An Herrn
Marco Didone
Kantonsschule Rämibühl
Natw. Inst./Physik
Rämistrasse 54
8001 Zürich

Gedackte Pfeifen

In diesem Praktikum haben wir mittels dem Mikrophon von einem PC die Frequenzen verschiedener gedackter Pfeifen gemessen. Wir haben untersucht, in welchem Zusammenhang die Rohrlänge und der Durchmesser die gemessene Frequenz verändern können.

Verfasser

Sebastian Bensland, Max Mathys

{bensland,mathysm}@mng.ch

Mathematisch Naturwissenschaftliches Gymnasium Rämibühl

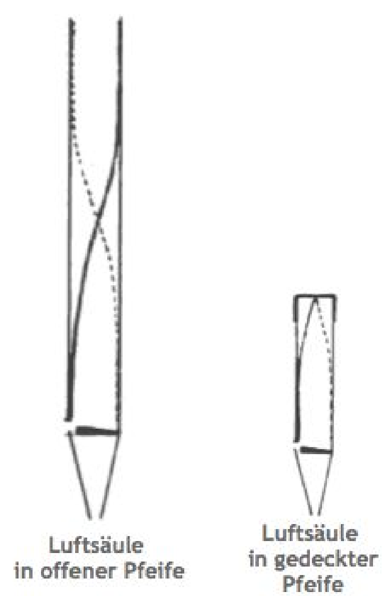
Klasse 3b

8001 Zürich

Inhalt

Einleitung

Es wurden Flöten gefunden, welche tausende von Jahren alt sind. Die älteste noch erhaltene Flöte wurde in Deutschland auf der Schwäbischen Alp gefunden. Es handelt sich um eine aus Knochen geschnitzte Flöte. Sie gilt als das älteste Instrument der prähistorischen Zeit. Später wurden Flöten auch aus Bambus und Holz geschnitzt. All diese Flöten waren sehr einfach aufgebaut und hatten nur Löcher um hineinzublasen asen und dadurch ein Pfeifgeräusch zu erzeugen. Eine gedackte Pfeife, wie in unserem Praktikum, besteht aus einem Rohr, welches nur ein Loch besitzt. Die Pfeife ist an einem Ende offen und am anderen Ende geschlossen. Gedackte Pfeifen finden heutzutage vor allem in der Orgel Gebrauch. Die meisten Orgeln enthalten mehrheitlich Labialpfeifen, bei denen die Luftsäule im Innern durch Anblasen eines Labiums (Schneidentöne) zum Schwingen gebracht und damit der Ton erzeugt wird. Grundsätzlich gilt, je länger die Pfeife ist, desto tiefer ist der Ton. Gedackte Pfeifen erzeugen jedoch, im Vergleich zu offenen Pfeifen der gleichen Länge, einen Ton, welcher eine Oktave tiefer erklingt. In einer Pfeife werden die Schwingungen an der, in dieser befindlichen Luftsäule als stehende Wellen gebildet. In einer zylindrisch offenen Pfeife bilden sich Halbwellen, das heisst: Der Pfeifenkörper ist exakt halb so lang wie die akustische Welle des Tones, den sie hervorbringt. Hierbei befindet sich der Schwingungsknoten in der Mitte des Pfeifenkörpers. Es entstehen sowohl gerade wie auch ungerade Teiltöne.
Verschliesst man aber beispielsweise eine Pfeife von 10 cm Länge an ihrer oberen Pfeifenmündung, so bilden sich nur Viertelwellen, die Pfeife klingt eine Oktave tiefer, als es der realen Pfeifenlänge entspricht, also als ob sie 20 cm lang wäre. Hierbei entstehen nur ungerade Teiltöne, was den Klang der Pfeife charakteristisch färbt. Bei dieser Bauart spricht man von gedeckten Pfeifen.



Theorie

Luftsäulen werden in Blasinstrumenten und Orgelpfeifen zum Klingen gebracht. Dabei entstehen stehende Schallwellen im Inneren der Pfeifen. Die Grundfrequenz ist unabhängig vom Pfeifenmaterial und unabhängig von der Querschnittsfläche.

