

تقسیم ریاضیاتی (امتیازی)

- محدودیت زمان: 2 ثانیه
- محدودیت حافظه: 512 مگابایت

آنها یک عدد صحیح x دارد. او این عدد را به صورت یک عدد **باینری (دودویی) به طول n** به شما نشان خواهد داد.

دو نوع عملیات وجود دارد:

۱. جایگزینی x با $\lfloor \frac{x}{2} \rfloor$ ، که $\lfloor \frac{x}{2} \rfloor$ بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی $\frac{x}{2}$ است.

۲. جایگزینی x با $\lceil \frac{x}{2} \rceil$ ، که $\lceil \frac{x}{2} \rceil$ کوچکترین عدد صحیح بزرگتر یا مساوی $\frac{x}{2}$ است.

آنها چندین عملیات را انجام خواهد داد تا زمانی که x به ۱ برسد. هر بار، او به طور **مستقل** انتخاب می‌کند که عملیات اول یا عملیات دوم را با احتمال $\frac{1}{2}$ انجام دهد.

آنها می‌خواهد **(امید ریاضی) عملیاتی** را که برای تبدیل x به ۱ انجام خواهد داد، به پیمانه‌ی $10^9 + 7$ بداند. با این حال، به نظر می‌رسد کمی دشوار است، پس لطفاً به او کمک کنید!

🎲 امید ریاضی برای متغیر تصادفی گسسته

اگر X یک **متغیر تصادفی گسسته** باشد که می‌تواند مقادیر x_1, x_2, x_3, \dots را با احتمال‌های متناظر $P(X = x_1), P(X = x_2), P(X = x_3), \dots$ بگیرد، **امید ریاضی** آن، که با $E[X]$ نمایش داده می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E[X] = \sum_i x_i \cdot P(X = x_i)$$

- مثال: اگر یک تاس شش وجهی منصفانه را پرتاب کنید، مقادیر ممکن $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ هستند و احتمال هر یک $P(X = x_i) = \frac{1}{6}$ است.

$$E[X] = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{21}{6} = 3.5$$

این بدان معناست که در بلندمدت، میانگین پرتاب‌های تاس شما ۳.۵ خواهد بود.

پیمانه همنهشتی (Congruence Modulo)

پیمانه همنهشتی (یا **هم‌نهشتی به پیمانه‌ی m**) یک رابطه در نظریه اعداد است که بیان می‌کند دو عدد صحیح، هنگامی که بر یک عدد صحیح مثبت (که به آن **پیمانه** می‌گویند) تقسیم شوند، **باقی‌مانده‌های یکسانی** دارند.

ورودی

خط اول شامل یک عدد صحیح واحد t است ($1 \leq t \leq 10^5$) — تعداد نمونه‌های آزمایشی (Test Cases).

در ادامه، شرح نمونه‌های آزمایشی آمده است.

ورودی برای هر نمونه آزمایشی

- **خط اول** هر نمونه آزمایشی شامل یک عدد صحیح واحد n است ($1 \leq n \leq 10^5$) — **طول** نمایش باینری (دودویی) عدد x .
- **خط دوم** هر نمونه آزمایشی شامل یک **رشته باینری به طول n** است: عدد x در نمایش باینری، که از **پرازش‌ترین بیت (Most Significant Bit)** به **کم‌ارزش‌ترین بیت (Least Significant Bit)** ارائه شده است. تضمین می‌شود که پرازش‌ترین بیت x برابر با ۱ است. تضمین می‌شود که **مجموع n** در تمام نمونه‌های آزمایشی از 10^5 تجاوز نمی‌کند.

خروجی

برای هر نمونه آزمایشی، یک عدد صحیح واحد را چاپ کنید که **امید ریاضی** را که آنرا برای تبدیل x به ۱ انجام خواهد داد، به **پیمانه‌ی $7 + 10^9$ نمایش می‌دهد.**

به طور رسمی، فرض کنید $M = 10^9 + 7$. می‌توان نشان داد که پاسخ دقیق را می‌توان به صورت یک کسر
تحویل‌ناپذیر $\frac{p}{q}$ بیان کرد، که در آن p و q اعداد صحیح بوده و $q \not\equiv 0 \pmod{M}$.

شما باید عددی صحیح برابر با $p \cdot q^{-1} \pmod{M}$ را خروجی دهید. به عبارت دیگر، شما باید چنین عدد
صحیحی x را خروجی دهید که $0 \leq x < M$ باشد و $x \cdot q \equiv p \pmod{M}$.

مثال

در اینجا چند نمونه برای فهم بهتر صورت سوال و قالب ورودی و خروجی تست‌ها داده می‌شود.

ورودی نمونه ۱

```
3
3
110
3
100
10
1101001011
```

خروجی نمونه ۱

```
500000006
2
193359386
```

برای سادگی، عملیات اول را **عملیات ۱ (OPER 1)** و عملیات دوم را **عملیات ۲ (OPER 2)** می‌نامیم.

در اولین نمونه آزمایشی، $x = 6$ است و شش سری عملیات ممکن وجود دارد:

• سری ۱:

$$6 \xrightarrow{\text{OPER 1}} 3 \xrightarrow{\text{OPER 1}} 1$$

تعداد عملیات: ۲

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \text{ احتمال}$$

• سری ۲:

$$6 \xrightarrow{\text{OPER 1}} 3 \xrightarrow{\text{OPER 2}} 2 \xrightarrow{\text{OPER 1}} 1$$

تعداد عملیات: ۳

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \text{ احتمال}$$

• سری ۳:

$$6 \xrightarrow{\text{OPER 1}} 3 \xrightarrow{\text{OPER 2}} 2 \xrightarrow{\text{OPER 2}} 1$$

تعداد عملیات: ۳

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \text{ احتمال}$$

• سری ۴:

$$6 \xrightarrow{\text{OPER 2}} 3 \xrightarrow{\text{OPER 1}} 1$$

تعداد عملیات: ۲

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \text{ احتمال}$$

• سری ۵:

$$6 \xrightarrow{\text{OPER 2}} 3 \xrightarrow{\text{OPER 2}} 2 \xrightarrow{\text{OPER 1}} 1$$

تعداد عملیات: ۳

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \text{ احتمال}$$

• سری ۶:

$$6 \xrightarrow{\text{OPER 2}} 3 \xrightarrow{\text{OPER 2}} 2 \xrightarrow{\text{OPER 2}} 1$$

تعداد عملیات: ۳

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \text{ احتمال}$$

محاسبه امید ریاضی:

بنابراین، تعداد مورد انتظار عملیات برابر است با:

$$E = 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8}$$

$$E = 2 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) + 3 \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right)$$

$$E = 2 \cdot \frac{2}{4} + 3 \cdot \frac{4}{8}$$

$$E = 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

مقدار $\frac{5}{2}$ به پیمانه‌ی $10^9 + 7$ برابر است با:

$$\frac{5}{2} \equiv 500000006 \pmod{10^9 + 7}$$