

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Física de São Carlos

Campo magnético produzido por uma corrente elétrica

Aluno: Matheus Fernandes Sousa Lemes (Nº USP: 9866506)
Curso: Bacharelado em Física
Disciplina: Eletromagnetismo computacional
Orientador: Prof. Dr. Guilherme Matos Sipahi

São Carlos - 2020

Sumário

1	Introdução	2
1.1	Lei de Biot-Savart	2
1.2	Integração numérica	2
2	Calculando o valor de π por integração numérica	4
3	Campo magnético para um fio retilíneo	5
3.1	Resultados para os métodos numéricos	5
3.2	Comparação dos métodos numéricos com a lei de Ampere	6
4	Conclusão	8

1 Introdução

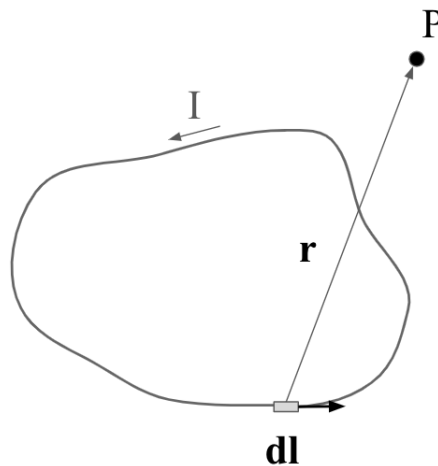
1.1 Lei de Biot-Savart

Esse trabalho foi focado em solucionar os exercícios referentes a seção 5.3 do livro do Giordano [1], em que queremos determinar o campo magnético gerado por uma corrente elétrica que flui em um fio. O campo magnético \mathbf{B} produzido por uma corrente elétrica I é dado pela lei de Biot-Savart

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}, \quad (1)$$

em que a integração é feita no caminho que flui a corrente, $d\mathbf{l}$ é um elemento infinitesimal do fio e \mathbf{r} é o vetor que conecta esse elemento ao ponto P. A figura 1 apresenta uma visão esquemática desse fato.

Figura 1: Caminho de integração da lei de Biot-Savart.



É importante destacar que a equação (1) é válida para uma corrente uniforme constante, ou seja, a magnitude de I não varia ao longo do caminho de integração. Além disso, ela é válida quando o condutor em que os elétrons fluem pode ser considerado infinitamente estreito, de forma que qualquer espessura pode ser desprezada.

1.2 Integração numérica

Para determinar computacionalmente o campo magnético gerado por uma certa geometria espacial é necessário recorrer aos métodos de integração numérica. Diversos métodos existem para calcular uma integral unidimensional de forma numérica, porém neste trabalho iremos focar especificamente em dois: regra dos retângulos e regra de Simpson. Esses dois métodos são exemplos da regra de

quadratura de Newton-Cotes [2], em que uma interpolação polinomial é utilizada para aproximar uma função $f(x)$, com $x \in [a, b]$.

De forma geral, queremos obter uma maneira de calcular uma solução aproximada para uma integral definida