Eine gedackte Pfeife ist wie erwähnt an einem Ende offen und am anderen Ende geschlossen. Am offenen Ende tritt ein Schwingungsbauch auf, beim geschlossenen Ende liegt ein Schwingungsknoten. Ein Viertel der Wellenlänge der Grundschwingung entspricht der Pfeifenlänge, sie ist also doppelt so gross wie in einer gleich langen offenen Pfeife. Die gedackte Pfeife klingt mit einem Ton, dessen Frequenz halb so gross ist wie der Grundton einer gleich langen offenen Pfeife. Eine gedackte Pfeife klingt somit eine Oktave tiefer als eine offene Pfeife.

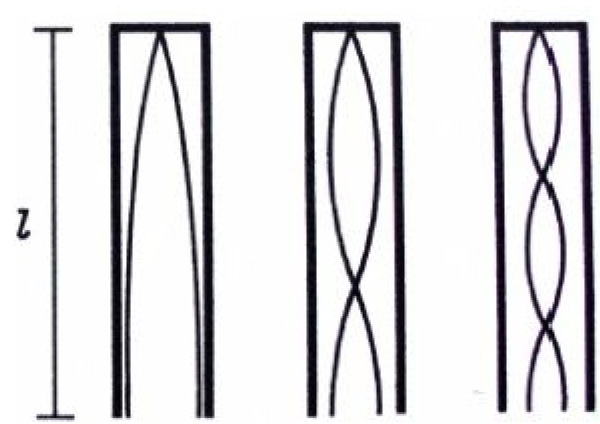
$$f_n = (2n-1) \cdot f_1 = (2n-1) \cdot \frac{c}{4 \cdot L}$$

mit c die Wellengeschwindigkeit, L die Pfeifenlänge, f_n die Frequenz, und n ein natürliche Zahl. n = 1 entspricht dem Grundton, n = 2 dem ersten Oberton, usw.

Der Grundton lässt sich auch wiefolgt berechnen

$$f_1 = \frac{c}{4 \cdot L}$$

Hier sieht man die Lage von Schwingungsknoten und Schwinungnsbäuchen in einseitig gedackten Pfeifen, l stellt die Länge dar:



Experiment

Beilagen: visiertes Originalprotokoll, Auswertung, Fehlerberechnung

Auswertung

Aufgabe 2

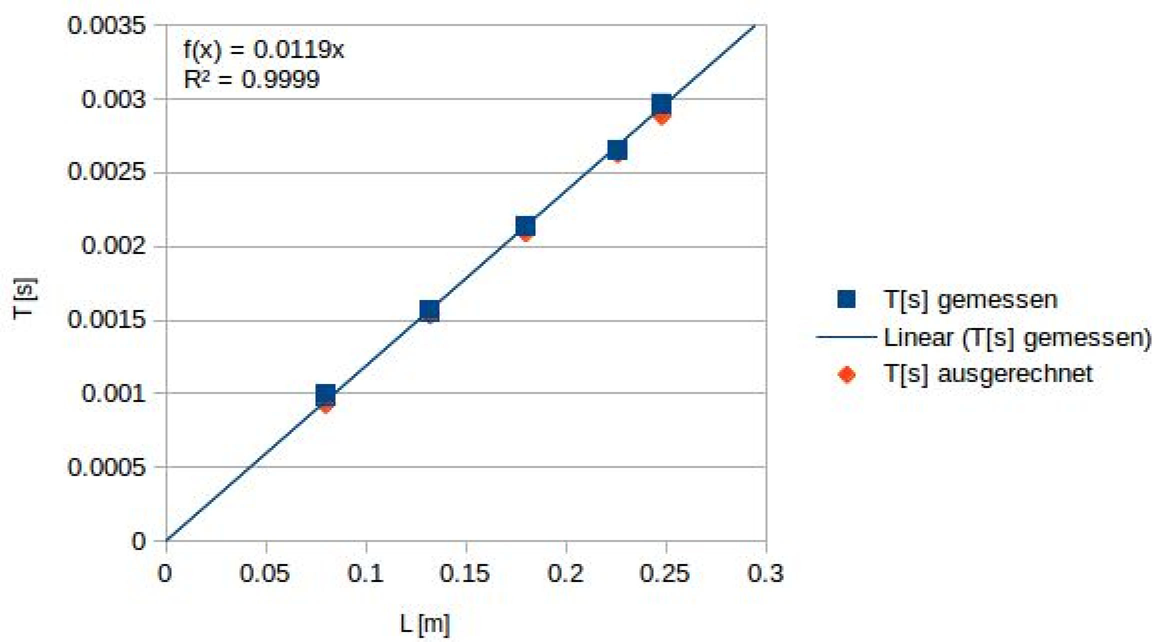
Bei dieser Aufgabe wollen wir den Zusammenhang zwischen dem Kehrwert der Grundfrequenz (Schwingungsdauer) und der Rohrlänge herausfinden.

