4.3 Das ideale Gas

Vorgänge mit einer konstant gehaltenen Zustandsgrösse

30

Vorausgesetzt, dass das Volumen des Reifens konstant bleibt, gilt nach dem Gesetz von Amontons:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2} \Rightarrow p_1 = p_2 \cdot \frac{T_1}{T_2} = 4.23 \text{ bar}$$

Überdruck = 3.24 bar

31

a) $p_2 = \dfrac{p_1 T_2}{T_1}$; 85 kPa

b) $F = \Delta p A$; 17 kN

Bemerkung: In der Praxis wird dieser Wert wohl kaum erreicht. Schon beim Abkühlen der Luft im Innern strömt Luft von aussen durch die Türspalte in den Gefrierschrank nach. Sonst könnte die Tür auch nach einiger Zeit nicht wieder geöffnet werden. Grosse Gefrierschränke können auch ein Druckausgleichventil besitzen.

32

Der Hinweis auf die schlaffe Hülle bedeutet, dass der Druck im Zeppelin konstant bleibt. Dann gilt: $V_2 = V_1 \dfrac{T_2}{T_1}$; 381 Liter

33

Nach Gay-Lussac gilt:

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^3 = \frac{T_1}{T_2} \Rightarrow d_2 = d_1 \cdot \sqrt[3]{\frac{T_2}{T_1}} = 27.5 \text{ cm}$$

34

Das Volumen des Ballons beträgt $V = \dfrac{4\pi}{3} r^3 = 3.1 \cdot 10^3 \text{ m}^3$.

a) Die Dichte der Luft im Inneren des Ballons ist

$$\rho_i = \rho_n \cdot \frac{T_n}{T_i} = 0.994 \text{ kg/m}^3.$$

Die Masse der im Ballon enthaltenen Luft ist $m_i = \rho_i V = 3.0 \text{ t}$.

b) Die Masse der verdrängten Luft ist entsprechend $m_a = \rho_a V = \rho_n \frac{T_n}{T_a} \cdot V = 3.7$ t.

Diese Masse verursacht den Auftrieb

c) Die Nutzlast ist 3.7 t – 3.0 t – 0.4 t = 0.3 t

d) Die Dichte der Luft im Inneren des Ballons nimmt um

$$\Delta\rho = \rho_n T_n \quad \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \quad = \frac{\rho_n T_n}{T_1 T_2} \Delta T \approx \rho_i \frac{\Delta T}{T_i}$$ ab.

Die mögliche Zusatzlast ist $\Delta m = \Delta\rho \cdot V = m_i \frac{\Delta T}{T_i} = 8.5$ kg.

e) Der zweite Schatten stammt vom Ballon, aus dem der auf dem Bild sichtbare Ballon fotografiert wurde.

