist durch einen Kolben verschlossen, der sich über ein Gewinde langsam verschieben lässt. Dadurch ist gewährleistet, dass sich die Temperatur der Luft im Zylinder auch während der Kompression immer der Aussentemperatur anpassen kann. Auf dem Glaszylinder ist eine Skala mit Millimetereinteilung angebracht, an der die Länge der eingeschlossenen Luftsäule abgelesen werden kann. Bei bekannter Querschnittfläche des Glaszylinders kann daraus das eingeschlossene Luftvolumen berechnet werden.

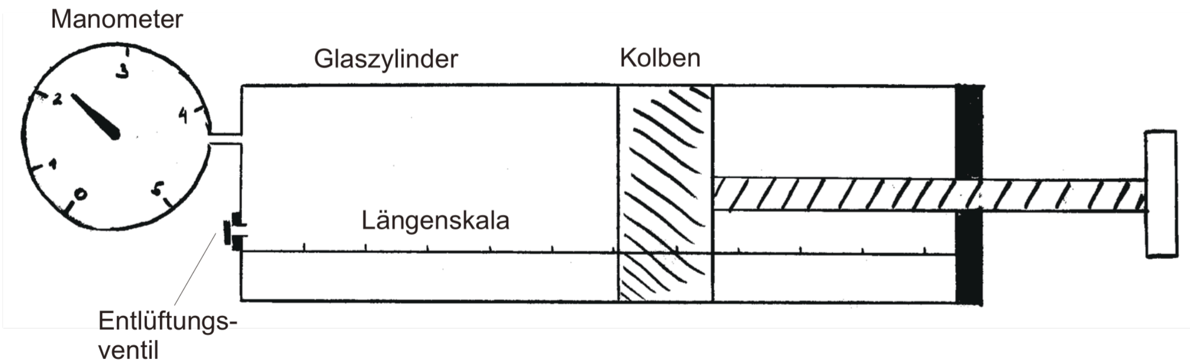


Abbildung 1: Messapparatur

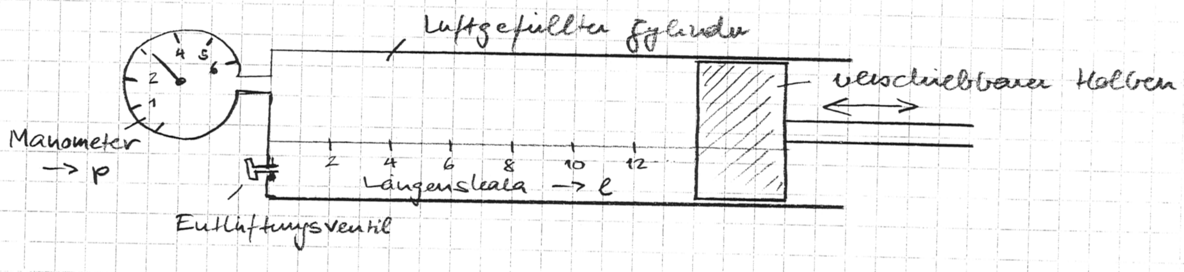
Bei der Messung wird das Volumen der eingeschlossenen Luft mit Hilfe des verschiebbaren Kolbens verändert und am Manometer der zugehörige Druck abgelesen. Das Entlüftungsventil erlaubt eine freie Wahl des "Referenzvolumens".

Gasgesetz von Boyle - Mariotte

23. 2. 2001

S. Byland, Klasse Ox

Messapparatur:



Der Kolben kann mit einem Schraubengewinde langsam im luftgefüllten Zylinder verschoben werden. Für verschiedene Volumina (proportional zur Länge der Luftsäule) kann der zugehörige Druck am Manometer abgelesen werden.

