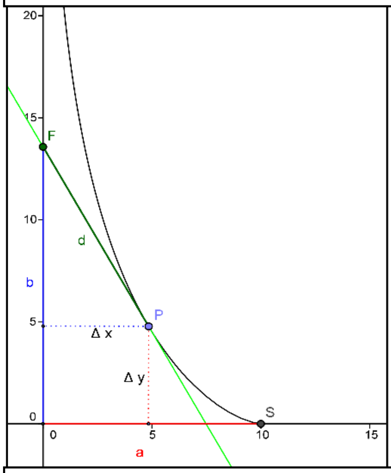
Traktrix: Herleitung und Beweis

Als Gottfried Willhelm Leibniz seine Kettenuhr einer Tischkante entlang zog, entdeckte er ein mathematisches Phänomen: Die Schleppkurve. Auch Traktrix genannt, verkörpert sie eine ebene Kurve, deren Tangenten in Abhängigkeit zur Leitlinie stehen. Der Abstand der Tangentenberührungspunkte der Kurve beziehungsweise Leitlinie ist konstant und bildet somit die Grundvoraussetzung für die Herleitung.

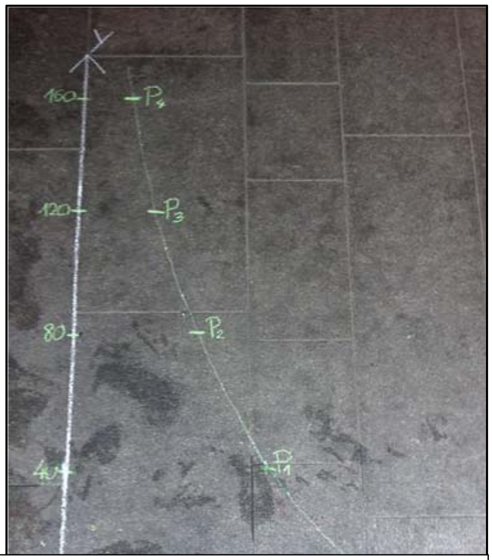


Wir streben einen Ausdruck für y an, der nur aus dem Term x und der gege Konstante d bestehen soll. Um die Formel der Kurve in der Grafik links herzuleiten, sind der Pythagoras, sowie die Steigung der Tangente erforderlich. Weil die Strecke a der Strecke d entspricht, können wir die Randbedingung y(d) = 0 bestimmen. Unter Berücksichtigung dieser Randbedingung lösen wir die Differenzialgleichung zu folgender Formel auf:

$$y = -\sqrt{d^2 - x^2} + d \cdot \ln\left(\frac{d + \sqrt{d^2 - x^2}}{x}\right)$$

Experiment eigentliche Traktrix:

Ein Holzklotz wurde von einer 1-Meter langen Schnur der y-Achse entlang gezogen und zeichnete eine Schleppkurve. Das abgeschlossene Experiment wird in der nebenstehenden Abbildung reproduziert.



Die Anwendung der Traktrix im Alltag findet man im Strassenbau. Die Schleppkurvenberechnung beantwortet die Frage, wie sich ein Lastwagen in Kurvenfahrten verhält. Auch für dieses Phänomen haben wir eine Gleichung erarbeitet.

$$y_P = y_F \pm \sqrt{d^2 - (x_P - x_F)^2}$$

at:

[cm]	x	y (Exp.)	y (Theo.)
P_1	56	40	35.48
P_2	36	80	74.77
P_3	23	120	117.61
P_4	15	160	159.59

Fehlerschranke relativ gross, da wir die Geschwindigkeit, Grösse, Masse und Reibung des Holzklotzes vernachlässigen.