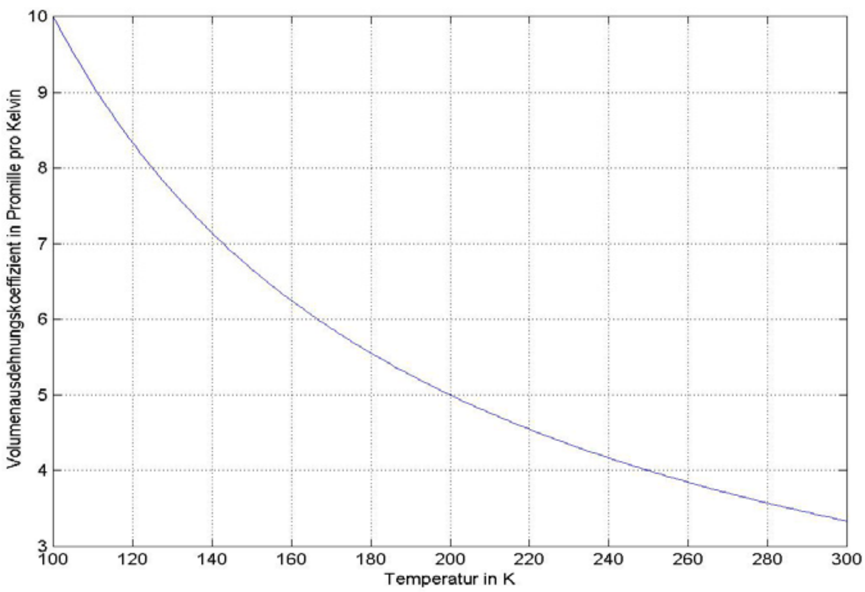
35

a) Nach Gay-Lussac gilt: $\frac{V + \Delta V}{V} = \frac{T + \Delta T}{T}$ oder $1 + \frac{\Delta V}{V} = 1 + \frac{\Delta T}{T} \Rightarrow \frac{\Delta V}{\Delta T} = \frac{1}{T} \cdot V$

Der Volumenausdehnungskoeffizient eines Gases ist demnach $\gamma = \frac{1}{T}$.

Für Luft von 20 $^{\circ}$C beträgt er $\frac{1}{293\,\mathrm{K}}$ = 3.4 Promille pro Kelvin. Er ist also rund 50-mal grösser als derjenige von Aluminium. In einem festen Körper verhindern die Anziehungskräfte zwischen den Molekülen eine völlig freie Eroberung des Raumes durch die Erhöhung der Bewegungsenergie der Teilchen. Beim Gas sind diese zwischenmolekularen Kräfte vernachlässigbar.

b)



Allgemeine Zustandsgleichung

36

Aus $pV = nRT = \frac{m}{M}RT$ erhält man $V = \frac{mRT}{Mp} = 763\ \text{cm}^3$.

37

44.0 g CO_2 sind 1.00 mol CO_2

Aus $pV = nRT$ erhält man $V = \frac{nRT}{p} = 36.5\ \text{dm}^3$.

38

Die Luftdichte ist proportional zum Druck und umgekehrt proportional zur absoluten Temperatur:

$$\rho = \rho_n \frac{T_n}{T} \frac{p}{p_n}$$

$$m = \rho V = 1.9\ \text{kg}$$

39

Dichte von CO_2 bei Normdruck und 0 °C: $\rho_N = 1.98\ \text{kg/m}^3$

Druck des Gases in der Flasche: $p = p_n \frac{V_n T}{V T_n} = p_n \frac{mT}{V \rho_n T_n}$; 2.4 MPa

40

a) $\rho = \frac{pM}{RT} = 210\,\text{kg/m}^3$

b) $m = \rho V = 420\,\text{g}$ $\quad n = \frac{pV}{RT} = \frac{m}{M} = 13.1\,\text{mol}$

c) $n_1 = \frac{p_1 V}{RT} = 12.3\,\text{mol}$

Es sind also 0.8 mol entwichen. Das sind 26 g.

d) $\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow p_2 = p_1 \frac{T_2}{T_1} = 165\,\text{bar}$

41

Protokollbeispiel: Länge: 4.15 m
Breite: 3.05 m
Höhe: 2.40 m
Temperatur 22 °C

Volumen V = 30 m³

$$m = \rho V = \rho_n \frac{pT_n}{p_n T} V \text{ ; } \quad 36 \text{ kg}$$

42

$\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow V_2 = V_1 \cdot \frac{T_2}{T_1} = 201.23 \text{ m}^3$. Es entweichen also 1.23 m^3 Luft.

Vor der Erwärmung waren $n_1 = \frac{pV}{RT_1}$, nachher $n_2 = \frac{pV}{RT_2}$ mol Luft im Zimmer.

Es entweichen also $n_1 - n_2 = \frac{pV}{R}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)$ = 48.5 mol Luft.

Es entweichen also 1.41 kg Luft.

43

a) $m = \rho V = \rho_n \cdot \frac{p}{p_n} \cdot \frac{T_n}{T} \cdot \frac{\pi}{6} d^3 = 1.6 \, \text{g}$

b) Vor dem Abpumpen war die Luftmasse 200-mal grösser (1000 hPa/5 hPa). Abgepumpt wurden 199 m = 0.32 kg.

c) Da der Luftdruck senkrecht auf die Kugeloberfläche wirkt, muss man nur die Druckkomponenten in Zugrichtung berücksichtigen.