$$\int_a^b f(x)dx. \quad (2)$$

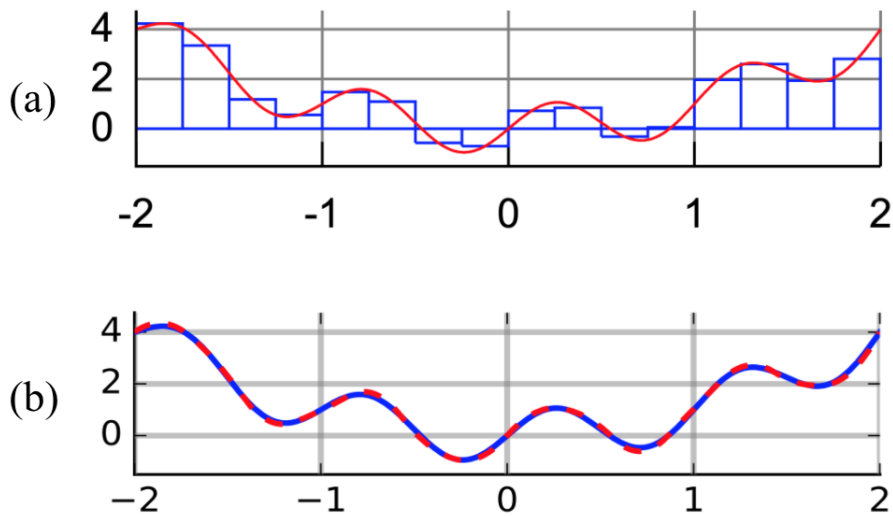
Primeiro, vamos discretizar nosso intervalo $[a, b]$ em N partes (com N um número par), de modo que $x = a + i\Delta x$ e $\Delta x = (b - a)/N$. Uma maneira de calcular a integral em 3 é aproximarmos a função por um valor constante no i -ésimo intervalo dado por $f(x_i)$. Esse método é conhecido como regra dos retângulos, visto que função interpoladora será simplesmente a soma de pequenos retângulos, como pode ser visto na figura 2 (a). Dessa forma, a integral será dada por

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^N f(x_i)\Delta x. \quad (3)$$

Uma outra maneira mais eficaz é aproximar a função no i -ésimo intervalo por um polinômio de segundo grau. Tal aproximação é ilustrada na figura 2 (b) e ressoa muito melhor a função original. Esse método é chamado de regra de Simpson e a integral será dada por

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3} \left(\sum_{i=1}^{N/2} f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i}) \right). \quad (4)$$

Figura 2: Ilustrações dos métodos de integração numérica. As linhas em vermelho representam a função original e as linhas em azul representam as aproximações. (a) Regra dos retângulos. (b) Regra de Simpson. Fonte: adaptado de [2].



2 Calculando o valor de π por integração numérica

Nessa seção apresentaremos um exemplo bem interessante e ilustrativo de uma integração numérica. Calcularemos o valor da constante π utilizando os dois métodos descritos na seção anterior por meio do cálculo da área A de uma circunferência de raio unitário. Nossa função $f(x)$ é obtida da equação da circunferência para $R = 1$:

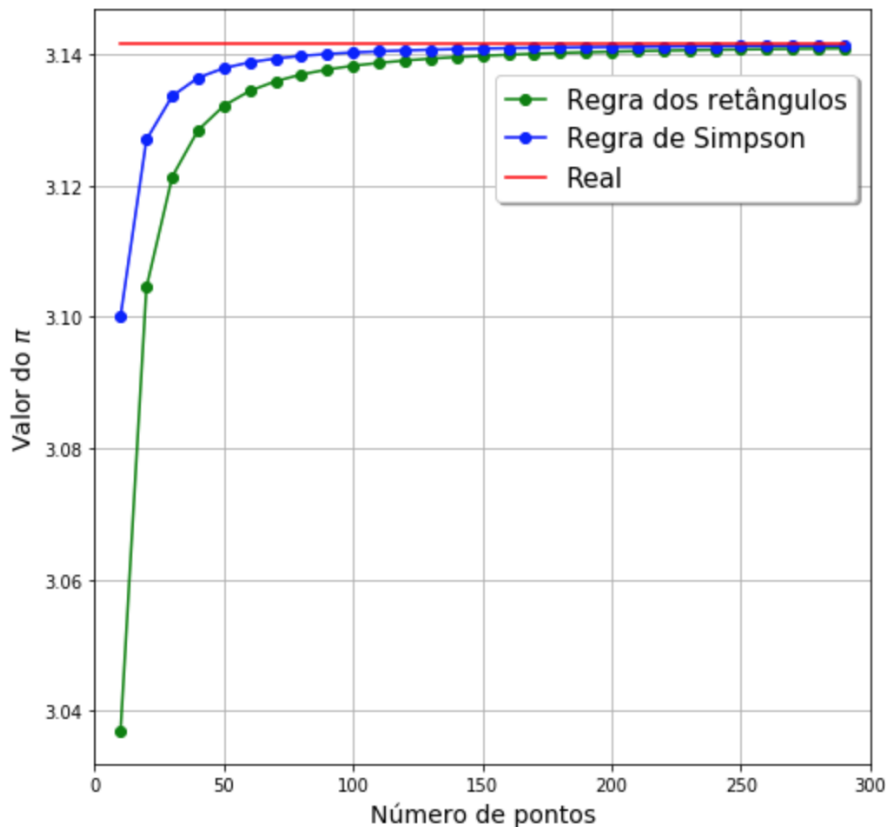
$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y = f(x) = \sqrt{1 - x^2} \quad (5)$$

