1. Zwei Kugeln tragen die Ladungen $+1\,\mu$C und $+2\,\mu$C. Der Abstand zwischen ihren Mittelpunkten beträgt 35 cm. Wie gross ist die abstossende Kraft zwischen den beiden?
2. Zwischen zwei Kugeln mit den Ladungen $+1.5\,\mu$C und $-2.5\,\mu$C wirkt eine Kraft von 25 mN. Wie gross ist der Abstand zwischen den Kugeln?
3. Zwischen zwei gleich grossen Ladungen im Abstand von 5.0 cm wirkt eine Kraft von 2.0 mN. Berechnen Sie den Betrag der Ladungen.
4. Der Abstand zwischen zwei Punktladungen wird auf einen Drittel verkleinert. Wie ändert sich dabei die Kraft?
5. Zwischen zwei geladenen Metallkugeln im Abstand $r$ misst man die Kraft $F$. In welchem Abstand beträgt die Kraft nur noch $F/2$?
6. Der Abstand zwischen zwei Punktladungen wird von $r$ auf $r'$ vergrössert. Dabei nimmt die Kraft zwischen den beiden um 10% ab. Bestimmen Sie das Verhältnis $r' : r$.
7. Zwei Ladungen $Q_1$ und $Q_2$ haben Abstand $d$. Eine Probeladung $q$ wird auf der Verbindungsgeraden platziert. In welchem Abstand von $Q_1$ ist die Probeladung kräftefrei, wenn $Q_1 : Q_2 = 1/4$.
8. Zwei kleine Kügelchen sind an zwei isolierenden Seidenfäden im selben Punkt an der Decke aufgehängt und sind gleich start aufgeladen. Die Länge der Seidenfäden beträgt 1.2 m, die Kügelchen sind je 1.2 g schwer. Durch die Coulombkraft werden die Kügelchen 10 cm auseinander getrieben.
   (a) Bestimmen Sie die Ladung jeder Kugel.
   (b) * Wie gross wird der Abstand zwischen den Kugeln, wenn die Ladung der linken Kugel verdoppelt wird?
9. * Drei Punktladungen $+q$ befinden sich an den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks mit Kantenlänge $a$.
   (a) Berechnen Sie Betrag und Richtung der Kräfte, die auf die Ladungen an den Ecken wirken.
   (b) Wie gross muss eine in der Mitte des Dreiecks angebrachte Ladung sein, damit die Ladungen an den Ecken kräftefrei sind?

**Zusätzliche Aufgaben**

10. Welche Gemeinsamkeiten und Unterschiede bestehen zwischen Coulomb- und Gravitationsgesetz?
11. Vier Ladungen mit dem gleichen Betrag sind in den Ecken eines Quadraten mit der Seitenlänge $l$ angebracht ($\epsilon = \epsilon_0$). $Q_1$, $Q_2$ und $Q_3$ sind positiv, $Q_4$ ist negativ. Im Betrag sind alle Ladungen gleich gross. Berechnen Sie die resultierende Kraft $\vec{F}$ auf die Ladung $Q_2$.
12. Zwei Punktladungen $Q_1$ und $Q_2$ befinden sich auf der x-Achse bei $x_1 = 0\,$cm und $x_2 = 5\,$cm. Eine Dritte Ladung $Q_3 = Q_1/2$ befinde sich auf der x-Achse. Skizzieren Sie den Verlauf der Kraft $F(x)$ auf die Ladung $Q_3$ für a) $Q_1 = Q_2$ und für b) $Q_1 = -Q_2$.
13. * Es sind zwei identische Kugeln mit jeweils 0.40 g Masse und 9.00 nC positiver Ladung vorhanden. Die eine Kugel ist fest installiert und die andere Kugel bewegt sich praktisch reibungsfrei zentral auf die feste Kugel zu. In einem Abstand von 1.00 m hat sie eine Geschwindigkeit von 0.20 m/s. Durch die abstossenden Kräfte zwischen den Ladungen wird die bewegte Kugel bis auf null abgebremst und bewegt sich wieder zurück. Stellen Sie die Bewegung der Kugel 2 von 0 s bis 10 s in einem Zeit-Geschwindigkeit-Diagramm und Zeit-Position-Diagramm dar. Wie gross ist der minimale Abstand zwischen den beiden Kugeln? Hinweis: iterative Berechnung (in Excel zum Beispiel).

