3.1 Schwingungen

Harmonische Schwingungen

1

a) Es handelt sich um periodische Vorgänge, d.h., eine bestimmte Bewegung wiederholt sich in regelmässigen zeitlichen Abständen. Es existiert in jedem Fall eine Gleichgewichtslage des bewegten Gegenstandes. Die Bewegung wird durch Kräfte aufrechterhalten, die den Gegenstand in diese Gleichgewichtslage zu bringen versuchen.

b) Schwingungen einer Saite, Pendelbewegungen im Sport (Ringe, Reck), Hin-und-Her-Bewegung des Wassers in der Badewanne.

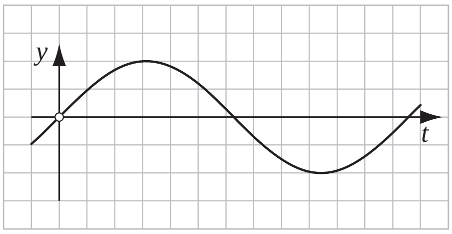
2

a) Nein. Die Rückstellkraft ist nicht proportional zur Auslenkung.

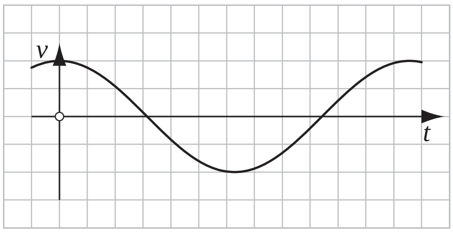
b) $T = 4 \cdot \sqrt{\dfrac{2s}{g \sin \alpha}}$; 2.4 s

3

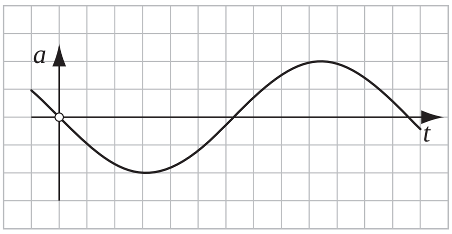
a) y proportional $\sin(\omega t)$



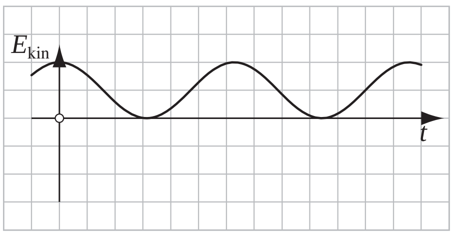
b) v proportional $\cos(\omega t)$



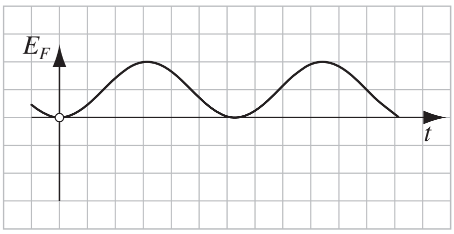
c) a proportional $-\sin(\omega t)$



d) E_{kin} proportional $\cos^2(\omega t)$



e) E_{Feder} proportional $\sin^2(\omega t)$



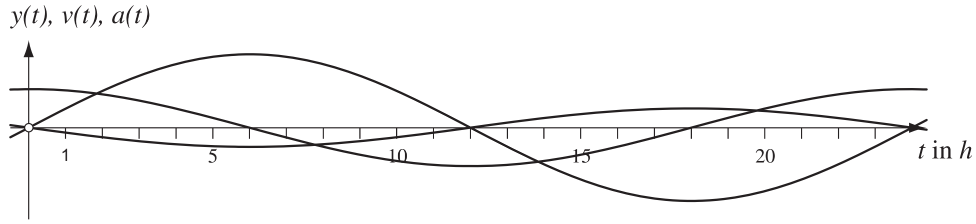
4

a) $\omega = \frac{2\pi}{T}$; $y = \hat{y}\sin(\omega t)$; 1.7 m

b) $v = \omega\hat{y}\cos(\omega t)$; 52 cm/h
$a = -\omega^2\hat{y}\sin(\omega t)$; 0

c) $t = \frac{-\arcsin\left(\frac{y}{\hat{y}}\right)}{\omega} + 12\text{ h}$; 13.5 h

d)