Konstante Grössen:

Lufttemperatur: $\vartheta_L = (19{,}8 \pm 0{,}1)\,°C$ (Digitalthermometer)

Umfang des ~~des~~ Zylinders: $U = (16{,}4 \pm 0{,}2)$ cm (mit Faden abgemessen)

Dicke der Glaswand: $d = (0{,}10 \pm 0{,}05)$ cm (geschätzt)

Messung 1

Zylinder wird für Luftsäulenlänge $l = 20{,}0$ cm entlüftet

Luftsäulenlänge l [cm]	20,0	19,0	18,0	17,0	16,0
Druck p [bar]	1,00	1,05	1,10	1,20	1,25

l [cm]	15,0	14,0	13,0	12,0	11,0
p [bar]	1,35	1,45	1,55	1,70	1,80

l [cm]	10,0	9,0	8,0	7,0
p [bar]	2,00	2,20	2,45	2,80

l [cm]	6,5	6,0	5,5	5,0
p [bar]	3,00	3,20	3,50	3,80

Ablesegenauigkeit : $\Delta l = 0{,}1$ cm

$\Delta p = 0{,}05$ bar

Messung 2: Zylinder wird für Luftsäulenlänge $l = 5{,}0$ cm entlüftet.

l [cm]	5,0	5,5	6,0	7,0	8,0
p [bar]	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6

l [cm]	10,0	12,0	14,0	20,0
p [bar]	0,5	0,4	0,35	0,25

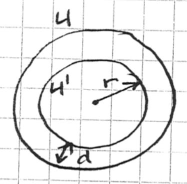
Ableseungenauigkeit : wie Messung 1

Bj

Auswertung

1. Querschnittfläche der Luftsäule:

$$A = r^2 \cdot \pi = \left(\frac{U'}{2\pi}\right)^2 \cdot \pi = \frac{U'^2}{4\pi}$$



U' ist kleiner als der Umfang U des Zylinders, da beim Abmessen die Dicke d der Plexiglaswand nicht berücksichtigt wurde.

Wir schätzen die Dicke d auf $d = (0{,}10 \pm 0{,}05)$ cm

$\Rightarrow \quad U' = U - 2\pi \cdot d = (15{,}8 \pm 0{,}5)$ cm

$(\Delta U' = \Delta U + 2\pi \cdot \Delta d)$

$\Rightarrow \quad A = \frac{U'^2}{4\pi} = (19{,}9 \pm 1{,}3)\ \text{cm}^2$

$\left(\Delta A = A \cdot r_A = A \cdot 2 \cdot r_{U'} = 2 \cdot A \cdot \frac{\Delta U'}{U}\right)$

2. Volumen der Luftsäule:

$V = A \cdot \ell$

$\Delta V = V \cdot r_V = V \cdot (r_A + r_\ell) = V \cdot \left(\frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta \ell}{\ell}\right)$

(Werte in Tabellen 1 und 2)

3. Bestimmung der passendsten Potenz:

Potenzregression (vgl. Diagramme 1 und 2)

$\Rightarrow \quad p \propto \left(\frac{V}{V_0}\right)^{+r}$ mit $r_1 = -0{,}9625$ (Messung 1)

bzw. $r_2 = -0{,}9963$ (Messung 2)

$\Rightarrow$ In beiden Fällen liegt r sehr nahe beim theoretischen Wert $r = -1$.

4. Anstieg von $k = p \cdot V$:

graphische Darstellung von $p(V^{-1})$ mit linearer Regression (vgl. Diagramme 3 und 4)

Achtung: Für eine Proportionalität von p und V^{-1} muss die Gerade durch den Nullpunkt verlaufen!

$\rightarrow$ $k_1 = p \cdot V = 417{,}75 \text{ bar} \cdot \text{cm}^3$ (Messung 1)

$k_2 = p \cdot V = 105{,}12 \text{ bar} \cdot \text{cm}^3$ (Messung 2)

Die Regressionsgerade verläuft für beide Messreihen durch sämtliche Fehlerbereiche.

$\rightarrow$ Die Messfehler sind zu gross (vgl. Punkt 1.)

