تمرین سری چهارم جبر - محمد آذری ۹۴۳۱۰۰۴

---

① 

$$v_1=\begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix},\quad v_2=\begin{bmatrix}2\\2\\-2\end{bmatrix},\quad v_3=\begin{bmatrix}2\\2\\0\end{bmatrix}$$

$$v_1+v_2-v_3=0$$

---

② 

آ) $\mathbb{Z}^2 \to$ نسبت به جمع بسته است

و به ضرب بسته نیست

زیرا

$$(2,3)\in \mathbb{Z} \to \tfrac{1}{5}(2,3)\notin \mathbb{Z}$$

ب) $V=\{(x,0): x\in\mathbb{R}\}\cup\{(0,y): y\in\mathbb{R}\}$

نسبت به ضرب بسته است و نسبت به جمع بسته نیست

$$(1,0)+(0,1)=(1,1)\notin V$$

---

③ 

1) $A=\{1,x^2,\dots,x^{n-1}\}$

$$\underbrace{[1]_A=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}_{n\times1},\quad [x-a]_A=\begin{bmatrix}-a\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix}_{n\times1},\ \dots,\ [(x-a)^{n-1}]_A=\begin{bmatrix}\binom{n-1}{0}(-a)^{n-1}\\\binom{n-1}{1}(-a)^{n-2}\\\vdots\\\binom{n-1}{n-1}(-a)^{0}\end{bmatrix}_{n\times1}}$$

این مجموعه مستقل خطی است، پس پایه هستند.

3) 2) $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!} f'''(a)(x-1)^3 + \cdots$

$+ \frac{1}{(n-1)!} f^{n-1}(x)(x-a)^{n-1}$ بسط تیلور

حول نقطه ی $\underline{a}$

3) 3) $P_n$ نسبت به جمع و ضرب اسکالر بسته است پس یک زیرفضای $P$ است. و متناهی البعد نیست - زیرا هر $P_n$ خود زیرفضای $P_{n+1}$ است و برای $n$ محدودیتی وجود ندارد.

---

5

$$\begin{bmatrix} 2s+3t \\ r+s-2t \\ r+s-2t \\ 4r+s \\ 3r-s-t \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

---

6

Rage (T) = G

$$\begin{cases} x_1 \in U \rightarrow T(x_1) = w \in G \\ x_2 \in U \rightarrow T(x_2) = w' \in G \end{cases} \xrightarrow[\text{U زیرفضا است}]{\text{T حافظ است}} 0 \in U \rightarrow T(0) = 0 \in T(U)$$

ادامه (b) ←

$$\alpha w+\beta w' \in G \xrightarrow{\text{چون}} \alpha w+\beta w' = \alpha T(x_1)+\beta T(x_2) = T(\alpha w+\beta w') \in Range(T) = G$$

---

(7)

$$W = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1+x_2 \\ x_1-x_2 \end{bmatrix} = x_1 \overset{v_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}} + x_2 \overset{v_2}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}} = span\{v_1, v_2\}$$

$$w, w' \in W \rightarrow w+w' = (\alpha v_1+\beta v_2)+(\alpha' v_1+\beta' v_2) = \sigma v_1+\sigma' v_2 \in W$$

$$kw = k(\alpha v_1+\beta v_2) = (\alpha' v_1+\beta' v_2) \in W$$

پس زیرفضا برای $IR^4$ است.

ب) دو بردار $v_1$, $v_2$ از قسمت الف مستقل خطی هستند ← پس بعد $W$ برابر $\underline{2}$ است

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{rev}]{\text{row}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

---

ج)

$k=0 \rightarrow (0,0,0,0)^t \in V$ صفر برداری

$$\begin{cases} v_1 \in V \\ v_2 \in V \end{cases} \rightarrow v_1+v_2 = k_1(1,0,1,0)^t + k_2(1,0,1,0)^t = k'(1,0,1,0)^t \in V$$

$cv_1 = k'(1,0,1,0)^t \in V$ ← زیرفضا است

$Col\,A \subseteq Col\,B \rightarrow$ ~~...~~ شامل تمام ترتیب‌های خطی ستون‌های $A$ است. $Col\,B$ یعنی