5

$v_{\max} = \hat{y}\cdot\frac{2\pi}{T}$; 0.94 m/s

6

Jetzige Periodendauer: $T_j = \frac{3600\text{ s} - 5\text{ s}}{3600\text{ s}}\cdot 1\text{s}$; 0.9986 s

Die Federkonstante D ist: $D = \frac{m4\pi^2}{T_j^2}$; 1.781 N/m

Die neue Masse (T = 1 s) beträgt: $m = \frac{DT^2}{4\pi^2}$; 45.13 g

Sie müssen also 0.13 g zusätzlich anbringen.

7

a) Da die Schwingung gedämpft ist, kann sie unmöglich harmonisch sein.

b) $F = -\rho A g y \propto y$
Die Schwingung ist also ohne Reibung harmonisch.

c) $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{A\rho g}}$; 1.4 s

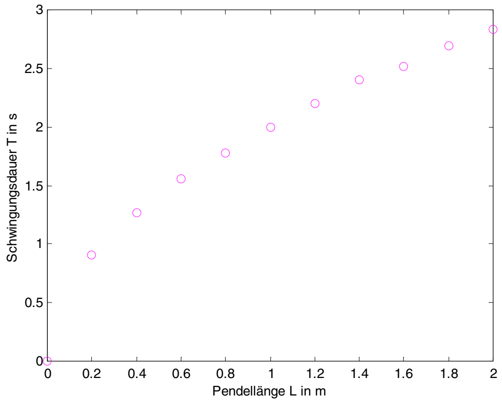
8

Wenn die Flüssigkeit auf der einen Seite nach unten geht, steigt sie auf der anderen Seite um genauso viel nach oben. Dann herrscht ein Ungleichgewicht in der Gewichtskraft, und zwar um die doppelte Distanz, die hinuntergedrückt wurde.
Also: $F = -2\rho Agy \propto y$
Das ist aber die Voraussetzung für eine harmonische Schwingung.

Mathematisches Pendel

9

a)



b)

L in m	T in s	$k = \frac{L}{T^2}$ in m/s^2
0.20	0.90	0.247
0.40	1.27	0.248
0.60	1.55	0.250
0.80	1.78	0.252
1.00	1.99	0.253
1.20	2.20	0.248
1.40	2.40	0.243
1.60	2.52	0.252
1.80	2.70	0.247
2.00	2.83	0.250

c) $\frac{L}{T^2} = (0.249 \pm 0.003)\ \text{m/s}^2$

d) $\frac{L}{T^2} = \frac{g}{4\pi^2} \Rightarrow g = 4\pi^2 \cdot (0.249 \pm 0.003)\ \text{m/s}^2 = (9.83 \pm 0.12)\ \text{m/s}^2$

Die Fallbeschleunigung g wurde mit einer Standardabweichung von ca. 1.2 % bestimmt.

10

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 16.4\,\mathrm{s}$$

Von einer Extremlage zur anderen dauert es $\frac{T}{2} = 8.2$ s.

11

a) Aus $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ erhalten Sie $L = \frac{gT^2}{4\pi^2} = 0.990971$ m.

b) Mit $L = 0.991011$ m erhalten Sie $\frac{T}{2} = 1.000020$ s.

12

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}; \quad D = \frac{mg}{l}; \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Es kommt dieselbe Formel heraus, die für das Fadenpendel gilt.
Bei kleinen Auslenkungen führt auch das Fadenpendel eine harmonische Schwingung aus.

13

a) Die Pendeluhr wird ungenau laufen, da ihre Schwingungsperiode durch die Fallbeschleunigung bestimmt ist.

b) Sie wird zu langsam laufen, weil $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ und g mit zunehmender Höhe abnimmt.

14

a) $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{L_1}{g}}$ und $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{L_2}{g}} \Rightarrow \frac{L_1}{L_2} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2$; $\left(\frac{28}{26}\right)^2 = 1.16:1$

b) Nachdem Laura 13-mal und Viviane 14-mal hin und her geschaukelt sind, sind sie zum ersten Mal wieder in Phase. Das ist nach 48 Sekunden.

c) Nach 24 Sekunden sind sie zum ersten Mal in Gegenphase, nach 72 Sekunden zum zweiten Mal.

