جبرخطی کاربردی

نیمسال دوم ۹۷-۹۸

مدرس :دکتر امیر مزلقانی

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

دانشکده مهندسی
کامپیوتر و فناوری اطلاعات

تمرین ششم

توجه !!!

- سوالات زیر مربوط به فصل هفتم درس جبر خطی کاربردی می باشد.

تمارین:

۱. نشان دهید اگر A یک ماتریس $n \times n$ مثبت معین باشد،آنگاه یک ماتریس مثبت معین $n \times n$ مانند B وجود دارد که $A = BB^T$.

حل. قسمت ۷,۲ سوال ۲۵. ◄

۲. تجزیه SVD ماتریس زیر را به دست آورید.(راهنمایی: ماتریس $\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$ می تواند به عنوان یک انتخاب برای U در نظر گرفته شود.)

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$$

حل. قسمت ۷,۴ سوال ۱۱. ◄

۳. نشان دهید در یک ماتریس مربعی قدر مطلق دترمینان برابر حاصلضرب مقادیر تکین ماتریس است.

حل.

$$det(A) = det(U \sum V^T) = det(U)det(\sum)det(V^T)$$

می دانیم $det(U), det(V^T)$ برابر ۱ یا −۱ است و همچنین چون $\sum$ ماتریس قطری است که بر روی قطر آن مقدار ویژه منفرد هستند پس

$$|det(A)| = |det(\sum)| = \prod_i \sigma_i$$

◄

۴. فرض کنید A ماتریسی مربعی و وارون پذیر باشد ، تجزیه SVD را برای ماتریس معکوس A بیابید.

حل. داریم : $A = U\Sigma V^T = U\Sigma V^{-1}$ و به علت اینکه A مربعی و معکوس پذیر است ، $\operatorname{rank} A = n$ ، و همه درایه های روی قطر ماتریس Σ باید غیر صفر باشند. پس :

$$A^{-1} = \left(U\Sigma V^{-1}\right)^{-1} = V\Sigma^{-1}U^{-1} = V\Sigma^{-1}U^T$$

◄

۵. ماتریس متناظر با فرم درجه دوم (quadratic from) موارد زیر را بیابید. فرض کنید که x عضو $\mathbb{R}^۳$ است.

(آ) $۳x_۱^۲ + ۲x_۲^۲ - ۵x_۳^۲ - ۶x_۱x_۲ + ۸x_۱x_۳ - ۴x_۲x_۳$

حل. $\begin{bmatrix} ۸ & -۳ & ۲ \\ -۳ & ۷ & -۱ \\ ۲ & -۱ & -۳ \end{bmatrix}$ ▶

(ب) $۶x_۱x_۲ + ۴x_۱x_۳ - ۱۰x_۲x_۳$

حل. $\begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۰ & -۴ \\ ۳ & -۴ & ۰ \end{bmatrix}$ ▶

▶