DEPARTAMENTO DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

TP Métodos Númericos

Page Rank

6 de Septiembre de 2018 Métodos Numericos

Integrante	LU	Correo electrónico
Carreira Munich, Tobías Agustín	278/17	tcarreira@dc.uba.ar
Martino, Maximiliano	123/17	maxii.martino@gmail.com
Nahmod, Santiago Javier	016/17	snahmod@dc.uba.ar
Torres, Edén	017/17	etorres@dc.uba.ar

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)
Intendente Güiraldes 2610 - C1428EGA
Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina
Tel/Fax: (++54 +11) 4576-3300
http://www.exactas.uba.ar

1. Introducción teórica

1. ¿Por qué la matriz A definida en (4) es equivalente a $p\ \mathbf{W}\ \mathbf{D}\ + \mathbf{e}\ \mathbf{z}^T$? Justificar adecuadamente.

Para ver la igualdad $\mathbf{A} = p\mathbf{W}\ \mathbf{D} + \mathbf{e}\ \mathbf{z}^T$ podemos ver que

$$\mathbf{A}_{ij} = (p\mathbf{W}\ \mathbf{D} + \mathbf{e}\ \mathbf{z}^T)_{ij} \quad \forall(1 \leq i, j \leq n)$$

que es lo mismo, por definición de suma de matrices, que ver que:

$$\mathbf{A}_{ij} = ((p\mathbf{W}\ \mathbf{D})_{ij} + (\mathbf{e}\ \mathbf{z}^T)_{ij}) \quad \forall(1 \leq i, j \leq n)$$

Por definición tenemos que:

$$\mathbf{A}_{ij} = \begin{cases} (pw_{ij})/c_{ij} + (1-p)/n & si \quad c_j \neq 0 \\ 1/n & si \quad c_j = 0 \end{cases}$$

Ahora miremos que pasa con $(p\mathbf{W}\ \mathbf{D})_{ij}$.
Tenemos que p es un escalar, por lo tanto $(p\mathbf{W}\ \mathbf{D})_{ij} = p(\mathbf{W}\ \mathbf{D})_{ij}$

Miremos $(\mathbf{W}\ \mathbf{D})_{ij}$:
Por definición de multiplicación de matrices tenemos que: $(\mathbf{W}\ \mathbf{D})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} w_{ik} d_{kj}$
y como D es diagonal de la suma anterior solo va a sobrevivir los términos donde $k = j$ por lo tanto nos queda:

$$(\mathbf{W}\ \mathbf{D})_{ij} = w_{ij} d_{jj}$$

y por definición de d_{jj} tenemos que:

$$(\mathbf{W}\ \mathbf{D})_{ij} = \begin{cases} (w_{ij})/c_{ij} & si \quad c_j \neq 0 \\ 0 & si \quad c_j = 0 \end{cases}$$

donde luego multiplicamos por p:

$$(p\mathbf{W}\ \mathbf{D})_{ij} = p(\mathbf{W}\ \mathbf{D})_{ij} = \begin{cases} (pw_{ij})/c_{ij} & si \quad c_j \neq 0 \\ 0 & si \quad c_j = 0 \end{cases}$$

Ahora miremos $((\mathbf{e}\ \mathbf{z}^t))_{ij}$:
Por definición de multiplicación de matrices:

$$((\mathbf{e}\ \mathbf{z}^t))_{ij} = \sum_{k=1}^{n} e_{ik} (z^t)_{kj}$$

pero sabemos que e es un vector fila y z^t es un vector columna. Por lo tanto:

$$(\mathbf{e}\ \mathbf{z}^t)_{ij} = e_{ij} (z^t)_{jj}$$

Pero $e_i = 1 \quad \forall i$, luego $(\mathbf{e}\ \mathbf{z}^t)_{ij} = (z^t)_j$ y por definición de z_j tenemos que:

$$(\mathbf{e}\ \mathbf{z}^t)_{ij} = (z^t)_j = \begin{cases} (1-p)/n & si \quad c_j \neq 0 \\ 1/n & si \quad c_j = 0 \end{cases}$$

Por último, resumiendo todo, queda que:

$$(p\mathbf{W}\ \mathbf{D}+\mathbf{e}\ \mathbf{z}^t)_{ij} = ((p\mathbf{W}\ \mathbf{D})_{ij}+(\mathbf{e}\ \mathbf{z}^t))_{ij} = \begin{cases} (pw_{ij})/c_{ij} + (1-p)/n & si \quad c_j \neq 0 \\ 1/n & si \quad c_j = 0 \end{cases}$$

Es decir: $\mathbf{A}_{ij} = (p\mathbf{W}\ \mathbf{D} + \mathbf{e}\ \mathbf{z}^t)_{ij}\ \forall (1 \leq i, j \leq n)$ que es lo que queriamos ver.