15

a) Ein Tag hat 1440 Minuten. 5 Minuten sind 0.347% davon. Die Schwingungsdauer des Pendels ist um 0.347% zu gross. Sie müsste also auf 99.653% der momentanen Schwingungsdauer verkürzt werden.

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{L_1}{g}}$$

Da T proportional zu $\sqrt{L}$, folgt $\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = 0.99653$, oder $\frac{L_2}{L_1} = 0.99307$

$$L_2 = 0.99307 \cdot 38\,\text{cm} = 37.7366\ \text{cm}$$

Marco verkürzt das Pendel vorerst um 2.63 mm. Pro Umdrehung der Verstellschraube verkürzt sich das Pendel um 0.48 mm.

b) Die Schwingungsdauer ist immer noch um 0.0463% zu gross.

$$\frac{L_3}{L_2} = 0.999537^2 \Rightarrow L_3 = 37.7017\ \text{cm}$$

$$\frac{L_3}{L} = 0.99307 \Rightarrow L = \frac{L_3}{0.99307} = 37.96\,\text{cm}$$

Das Pendel war also nicht 38 cm lang, sondern 37.96 cm. Es muss noch um 0.4 mm verkürzt werden. Das sind 0.73 Umdrehungen an der Verstellschraube, also noch etwa ¾ Umdrehungen.

16

a) Mit dem Energiesatz erhält man
$v = \sqrt{2gL(1-\cos\alpha)} = 1.09\ \text{m/s}$

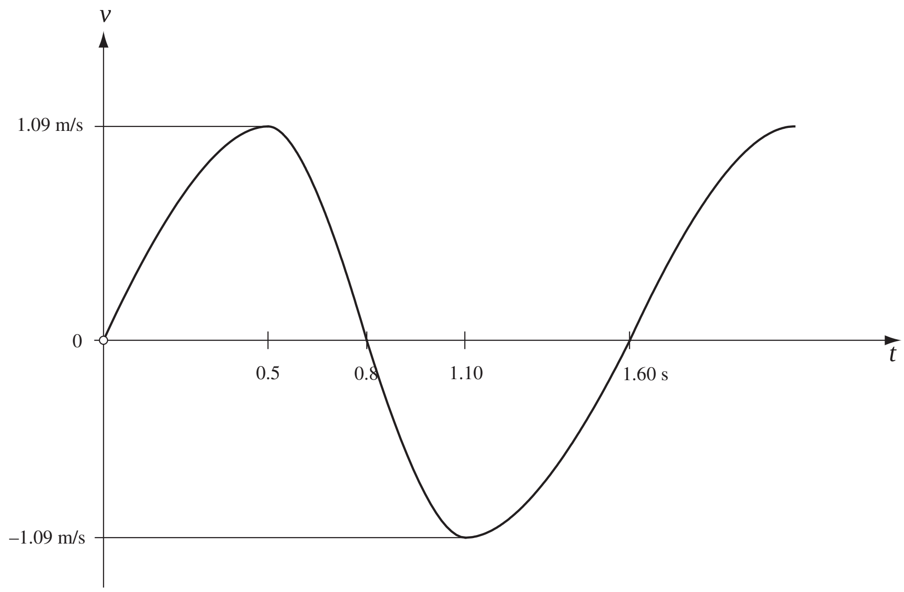
b) Ebenfalls mit dem Energiesatz erhält man

$$L_1(1-\cos\alpha) = L_2(1-\cos\beta) \Rightarrow \cos\beta = 1 - \frac{L_1}{L_2}(1-\cos\alpha) \Rightarrow \beta = 33.6^\circ$$

c) Die totale Schwingungsdauer setzt sich aus zwei Teilen zusammen:

