

GASKINETIK

Teilchenmodell

Bis ins 18. Jahrhundert war die Existenz von kleinsten, unteilbaren Teilchen als Grundbausteine der Materie sehr umstritten. Der schottische Botaniker Robert Brown (1773 – 1858) konnte 1827 mit seinem Mikroskop die ungeordnete Bewegung kleiner Pollenkörner in Pflanzensaft beobachten, welche als Folge von Stössen von Flüssigkeitsmolekülen interpretiert werden kann.

Heute stellen wir uns ein Gas als eine äusserst grosse Zahl von Teilchen (typisch 10^{23} Atome oder Moleküle) vor, welche sich im zur Verfügung stehenden Volumen in alle Richtungen bewegen und gegeneinander sowie gegen die Wände des Gefässes stossen.

Gasdruck

Der Druck eines Gases auf die Gefässwände ist eine direkte Folge der Stösse der Gasteilchen (vgl. Abbildung 1).

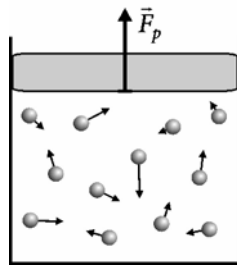


ABBILDUNG 1: Druck auf einen frei beweglichen Kolben: Die resultierende Druckkraft F_p entspricht dem zeitlichen Mittel aller Stosskräfte der Gasteilchen.

Der Vorgang ist aufgrund der grossen Zahl von Teilchen und der unterschiedlichen Richtungen an sich ziemlich kompliziert. Zur Vereinfachung betrachten wir zunächst nur ein einzelnes Teilchen der Masse m , welches sich mit der Geschwindigkeit v senkrecht zum Kolben bewegt.

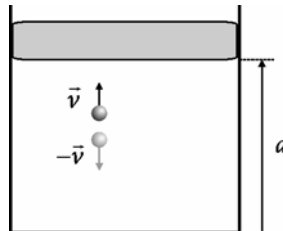


ABBILDUNG 2: Ein einzelnes Gasteilchen stösst gegen den Kolben (vor und nach dem Stoss).

Die Impulsänderung des Gasteilchens bei einem Stoss gegen den Kolben beträgt

$$\Delta p = m \cdot \Delta v = 2 \cdot m \cdot \Delta v. \quad (1)$$

Zwischen zwei aufeinander folgenden Stössen des Gasteilchens gegen den Kolben verstreicht die Zeit

$$\Delta t = \frac{2 \cdot a}{v}. \quad (2)$$

Die mittlere Kraft auf das Gasteilchen ist nach dem Aktionsprinzip von Newton

$$\bar{F} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2 \cdot m \cdot v}{2 \cdot a/v} = \frac{m \cdot v^2}{a}. \quad (3)$$

Diese entspricht auch der mittleren Kraft auf den Kolben (Wechselwirkungsprinzip von Newton). Der mittlere „Druck“ eines einzelnen Teilchens auf die Kolbenfläche A beträgt folglich

$$\bar{p}_1 = \frac{\bar{F}}{A} = \frac{m \cdot v^2}{A \cdot a} = \frac{m \cdot v^2}{V}. \quad (4)$$

Bewegen sich insgesamt N Gasteilchen im Volumen V mit der Geschwindigkeit v in beliebige Richtungen, ist der Druck auf die Gefässwände der gleiche, wie wenn sich je $N/3$ der Teilchen in jede der drei Raumrichtungen bewegen. Dadurch folgt schliesslich für den Gasdruck (mit der Gasdichte $\rho = N \cdot m/V$):

$$p = \frac{N}{3} \cdot p_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{N \cdot m}{V} \cdot v^2 = \frac{1}{3} \cdot \rho \cdot v^2. \quad (5)$$

In Wirklichkeit bewegen sich natürlich nicht alle Gasteilchen gleich schnell. In Formel (5) muss die Geschwindigkeit v daher durch die *mittlere Schnelligkeit*¹ \bar{v} ersetzt werden.

Der Gasdruck ist also nur von der Gasdichte und der mittleren Schnelligkeit der Gasteilchen abhängig:

$$p = \frac{1}{3} \cdot \rho \cdot \bar{v}^2 \quad (6)$$

BEISPIEL: Wie schnell ist ein Luftmolekül bei 20°C und Normaldruck im Mittel?

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3 \cdot p}{\rho}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 101'325 \text{ Pa}}{1.293 \text{ kg/m}^3}} = 485 \text{ m/s}$$

Gastemperatur

Für ein ideales Gas folgt aus der Zustandsgleichung $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$ und der Avogadrozahl $N_A = N/n = M/m$:

$$R \cdot T = \frac{p \cdot V}{n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\rho \cdot V}{n} \cdot \bar{v}^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{N \cdot m}{n} \cdot \bar{v}^2 = \frac{1}{3} \cdot N_A \cdot m \cdot \bar{v}^2 = \frac{1}{3} \cdot M \cdot \bar{v}^2 \quad (7)$$

Die Temperatur eines (idealen) Gases kann daher als Mass für die mittlere Schnelligkeit der Gasteilchen interpretiert werden:

$$T \propto \bar{v}^2 \quad (8)$$

Bei verschiedenen Gasen gleicher Temperatur hängt die mittlere Schnelligkeit von der Molmasse M ab.