1. $f_1 = \frac{c}{4 \cdot L}$ Die Formel für die Grundtonfrequenz einer gedackten Pfeife
2. $f(L) = T = \frac{4}{c} \cdot L$ Funktion für T in Abängigkeit von L

Wir nehmen an, dass sich die Rohrlänge und Schwingungsdauer proportional verhalten, da die Funktion die Form einer durch den Ursprung laufenden Geraden ($f(x) = mx$) besitzt.

Wir nehmen auch an, dass die berechnete Formel der Wahrheit entspricht.

3. $Annahme : T \sim L$



Graphische Darstellung der 2. Gleichung, mit Fehlerbalken (die nicht sichtbar sind, da sie zu klein sind). Lineare Trendlinie der gemessenen Werten. Daten der gemessenen Frequenzen, umgerechnet zu Schwingungsdauern, mit der Formel berechnete Daten.

Wir können folgendes bestätigen:

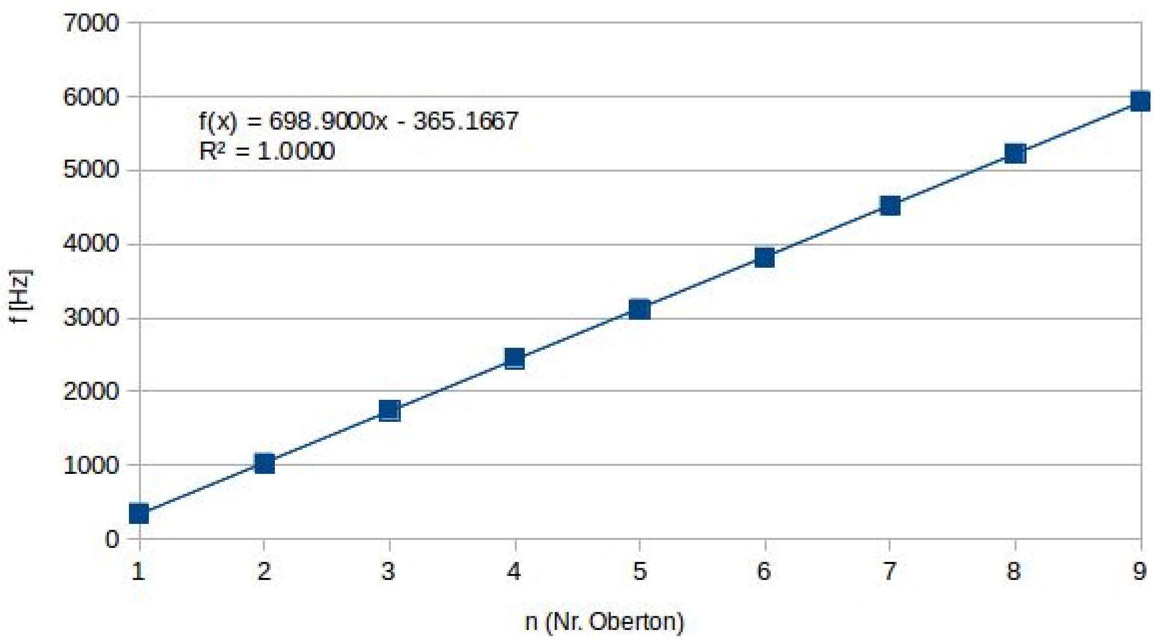
- Die Formel entspricht der Wahrheit
- Die Rohrlänge und die Schwingungsdauer verhalten sich proportional zueinander
- Die Rohrlänge und die Frequenz verhalten sich umgekehrt proportional zueinander

