

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Física de São Carlos

Campo magnético produzido por um conjunto de bobinas circulares

Aluno: Matheus Fernandes Sousa Lemes (Nº USP: 9866506)
Curso: Bacharelado em Física
Disciplina: Eletromagnetismo computacional
Orientador: Prof. Dr. Guilherme Matos Sipahi

São Carlos - 2020

Sumário

1	Introdução	2
1.1	Lei de Biot-Savart	2
1.2	Aproximando uma espira circular por um polígono regular de N lados	2
2	Campos magnéticos para diferentes geometrias	4
2.1	Bobina circular	4
2.2	Bobina de Helmholtz	6
2.3	Bobina de Maxwell	7
3	Conclusão	8

1 Introdução

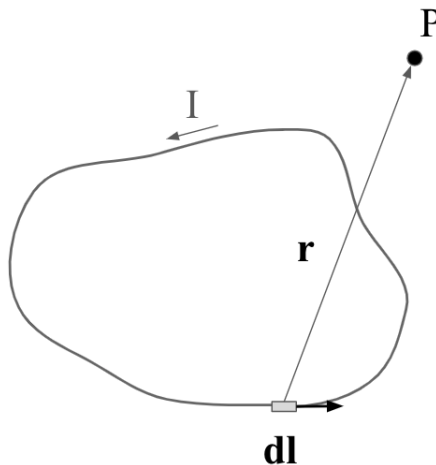
1.1 Lei de Biot-Savart

Este trabalho foi focado em solucionar os exercícios referentes a seção 5.4 do livro do Giordano [1], em que queremos determinar o campo magnético gerado por uma corrente elétrica que flui em em diferentes configurações espaciais. O campo magnético \mathbf{B} produzido por uma corrente elétrica I é dado pela lei de Biot-Savart

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}, \quad (1)$$

em que a integração é feita no caminho que flui a corrente, $d\mathbf{l}$ é um elemento infinitesimal do fio e \mathbf{r} é o vetor que conecta esse elemento ao ponto P. A figura 1 apresenta uma visão esquemática desse fato.

Figura 1: Caminho de integração da lei de Biot-Savart.



É importante destacar que a equação (1) é válida para uma corrente uniforme constante, ou seja, a magnitude de I não varia ao longo do caminho de integração. Além disso, ela é válida quando o condutor em que os elétrons fluem pode ser considerado infinitamente estreito, de forma que qualquer espessura pode ser desprezada.

Nesse trabalho, focamos em geometrias espaciais que podem ser descritas como um conjunto de bobinas circulares. Contudo, para um ponto arbitrário no espaço, a integral na equação (1) pode ser bem complicada. Dessa forma, precisamos utilizar uma maneira de aproximar a corrente que flui em uma espira circular por algo que seja mais fácil de trabalhar.

1.2 Aproximando uma espira circular por um polígono regular de N lados

Para evitar o cálculo de integrais complicadas que podem surgir na lei de Biot-Savart, iremos utilizar a abordagem da referência [2], em que a geometria de uma espira circular será aproximada

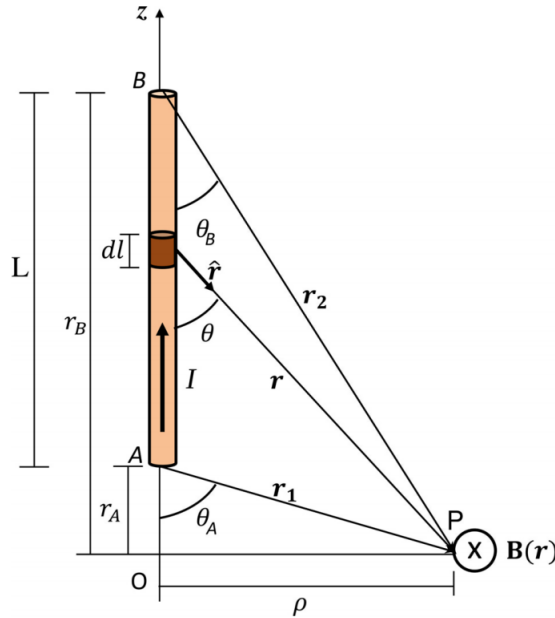
por um polígono regular de N lados. Utilizando o princípio da superposição, podemos dizer que o campo magnético será dado pela soma dos N fios que carregam a mesma corrente. O campo magnético produzido por um fio retilíneo finito, carregando uma corrente elétrica I na direção z , em um ponto arbitrário P (ver figura 2), será dado por

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho} (\cos \theta_A - \cos \theta_B) \hat{\mathbf{e}}_\phi, \quad (2)$$

em que

$$\cos \theta_i = \frac{z - z_i}{\sqrt{\rho^2 + (z - z_i)^2}}.$$

Figura 2: Esquema para o cálculo do campo magnético de um fio retilíneo finito carregando uma corrente I . Fonte: retirado da referência [2].