5. Bestimmung der Gaskonstanten:

Ideales Gas: $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$

$$\rightarrow \quad R = \frac{p \cdot V}{n \cdot T} = \frac{k}{m/M \cdot T} = \frac{k \cdot M}{\rho_0 \cdot V_0 \cdot T}$$

Für $T = T_0 + \vartheta_L = 273{,}15\text{K} + 19{,}8\text{K} = (293{,}0 \pm 0{,}1)\text{K}$

und $p_0 = 1{,}0 \text{ bar}$ ist

$V_{0_1} = (397 \pm 27) \text{ cm}^3$ (Messung 1)

$V_{0_2} = (99 \pm 8) \text{ cm}^3$ (Messung 2)

Dichte von Luft $\rho_0 = 1{,}3 \text{ kg/m}^3$ (exakt bei 0°C)

Molmasse von Luft $M = 28{,}8 \text{ g/mol}$

grösster Fehler beim Volumen $\rightarrow$ nur ΔV_0 für Fehlerrechnung berücksichtigt

$$\rightarrow \quad \Delta R = R \cdot r_R = R \cdot r_{V_0} = R \cdot \frac{\Delta V_0}{V_0}$$

$$\rightarrow \quad R_1 = \frac{417{,}75 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \cdot 0{,}0288 \text{ kg/mol}}{1{,}3 \text{ kg/m}^3 \cdot 397 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \cdot 293{,}0 \text{ K}} = (8{,}0 \pm 0{,}5) \text{ J/mol} \cdot \text{K}$$

$$R_2 = \frac{105{,}12 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \cdot 0{,}0288 \text{ kg/mol}}{1{,}3 \text{ kg/m}^3 \cdot 99 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \cdot 293{,}0 \text{ K}} = (8{,}0 \pm 0{,}6) \text{ J/mol} \cdot \text{K}$$

Tabelle 1: **Berechnungen für Messung 1**

Umfang	**U' [cm]**	15.8		**ΔU' [cm]**	0.5
Radius	**r [cm]**	2.51		**Δr [cm]**	0.080
Querschnittfläche	**A [cm²]**	19.9		**ΔA [cm²]**	1.26

Druck		Länge	
p [bar]	**Δp [bar]**	**l [cm]**	**Δl [cm]**
1.00	0.05	20.0	0.1
1.05	0.05	19.0	0.1
1.10	0.05	18.0	0.1
1.20	0.05	17.0	0.1
1.25	0.05	16.0	0.1
1.35	0.05	15.0	0.1
1.45	0.05	14.0	0.1
1.55	0.05	13.0	0.1
1.70	0.05	12.0	0.1
1.80	0.05	11.0	0.1
2.00	0.05	10.0	0.1
2.20	0.05	9.0	0.1
2.45	0.05	8.0	0.1
2.80	0.05	7.0	0.1
3.00	0.05	6.5	0.1
3.20	0.05	6.0	0.1
3.50	0.05	5.5	0.1
3.80	0.05	5.0	0.1

	Volumen		$(\text{Volumen})^{-1}$	
	V [cm³]	**ΔV [cm³]**	**V^{-1} [cm^{-3}]**	**$\Delta(V^{-1})$ [cm^{-3}]**
V_0 ------------>	397	27.1	2.52E-03	1.7E-04
	377	25.9	2.65E-03	1.8E-04
	358	24.6	2.80E-03	1.9E-04
	338	23.4	2.96E-03	2.0E-04
	318	22.1	3.15E-03	2.2E-04
	298	20.8	3.36E-03	2.3E-04
	278	19.6	3.60E-03	2.5E-04
	258	18.3	3.87E-03	2.7E-04
	238	17.1	4.19E-03	3.0E-04
	219	15.8	4.58E-03	3.3E-04
	199	14.6	5.03E-03	3.7E-04
	179	13.3	5.59E-03	4.2E-04
	159	12.0	6.29E-03	4.8E-04
	139	10.8	7.19E-03	5.6E-04
	129	10.2	7.74E-03	6.1E-04
	119	9.5	8.39E-03	6.7E-04
	109	8.9	9.15E-03	7.5E-04
	99	8.3	1.01E-02	8.4E-04