## Lösung

**1.** 0.1 N **2.** 1.2 m **3.** 24 nC **4.** neunmal grösser **5.** $\sqrt{2} \cdot r$ **6.** $1.05 : 1$ **7.** $d/3$ **8.** a) 23 nC b) 13 cm
**9.** a) $\frac{\sqrt{3}k \cdot q^2}{a^2}$ b) $-q/\sqrt{3}$ **11.** $(\sqrt{2} - 0.5) \cdot \frac{Q^2}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot l^2}$

1. $F_C = k \cdot \frac{Q_2 \cdot Q_1}{r^2} = 8.97 \cdot 10^9\,\mathrm{Nm^2/C^2} \cdot \frac{2 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{C^2}}{(0.35\,\mathrm{m})^2} = 0.146\,\mathrm{N} = 0.1\,\mathrm{N}$

2. $r = \sqrt{k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{F_C}} = \sqrt{8.97 \cdot 10^9\,\mathrm{Nm^2/C^2} \cdot \frac{(1.5\,\mu\mathrm{C}) \cdot (2.5\,\mu\mathrm{C})}{0.025\,\mathrm{N}}} = 1.15996\,\mathrm{m} = 1.2\,\mathrm{m}$

3. $Q = \sqrt{F_C/k} \cdot r = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{N}}{8.97 \cdot 10^9\,\mathrm{Nm^2/C^2}}} \cdot 0.05\,\mathrm{m} = 24\,\mathrm{nC}$

4. $\frac{F_C'}{F_C} = (\frac{r}{r'})^2 = 9$

5. $\frac{r'}{r} = \sqrt{\frac{F_C}{F_C'}} = \sqrt{2}$. Es folgt: $r' = \sqrt{2}r$

6. $\frac{r'}{r} = \sqrt{\frac{F_C}{F_C'}} = \sqrt{\frac{1}{0.9}} = 1.05$

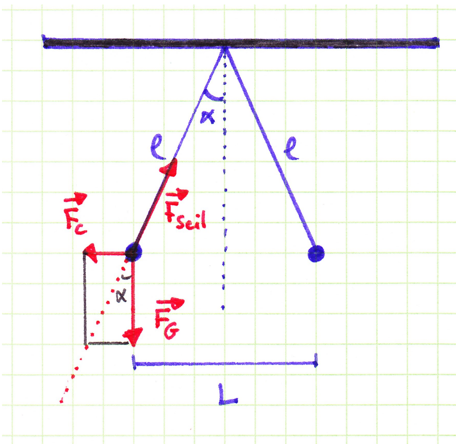
7.

$$
\begin{aligned}
|F_1| &= |F_2| && (1)\\
k \cdot \frac{Q_1 \cdot q}{a^2} &= k \cdot \frac{Q_2 \cdot q}{b^2} && (2)\\
\frac{Q_1}{a^2} &= \frac{Q_2}{b^2} && (3)\\
\frac{b}{a} &= \sqrt{\frac{Q_2}{Q_1}} = \sqrt{\frac{4}{1}} = 2 && (4)\\
& && (5)
\end{aligned}
$$

Mit $a + b = d = a + 2a = 3a$ Es folgt:

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{1}{3}d && (6)\\
b &= \frac{2}{3}d && (7)
\end{aligned}
$$

8. a)




Es herscht eine Kräftegleichgewicht: $\vec{F}_{res} = \vec{F}_G + \vec{F}_C + \vec{F}_{seil} = 0$

Die elektrische Kraft $F_C = k \cdot \frac{Q^2}{L^2}$ zeigt waagrecht nach aussen. Die Gewichtskraft zeigt vertikal nach unten: $F_G = m \cdot g$.