Em termos das coordenadas cartesianas, o versor $\hat{\mathbf{e}}_\phi$ será

$$\hat{\mathbf{e}}_\phi = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} \hat{\mathbf{i}} + \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} \hat{\mathbf{j}} + \frac{v_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} \hat{\mathbf{k}}, \quad (3)$$

onde $v_x = (y_B - y_A)(z - z_A) - (y - y_A)(z_B - z_A)$, $v_y = (x - x_A)(z - z_A) - (x_B - x_A)(z - z_A)$ e $v_z = (x_B - x_A)(y - y_A) - (x - x_A)(y_B - y_A)$. Logo, as componentes do campo magnético serão

$$\begin{cases} B_x = B \frac{v_x}{v} \\ B_y = B \frac{v_y}{v} \\ B_z = B \frac{v_z}{v} \end{cases}, \quad (4)$$

com $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ e B a magnitude do campo magnético, dada por

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho} \left(\frac{r_2^2 - r_1^2 + L^2}{2Lr_2} - \frac{r_2^2 - r_1^2 - L^2}{2Lr_1} \right). \quad (5)$$

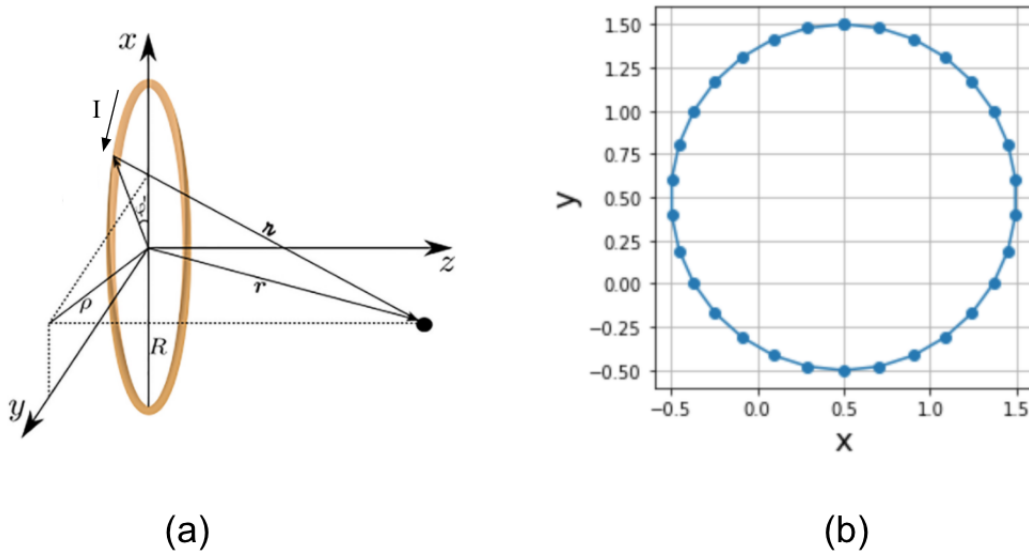
2 Campos magnéticos para diferentes geometrias

Nesta seção, iremos calcular o campo magnético para diferentes geometrias espaciais conforme o procedimento descrito na seção anterior. A implementação foi feita em Python e se baseia em computar as coordenadas cartesianas e a magnitude do campo magnético através das equações (3), (4) e (5).