هرستون $A$ را می‌توان برحسب ستون‌های $B$ نوشت $\Rightarrow$

و برعکس

$\Downarrow$

(ب) $\simeq$ (آ)

$$\exists C_{q\times p}\,.\; B_{m\times q}C_{q\times p} = A_{m\times p} \iff [b_1 \cdots b_q]\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_q \end{bmatrix}$$

$$= b_1c_1 + b_2c_2 + \cdots + b_qc_q = [a_1, \cdots, a_p]$$

$$\iff a_i = b_1c_{1i} + b_2c_{2i} + \cdots + b_qc_{qi} = span\{b_1, \cdots, b_q\}$$

$\iff$ 2. $\simeq$ ب

---

$T:$ پوشا $\rightarrow T(V) = W$ ⑧

$$B_V = \{v_1, \cdots, v_n\} \rightarrow T(B_V) = \{T(v_1), \cdots, T(v_n)\}$$

پایه‌های $V$

$$T(V) = T(span\,B_V) = span\,T(B_V) = W$$

الان تبدیل یافته پایه‌های $V$ همان برابر $W$ شوند اما برای اینکه پایه‌ای برای $W$

باشد باید مستقل خطی نیز باشند.

$T$ خطی است $\rightarrow T(0) = 0 \xrightarrow[\text{پوشا و وارون پذیر}]{\text{یک به یک}} c_1T(v_1) + \cdots + c_nT(v_n) = 0$

$$T^{-1}() \rightarrow T^{-1}(c_1T(v_1)) + \cdots + T^{-1}(c_nT(v_n)) = 0$$

$\rightarrow c_1v_1 + \cdots + c_nv_n = 0 \rightarrow c_1 = \cdots = c_n = 0 \rightarrow$ مستقل خطی

9

آ) نادرست ✗   ب) نادرست   ج) نادرست

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow r(A^2) = 1$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow r(B^2) = 2$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow r(A) = 2$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow r(B) = 1$$

$$\rightarrow r(A-B) = 2$$

$$\boxed{2 > 1}$$

مثال نقض ج)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$r(A) = 1 \ , \ r(B) = 1 \rightarrow r(AB) = 0$$

---

10

$$A = xy^t = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} [y_1 \cdots y_n] = \begin{bmatrix} x_1y_1 & \cdots & x_1y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & \cdots & x_ny_n \end{bmatrix}$$

$$\text{Col} A = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right\} \rightarrow \dim(\text{Col} A) = r(A) = 1$$

$$r(A) = 1 \rightarrow \text{Col} A = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \right\} \rightarrow A = \begin{bmatrix} v_1c_1 & \cdots & v_1c_n \\ \vdots & & \vdots \\ v_nc_1 & \cdots & v_nc_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} [c_1 \cdots c_n] = vc^T$$

(11) اول باید ثابت کنیم $\{\lambda_1 a_1, \dots, \lambda_n a_n\}$ مستقل خطی اند.

$$c_1\lambda_1 a_1 + \dots + c_n\lambda_n a_n = 0 \to c_1\lambda_1 = \dots = c_n\lambda_n = 0$$

$$\xrightarrow{\lambda_i \neq 0} c_1 = \dots = c_n$$

$$\text{span}\{\lambda_1 a_1, \dots, \lambda_n a_n\} = \text{span}\{a_1, \dots, a_n\} \to \{\lambda_1 a_1, \dots, \lambda_n a_n\}$$

پایه برای فضای $\mathbb{R}^n$

تبدیل پایه

$$x = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n = \frac{x_1}{\lambda_1}(\lambda_1 a_1) + \frac{x_2}{\lambda_2}(\lambda_2 a_2)$$

$$+ \frac{x_3}{\lambda_3}(\lambda_3 a_3) + \dots + \frac{x_n}{\lambda_n}(\lambda_n a_n)$$

$$[x]_{A'} = \left\{\frac{x_1}{\lambda_1}, \frac{x_2}{\lambda_2}, \dots, \frac{x_n}{\lambda_n}\right\}$$

$$\longrightarrow [w]_A = \{1, \dots, 1\} \to [w]_{A'} = \left\{\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}\right\}$$

---