Mit Hilfe der Trigonometrie kann man schreiben:

$$\frac{F_C}{F_G} = \tan\alpha \qquad (8)$$

Löst man auf nach der Ladung, so erhält man:

$$k \cdot \frac{Q^2}{L^2} = mg \tan\alpha \tag{9}$$

$$Q^2 = \frac{mg \cdot L^2 \cdot \tan\alpha}{k} \tag{10}$$

$$Q = \sqrt{\frac{mg\tan\alpha}{k}} \cdot L \tag{11}$$

Mit Hilfe der Trigonometrie erhält man: $\tan\alpha = \frac{L/2}{\sqrt{l^2-(L/2)^2}} = \frac{L}{\sqrt{4l^2-L^2}}$.

Nach $Q$ aufgelöst:

$$Q = \sqrt{\frac{mg\frac{L}{\sqrt{4l^2-L^2}}}{k}} \cdot L = \sqrt{\frac{mgL^3}{k\sqrt{4l^2-L^2}}} = \sqrt{\frac{0.0012\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\mathrm{m/s^2}\ (0.1\,\mathrm{m})^3}{8.97 \cdot 10^9\,\mathrm{Nm^2/C^2}\sqrt{4 \cdot (1.2\,\mathrm{m})^2 - (0.1\,\mathrm{m})^2}}} = 23\,\mathrm{nC} \tag{12}$$

b) Hier kann man die Näherung benützen: $\tan\alpha \approx \sin\alpha$. Es folgt:

$$Q_1 \cdot Q_2 = \frac{mg\sin\alpha}{k} \cdot L = \frac{mg\frac{L}{2\cdot l}}{k} \cdot L = \frac{mg}{2 \cdot l \cdot k} \cdot L^3 \tag{13}$$

Nach $L$ aufgelöst:

$$L = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot l \cdot k \cdot Q_1 \cdot Q_2}{mg}} \tag{14}$$

Wenn eine der beiden Ladungen verdoppelt, wird der Abstand $L$ folgendermassen verändert:

$$L' = \sqrt[3]{2} \cdot L = 1.26 \cdot 10\,\mathrm{cm} = 12.6\,\mathrm{cm} = 13\,\mathrm{cm} \tag{15}$$

9. * a)