2.1 Bobina circular

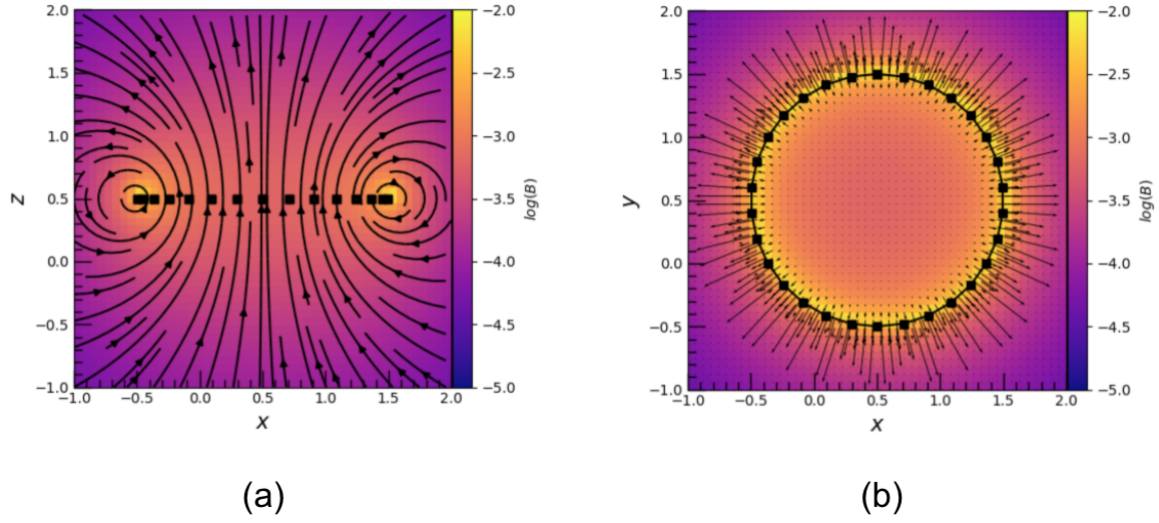
Primeiro, calcularemos o campo magnético gerado por uma bobina circular. Um esquema dessa geometria pode ser visto na figura 3 (a), em que a espira circular de raio R está localizada no plano x-y, com o eixo z cortando o centro da espira, e carrega uma corrente elétrica I . Na figura 3 (b) pode ser vista a aproximação da espira circular por um polígono regular de 30 lados.

Figura 3: (a) Esquema para o cálculo do campo magnético de uma espira circular carregando uma corrente I . Fonte: adaptado da referência [2]. (b) Projeção no plano x-y da aproximação por um polígono regular com $N = 30$.



Os resultados do campo magnético, vistos em diferentes planos, podem ser vistos na figura 4. Os parâmetros utilizados foram $R = 1$ e $I = 1000$. Note que as linhas de campo circulam a espira circular, como era esperado.

Figura 4: Projeções para as linhas de campo magnético para (a) o plano x-z e (b) o plano x-y.

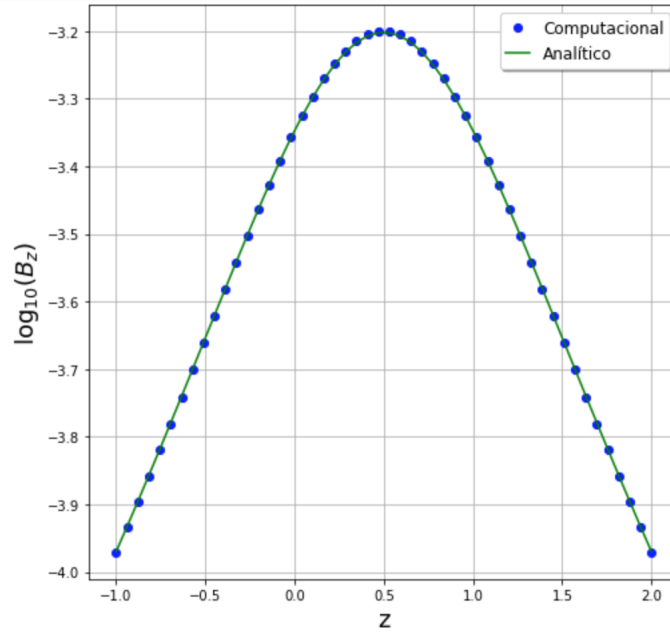


Além disso, perceba que as linhas de campo no plano x-z, para $x = 0$, são paralelas ao eixo z , devido a simetria do problema. Podemos comparar o resultado computacional com o resultado analítico dado por

$$B_z = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (6)$$

A figura 5 apresenta essa comparação, em que os resultados concordam muito bem e demonstram a validade do modelo empregado.

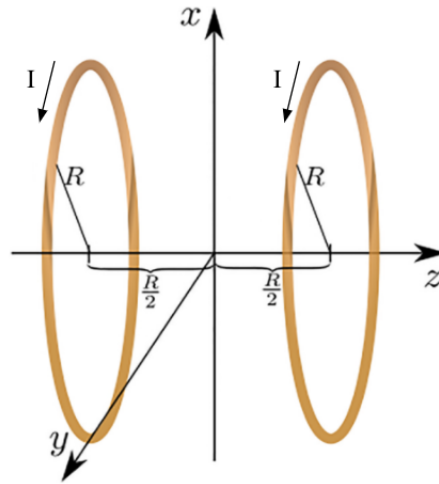
Figura 5: Campo magnético na direção z calculado de forma computacional e analítica.