e a área será simplesmente

$$A = 2 \int_{-1}^1 f(x) dx = \pi. \quad (6)$$

O fator 2 aparece porque a integral em questão é para a semi-circunferência de $y \geq 0$. A figura 3 apresenta os valores obtidos para a constante π pela regra dos retângulos e pela regra de Simpson para diferentes valores de N .

Figura 3: Determinação do valor do π por métodos de integração numérica.

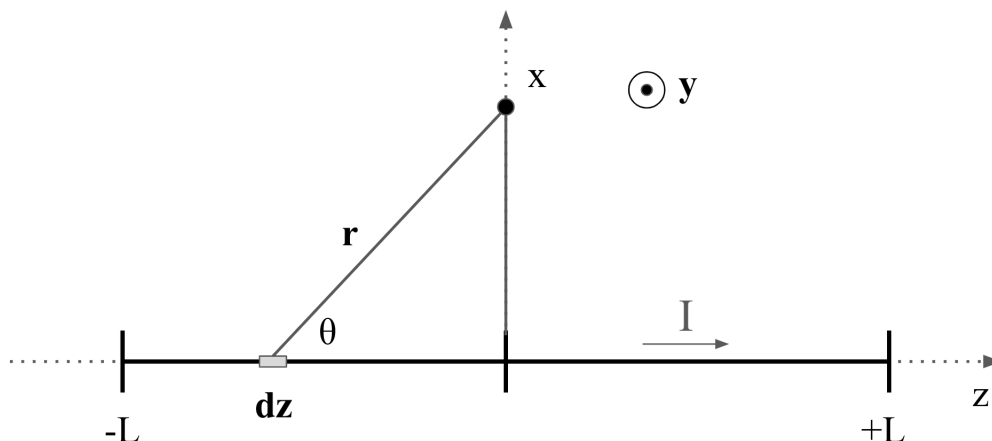


Perceba que ambos os métodos convergem para o valor real de π conforme o número de pontos aumenta. Contudo, é possível ver que a regra de Simpson converge mais rápido, visto que ela aproxima a função original de forma mais fidedigna.

3 Campo magnético para um fio retilíneo

Retornando para o nosso problema original, queremos utilizar os métodos de integração numérica da seção 1.2 para calcular o campo magnético produzido por uma corrente elétrica que flui em um fio retilíneo. O esquemático pode ser visto na figura 4.

Figura 4: Esquemático para o cálculo do campo magnético gerado por uma corrente em fio retilíneo.



Com esse esquemático em mãos é possível escrever a lei de Biot-Savart para esse problema, lembrando que pela regra da mão direita o campo magnético irá apontar na direção y . Logo, a equação (1) será

