امیر محمّد آقاپور ۹۶۳۱۰۰۸ تمرین ۵

.۱

$$A\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s\\s\\\vdots\\s\end{bmatrix}=s\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$$

می دانیم مقادیر ویژه یک ماتریس با مقدار ویژه ترانهاده اش برابر است، بنابراین در حالتی که مجموع عناصر ستون ها برابر باشد نیز رابطه فوق برقرار است. برای اثبات بخش آخر،اگر w_i درایه ی i ام w باشد :

$$Aw=A(w_1e_1+w_2e_2+\cdots+w_ne_n)=w_1\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{bmatrix}+w_2\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{n2}\end{bmatrix}+\cdots+w_n\begin{bmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{nn}\end{bmatrix}=\lambda w$$

$$\to\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\end{bmatrix}(Aw)=w_1\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{bmatrix}+w_2\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{n2}\end{bmatrix}+\cdots+w_n\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{nn}\end{bmatrix}$$

$$=w_1+w_2+\cdots+w_n=\lambda(w_1+w_2+\cdots+w_n)\xrightarrow{\lambda\neq1}w_1+w_2+\cdots+w_n=0$$

روش دوم برای اثبات بخش اوّل سؤال:

تمام ستون های دترمینان $A-\lambda I$ را با ستون اوّل آن جمع میکنیم :

$$\det A-\lambda I=\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}-\lambda&\dots&a_{2n}\\\vdots&\cdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\dots&a_{nn}-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}s-\lambda&a_{12}&\dots&a_{1n}\\s-\lambda&a_{22}-\lambda&\dots&a_{2n}\\\vdots&\cdots&\ddots&\vdots\\s-\lambda&a_{n2}&\dots&a_{nn}-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(s-\lambda)\begin{vmatrix}1&a_{12}&\dots&a_{1n}\\1&a_{22}-\lambda&\dots&a_{2n}\\\vdots&\cdots&\ddots&\vdots\\1&a_{n2}&\dots&a_{nn}-\lambda\end{vmatrix}=0\to\lambda=s$$

.۲ با توجه به معادله مشخصه :

$$P(\lambda)=\det\lambda I-A=(\lambda-\lambda_n)(\lambda-\lambda_{n-1})\dots(\lambda-\lambda_1)$$
$$\to P(0)=\det -A=(-1)^n\det A=(-\lambda_n)(-\lambda_{n-1})\dots(-\lambda_1)=(-1)^n(\lambda_n\lambda_{n-1}\dots\lambda_1)$$
$$\to\det A=\lambda_n\lambda_{n-1}\dots\lambda_1$$

برای اثبات قسمت دوم:

$$\det A-\lambda I=\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}-\lambda&\dots&a_{2n}\\\vdots&\cdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\dots&a_{nn}-\lambda\end{vmatrix}$$

با توجه به دترمینان فوق، تنها عبارت دارای درجه بزرگتر از $n-2$ در معادله مشخصه ماتریس خواهد بود:

$$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\dots(a_{nn}-\lambda)=(-1)^n\lambda^n+(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots+a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

حال با برابر قرار دادن ضریب λ^{n-1} در $P(\lambda)$ و عبارت فوق:

$$a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}=tr\,A=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$$

.۳

آ)

$$Av=av\to v=aA^{-1}v\to A^{-1}v=\frac{1}{a}v$$

ب)

$$v\neq0,Av=\lambda v\to A^2v=A(\lambda v)=\lambda(Av)=0\to\lambda^2v=0\xrightarrow{v\neq0}\lambda=0$$

(ج) s باید در معادله مشخصه $\det A-\lambda I=0$ صدق کند و چون معادله مشخصه A و A^T یکی است(اثبات در قسمت د)، لذا در هر کدام صدق کند، در دیگری نیز صدق میکند.

(د)

$$\det A-sI=\det(A-sI)^T=\det A^T-sI$$

.۴

(آ)

$$A=PBP^{-1}\rightarrow \det A=\det B\neq 0\rightarrow B\ invertible$$
$$A=PBP^{-1}\rightarrow AP=PB\rightarrow PB^{-1}=A^{-1}P\rightarrow A^{-1}=PB^{-1}P^{-1}$$

(ب)

$$A=PBP^{-1}\rightarrow A^2=(PBP^{-1})(PBP^{-1})=PB^2P^{-1}$$

(ج)

$$B=PAP^{-1},C=RAR^{-1}\rightarrow A=R^{-1}CR\rightarrow B=P(R^{-1}CR)P^{-1}\rightarrow Q=PR^{-1}\rightarrow B=QCQ^{-1}$$

(د) A قطری شدنی است یعنی با ماتریس قطری D مشابه است. A با B نیز مشابه است. طبق قسمت ج، B با D مشابه است؛ پس قطری شدنی است.