2.2 Bobina de Helmholtz

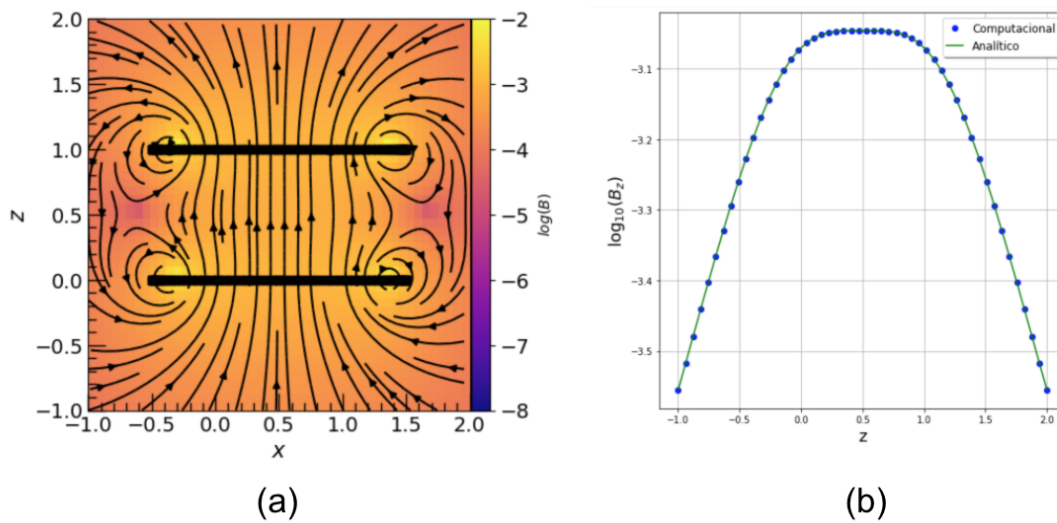
Em seguida, calcularemos o campo magnético gerado por uma bobina de Helmholtz. Essa configuração é muito utilizada para o estudo das propriedades magnéticas da matéria e está representada na figura 6. Ela consiste de duas espiras circulares de raio R que carregam uma corrente elétrica I na mesma direção e que produzem um campo magnético bem uniforme em uma pequena região entre as bobinas no eixo z .

Figura 6: Esquema da configuração das bobinas de Helmholtz. Fonte: adaptado da referência [2].



A figura 7 (a) apresenta as linhas de campo de magnético para o plano x - z . Novamente, os parâmetros utilizados foram $R = 1$ e $I = 1000$.

Figura 7: (a) Linhas de campo magnético calculadas de forma computacional. (b) Comparação entre o resultado computacional e o analítico.



No eixo z , o campo magnético possui uma expressão analítica e é dado por

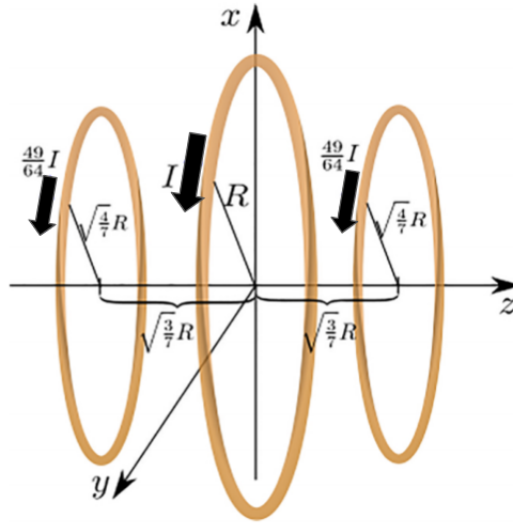
$$B_z = \frac{\mu_0 I R^2}{2} \left\{ \frac{1}{\left[R^2 + \left(z + \frac{R}{2} \right)^2 \right]^{3/2}} + \frac{1}{\left[R^2 + \left(z - \frac{R}{2} \right)^2 \right]^{3/2}} \right\}. \quad (7)$$

A figura 7 (b) compara o resultado computacional obtido com aquele esperado pela equação (7). Note que, mais uma vez, os resultados concordam muito bem.

