امیر محمّد آقاپور ۹۶۳۱۰۰۸ تمرین ۶

.۱

چون A مثبت معیّن است، تمام مقادیر ویژه آن مثبت اند. همچنین چون متقارن است، به صورت متعامد قطری شدنی (orthogonally diagonalizable) است. یعنی :

$$A = PDP^T = P\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}P^T$$

حال ماتریس قطری C را در نظر میگیریم که دارای جذر عناصر روی قطر اصلی D است، یعنی :

$$C = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} \to D = C^2 = CC^T$$

ماتریس B را به صورت متعامد قطری شدنی با C در نظر میگیریم : (چون مقادیر روی قطر C مثبت اند، پس B مثبت معیّن است)

$$B = PCP^T \to BB^T = (PCP^T)(PC^TP^T) = P(CC^T)P^T = PDP^T = A$$

.۲

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \to A^TA = \begin{bmatrix} 81 & -27 \\ -27 & 9 \end{bmatrix}$$

مقادیر و بردار های منفرد A را بدست می آوریم :

$$\det A^TA - \lambda I = 0 \to (81-\lambda)(9-\lambda) - 729 = 0 \to \lambda = 90{,}0 \to v_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, v_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$u_1 = \frac{1}{\|Av_1\|}Av_1 = \frac{1}{3\sqrt{10}\sqrt{10}}\begin{bmatrix} -10 \\ 20 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}, u_2.u_1 = 0, u_3.u_1 = 0$$

در نتیجه :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 3\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, V = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \to V^T = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{-1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$$

.۳

$$A = U\Sigma V^T \to |\det A| = |\det U \det \Sigma \det V^T| = |\det U||\det \Sigma||\det V^T|$$

چون U و V^T ، متعامد هستند؛ لذا طبق خواص ماتریس های متعامد داریم :

$$|\det U| = \sqrt{(\det U)^2} = \sqrt{\det U^TU} = \sqrt{\det I} = 1$$

$$|\det V^T| = |\det V| = \sqrt{(\det V)^2} = \sqrt{\det V^TV} = \sqrt{\det I} = 1$$

حال چون Σ ماتریس قطری با مقادیر تکین است:

$$\Rightarrow |\det A| = |\det \Sigma| = |\sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_n|$$

.۴

چون A وارون پذیر است، پس $rank\ A = n$ بوده که یعنی n مقدار ویژه ی غیر صفر دارد و ستون هایش مستقل خطی اند. بنابراین ماتریس Σ وارون پذیر است. (دو ماتریس U,V چون متعامد اند، وارون پذیراند؛ زیرا دترمینان غیر صفر دارند)

$$A = U\Sigma V^T = U\Sigma V^{-1} \to A^{-1} = {V^{-1}}^{-1}\Sigma^{-1}U^{-1} = V\Sigma^{-1}U^T$$

۵. ضرایب x_i^2 تشکیل دهنده عناصر روی قطر هستند و ضرایب x_ix_j بین دو عنصر A_{ij} و A_{ji} به صورت مساوی تقسیم می شوند.

$$Q(x) = x^TAx$$

(آ)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ -3 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

(ب)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & -5 \\ 2 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$