Tabelle 2: **Berechnungen für Messung 2**

Umfang	**U' [cm]**	15.8		**ΔU' [cm]**	0.5
Radius	**r [cm]**	2.51		**Δr [cm]**	0.080
Querschnittfläche	**A [cm²]**	19.9		**ΔA [cm²]**	1.26

Druck		Länge	
p [bar]	**Δp [bar]**	**l [cm]**	**Δl [cm]**
1.00	0.05	5.0	0.1
0.90	0.05	5.5	0.1
0.80	0.05	6.0	0.1
0.70	0.05	7.0	0.1
0.60	0.05	8.0	0.1
0.50	0.05	10.0	0.1
0.40	0.05	12.0	0.1
0.35	0.05	14.0	0.1
0.25	0.05	20.0	0.1

	Volumen		$(\text{Volumen})^{-1}$	
	V [cm³]	**ΔV [cm³]**	**V^{-1} [cm⁻³]**	**$\Delta(V^{-1})$ [cm⁻³]**
V_0 ------------>	99	8.3	1.01E-02	8.4E-04
	109	8.9	9.15E-03	7.5E-04
	119	9.5	8.39E-03	6.7E-04
	139	10.8	7.19E-03	5.6E-04
	159	12.0	6.29E-03	4.8E-04
	199	14.6	5.03E-03	3.7E-04
	238	17.1	4.19E-03	3.0E-04
	278	19.6	3.60E-03	2.5E-04
	397	27.1	2.52E-03	1.7E-04