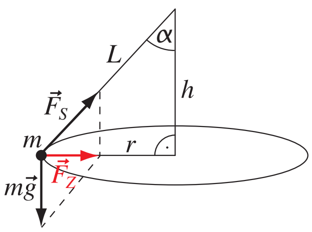
$$T_1 = \pi\sqrt{\frac{L_1}{g}} = 1.00\ \text{s} \quad \text{und} \quad T_2 = \pi\sqrt{\frac{L_2}{g}} = 0.60\,\text{s} \Rightarrow T = T_1 + T_2 = 1.60\ \text{s}$$

d)



17

a)



Es wirken nur zwei Kräfte: die Gewichtskraft *mg* und die Seilkraft F_s, die zusammen die Zentripetalkraft F_z ergeben.

b) $F_Z = mg\tan\alpha = \dfrac{mv^2}{r} = \dfrac{mv^2}{L\sin\alpha} \Rightarrow v = \sqrt{gL\tan\alpha\sin\alpha} = 1.9\text{ m/s}$

c) $T = \dfrac{2\pi r}{v} = 2\pi\dfrac{L\sin\alpha}{\sqrt{gL\tan\alpha\sin\alpha}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{L\sin\alpha}{g\tan\alpha}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{L\cos\alpha}{g}} = 2.1\text{ s}$

d) $L\cos\alpha = h$ und $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L\cos\alpha}{g}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{h}{g}}$

ist die Schwingungsdauer eines mathematischen Pendels mit der Pendellänge *h*.

e) $T_{\max} = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}} = \dfrac{2\pi}{\omega_{\min}} \Rightarrow \omega_{\min} = \sqrt{\dfrac{g}{L}} = 2.8\text{ rad/s}$

f) $F_S = \dfrac{mg}{\cos\alpha} = 5mg \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{1}{5} \Rightarrow \alpha = 78°$

$v = \sqrt{gL\tan\alpha\sin\alpha} = 7.7 = 7.7\text{ m/s}$

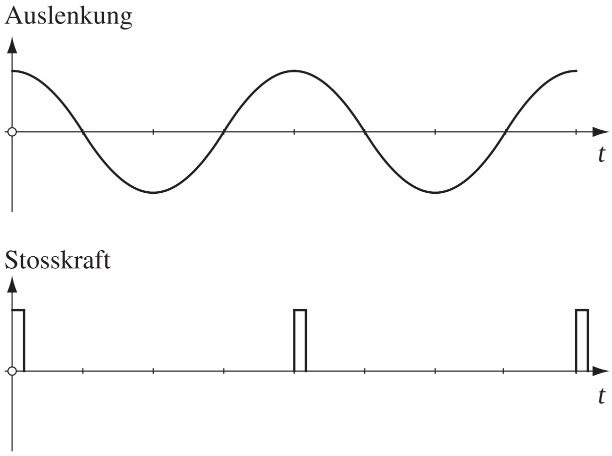
Erzwungene Schwingungen, Resonanz

18

Die Drehung des Zahnrads erzwingt die Schwingung der Pendelgabel. Durch die besondere Form der Zähne und der Pendelgabel sowie durch die geschickte gegenseitige Anordnug der bewegten Teile, wird das Pendel bei jeder Schwingung phasenrichtig kurz angestossen. Das Rad kann bei jeder Schwingung nur um einen Zahn weiterdrehen.
In www.uhrentechnik.de kann man sogar die Animation von verschiedenen Anregungsverfahren abspielen.

19

a) Die Stösse müssen phasengleich zur Schaukelbewegung erfolgen. Die Frequenz der Schaukelbewegung muss ein ganzzahliges Vielfaches der Anstossfrequenz sein.



b) Aus $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ erhalten wir $l = \frac{gT^2}{4\pi^2} = 2.5$ m

Die grösste Lageenergie bei einer Amplitude von $\hat{\varphi} = 30^\circ$ ist

$E_{\text{pot}} = mgl(1 - \cos\alpha) = 40$ J.