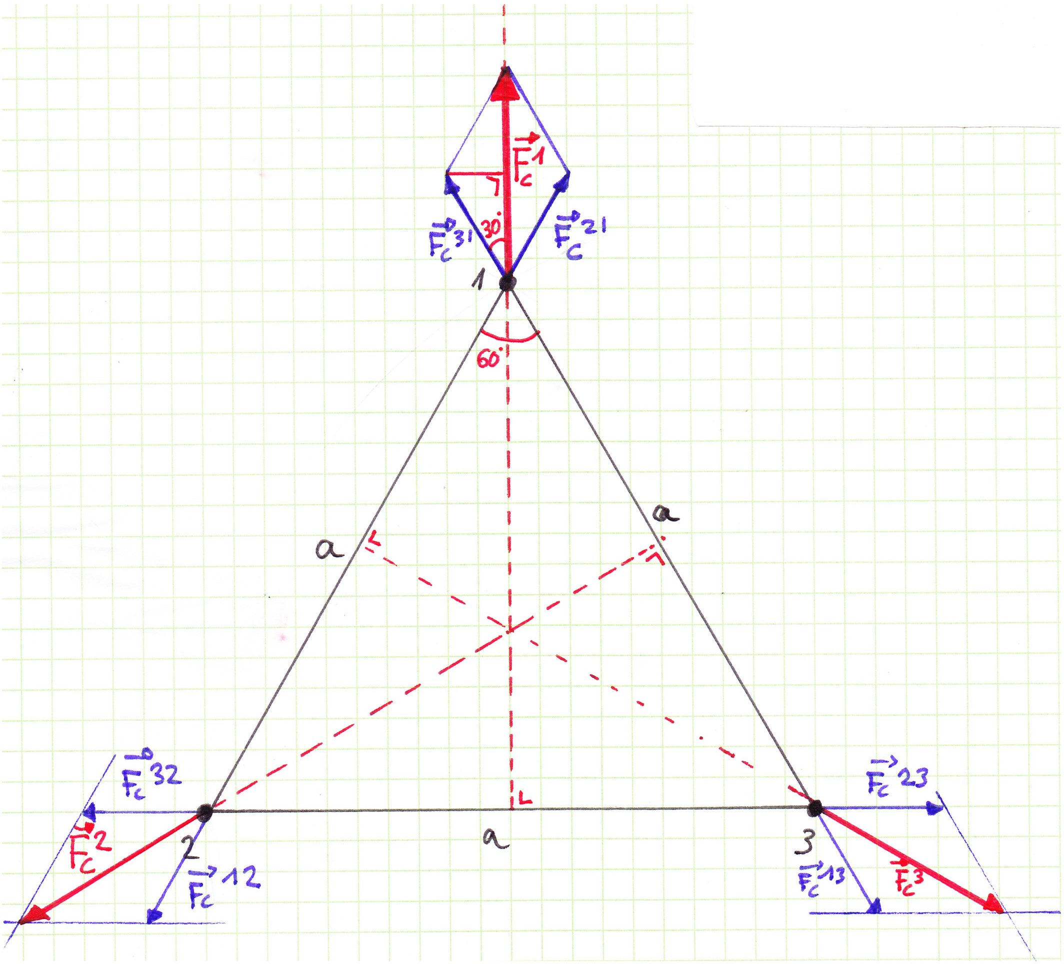


Abbildung 1: Gleiche elektrische Ladungen $q$ befinden sich an den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge $a$.

Alle drei Ladungen sind äquivalent. Schauen wir die resultierende Kraft auf die Ladung 1. Die Ladungen 2 und 3 erzeugen eine Kraft auf die Ladung 1. Im Betrag sind diese Kräfte gleich gross:

$$|\vec{F}_C^{21}| = |\vec{F}_C^{31}| = k \cdot \frac{q^2}{a^2} \tag{16}$$

Die resultierende Kraft $\vec{F}_C^1$ zeigt vertikal nach oben:

$$\vec{F}_C^1 = \vec{F}_C^{21} + \vec{F}_C^{31} \tag{17}$$

Mit Hilfe der Trigonometrie kann man die resultierende Kraft berechnen:

$$\vec{F}_C^1 = 2 \cdot |\vec{F}_C^{21}| \cdot \cos(30°) = 2 \cdot |\vec{F}_C^{21}| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \cdot |\vec{F}_C^{21}| \tag{18}$$

Daraus folgt für die resultierende (abstossende) Kraft auf eine Ladung:

$$|\vec{F}_C^1| = \sqrt{3} \cdot k \cdot \frac{q^2}{a^2} \tag{19}$$

b) Die Mitte des gleichseitigen Dreiecks teilt die Winkelhalbierende im Verhältnis 1:2. Die Länge der Winkelhalbierenden beträgt: $l_w = \frac{2}{3} \cdot l = \frac{a}{\sqrt{3}}$ (siehe FoTa s. 88).

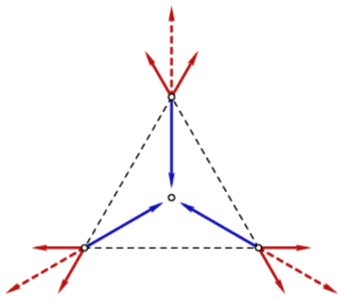


Abbildung 2: Die roten Vektoren sind die abstossenden Kräfte ohne Schwerpunktsladung; klar alles fliegt auseinander. Nun wird die Ladung $q'$ in der Mitte des Dreiecks gebracht. Die blauen Vektoren sollen nun das System im Gleichgewicht halten.

Kräftefrei heisst:

$$\begin{aligned} F_C^{rot} &= F_C^{blau} && (20)\\ \sqrt{3}\cdot k\cdot\frac{q^2}{a^2} &= k\cdot\frac{q\cdot q'}{l_w^2} && (21)\\ \sqrt{3}\cdot\frac{q^2}{a^2} &= \frac{q\cdot q'}{a^2/3} && (22)\\ \sqrt{3}\cdot q &= 3q' && (23)\\ q' &= -\frac{q}{\sqrt{3}} && (24) \end{aligned}$$

10. Gemeinsamkeiten:
    - wirkt ohne mechanischen Kontakt und materielles Medium
    - zwei Wechselwirkungspartner (Ladung/Masse)
    - Kraftrichtung parallel zur Verbindungsrichtung der Quellen
    - Superpositionsprinzip
    - Abstandsgesetz $1/r^2$