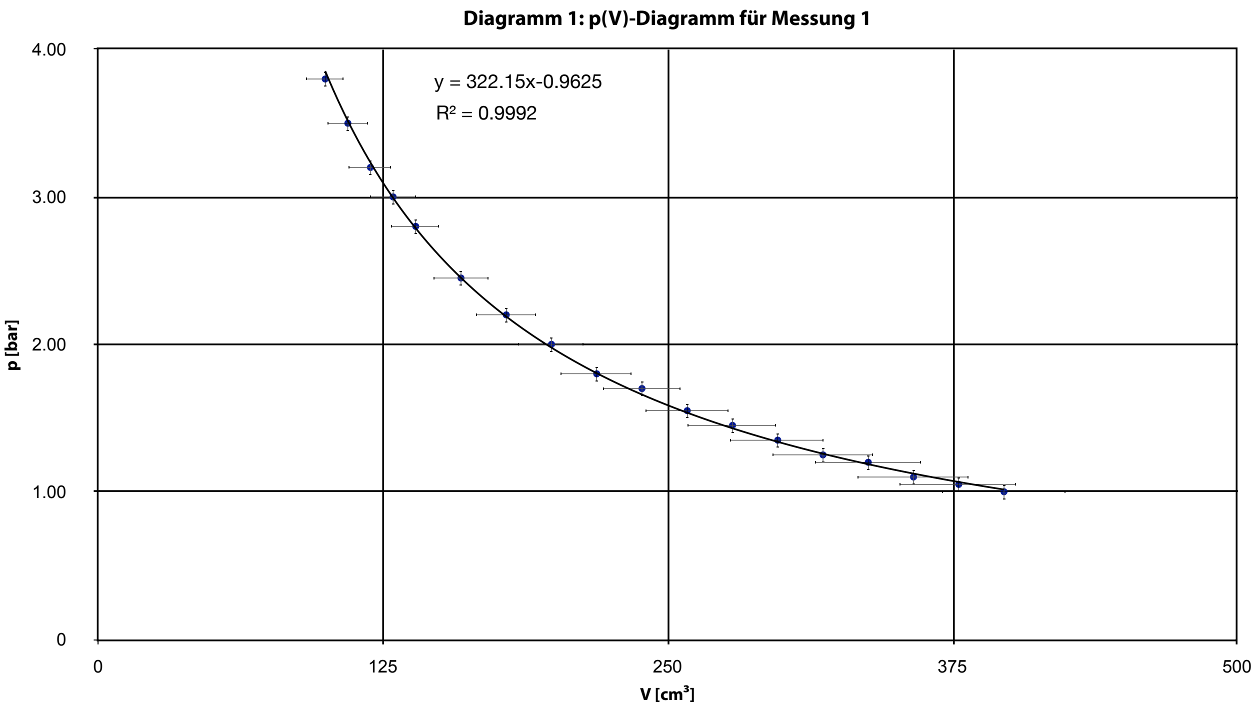


Diagramm 1: p(V)-Diagramm für Messung 1
y = 322.15x-0.9625
R² = 0.9992
4.00
3.00
2.00
1.00
0
p [bar]
0
125
250
375
500
V [cm³]

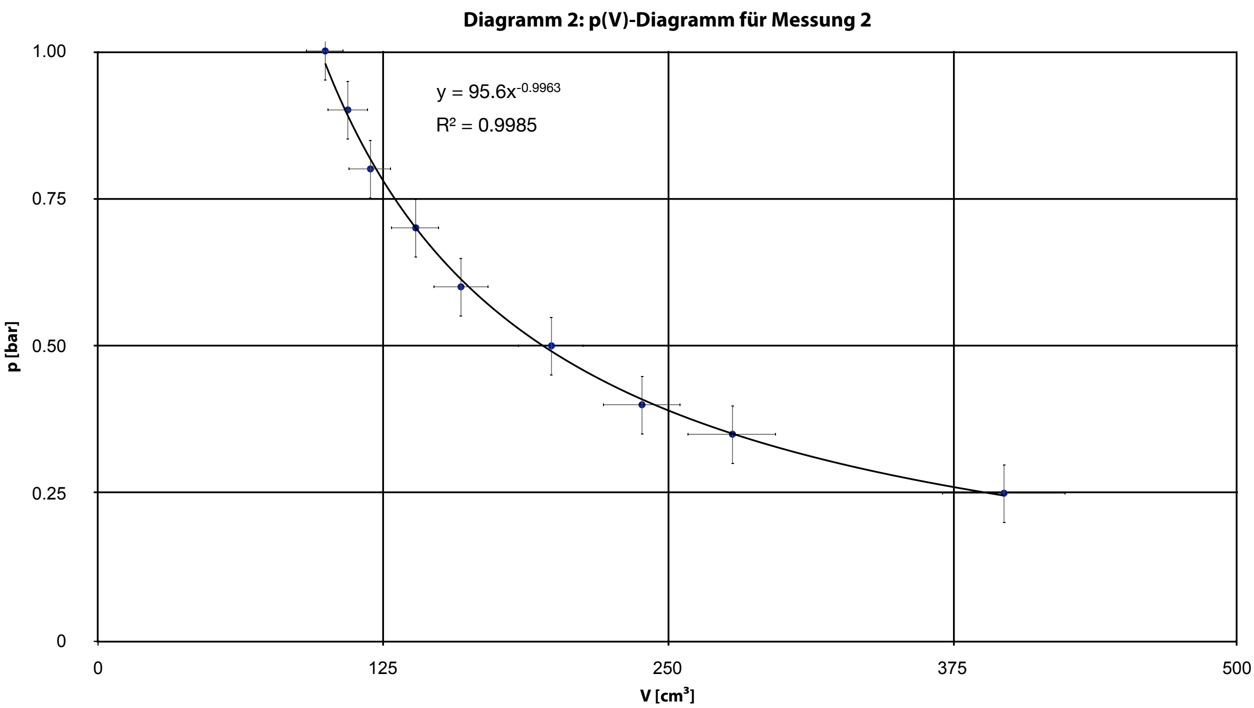


Diagramm 2: p(V)-Diagramm für Messung 2
y = 95.6x^-0.9963
R² = 0.9985
1.00
0.75
0.50
0.25
0
p [bar]
0
125
250
375
500
V [cm³]

