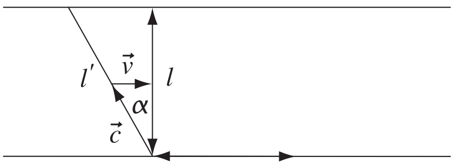
7.1 Spezielle Relativitätstheorie

Bezugssystem und Lorentztransformation

1



a) $\alpha = \arcsin\dfrac{v}{c}$; 42°

b) Tina schwimmt die Strecke $l' = \dfrac{l}{\cos\ \alpha}$; 67 m. Dafür benötigt sie

$$t = \frac{l'}{c} = \frac{l}{c \cdot \cos\ \alpha} = \frac{l}{c \cdot \sqrt{1-\sin^2 \alpha}} = \frac{l}{c \cdot \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}};\quad 45\text{ s}$$

Insgesamt: $t_{\text{Tina}} = \dfrac{2l}{c}\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$; 89 s

Tanja schwimmt flussabwärts mit einer Geschwindigkeit von $c+v$; 2.5 m/s und braucht dafür $\dfrac{l}{c+v}$; 20 s. Flussaufwärts schwimmt sie mit $c-v$; 0.5 m/s und braucht dafür $\dfrac{l}{c-v}$; 100 s

Insgesamt: $t_{\text{Tanja}} = \dfrac{l}{c+v} + \dfrac{l}{c-v} = \dfrac{2lc}{c^2-v^2} = \dfrac{2l}{c}\dfrac{1}{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$; 120 s

c) Es gilt: $\dfrac{t_{\text{Tanja}}}{t_{\text{Tina}}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} > 1$

Fazit: Um ein faires Rennen zu garantieren, muss Tanja um den Faktor

$\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$; 1.3 weniger weit schwimmen; also 37 m.

2

Lorentzrücktransformationen: $x = \dfrac{x' + vt'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$; $ct = \dfrac{ct' + \frac{v}{c}x'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$

$$c^2t^2 - x^2 = \frac{c^2t'^2 + 2ct'\frac{v}{c}x' + \left(\frac{v}{c}\right)^2 x'^2 - \left(x'^2 + 2x'vt' + v^2t'^2\right)}{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} =$$

$$\frac{c^2t'^2\left(1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right) - x'^2\left(1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)}{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} = c^2t'^2 - x'^2$$

3

Licht bewegt sich im Vakuum immer mit der Lichtgeschwindigkeit, es gibt kein Ruhesystem, in dem das Licht ruhen würde. Es kann also gar nicht in das Ruhesystem eines Lichtteilchens transformiert werden. In jedem bewegten Bezugssystem bewegen sich die beiden Lichtteilchen mit Lichtgeschwindigkeit in entgegengesetzer Richtung! Und zweitens hat Einstein nie behauptet, dass sich zwei Lichtteilchen mit Lichtgeschwindigkeit voneinander entfernen.

Längenkontraktion und Zeitdilatation

4

$l = \dfrac{l_0}{2}$ daraus folgt: $\gamma = 2 = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$; $v = \sqrt{\frac{3}{4}c^2}$; $2.60 \cdot 10^8$ m/s

Die Lösung dieser Aufgabe zeigt deutlich, dass relativistische Phänomene im Strassenverkehr keine Rolle spielen.

5

a) $s = 0.998\,c \cdot \Delta t_0$; 455 m

b) $\Delta t = \gamma \Delta t_0$; 24.0 µs

c) $s = c\Delta t$; 7.21 km

6

a) Damit 1000 Goldatome ankommen, darf die Reise im Ruhesystem der Atome nicht länger als die Halbwertszeit dauern (wenn von statistischen Schwankungen abgesehen wird).
Die Flugstrecke ist für die Atome lorentzkontrahiert.
s: Flugstrecke im Ruhesystem der Erde
τ : Halbwertszeit bzw. Flugzeit im Ruhesystem der Atome

$$v\tau = s\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \Rightarrow v = \frac{c}{\sqrt{1+\frac{c^2\tau^2}{s^2}}}; \quad 0.9999986\,c = (1-1.38\cdot 10^{-6})c$$

b) $\Delta t = \frac{s}{v} - \frac{s}{c} = \frac{s}{c}\left(\frac{c}{v}-1\right)$; 192 s (≈ 3.2 min)

c) Im Ruhesystem der Erde brauchen die Atome die Zeit $t = s/v$; 4.4 Jahre.
Nach dieser Zeit währen längst alle radioaktiven Quecksilberatome in Goldatome zerfallen. Wenn Ihre Brieffreundin also den Erhalt von etwa 1000 Goldatomen quittiert, dann stimmt die Relativitätstheorie.

Addition von Geschwindigkeiten

7

$$\frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}} = \frac{0.75c+0.75c}{1+\frac{0.75c\cdot 0.75c}{c^2}}; \quad 0.96\,c$$

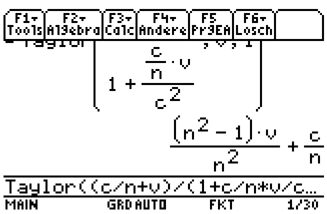
8

$$\lim_{u\to c}\frac{u+c}{1+\frac{uc}{c^2}} = c$$

9

$$\frac{\frac{c}{n}+v}{1+\frac{\frac{c}{n}v}{c^2}} \approx \left(\frac{c}{n}+v\right)\left(1-\frac{v}{nc}\right) = \frac{c}{n}+v\left(1-\frac{1}{n^2}\right)-\frac{v^2}{nc} \approx \frac{c}{n}+v\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

Oder mit einem CAS Rechner:



Ruheenergie

10

Pro kWh können Sie 144 kJ in Licht umwandeln, das entspricht $m_0 = \frac{E_0}{c^2} = 1.60 \cdot 10^{-9}$ g.
Sie brauchen also $6.24 \cdot 10^8$ kWh à 0.15 Fr./kWh; 94 Mio. Fr.

