

۱- ماتریس مربعی A مفروض است. تاثیر عملیات جا به جایی سطرها و ضرب یک سطر در عدد ثابت k را در دترمینان ماتریس A بیان نموده و اثبات نمایید. (در اثبات می توانید از دترمینان ماتریس های مقدماتی استفاده کنید و نیازی به اثبات ندارد).

۲- الف) یک ماتریس با سائز $m \times n$ است. اگر $Ax = b$ به ازای همه $b \in R^m$ سازگار باشد، رابطه رتبه ماتریس A و رتبه ماتریس $[A \ b]$ چیست.

ب) A یک ماتریس مربعی با سائز $n \times n$ است. اگر $Col A = Null A$ باشد، مطلوبست محاسبه $Null A^2$

ج) $M_{2 \times 2}$ نشان دهنده فضای برداری تمامی ماتریس های 2×2 است و تبدیل $T: M_{2 \times 2} \Rightarrow M_{2 \times 2}$ به صورت $T(A) = A + A^T$ تعریف شده است. فضای رنج $range$ و کرنل این تبدیل را مشخص کنید

۳- ماتریس $A_{m \times n}$ و $B_{n \times p}$ مفروض هستند. الف) نشان دهید $rank(AB) \leq rank(A)$ (راهنمایی: رتبه ماتریس بعد فضای ستونی ماتریس است) ب) نشان دهید $rank(AB) \leq rank(B)$ ج) با استفاده از قسمت های الف و ب نشان دهید اگر $p_{m \times m}$ یک ماتریس معکوس پذیر باشد، آنگاه $rank(pA) = rank(A)$

۴- روش توانی برای محاسبه مقدار ویژه ماتریس A را در نظر بگیرید. نتیجه اعمال روش توانی به ماتریس های A ، $B = A - \alpha I$ و $C = (A - \alpha I)^{-1}$ چیست. ارتباط مقادیر ویژه ماتریس های B و C با مقادیر ویژه ماتریس A را اثبات نمایید

۵- چند جمله ای $p(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_n t^n$ مفروض است. A یک ماتریس مربعی باشد و داریم $p(A) = c_0 I + c_1 A + c_2 A^2 + \dots + c_n A^n$. نشان دهید اگر λ یک مقدار ویژه ماتریس A باشد، $p(\lambda)$ یک مقدار ویژه $p(A)$ است.

۶- یک مجموعه بردار orthonormal در R^n می باشند. الف) اگر $x = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_p v_p$ با استفاده از استقرا نشان دهید $\|x\|^2 = c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_p^2$ ب) نشان دهید به ازای هر بردار دلخواه $y \in R^n$ داریم

$$\|y\|^2 \geq |y \cdot v_1|^2 + |y \cdot v_2|^2 + \dots + |y \cdot v_p|^2$$

۷- بردار غیر صفر u در R^n مفروض است. فرض کنید $L = span(u)$. برای هر $x \in R^n$ تصویر x نسبت به L را اینگونه تعریف می کنیم $refl_L x = 2proj_L x - x$. نشان دهید تبدیل $x \rightarrow refl_L x$ تبدیلی خطی است.

۸- نشان دهید بیشینه و کمینه $x^T A x$ به شرط $\|x\| = 1$ که در آن A یک ماتریس متقارن است، به ترتیب برابر بزرگترین و کوچکترین مقدار ویژه ماتریس A است و این مقادیر به ازای بردارهای ویژه متناظر با بزرگترین و کوچکترین مقدار ویژه به دست می آیند