Diagramm 3: p(1/V)-Diagramm für Messung 1

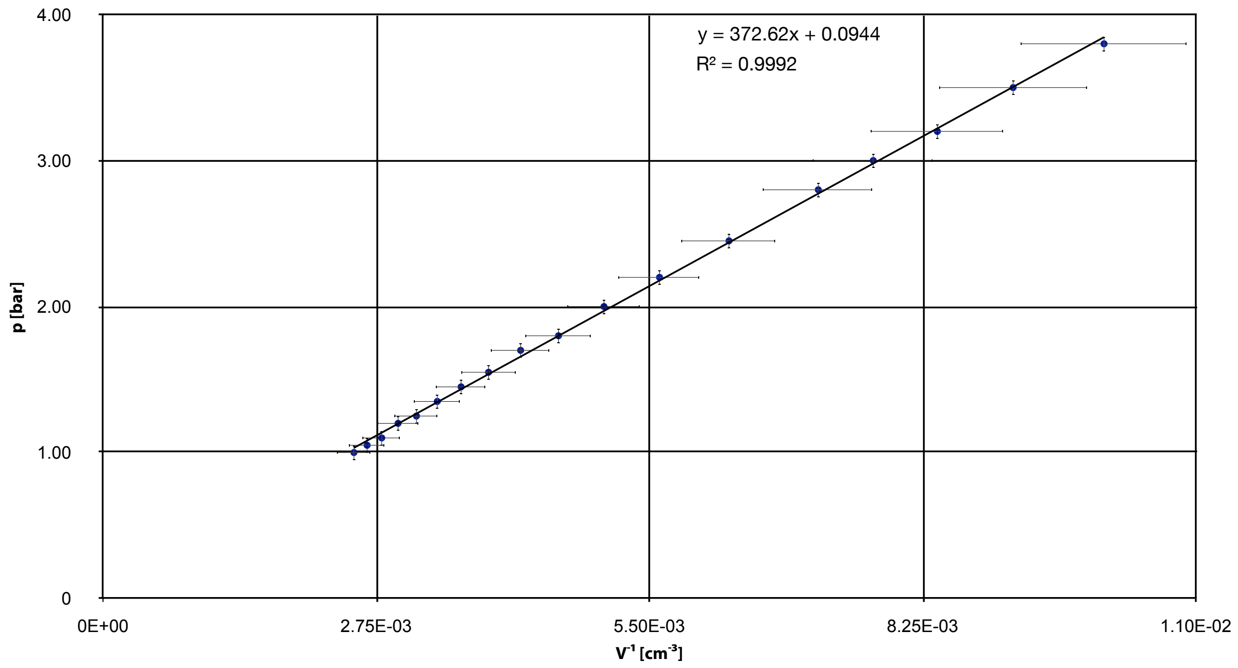
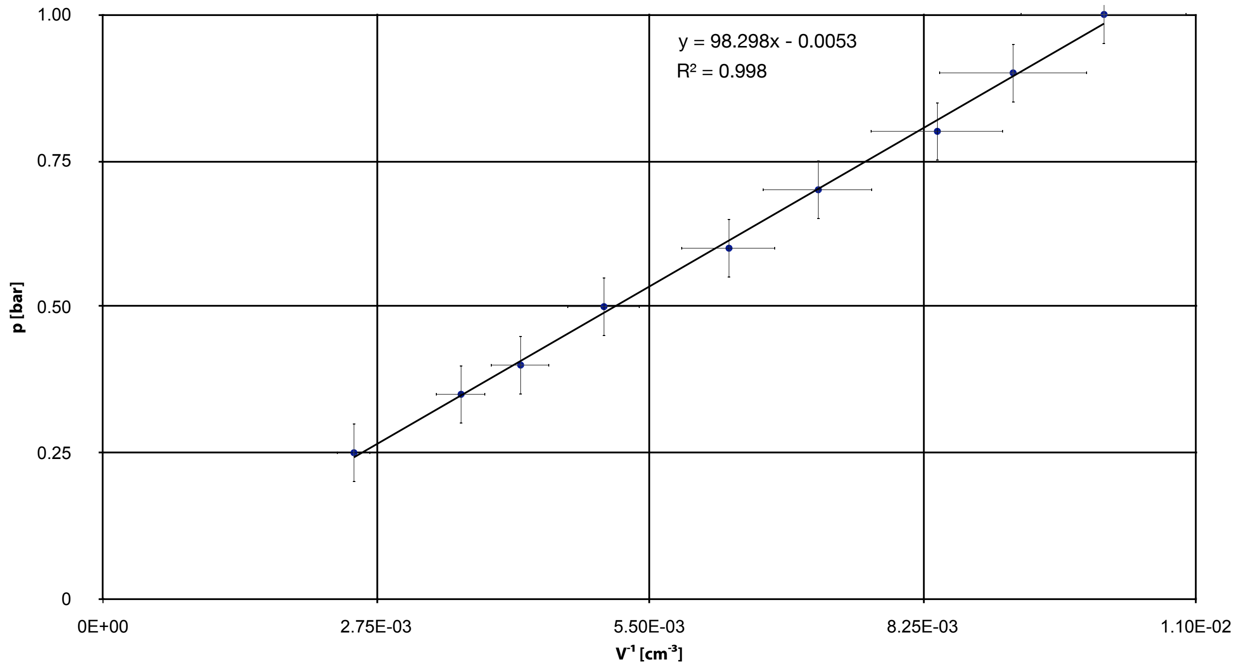