    Unterschiede (Coulombkraft / Graviationskraft):
    - Ursache: zwei Ladungen / zwei Massen
    - Kraftrichtung: Anziehung und Abstossung / nur Anziehung
    - Stärke
    - Abschirmbarkeit: ja / nein
    - Bedeutung: Zusammenhalt der Atome, Moleküle, Kristalle / Zusammenhalt des Makrokosmos

11. $\vec{F}_{21}$ und $\vec{F}_{23}$ sind abstossend, $\vec{F}_{24}$ ist anziehend. Die Beträge berechnen sich zu:

$$\begin{aligned} F_{21} &= F_{23} = k\cdot\frac{Q^2}{a^2} && (25)\\ F_{24} &= k\cdot\frac{Q^2}{(\sqrt{2}a)^2} = k\cdot\frac{Q^2}{2\cdot(a)^2} && (26)\\ & && (27) \end{aligned}$$

Die resultierende Kraft der zwei abstossenden Kräfte ist:

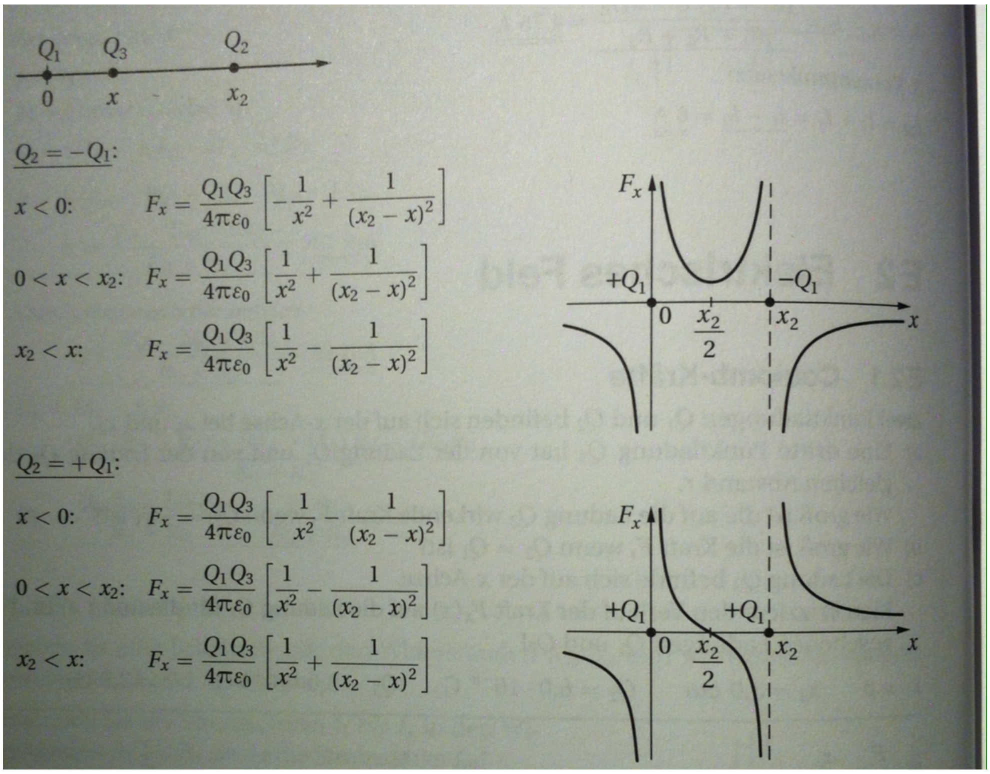
$$\begin{aligned} F_{ab} &= 2\cdot F_{21}\cdot\underbrace{\cos(45^\circ)}_{\sqrt{2}/2} = \sqrt{2}\cdot k\cdot\frac{Q^2}{a^2} && (28)\\ & && (29) \end{aligned}$$

Die resultierende Kraft ist abstossend und diagonal gerichtet:

$$F_{res} = F_{ab} - F_{24} = \underline{\underline{(\sqrt{2} - 0.5) \cdot k \cdot \frac{Q^2}{a^2}}} \tag{30}$$

$$\tag{31}$$

12. .