Man erhält $F = A\Delta p = \frac{\pi}{4} d^2 \Delta p = 50 \, \text{kN}$.

d) Der Druckunterschied Δp würde unwesentlich von 995 hPa auf 1000 hPa zunehmen. Entsprechend wäre die Kraft auch nur 0.5% grösser gewesen!

44

Die Massendifferenz von 1.63 g entspricht der Masse des Gases, das sich im Kolben gesammelt hat minus die Masse der Luft, die darin Platz hat.

Diese wiegt $m_L = \rho_{L,n} \cdot \frac{p}{p_n} \cdot \frac{T_n}{T} = 1.13 \text{ g}$.

Also ist die Masse des gesuchten Gases: $m_G = m_2 - m_1 + m_L = 2.76 \text{ g}$

Aus $pV = nRT = \frac{m}{M} RT$ erhält man $M = \frac{mRT}{pV} = 70.7$ g/mol.

Es könnte Chlorgas Cl_2 mit der Molmasse 70.9 g/mol sein.

45

$p_1V_1 = n_1RT_1$ beschreibt die Luft bei 20 °C in der Flasche.

Man erhält $n_1 = \dfrac{p_1V_1}{RT_1} = 0.0119 \text{ mol}$

9 cm³ Wasser sind 9 g Wasser. Weil die Molmasse von Wasser 18 g/mol beträgt, sind 9 g Wasser 0.5 mol Wasser.
Bei 300 °C hat man insgesamt $n_2 = 0.5119$ mol Gas, das gegen die Wände drückt.

Aus $p_2V_2 = n_2RT_2$ erhält man $p_2 = \dfrac{n_2RT_2}{V_2} = 81.3 \text{bar}$.

Den Überdruck von 81.3 bar hält die Flasche nicht aus. Noch bevor das Wasser in der Flasche verdampft ist, explodiert sie.
Zu beachten: wenn die Flasche nur Luft enthalten hätte, wäre der Druck bei 300 °C bloss 1.96 bar!

46

Die Dichte eines Gases kann man aus $\rho = \dfrac{pM}{RT}$ berechnen.

Für das Heliumgas im Inneren des Ballons erhält man $\rho_{\text{He}} = 0.180 \text{ kg/m}^3$ und für die vom Ballon verdrängte Luft $\rho_{\text{Luft}} = 1.135 \text{ kg/m}^3$.

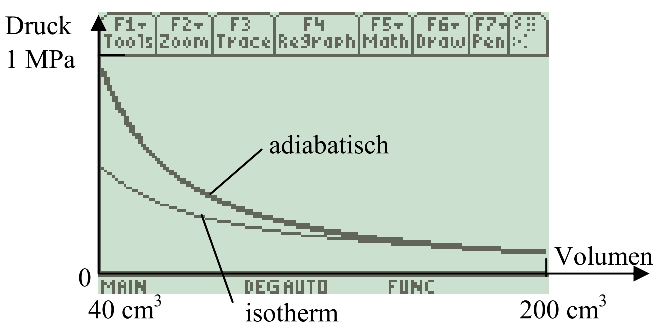
Das Volumen des Ballons ist $V = \dfrac{\pi}{6}d^3 = 0.0287 \text{ m}^3$.

Die Masse der verdrängten Luft (Auftrieb) beträgt demnach 32.6 g, diejenige des Heliums im Ballon hingegen bloss 5.2 g.
Als «Nutzlast» erhalten wir 32.6 g – 5.2 g – 7.2 g = 20 g.

Adiabatische Zustandsänderungen

47

a) Am Gas wird Arbeit verrichtet. Dadurch nimmt die Energie des Gases zu. Alle Teilchen bewegen sich schneller, und daher ist die Temperatur höher.
b) Die Geschwindigkeiten der Teilchen, die gegen den bewegten Kolben prallen, sind nach dem Stoss grösser als vorher. Die gewonnene kinetische Energie wird durch Stösse mit den anderen Teilchen im Gas verteilt.
c) Es muss gleich viel Wärme abgeführt werden, wie Arbeit zugeführt wird. Der Kontakt mit der kühleren Umgebungsluft kann die Wärmeabfuhr bewirken, wenn bei langsamer Kompression genug Zeit für den Wärmetransport vorhanden ist.
d) Beispiel: TI-89



48

Es gelten die Adiabatengleichung $p_1V_1^\kappa = p_2V_2^\kappa$ (1) und das allgemeine Gasgesetz $\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}$ (2).