Der Energieverlust pro Periode ist 10% davon, also 4.0 J.
Diese Energie muss durch Arbeit $W = F \cdot s$ nachgeliefert werden. Die Kraft wirkt dabei in Wegrichtung. Der Weg ist der Kreisbogen, den das Kind nach dem Umkehrpunkt in 0.4 s zurücklegt.
Es gilt (in der Näherung einer harmonischen Schwingung) für den Auslenkwinkel der Schaukel, wenn die Schaukel zum Zeitpunkt $t = 0$ am Umkehrpunkt ist:

$\varphi(t) = \hat{\varphi}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ und damit $\varphi(0.4\text{ s}) = 21°$.

Mit den Winkeln in rad ist $s = l \cdot (\hat{\varphi} - \varphi(0.4\text{ s})) = 0.39$ m und somit $F = \frac{W}{s} = 10$ N.

Zusammenfassend gilt (mit Winkel $\hat{\varphi}$ in rad):

$$F = \frac{0.1mg(1-\cos\hat{\varphi})}{\hat{\varphi}\left(1-\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right)}; \quad 10\text{ N}$$

20

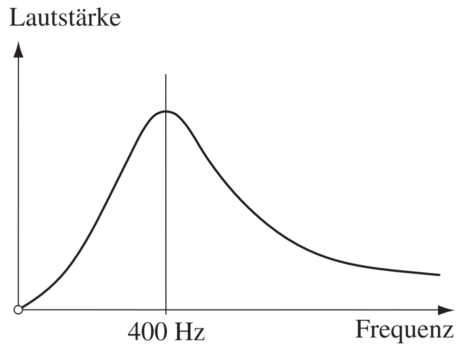
a) Der Resonanzkörper verhält sich ähnlich wie eine gedackte Flöte, die von der Schwingung der Stimmgabel über die Wände des Resonanzkastens zum Schwingen angeregt wird.

b) Die Eigenschwingung des Resonanzkörpers muss die gleiche Frequenz haben wie die Schwingung der Stimmgabel, also 440 Hz.

Für gedackte Flöten gilt (siehe «stehende Wellen») $x = \frac{\lambda}{4} = \frac{c}{4f} = 20$ cm.

c) Die im ersten Resonanzkörper schwingende Luft regt die Luft im zweiten Resonanzkörper zum Schwingen an. Diese Schwingung regt die am Resonanzkörper befestigte Stimmgabel ebenfalls zum Schwingen an.

d)



21

Das Weinglas ist ein schwingungsfähiges System mit wohldefinierten Eigenfrequenzen. Erzeugt man eine leistungsstarke Schallwelle mit exakt einer dieser Frequenzen, so kann das Glas in Resonanz geraten und nach und nach so viel Energie aufnehmen, dass es zerbricht. Caruso hätte also mit seiner Stimme einen sehr lauten Ton in einer genau definierten Tonhöhe erzeugen müssen. Neuere Untersuchungen mit Lautsprechern haben jedoch ergeben, dass die menschliche Stimme bei weitem nicht ausreicht, um ein Weinglas zu zerbrechen. Die Geschichte mit Caruso und dem Weinglas ist wohl erfunden.

Die Schwingung des Glases lässt sich sehr schön beobachten, wenn man die spiegelnde Oberfläche des Weines im Glas in geeignetem Licht betrachtet.

Überlagerung von Schwingungen

22

Ausser bei der gegengleichen Schwingung, wo scheinbar keine Bewegung mehr beobachtet wird, entstehen überall wieder harmonische Schwingungen derselben Frequenz. Die grösste Amplitude wird bei der Überlagerung erreicht, wo die einzelnen Schwingungen in Phase sind (Phasenverschiebung 0).

23

$$y_{\text{res}} = 2\hat{y}\cos\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)\cdot\sin\left(\omega t - \frac{\varphi_0}{2}\right)\text{, weil } \cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$$

$$\hat{y}_{\text{res}} = 2\hat{y}\left|\cos\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)\right|$$

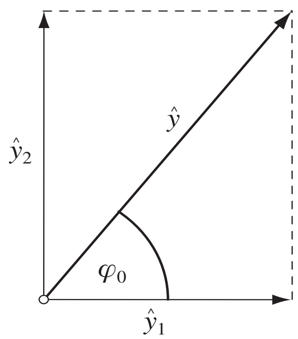
Für 2π/3 ist die Amplitude genau so gross wie diejenige der Einzelschwingungen.