$Q_2 = -Q_1$:

$x < 0$: $F_x = \frac{Q_1 Q_3}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x_2 - x)^2}\right]$

$0 < x < x_2$: $F_x = \frac{Q_1 Q_3}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x_2 - x)^2}\right]$

$x_2 < x$: $F_x = \frac{Q_1 Q_3}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x_2 - x)^2}\right]$

$Q_2 = +Q_1$:

$x < 0$: $F_x = \frac{Q_1 Q_3}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x_2 - x)^2}\right]$

$0 < x < x_2$: $F_x = \frac{Q_1 Q_3}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x_2 - x)^2}\right]$

$x_2 < x$: $F_x = \frac{Q_1 Q_3}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x_2 - x)^2}\right]$

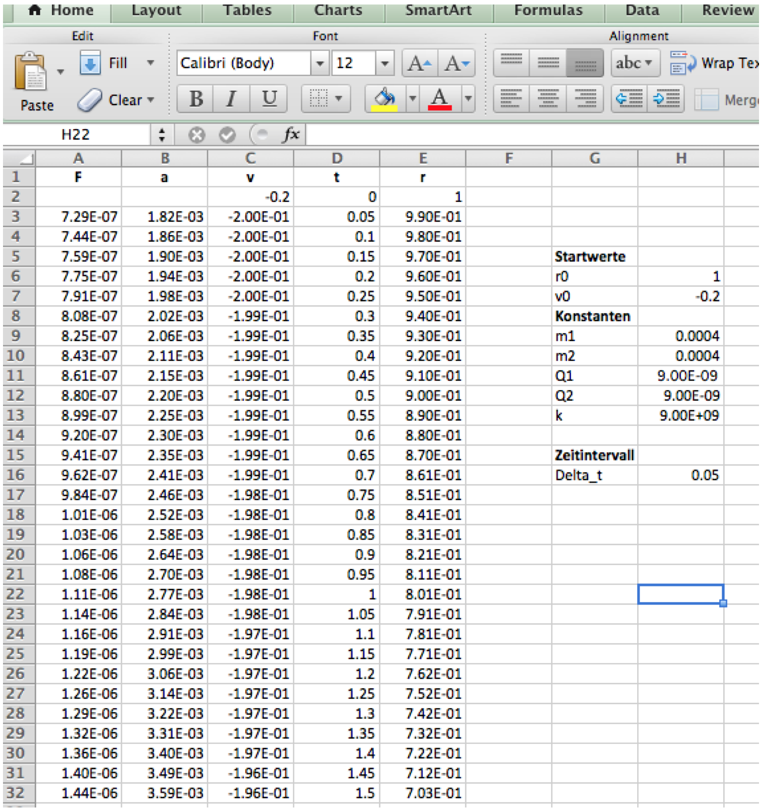


13. Iterative Berechnung mit Startwerte und Konstanten:

$$\begin{aligned} v_0 &= -0.2\,\text{m/s} \\ r_0 &= 1\,\text{m} \\ m_2 &= 0.0004\,\text{kg} \\ Q_1 = Q_2 &= 9 \cdot 10^{-9}\,\text{C} \\ k &= 9 \cdot 10^{9}\,\text{Nm}^2/\text{C}^2 \\ \Delta t &= 0.05\,\text{s} \end{aligned}$$

Die Simulation erfolgt mit folgenden Gleichungen:

| | |
|---|---|
| (1) | $F = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{s^2}$ |
| (2) | $a = \frac{F}{m_2}$ |
| (3) | $v_{neu} = v_{alt} + a \cdot \Delta t$ |
| (4) | $s_{neu} = s_{alt} + v_{alt} \cdot \Delta t$ |
| (5) | $t_{neu} = t_{alt} + \Delta t$ |




| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | F | a | v | t | r | | | |
| 2 | | | -0.2 | 0 | 1 | | | |
| 3 | 7.29E-07 | 1.82E-03 | -2.00E-01 | 0.05 | 9.90E-01 | | | |
| 4 | 7.44E-07 | 1.86E-03 | -2.00E-01 | 0.1 | 9.80E-01 | | | |
| 5 | 7.59E-07 | 1.90E-03 | -2.00E-01 | 0.15 | 9.70E-01 | | Startwerte | |
| 6 | 7.75E-07 | 1.94E-03 | -2.00E-01 | 0.2 | 9.60E-01 | | r0 | 1 |
| 7 | 7.91E-07 | 1.98E-03 | -2.00E-01 | 0.25 | 9.50E-01 | | v0 | -0.2 |
| 8 | 8.08E-07 | 2.02E-03 | -1.99E-01 | 0.3 | 9.40E-01 | | Konstanten | |
| 9 | 8.25E-07 | 2.06E-03 | -1.99E-01 | 0.35 | 9.30E-01 | | m1 | 0.0004 |
| 10 | 8.43E-07 | 2.11E-03 | -1.99E-01 | 0.4 | 9.20E-01 | | m2 | 0.0004 |
| 11 | 8.61E-07 | 2.15E-03 | -1.99E-01 | 0.45 | 9.10E-01 | | Q1 | 9.00E-09 |
| 12 | 8.80E-07 | 2.20E-03 | -1.99E-01 | 0.5 | 9.00E-01 | | Q2 | 9.00E-09 |
| 13 | 8.99E-07 | 2.25E-03 | -1.99E-01 | 0.55 | 8.90E-01 | | k | 9.00E+09 |
| 14 | 9.20E-07 | 2.30E-03 | -1.99E-01 | 0.6 | 8.80E-01 | | | |
| 15 | 9.41E-07 | 2.35E-03 | -1.99E-01 | 0.65 | 8.70E-01 | | Zeitintervall | |
| 16 | 9.62E-07 | 2.41E-03 | -1.99E-01 | 0.7 | 8.61E-01 | | Delta_t | 0.05 |
| 17 | 9.84E-07 | 2.46E-03 | -1.98E-01 | 0.75 | 8.51E-01 | | | |
| 18 | 1.01E-06 | 2.52E-03 | -1.98E-01 | 0.8 | 8.41E-01 | | | |
| 19 | 1.03E-06 | 2.58E-03 | -1.98E-01 | 0.85 | 8.31E-01 | | | |
| 20 | 1.06E-06 | 2.64E-03 | -1.98E-01 | 0.9 | 8.21E-01 | | | |
| 21 | 1.08E-06 | 2.70E-03 | -1.98E-01 | 0.95 | 8.11E-01 | | | |
| 22 | 1.11E-06 | 2.77E-03 | -1.98E-01 | 1 | 8.01E-01 | | | |
| 23 | 1.14E-06 | 2.84E-03 | -1.98E-01 | 1.05 | 7.91E-01 | | | |
| 24 | 1.16E-06 | 2.91E-03 | -1.97E-01 | 1.1 | 7.81E-01 | | | |
| 25 | 1.19E-06 | 2.99E-03 | -1.97E-01 | 1.15 | 7.71E-01 | | | |
| 26 | 1.22E-06 | 3.06E-03 | -1.97E-01 | 1.2 | 7.62E-01 | | | |
| 27 | 1.26E-06 | 3.14E-03 | -1.97E-01 | 1.25 | 7.52E-01 | | | |
| 28 | 1.29E-06 | 3.22E-03 | -1.97E-01 | 1.3 | 7.42E-01 | | | |
| 29 | 1.32E-06 | 3.31E-03 | -1.97E-01 | 1.35 | 7.32E-01 | | | |
| 30 | 1.36E-06 | 3.40E-03 | -1.97E-01 | 1.4 | 7.22E-01 | | | |
| 31 | 1.40E-06 | 3.49E-03 | -1.96E-01 | 1.45 | 7.12E-01 | | | |
| 32 | 1.44E-06 | 3.59E-03 | -1.96E-01 | 1.5 | 7.03E-01 | | | |

Abbildung 3: Screenshot vom Excel Spreadsheet.