Mit Gleichung (1) wird V_2 berechnet: $V_2 = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\kappa}} \cdot V_1$

Mit Gleichung (2) kann nun T_2 und dann ϑ_2 bestimmt werden:

$T_2 = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\kappa}-1} \cdot T_1$; 273 K = 0 °C

Die Luft kühlt also beim Steigen ab. Daher ist es kein Widerspruch, dass «warme Luft aufsteigt» und es oben doch meist kühler als unten ist.

49

Es gelten die Adiabatengleichung $p_1V_1^\kappa = p_2V_2^\kappa$ (1) und das allgemeine Gasgesetz $\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}$ (2).

Um den Druck p aus den Gleichungen zu eliminieren, teilen wir Gleichung (1) durch Gleichung (2). Das Ergebnis ist $T_1V_1^{\kappa-1} = T_2V_2^{\kappa-1}$

Diese Gleichung gibt das Ergebnis $V_2 = V_1 \cdot \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}}$; 22 cm^3

50

a) Es gelten die Adiabatengleichung $p_1V_1^\kappa = p_2V_2^\kappa$ (1) und das allgemeine Gasgesetz $\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}$ (2).

Um den Druck p aus den Gleichungen zu eliminieren, teilen wir Gleichung (1) durch Gleichung (2). Das Ergebnis ist $T_1V_1^{\kappa-1} = T_2V_2^{\kappa-1}$.

Diese Gleichung gibt das Ergebnis $T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa-1}$; $1.1\cdot10^3$ K = 850 °C.

b) $p_2 = p_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\kappa$; 5.7 MPa

51

a) Die Abkühlung durch adiabatische Expansion lässt die Temperatur unter den Taupunkt für Alkohol (und eventuell Wasser) fallen. Der Nebel besteht aus schwebenden Alkohol-Tröpfchen.

b) Es gelten die Adiabatengleichung $p_1 V_1^{\kappa} = p_2 V_2^{\kappa}$ und das allgemeine Gasgesetz $\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$. Die Elimination von V_1 und V_2 führt auf:

$$T_2 = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{1-\frac{1}{\kappa}} = T_1 \left(\frac{p_2}{p_2 + \frac{F}{\pi r^2}} \right)^{1-\frac{1}{\kappa}} \quad ; \quad 279\ \text{K} = 6\ °\text{C}$$

Kinetische Gastheorie

52

a)

Teilchen	Gas
Masse m Geschwindigkeit v Impuls p kinetische Energie E_{kin}	Druck p Temperatur T Volumen V Teilchenzahl N, Stoffmenge n Dichte ρ Geschwindigkeitsverteilung $f(v)$

b) Ein Teilchen in einem würfelförmigen Kasten prallt in konstanten zeitlichen Abständen gegen dieselbe Wand. Die Zeit dazwischen ist der Quotient aus der doppelten Kantenlänge und der Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur Wand. Die Impulsänderung beim Stoss führt zu einer Kraft auf die Wand. Der Mittelwert dieser Kraft für die Zeit zwischen zwei Stössen multipliziert mit der Anzahl N der Teilchen ergibt die Kraft. Den Druck erhält man, indem man die Kraft durch die Fläche teilt. Das Quadrat der Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur Wand darf im Mittel durch ein Drittel des Quadrates der Gesamtgeschwindigkeiten ersetzt werden.

Das Ergebnis dieser formalen Berechnungen ist $pV = \frac{1}{3} N m \overline{v}^2$.