11

$E_0 = m_0 c^2$; $9 \cdot 10^{10}$ J; dies entspricht etwa dem jährlichen Heizenergiebedarf eines Einfamilienhauses.

12

$m_0 = \frac{c_{\text{Wasser}} \cdot A \cdot h \cdot \rho \cdot \Delta\vartheta}{c^2}$; 0.3 kg

13

a) $P = S \cdot 4\pi r^2$; $3.88 \cdot 10^{26}$ W

b) $\frac{\Delta m_0}{\Delta t} = \frac{P}{c^2}$; $4.32 \cdot 10^9$ kg/s

c) $\frac{\frac{\Delta m_0}{\Delta t} t}{m_s}$; $7 \cdot 10^{-5}$ (= 0.07 ‰)

Gesamtenergie

14

Klassische Physik: $qB_{\text{klassisch}} = \frac{m_0 v}{r}$

Relativitätstheorie: $qB_{\text{relativistisch}} = \frac{m_0 v}{r\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$, $E_{\text{kin}} = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1\right)$

$$\frac{B_{\text{relativistisch}}}{B_{\text{klassisch}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{E_{\text{kin}}}{m_0 c^2} + 1; \quad 101$$

15

$E = 2m_e c^2 + E_{\text{kin},\, e^-} + E_{\text{kin},\, e^+}$; 8.8 MeV

16

a) $v = \sqrt{\dfrac{2 \cdot U \cdot e}{m_e}}$; $1.7 \cdot 10^8$ m/s = 0.56 c

b) $U \cdot e = m_e c^2 \cdot \left(\dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} - 1\right)$; $v = 1.5 \cdot 10^8$ m/s = 0.50 c

17

a) $m_{\text{rel}} = m_P + \dfrac{\Delta E}{c^2}$; $8 \cdot 10^{-25}$ kg $\approx$ 480 m_P

b) $v = c \cdot \sqrt{1 - \left(\dfrac{m_P}{m_{\text{rel}}}\right)^2}$; 0.999998 c

c) $B = \dfrac{m_{\text{rel}} v}{re}$; 1.4 T

18

$$\frac{m_{\text{rel}} - m_0}{m_0} = \frac{eU}{m_0 c^2}; \qquad 5.9\%$$

19

a) $U = \dfrac{1/2 m_e c^2}{e}$; 255 kV

b) $v = c\sqrt{1 - \dfrac{1}{\left(\dfrac{eU}{m_e c^2} + 1\right)^2}} = c\sqrt{5/9}$; 0.745 c

20

a) Teilchen mit Masse können die Lichtgeschwindigkeit nicht erreichen. Also kommen sie im Vergleich zum Licht später an.

b) E: Gesamtenergie
Δt : Laufzeitunterschied
s: Entfernung im Ruhesystem der Erde gemessen

$$\frac{E}{m_0 c^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{v}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{\left(1 + \dfrac{c\Delta t}{s}\right)^2}}}; \quad 5.6 \cdot 10^4$$

Dopplereffekt und Rotverschiebung

21

a) $f_1 = f_S \cdot \dfrac{c}{c+v_S}$; $f_2 = f_S \cdot \dfrac{c-v_B}{c} \Rightarrow f_B = \sqrt{f_1 \cdot f_2} = f_S \cdot \sqrt{\dfrac{c-v_B}{c+v_S}}$

b) Wenn sich Schall in einem Medium ausbreitet, bildet dieses ein absolutes Ruhesystem. Es kann eindeutig entschieden werden, ob sich der Sender oder der Beobachter bezüglich dieses Systems bewegt. Für Licht gibt es kein absolutes Ruhesystem.

c) $\dfrac{f}{f_0} = \sqrt{\dfrac{c-v}{c+v}} = \dfrac{\lambda_0}{\lambda} \Rightarrow v = c \cdot \dfrac{\lambda^2 - \lambda_0^2}{\lambda^2 + \lambda_0^2}$; 305 km/s

22

λ_0: Senderwellenlänge, λ: empfangene Wellenlänge

Rotverschiebung: $z = \dfrac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \dfrac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \dfrac{\lambda}{\lambda_0} - 1$

Aus $\lambda = \lambda_0 \sqrt{\dfrac{c+v}{c-v}}$ folgt $v/c = \dfrac{(z+1)^2 - 1}{(z+1)^2 + 1}$; 0.9011

23

λ: empfangene Wellenlänge
λ_0: gesendete Wellenlänge (Wellenlänge im Ruhesystem des Senders)

$$\lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \Rightarrow \frac{v}{c} = \frac{\left(\dfrac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2 - 1}{\left(\dfrac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2 + 1}$$

a) mit 18% der Lichtgeschwindigkeit
b) mit 32% der Lichtgeschwindigkeit
c) mit 4% der Lichtgeschwindigkeit