BEISPIEL: In welchem Verhältnis stehen die mittleren Schnelligkeiten von Wasserstoff- und Sauerstoffmoleküle in den entsprechenden Gasen bei gleicher Temperatur zueinander?

$$M_{H_2} \cdot \bar{v}_{H_2}^2 = M_{O_2} \cdot \bar{v}_{O_2}^2 \Rightarrow \bar{v}_{H_2} : \bar{v}_{O_2} = \sqrt{M_{O_2} : M_{H_2}} = \sqrt{32 : 2} = 4 : 1$$

Kinetische Energie

Die mittlere kinetische Energie eines Gasteilchens beträgt mit (7)

$$\bar{E}_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \bar{v}^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{3 \cdot R \cdot T}{M} = \frac{3}{2} \cdot \frac{m}{M} \cdot R \cdot T = \frac{3}{2} \cdot \frac{R}{N_A} \cdot T. \quad (9)$$

Mit der Boltzmann-Konstanten $k = R/N_A$ erhält man schliesslich:

$$\bar{E}_{kin} = \frac{3}{2} \cdot k \cdot T \quad (10)$$

Die Gastemperatur entspricht also (bis auf einen konstanten, von der Gassorte unabhängigen Faktor) der mittleren kinetischen Energie der Gasteilchen.

¹ Es wird hier bewusst der Begriff Schnelligkeit gewählt. Die Geschwindigkeit ist eine vektorielle Grösse, deren Mittelwert offensichtlich null ist, sodass die *mittlere Geschwindigkeit* hier keinen Sinn macht.

Geschwindigkeitsverteilung

Man kann zeigen, dass die Geschwindigkeitsverteilung der Teilchen eines idealen Gases durch die so genannte *Maxwell-Verteilung* beschrieben werden kann²:

$$f(v) = 4\pi \cdot \left(\frac{M}{2\pi \cdot R \cdot T} \right)^{3/2} \cdot v^2 \cdot e^{-\frac{M \cdot v^2}{2 \cdot R \cdot T}}$$

Die Funktion ist in Abbildung 3 für Sauerstoff bei verschiedenen Temperaturen dargestellt. Das Maximum entspricht der *wahrscheinlichsten* Teilchenschnelligkeit v_w , welche etwas kleiner als die mittlere Schnelligkeit \bar{v} ist. Die Fläche unter der Kurve zwischen zwei Werten auf der Abszisse entspricht dem (relativen) Anteil der Gasteilchen mit einer Schnelligkeit zwischen diesen beiden Schnelligkeiten.

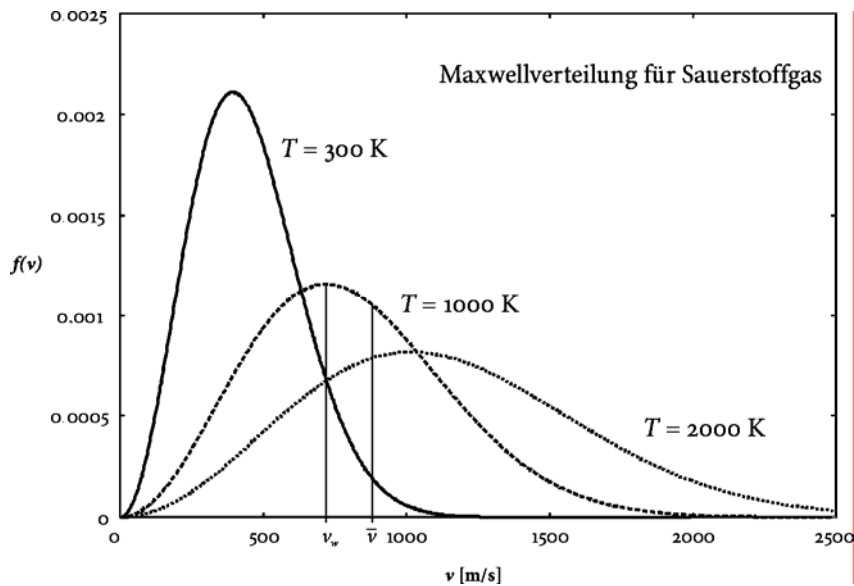
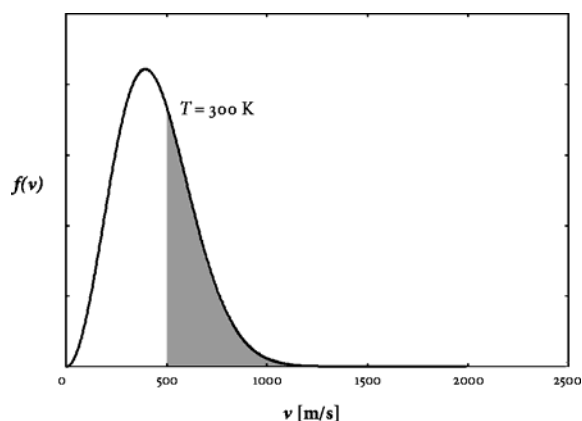


ABBILDUNG 3: Maxwell-Geschwindigkeitsverteilung für Sauerstoffgas bei verschiedenen Temperaturen

Bei tiefen Temperaturen liegen die Schnelligkeiten aller Gasteilchen nahe bei der mittleren Schnelligkeit, während die Kurve bei zunehmender Temperatur immer mehr „verschmiert“, d.h. es gibt viele Teilchen, deren Schnelligkeit viel grösser oder kleiner als die mittlere ist.

BEISPIEL: Welcher Bruchteil der Sauerstoffmoleküle ist bei 300 K mindestens 500 m/s schnell?

Die Fläche unter der Kurve zu 300 K rechts von 500 m/s entspricht ungefähr einem Drittel der Gesamtfläche, d.h. rund ein Drittel aller Sauerstoffmoleküle bewegt sich schneller als mit 500 m/s. Eine genaue Berechnung für die gesuchte Fläche (z.B. mit TI-89) liefert einen Wert von 36 %.



² Dabei bezeichnet *e* die *Exponentialfunktion*, welche auf dem TI-89 mit der Tastenfolge $\alpha \sigma$ eingegeben werden kann.