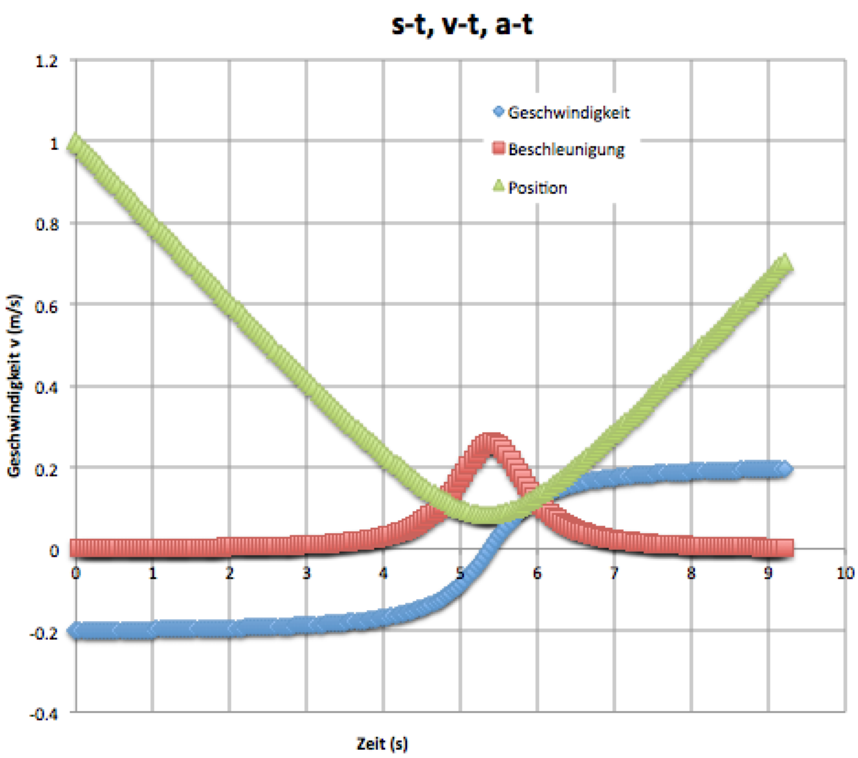
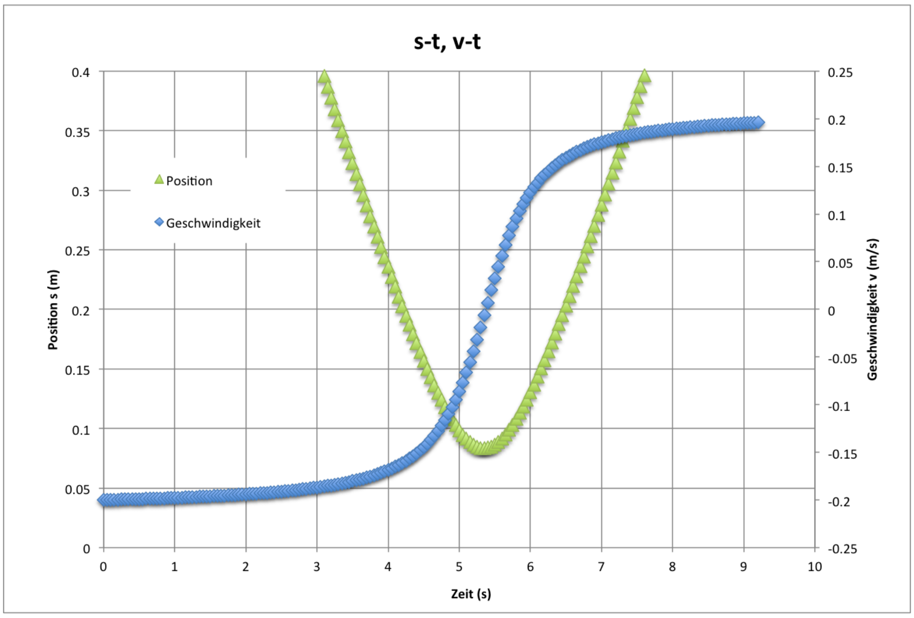



Abbildung 4: Der s(t)-, v(t)- und der a(t)-Graph in einem Diagramm.




Mit Anpassung der Auflösung der Achsen können wir das Ergebnis noch etwas genauer ablesen. In der Modellierung ist zu erkennen, dass die Kugel 2 nach ca. 5.4 s in 8 cm Abstand zur Kugel 1 zur Ruhe kommt und sich dann wieder zurück bewegt.