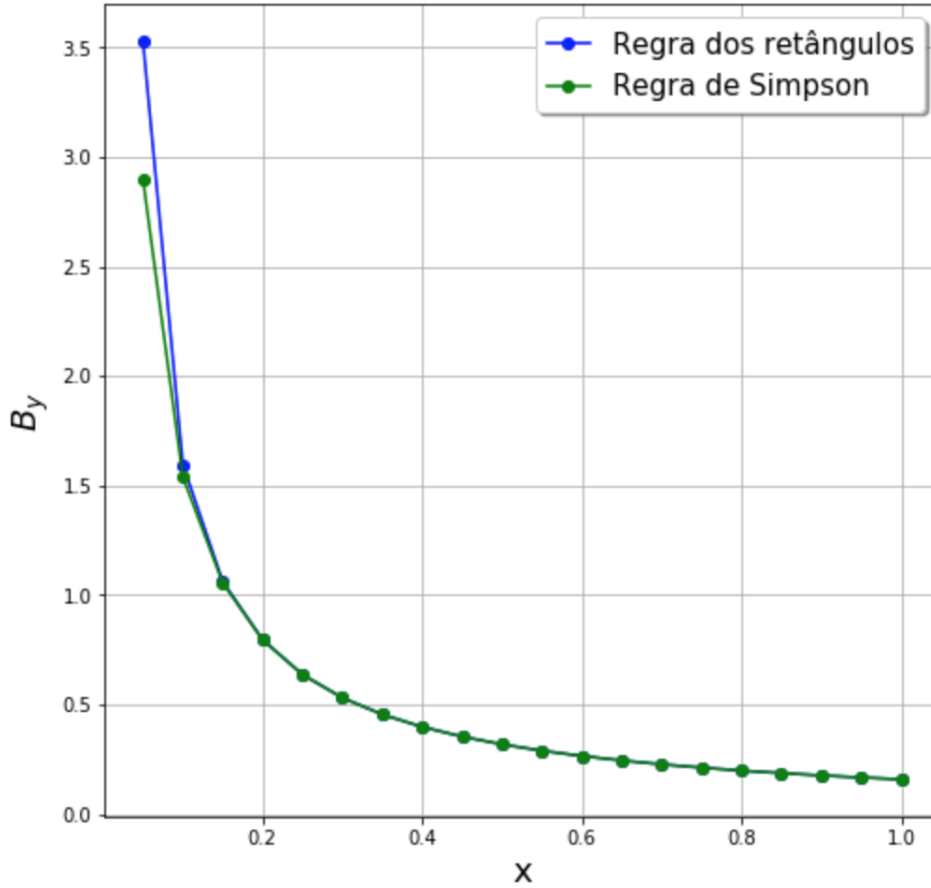
$$B_y = \frac{1}{4\pi} \int_{-L}^{+L} \frac{dz \sin \theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi} \int_{-L}^{+L} dz \frac{x}{(z^2 + x^2)^{3/2}}, \quad (7)$$

em que definimos $\mu_0 I = 1$ para facilitar a notação. Agora que temos a formulação integral do problema vamos calcular o campo magnético no ponto x .

3.1 Resultados para os métodos numéricos

Nessa seção apresentamos os resultados computacionais obtidos para o campo magnético da equação (7). Os códigos foram feitos em Python e com uma implementação bem direta, de forma que não é necessária uma discussão a respeito deles aqui nesse trabalho. A figura 5 apresenta esses resultados. É possível notar que os gráficos apresentam um comportamento qualitativamente esperado, em que para pontos longe do fio o campo magnético é cada vez menor. Analisaremos agora como eles se comparam com a lei de Ampere para um fio infinito.

Figura 5: Resultados computacionais para o campo magnético de um fio retilíneo como função da distância x . Os parâmetros utilizados foram $L = 16$ e $\Delta z = 0.08$.