53

a) Die Waage zeigt gleich viel an. Die mittlere Kraft, die die Flöhe beim Springen und Landen auf den Boden ausüben, entspricht genau ihrem Gewicht.
Folgende Rechnung zeigt dies für den Fall ohne Luftreibung:

Absprung- und Landegeschwindigkeit = v
Impulsübertrag bei Start und Landung auf den Boden = $\Delta p = mv + mv = 2mv$

Zeit zwischen zwei Sprüngen = Flugzeit = $\Delta t = 2\frac{v}{g}$

Mittlere Kraft $F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = 2mv \cdot \frac{g}{2v} = mg$

Auch Komplikationen wie Flöhe, die gegen den Deckel prallen oder Luftreibung ändern nichts am Prinzip und am Ergebnis.

b) Die Teilchen im Gefäss üben durch ihre Bewegung und das Abprallen von den Wänden Kräfte auf diese aus. Die Kraft auf den Boden des Gefässes zeigt nach unten und muss etwas grösser sein als die Kraft auf den Deckel, die nach oben zeigt, damit die Waage etwas anzeigt. Das heisst, dass pro Sekunde entweder mehr Teilchen gegen den Boden prallen oder heftiger als gegen den Deckel. Bei gleicher Temperatur oben und unten im Kasten ist die Teilchengeschwindigkeit gleich. Also müssen es mehr Teilchen pro Sekunde sein, die gegen den Boden prallen. Und das bedeutet, dass die Dichte des Gases unten grösser ist als oben. Der Dichteunterschied ist eine Folge der Gravitation, also der Gewichtskraft auf die Gasteilchen. Er ist gerade so gross, dass die Waage die Masse der Teilchen anzeigt.

c) Nichts. Bei vernachlässigbarer Dicke des Deckels ist die Kraft auf dessen Oberseite (nach unten) und dessen Unterseite (nach oben) gleich gross und heben sich auf. Bei nicht vernachlässigbarer Dicke gibt es einen Unterschied der Kräfte auf Ober- und Unterseite (=Auftrieb). Dieser hängt aber bei horizontaler Verschiebung des Deckels nicht von dessen Lage ab.

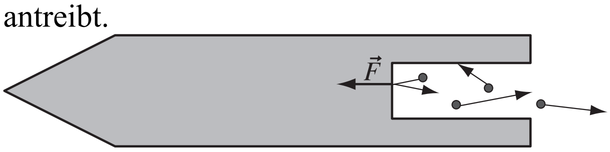
54

a) In einer bestimmten Zeiteinheit prallen nun doppelt so viele Hagelkörner auf das Dach. Ihre Impulsänderung (sie liegt zwischen mv für vollkommen inelastischen und $2mv$ für vollkommen elastischen Stoss) ist gleichzeitig auch doppelt so gross. Das führt zur vierfachen Kraft auf das Autodach (48 N).

b) Gasteilchen, die gegen eine Gefässwand prallen, bewirken eine Kraft. Die Kraft geteilt durch die Fläche ist der Druck im Gas. Der Druck ist proportional zum Quadrat der Teilchengeschwindigkeit. Oder die Teilchengeschwindigkeit ist proportional zur Wurzel des Druckes. Wegen der Geschwindigkeitsverteilung der Teilchen muss allerdings noch ein geeigneter Mittelwert für die Teilchengeschwindigkeit definiert werden, damit diese Aussage stimmt.

55

a) Während am offenen Ende die Gasmoleküle ungehindert ausströmen, stossen sie gegen das geschlossene Ende und prallen dort ab. Dabei üben sie eine Kraft F auf die Rakete aus, die diese
antreibt.



b) Im Mittel fliegen die Hälfte der Moleküle nach links und stossen erst gegen die Wand, bevor sie nach hinten aus der Rakete fliegen. Die andere Hälfte fliegt aus dem Triebwerk, ohne die Rakete je in Flugrichtung gestossen zu haben. Für die gegen die Wand prallenden Teilchen ist aber die Impulsänderung je doppelt so gross wie der Impuls eines hinten hinausfliegenden Teilchens. So ergibt sich bei beiden Betrachtungsweisen die gleiche Impulsänderung für die Rakete.