2.3 Bobina de Maxwell

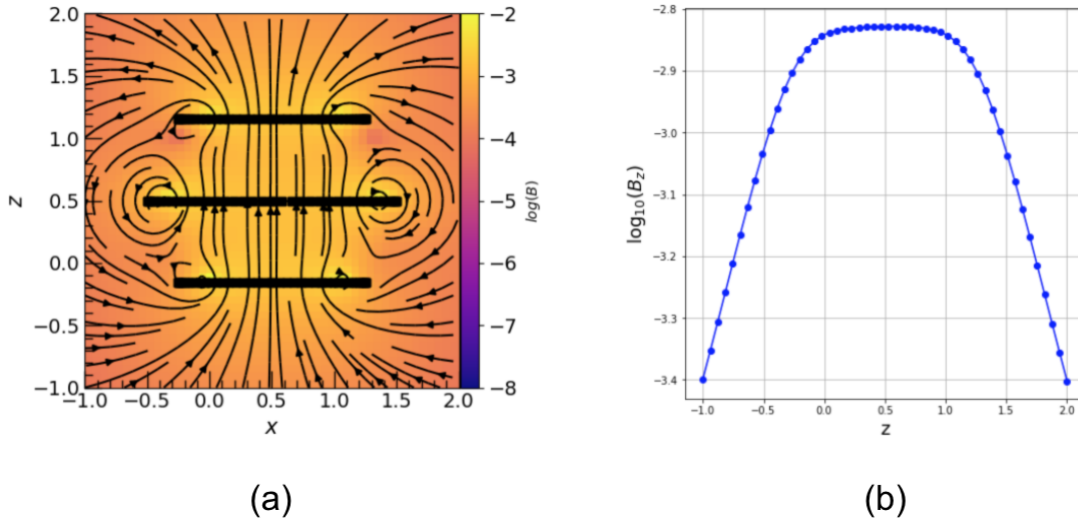
Por fim, calcularemos o campo magnético gerado por uma bobina de Maxwell. Essa geometria consiste no arranjo de três bobinas circulares coaxiais, com a bobina central de raio R e corrente elétrica I e as duas bobinas exteriores de raio $\sqrt{\frac{4}{7}}R$ e corrente elétrica $\frac{49}{64}I$. Além disso, a separação entre as bobinas é de $\sqrt{\frac{3}{7}}R$. Um esquema pode ser visto na figura 8.

Figura 8: Esquema da configuração das bobinas de Maxwell. Fonte: adaptado da referência [2].



As linhas de campo magnético no plano x-z podem ser vistas na figura (a), com os parâmetros sendo $R = 1$ e $I = 1000$. Já a figura (b) apresenta o perfil da componente B_z no eixo z , o qual cruza o centro das bobinas. Perceba que a magnitude dessa componente do campo é maior que na configuração de Helmholtz. Além disso, a configuração de Maxwell proporciona um campo magnético ainda mais uniforme que aquele gerado pela geometria de Helmholtz.

Figura 9: (a) Linhas de campo magnético calculadas de forma computacional. (b) Comparação entre o resultado computacional e o analítico.



3 Conclusão

Nesse trabalho foi possível calcular o campo magnético para diferentes geometrias espaciais através da combinação do princípio da superposição e métodos computacionais iterativos. Esse modelo simples permite a determinação do campo magnético sem a utilização de argumentos de simetria, algo muito frequente nos exemplos tradicionais de livros-texto sobre magnetismo. Foi determinado as linhas de campo magnético para a bobina circular, de Helmholtz e de Maxwell, assim como o perfil da componente B_z no eixo z . Para a bobina circular e de Helmholtz, verificamos que os resultados computacionais para B_z concordam muito bem com as expressões analíticas conhecidas. Além disso, observamos que a configuração de Maxwell permite a geração de um campo magnético B_z mais forte e uniforme no eixo z do que a configuração de Helmholtz. Dessa forma, o modelo de aproximação por polígonos regulares utilizado nesse projeto demonstra ser uma ferramenta muito interessante no estudo do magnetismo.

Referências

- [1] N.J. Giordano. *Computational Physics: 2nd edition*. Dorling Kindersley, 2012.
- [2] Jorge Enrique García-Farieta and Alejandro Hurtado Márquez. Exploring the magnetic field of helmholtz and maxwell coils: a computer-based approach exploiting the superposition principle. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 42, 2020.
- [3] Douglas N Arnold. Stability, consistency, and convergence of numerical discretizations. *Encyclopedia of Applied and Computational Mathematics*, pages 1358–1364, 2015.
- [4] Wikipedia. *Biot–Savart law*. https://en.wikipedia.org/wiki/Biot%E2%80%93Savart_law.
- [5] Wikipedia. *Numerical integration*. https://en.wikipedia.org/wiki/Numerical_integration.