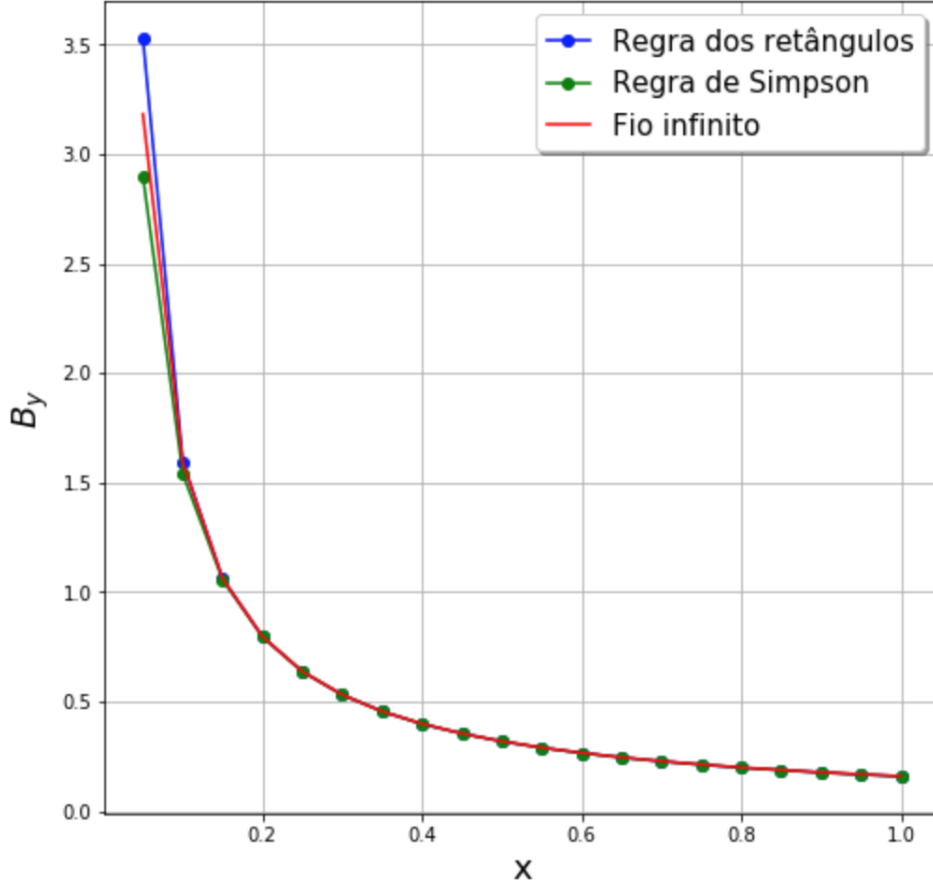
3.2 Comparação dos métodos numéricos com a lei de Ampere

Comparamos agora os resultados encontrados na seção anterior com a lei de Ampere para a corrente que flui em um fio retilíneo infinito. O campo magnético pela lei de Ampere será dado por

$$B_y = \frac{1}{2\pi r}, \quad (8)$$

em que novamente utilizamos $\mu_0 I = 1$. A figura 6 mostra como os resultados computacionais se comportam em relação ao que era esperado pela equação (8). Podemos perceber que para grandes distâncias do fio os métodos numéricos estão em boa concordância com a lei de Ampere. Já para pontos próximos ao fio é encontrado pequenos desvios do valor teórico previsto, visto que o tamanho do espaçamento de rede Δz se torna comparável a distância x .

Figura 6: Comparação dos resultados computacionais com a lei de Ampere para o campo magnético de um fio retilíneo como função da distância x . Novamente, os parâmetros utilizados foram $L = 16$ e $\Delta z = 0.08$.

