Московский Авиационный Институт
(национальный исследовательский университет)

Институт информационных технологий и прикладной математики

Кафедра вычислительной математики и программирования

Лабораторная работа №4 по курсу “Криптография”

Студент: Жерлыгин М.А.
Преподаватель: Борисов А.В.
Группа: М8О-308Б-18
Дата:_____________
Оценка:_____________
Подпись:_____________

Задача:
Подобрать такую эллиптическую кривую над конечным простым полем порядка p, такую, порядок точки которой полным перебором находится за 10 минут на ПК. Упомянуть в отчёте какие алгоритмы и теоремы существуют для облегчения и ускорения решения задачи полного перебора.

Решение:

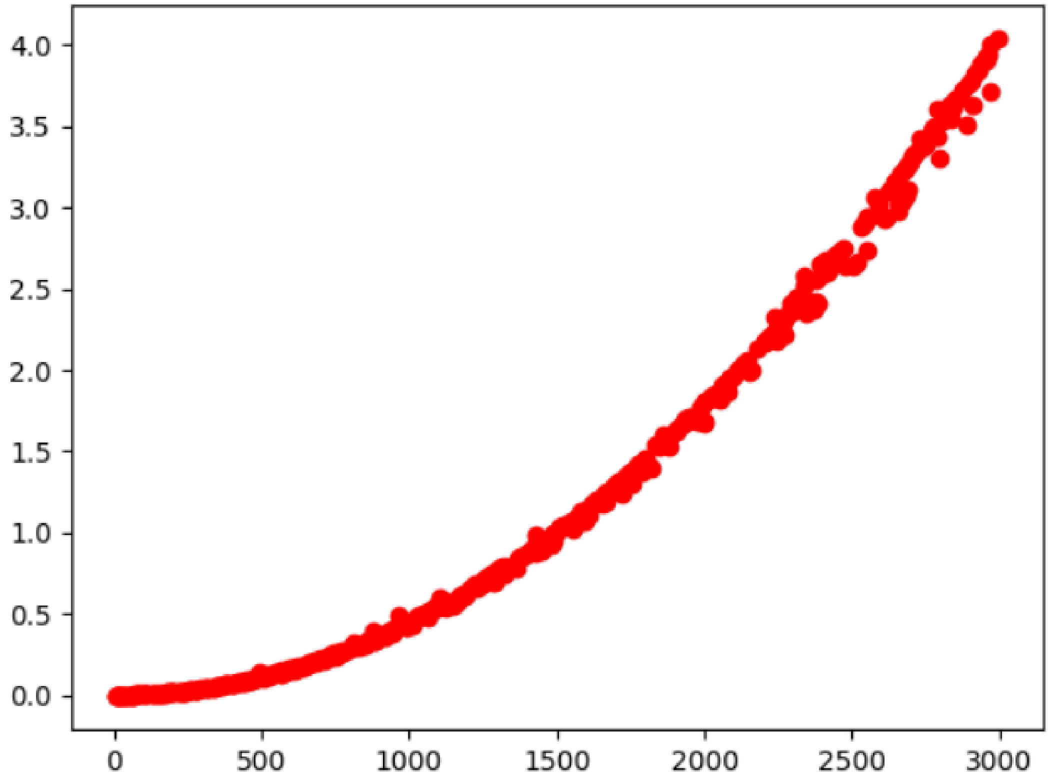
```
import random
import time
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

A = random.randint(1000000000, 10000000000)
B = random.randint(1000000000, 10000000000)


def print_curve():
    print("y^2 = x^3 + {0} * x + {1} (mod {2})".format(A % p, B % p, p))


def elliptic_curve(x, y, p):
    return (y ** 2) % p == (x ** 3 + (A % p) * x + (B % p)) % p


def find_points():
    points = []
    for x in range(p):
        for y in range(p):
            if elliptic_curve(x, y, p):
                points.append((x, y))
    return points


def extended_euclidean_algorithm(a, b):
    s, old_s = 0, 1
    t, old_t = 1, 0
    r, old_r = b, a
```

```
    while r != 0:
        quotient = old_r // r
        old_r, r = r, old_r - quotient * r
        old_s, s = s, old_s - quotient * s
        old_t, t = t, old_t - quotient * t

    return old_r, old_s, old_t


def inverse_of(n, p):
    gcd, x, y = extended_euclidean_algorithm(n, p)
    assert (n * x + p * y) % p == gcd

    if gcd != 1:
        raise ValueError(
            '{} has no multiplicative inverse '
            'modulo {}'.format(n, p))
    else:
        return x % p


def add_points(p1, p2, p):
    x1, y1 = p1[0], p1[1]
    x2, y2 = p2[0], p2[1]

    if p1 == (0, 0):
        return p2
    elif p2 == (0, 0):
        return p1
    elif x1 == x2 and y1 != y2:
        return (0, 0)

    if p1 == p2:
        m = ((3 * x1 ** 2 + (A % p)) * inverse_of(2 * y1, p)) % p
    else:
        m = ((y1 - y2) * inverse_of(x1 - x2, p)) % p

    x3 = (m ** 2 - x1 - x2) % p
    y3 = (y1 + m * (x3 - x1)) % p

    return [x3, -y3 % p]
```

```python
def point_order(point, p):
    i = 1
    new_point = add_points(point, point, p)
    while new_point != (0, 0):
        new_point = add_points(new_point, point, p)
        i += 1

    return i


def sieve(n):
    primes = 2 * [False] + (n - 1) * [True]
    for i in range(2, int(n ** 0.5 + 1.5)):
        for j in range(i * i, n + 1, i):
            primes[j] = False
    return [prime for prime, checked in enumerate(primes) if checked]


if __name__ == '__main__':
    print("Start...")

    primes = sieve(37000)
    p = primes[-1]

    start = time.time()

    points = find_points()

    points_num = len(points)

    print_curve()
    print("Elliptic curve group order = {0}".format(points_num))

    point = random.choice(points)

    print("Order of point {0}: {1}".format(point, point_order(point, p)))
    print("Time: {0}".format(time.time() - start))
```

Описание решения:

Я взял эллиптическую кривую $y^2 = x^3 + ax + b$, выбрал случайным образом коэфициенты a и b. С помощью решета Эратосфена сформировал массив простых чисел до 3000 и посмотрел, сколько времени для разных p занимает поиск всех точек кривой и поиск порядка случайно выбранной точки. Получил такой график:



Из данного соотношения прикинула, что p должно быть около 37000. Поиск всех точек занимает много времени, это происходит из-за полного перебора (квадратичная сложность). Далее ищем порядок случайно выбранной из найденных точки. Складываем ее с самой собой до тех пор, пока не получим нулевую точку. Количество операций сложения и будет являться искомым порядком.

Результат работы:

y^2 = x^3 + 12987 * x + 32272 (mod 36997)
Elliptic curve group order = 36953
Order of point (17716, 12077): 36953
Time: 624.449035168

Вывод

Существует более эффективный алгоритм подсчёта числа точек на эллиптической кривой над конечным полем - это алгоритм Шуфа. Он использует теорему Хасее и выполняется за время $O(log^8 n)$.