2. ¿Cómo se garantiza la aplicabilidad de EG sin pivoteo? ¿Qué tipo de matriz resulta (**I** - p **W D**)?
Queremos ver que la forma de la matriz (**I** - p **W D**) garantiza la aplicabilidad de EG sin pivoteo.
<u>Veamos:</u>
Definimos la matriz A de la siguiente forma:

$$(p\mathbf{W}\ \mathbf{D})_{i,j} = \begin{cases} (pw_{ij})/c_j & si \quad c_j \neq 0 \\ 0 & si \quad c_j = 0 \end{cases}$$

$$(\mathbf{I} - p\mathbf{W}\ \mathbf{D})_{i,j} = \begin{cases} (-pw_{ij})/c_j & si \quad i \neq j \ \ y \ \ c_j \neq 0 \\ 0 & si \quad i \neq j \ \ y \ \ c_j = 0 \\ 1 & si \qquad i = j \end{cases}$$

<u>Afirmacion:</u> La matriz definida arriba es estrictamente diagonal dominante por columnas.

<u>Demostración:</u> Si queremos ver que es estrictamente diagonal dominante por columnas, lo que tenemos que probar es que para una matriz A:

$$\forall j = 1, ..., n \quad |a_{jj}| > \sum_{i=1\ i\neq j}^{n} |a_{ij}|$$

Por la forma en que re-definimos la matriz A, podemos concluir que los elementos de su diagonal siempre van a ser 1.
Además, cuando $i \neq j$, también se puede reemplazar $|a_{ij}|$ por $\frac{p.w_{ij}}{c_j}$ cuando $c_j \neq 0$ y por 0 cuando $c_j = 0$. De modo que lo que deberíamos probar es que simultáneamenete se cumple:

$$\forall j = 1, ..., n \ /c_j \neq 0 \quad 1 > \sum_{i=1\ i\neq j}^{n} \left| \frac{p.w_{ij}}{c_j} \right| \tag{1}$$

$$\forall j = 1, ..., n \ /c_j = 0 \quad 1 > \sum_{i=1\ i\neq j}^{n} 0 \tag{2}$$

Claramente la segunda de las sentencias que declaramos es válida, ya que $1 > 0$, por lo que solo resta analizar la primera.
Al remover las constantes de la sumatoria queda:

$$\forall j = 1, ..., n \ /c_j \neq 0 \quad 1 > \frac{p}{c_j} \sum_{i=1 \ i \neq j}^{n} w_{ij}$$

Recordando la definición de c_j:

$$\forall j = 1, ..., n \quad c_j = \sum_{i=1 \ i \neq j}^{n} w_{ij}$$

<u>Observación:</u> Nuestra sumatoria tiene un sumnado menos (cuando $i = j$), pero es trivial que por la definición de W ese sumando sería 0, pues W tiene 0 en todo su diagonal.
Simplificando,

$$1 > p$$

Y como $p \in (0, 1)$, esto resulta cierto.
Luego, A es estrictamente diagonal dominante por columnas. Por lo tanto el algoritmo de EG no requiere permutaciones, es decir que la matriz $(I - p\mathbf{W}\ \mathbf{D})$ garantiza la aplicabilidad de EG sin pivoteo.

3. ¿Calcular el número de condición de? ¿Cómo influye el valor de p ?
Buscamos determinar el condicionamiento de la matriz $(p\mathbf{W}\ \mathbf{D})$ obteniendo su número de condición:

$$k(I{-}p\mathbf{W}\ \mathbf{D}) = ||(I{-}p\mathbf{W}\ \mathbf{D})||.||(I{-}p\mathbf{W}\ \mathbf{D})^{-1}|| \quad con\ ||\bullet||\ norma\ matricial\ inducida$$

<u>Observación:</u> La matriz $(I - p\mathbf{W}\ \mathbf{D})$ tiene inversa.

<u>Demostración:</u> Se deduce trivialmente de lo demostrado anteriormente, pues si $(I - p\mathbf{W}\ \mathbf{D})$ es estrictamente diagonal dominante luego es no singular y por lo tanto inversible.
Veamos que $k(I - p\mathbf{W}\ \mathbf{D}) \geq 1$ pues:

$$||(I - p\mathbf{W}\ \mathbf{D})||.||(I - p\mathbf{W}\ \mathbf{D})^{-1}|| \geq ||(I - p\mathbf{W}\ \mathbf{D}).(I - p\mathbf{W}\ \mathbf{D})^{-1}|| = ||I||$$
$$donde\ ||I|| = \max_{x:||x||=1} ||I.x|| \ = \ \max_{x:||x||=1} ||x|| \ = \ 1$$

Tomamos $k(a)_{\infty} = ||A||_{\infty}.||A^{-1}||_{\infty}$ y por propiedad, calcular la norma infinito matricial inducida es equivalente a calcular la norma uno a cada fila de la matriz y posteriormente tomar la máxima.

Por la construcción de la matriz es esperable que un valor de p mayor (cerca de uno) produzca una norma uno mayor, y por lo tanto el número de condición será mayor.
Entendiendo que ante un número de condición grande la matriz será menos predecible, es decir mas sensible ante cambios en las soluciones.

2. Desarollo

3. Resultados

4. Discusión

5. Conclusiones

6. Apendices