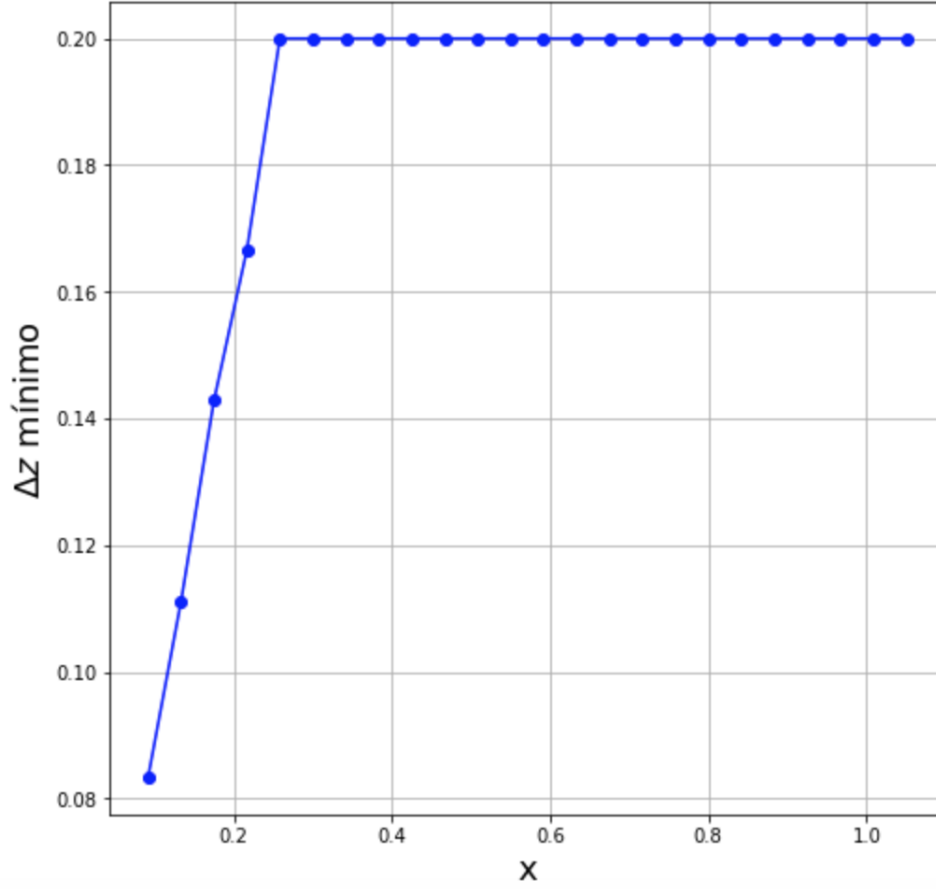


Tendo em mente que o espaçamento de rede afeta nossa solução numérica para x pequeno, podemos determinar qual o valor mínimo de Δz para que o resultado computacional (escolhemos utilizar a regra de Simpson) e o teórico difiram no máximo 5%. Para fazer isso definimos a quantidade erro percentual, denominada E_p , dada por

$$E_p = \left| \frac{B_{Simpson}(x, \Delta z) - B_{Ampere}(x)}{B_{Ampere}(x)} \right|. \quad (9)$$

Para um determinado x , podemos variar Δz até o ponto em que encontrarmos o valor mínimo de Δz que possibilita $E_p \leq 0.05$. Esse processo é repetido para o próximo valor de x até que possamos encontrar uma "regra de bolso" para o valor mínimo do espaçamento de rede em função da distância até o fio. A figura 7 apresenta um gráfico do resultado obtido a partir desse procedimento. Perceba que para x pequeno a relação é linear, enquanto que a partir de um determinado valor x_0 o Δz mínimo passa a ser uma constante. Mais especificamente, esse valor constante é o maior valor que o espaçamento de rede pode assumir, ou seja, para $x \geq x_0$ não importa qual o tamanho do nosso intervalo, pois nossa regra de Simpson nem irá sentir esse efeito.

Figura 7: Relação entre o Δz mínimo para uma determinada posição x . $\Delta z = 0.2$ é o maior valor utilizado de espaçamento de rede.



Através do fitting do gráfico acima foi possível concluirmos que a relação para Δz mínimo em função de x (lembrando que x é sempre positivo) será

$$\Delta z_{\text{mínimo}} = \begin{cases} 0.693x + 0.019, & \text{para } x \leq 0.258 \\ 0.2, & \text{para } x > 0.258 \end{cases} \quad (10)$$

4 Conclusão

Nesse trabalho foi possível estudar como métodos de integração numérica por interpolação polinomial podem ser utilizados para a resolução desde de problemas simples até aqueles mais sofisticados. Determinamos numericamente o valor da constante π usando a regra dos retângulos e a regra de Simpson e verificamos que o último converge mais rápido para o valor real do o primeiro. Além disso, aplicamos esses conhecimentos para encontrar o campo magnético produzido por uma corrente que flui em um fio retilíneo. Concluimos que os resultados computacionais para fios longos concordam bem com a lei de Ampere para os campos magnéticos, exceto para pontos perto do fio em que o tamanho finito da discretização se torna relevante.

Referências

- [1] N.J. Giordano. *Computational Physics: 2nd edition*. Dorling Kindersley, 2012.
- [2] Wikipedia. *Numerical integration*. https://en.wikipedia.org/wiki/Numerical_integration.
- [3] Douglas N Arnold. Stability, consistency, and convergence of numerical discretizations. *Encyclopedia of Applied and Computational Mathematics*, pages 1358–1364, 2015.
- [4] Wikipedia. *Biot–Savart law*. https://en.wikipedia.org/wiki/Biot%E2%80%93Savart_law.