Diagramm 4: p(1/V)-Diagramm für Messung 2



Schlussfolgerungen

Resultate

Mit unserem Experiment können wir die Boyle-Mariott'sche Beziehung für Luft mit guter Genauigkeit bestätigen. Die mit einer Potenzregression bestimmten Potenzen $r_1 = -0.963$ und $r_2 = -0.996$ weichen nur unwesentlich vom theoretischen Wert $r = -1$ ab.

In der zweiten Darstellungsart ($p(V^{-1})$-Diagramme) liegen alle Punkte mit ihren Fehlerbereichen auf einer Geraden. Unsere Messungen sind zu ungenau, um die Beziehung zwischen Druck und Volumen mit der durch die Gerade suggerierten Genauigkeit zu überprüfen.

Für die universelle Gaskonstante berechnen wir aus unseren Messwerten
$R_1 = (8.0 \pm 0.5)$ J/(mol K) für die erste Messreihe und $R_2 = (8.0 \pm 0.6)$ J/(mol K) für die zweite Messreihe. Der Literaturwert $R = 8.31$ J/(mol K) [FoTa1997] liegt für beide Resultate innerhalb der Fehlerschranken. Diese sind allerdings relativ gross, was wieder auf die ungenaue Messung des Umfangs zurückzuführen ist.

Reflexion

Im Rahmen dieses Praktikums untersuchten wir die Beziehung zwischen Druck und Volumen bei Luft. Wir lernten das systematische Erfassen von Messgrössen, das führen eines vollständigen Laborjournals. Bei der Auswertung wendeten wir verschiedene Methoden an, um die Messwerte graphisch darzustellen und daraus die gesuchte Grösse zu bestimmen.

Eine Verbesserung des Experiments lässt sich in erster Linie durch eine genauere Messung des Luftvolumens erreichen, z.B. indem man die beim Entlüften entweichende Luft auffängt und deren Volumen bestimmt.

Literaturverzeichnis

Enc2001 Encarta 2001; Allwang et al.; Microsoft Corporation, 1993 – 2000

FoTa1997 Formeln und Tafeln (7. Auflage); DMK/DPK; Orell Füssli Verlag, Zürich, 1997

DoBa2000 Physik 11 (Ausgabe C, Gymnasium Sek II); Dorn, Bader (Herausgeber); Schroedel Verlag, Hannover, 2000