24

a) Projiziert man eine gleichförmige Kreisbewegung auf eine Gerade in derselben Ebene, zum Beispiel durch Schattenwurf, so entsteht eine harmonische Schwingung. Die Kreisbewegung kann sehr gut durch einen rotierenden Zeiger beschrieben werden. Deshalb eignen sich rotierende Zeiger auch zur Darstellung von harmonischen Schwingungen.

b) $\hat{y} = \sqrt{\hat{y}_1^2 + \hat{y}_2^2}$; 5 cm

$\varphi_0 = \arctan\left(\frac{\hat{y}_2}{\hat{y}_1}\right)$; 0.93



25

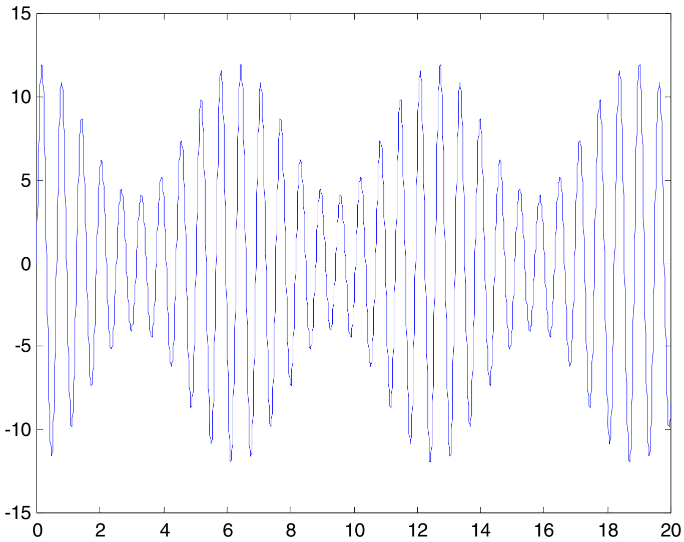
a) Wenn die beiden Funktionen in Phase sind, hat ihre Summe die Amplitude 2. Wenn die Funktionen gegenphasig verlaufen, so verschwindet die Amplitude der Summenfunktion. Die Amplitude von $y = y_1 + y_2$ schwankt periodisch zwischen 0 und 2.

b) Die Amplitude schwankt mit einer Periode von 2π.

c) $y = \sin(7t) + \sin(8t) = 2\cos(0.5t)\sin(7.5t)$
kann als Schwingung mit der Kreisfrequenz 7.5 interpretiert werden. Die Amplitude dieser Schwingung schwankt zwischen 0 und 2 gemäss $2\cos(0.5t)$.

d) Die Gitarristin hört einen Ton mit der Frequenz 219 Hz, dessen Amplitude mit einer Frequenz von 2 Hz zwischen einem Minimum und einem Maximum schwankt oder «schwebt». Wohl hat man für die Amplitude eine Funktion der Form $2\cos(2\pi t)$, deren Frequenz bloss 1 Hz beträgt. Während einer Periode erreicht aber die Lautstärke zweimal ein Maximum (bei $t = 0$ und $t = ½$ s) und zweimal verschwindet sie (bei $t = ¼$ s und $t = ¾$ s).
Die Schwebungsfrequenz wird umso kleiner, je kleiner der Frequenzunterschied zwischen den beiden Tönen ist, die die Schwebung erzeugen. Diese Tatsache kann man benützen, um die beiden Töne exakt aufeinander abzustimmen.

26



Die Amplitude des Trägersignals wird mit der Frequenz des akustischen Signals «moduliert», d. h. verändert. Verbindet man alle Maxima (oder Minima) des modulierten Trägersignals mit einer Kurve, so erhält man eine Kosinusfunktion mit der Amplitude der Seitenbänder und der Frequenz Δf. (Die Kreisfrequenz zu $\Delta f = 1$ Hz ist 2π rad/s.)
Die Amplitude der Seitenbänder darf nicht grösser werden als die halbe Amplitude des Trägersignals!