56

a) $v_{\text{Ausbreitung}} = \dfrac{s}{t}$; 0.7 m/s

b) $\bar{v} \approx \sqrt{\dfrac{3RT}{M}}$; 0.46 km/s (mit der molaren Masse $M = 0.034$ kg/mol)

c) Die Moleküle erfahren viele Stösse mit den Luftmolekülen. Ihr Weg wird dadurch zu einem Zickzackkurs.

57

a) Die Teilchenzahl ist gleich (Satz von Avogadro). Das allgemeine Gasgesetz $pV = nRT$ liefert in beiden Fällen den gleichen Wert für die Stoffmenge n.

b) Die Dichte ist bei dem Gas mit der grösseren Teilchenmasse (Neon) grösser, weil Teilchenzahl und Volumen gleich sind.

c) Die mittlere Teilchengeschwindigkeit ist bei dem Gas mit der kleineren Dichte (Helium) grösser, weil die Dichte in der Formel $\bar{v} \approx \sqrt{\dfrac{3p}{\rho}}$ unter dem Bruchstrich steht und der Druck gleich ist.

d) Die mittlere kinetische Energie eines Teilchens ist in beiden Gasen gleich. Sie ist ein Mass für die Temperatur, die in beiden Gasen gleich ist: $\bar{E}_{\text{kin}} = \dfrac{3}{2}kT$

e) Der mittlere Impuls eines Teilchens ist beim Gas mit der grösseren Teilchenmasse (Neon) höher. Die schwereren Teilchen sind langsamer und prallen daher weniger häufig gegen die Wände als die leichten; da sie aber den gleichen Druck erzeugen sollen, muss ihr Impuls grösser sein:

$$\bar{p} = m\bar{v} = m\sqrt{\frac{3p}{\rho}} = m\sqrt{\frac{3pV}{Nm}} = \sqrt{m}\sqrt{\frac{3pV}{N}}$$

Da p, V und N gleich sind, ist der mittlere Impuls proportional zu $\sqrt{m}$.

58

a) $E = N\overline{E_{\text{kin}}} = \dfrac{3}{2}NkT = \dfrac{3}{2}nRT = \dfrac{3}{2}pV$

b) $E = \dfrac{3}{2}pV$; 228 J

c) Mit $\rho = 1.20\,\text{kg/m}^3$ bei 20 °C ergibt sich $h = \dfrac{3p}{2\rho g}$; 12.9 km.

59

a) Der Druck sinkt, weil der Schweredruck des Wassers proportional zur Tiefe ändert.
b) Das Volumen nimmt gemäss dem Gesetz von Boyle und Mariotte bei konstanter Temperatur und Teilchenzahl mit sinkendem Druck zu.
c) Die Dichte sinkt, weil bei konstanter Masse das Volumen zunimmt.
d) Die mittlere Geschwindigkeit $\bar{v} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}}$ bleibt gleich. Sowohl der Druck als auch die Dichte sind proportional zum Kehrwert vom Volumen V.
e) Die mittlere kinetische Energie ist konstant, weil sie proportional zur Temperatur ist.
f) Die gesamte kinetische Energie ist konstant, weil die Teilchenzahl und die mittlere kinetische Energie konstant sind. Zwar verrichtet die Blase beim Ausdehnen Arbeit, gleichzeitig fliesst ihr aber Wärme aus dem Wasser zu, so dass die Temperatur konstant bleibt.

60

a) $\bar{v} \approx \sqrt{\frac{3p}{\rho}} = \sqrt{\frac{3pV}{m_{\text{Gas}}}}$; 428 m/s
b) $T_2 = \left(1 + \frac{2E}{3pV}\right)T_1$; 534 K (= 261°C)
c) $\bar{v}_2 \approx \sqrt{\frac{3pV + 2E}{m_{\text{Gas}}}}$; 577 m/s
d) Wegen $3RT = m_{\text{Gas}}\overline{v^2}$ vervierfacht sich die Temperatur auf 1172 K (= 899 °C). Auch die Gesamtenergie vervierfacht sich, so dass das Dreifache der vorhandenen Energie dazukommen muss: $\Delta E = \frac{9}{2}pV$; 365 J.