Aufgabe 3

Nach der Theorie sollten die Obertonfrequenzen ganzzahlige Vielfache der Grundtonfrequenz sein.

- Darstellung der Teiltonfrequenzen als Funktion (Gerade) der natürlichen Zahlen, sodass die Messwerte auf einer geraden liegen.
- Zu einem Oberton gehörende natürliche Zahl herausfinden (umgekehrte Funktion)
- Steigung der Geraden des 1. Teilpunktes berechnen
- Bedeutung des Zahlenwerts der Steigung

4. $Annahme : fn = f_1 \cdot n$



Graphische Darstellung der Messwerte (aus der 2. Messung) der Teiltonfrequenzen einer Flöte. Die Y-Fehlerbalken sind so klein, dass man sie nicht sehen kann. Der Grundton ist an der Stelle $n = 1$, die Obertöne folgen. Die Trendlinie ist eine Gerade, das Bestimmtheitsmass ist auf vier Nachkommastellen gerundet 1. Zudem sind die roten Punkte die mit der Formel berechneten Punkte, die jedoch hier nicht sichtbar sind, da sie praktisch auf der gleichen Stelle wie die anderen Punkte liegen.

$$5.\ Die\ Gleichung\ der\ Trendlinie:\ f(n) = f = 698.9000 \cdot n + 333.7333$$

Wenn man die zu dem Oberton gehörende Ordnungsnummer findet, also aus der Frequenz die Ordnung des Obertons herausfinden will, muss man die Umkehrfunktion berechnen.

$$6.\ Umkehrfunktion: f(f) = n = \frac{f-333.7333}{698.9000}$$

Die Steigung der Geraden beträgt $m = 698.9$. Die Steigung ist der Quotient des Y- und X-Unterschieds. Da der X-Unterschied zwischen zwei nebeneinanderliegenden Obertönen stets 1 ist, entspricht die Steigung dem Y-Unterschied, also dem Frequenzunterschied zwischen zwei Obertönen, deren Ordnung einen Unterschied von 1 hat.
Wenn die Ordnung der zwei Töne einen anderen Unterschied Δn hat, ist der Frequenzunterschied das entsprechende Vielfache.

$$7.\ Bedeutung\ der\ Steigung: m \mathrel{\widehat{=}} \Delta f_{\Delta n=1}$$

Aufgabe 4

Um die Schallgeschwindigkeit aus einer gemessenen Frequenz und Rohrlänge auszurechnen, müssen wir die entsprechende Formel verwenden:

$$f_1 = \frac{c}{4 \cdot L}$$

und sie nach c auflösen

$$c = f_1 \cdot 4 \cdot L$$

Berechnung der Schallgeschwindigkeit mit Fehlerrechnung:

$f_1 = 468\ Hz;$ (Daten aus den Messungen)

$\Delta f_{max} = 3\ Hz;$

$L = 0.18\ m;$

$\Delta L_{max} = 0.002\ m$

$c = 468\ Hz \cdot 0.18\ m \cdot 4 = 336.96\ m/s$

$c_{max} = 471\ Hz\ \cdot\ 0.182\ m\ \cdot\ 4\ = 342.888\ m/s$ (Fehlerrechnung)

$\Delta c_{max} = \Delta c_{max} - c = 5.928\ m/s$

$c\ = 336.96\ m/s \pm 5.928\ m/s$ (Ergebnis mit Abweichung)

Die in der Literatur angegebene Schallgeschwindigkeit für Schallgeschwindigkeit beträgt $343\ m/s$,[1] was knapp nicht mehr in der angegebenen Abweichung liegt, jedoch ziemlich nahe am berechneten Ergebnis. Jedoch ist der Literaturwert für 20 Grad Celsius angegeben.

Zusatz

Die Schallgeschwindigkeit ist von mehreren Faktoren der Luft abhängig: Vom Adiabatenexponent k, der durchschnittlichen Molmasse M und von der Temperatur T .

Wir haben die Temperatur für unseren spezifischen Versuch gemessen, für k und M müssen wir jedoch Standardwerte verwenden.

Berechnung der Schallgeschwindigkeit für eine andere Temperatur anhand der gemessenen Temperatur und Schallgeschwindigkeit:

$Gemessene\ Temperatur\ T\ = 23$°C

$$c_{23} = \sqrt{k \cdot \frac{R \cdot T_{23}}{M}} = \sqrt{\frac{k \cdot R}{M}} \cdot \sqrt{T_{23}}$$

$$\frac{c_{23}}{\sqrt{T_{23}}} = \sqrt{\frac{k \cdot R}{M}}$$

Da der Teil $\sqrt{\frac{k \cdot R}{M}}$ für alle Temperaturen konstant ist, kann man ihn bei der Umrechnung zu einer anderen Temperatur *wegstreichen*.

Somit folgt

$$\frac{c_{23}}{\sqrt{T_{23}}} = \frac{c_x}{\sqrt{T_x}}$$

$$c_x = -\ \frac{c_{23} \cdot \sqrt{T_x}}{\sqrt{T_{23}}}$$

Wenn man zum Beispiel die Temperatur für 20 Grad ausrechnen will, geht das wie folgt:

[1] http://de.wikipedia.org/wiki/Schallgeschwindigkeit

$$c_{20} = \frac{336.96\ m/s \cdot \sqrt{293.15\ K}}{\sqrt{296.15\ K}} = 335.248953059\ m/s$$

$Fehler\ für\ Temperaturmessung : \Delta T max\ =\ 0.5K$

$$c_{20,max} = -\ \frac{(336.96\ m/s + 5.928\ m/s) \cdot \sqrt{293.15\ K}}{\sqrt{296.15\ K - 0.5\ K}} = 341.43520133\ m/s$$

$$\Delta c_{max} = c_{max} - c = 6.18624827087\ m/s$$

$c = 335.2480\ m/s \pm 6.1862\ m/s$ (gerundetes Endresultat, Abweichung)

Der Wert aus der Literatur für dieselbe Temperatur ist $343\ m/s$, und dieser liegt definitiv im Bereich unseres Ergebnisses.

Schlussfolgerungen

Resultate

Wir erfuhren, dass die Tonfrequenz von Tönen umgekehrt proportional zu der Länge der Pfeife ist, und dass die Dicke einer Pfeife sich nicht auf die Frequenz auswirkt. Aus waren wir imstande, aus der Pfeiffrequenz und der Temperatur die Schallgeschwindigkeit auszurechnen. Wir haben gelernt, dass die Schallgeschwindigkeit eines Tones von Faktoren wie dem Adiabatenexponent, der durchschnittlichen Molmasse und von der Temperatur abhängig ist.

Reflexion

Wir haben in unserem Praktikum gelernt, was überhaupt Töne sind, wie sie entstehen und wie sie aufgebaut sind. Wir haben sie produziert und gemessen. Als wir verschiedene Pfeifen getestet haben, war es erstaunlich, dass die Dicke, Material, Oberfläche einer Pfeife keine Auswirkungen auf die Tonfrequenz hatten. Auch wenn verschiedene Pfeifen verschieden klingen, können sie die gleiche Frequenz haben. Interessant waren auch die Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Eigenschaften eines Tones, wie zum Beispiel zwischen der Frequenz und der Pfeifenlänge; oder zwischen der Temperatur und der Schallgeschwindigkeit.