(ه) ثابت میکنیم بُعد فضای پوچ یکسانی دارند و چون دارای ابعاد برابر هستند، دارای رَنک برابر خواهند بود. فرض کنیم فضای پوچ A دارای پایه های $\{v_1,v_2,\dots,v_p\}$ باشد. در نتیجه:

$$Av_i=0\rightarrow (PBP^{-1})v_i=0\rightarrow B(P^{-1}v_i)=0$$

حال اثبات میکنیم $\{P^{-1}v_1,P^{-1}v_2,\dots,P^{-1}v_p\}$ پایه های فضای پوچ B هستند. ابتدا نشان میدهیم این بردار ها فضای پوچ B را می سازند:

$$x\in Nul\ B\leftrightarrow Bx=0\leftrightarrow (P^{-1}AP)x=0\leftrightarrow A(Px)=0\leftrightarrow Px\in Nul\ A$$
$$\leftrightarrow Px=Span\{v_1,v_2,\dots,v_p\}\leftrightarrow x=Span\{P^{-1}v_1,P^{-1}v_2,\dots,P^{-1}v_p\}$$

پس $Nul\ B=Span\{P^{-1}v_1,P^{-1}v_2,\dots,P^{-1}v_p\}$. حال فقط باید مستقل خطی بودن این مجموعه را نشان دهیم :

$$c_1P^{-1}v_1+c_2P^{-1}v_2+\cdots+c_nP^{-1}v_p=0\rightarrow c_1v_1+c_2v_2+\cdots+c_nv_p=0\rightarrow c_1=c_2=\cdots=c_n=0$$

در نتیجه :

$$\dim Nul\ A=\dim Nul\ B=p\rightarrow rank\ A=rank\ B=n-p$$

.۵

(آ)

$$Av=ev=(a-bi)\big(Re(v)+iIm(v)\big)=\big(aRe(v)+bIm(v)\big)+i\big(aIm(v)-bRe(v)\big)$$
$$\rightarrow Re(Av)=aRe(v)+bIm(v),Im(Av)=aIm(v)-bRe(v)$$

حال با توجه به اینکه A حقیقی است:

$$Re(Av)=Re\Big(A\big(Re(v)+iIm(v)\big)\Big)=ARe(v)\rightarrow A\big(Re(v)\big)=aRe(v)+bIm(v)$$
$$Im(Av)=Im\Big(A\big(Re(v)+iIm(v)\big)\Big)=AIm(v)\rightarrow A\big(Im(v)\big)=aIm(v)-bRe(v)$$

(ب) با استفاده از قسمت قبل :

$$A\big(Re(v)\big)=aRe(v)+bIm(v)=[Re(v)\quad Im(v)]\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=P\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$$
$$A\big(Im(v)\big)=aIm(v)-bRe(v)=[Re(v)\quad Im(v)]\begin{bmatrix}-b\\a\end{bmatrix}=P\begin{bmatrix}-b\\a\end{bmatrix}$$
$$\rightarrow AP=A[Re(v)\quad Im(v)]=[ARe(v)\quad AIm(v)]=\left[P\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\quad P\begin{bmatrix}-b\\a\end{bmatrix}\right]=P\begin{bmatrix}a&-b\\b&a\end{bmatrix}=PC$$

۶. فرض کنیم v یک بردار ویژه مربوط به مقدار ویژه λ باشد:

$$Av=\lambda v\rightarrow A^2v=\lambda Av\xrightarrow{Av=\lambda v,A^2=A}Av=\lambda^2v$$
$$\rightarrow Av=\lambda v=\lambda^2v\rightarrow \lambda(1-\lambda)v=0\rightarrow \lambda=0,1$$

.۷

$$AX=b\rightarrow\begin{bmatrix}1&-2&5\\1&-2&5\\1&-2&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$$

$$A^TA\hat{X}=A^Tb\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&1\\-2&-2&-2\\5&5&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2&5\\1&-2&5\\1&-2&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}\\\hat{y}\\\hat{z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\-2&-2&-2\\5&5&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}3&-6&15\\-6&12&-30\\15&-30&75\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}\\\hat{y}\\\hat{z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+b+c\\-2a-2b-2c\\5a+5b+5c\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}3&-6&15&a+b+c\\-6&12&-30&-2(a+b+c)\\15&-30&75&5(a+b+c)\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}3&-6&15&a+b+c\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\rightarrow 3\hat{x}-6\hat{y}+15\hat{z}=a+b+c$$

$$\Rightarrow\hat{x}-2\hat{y}+5\hat{z}=\frac{a+b+c}{3}$$

.۸

آ)

$$\begin{bmatrix}a\\c\end{bmatrix}x=\begin{bmatrix}b\\d\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}a&c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\c\end{bmatrix}\hat{x}=\begin{bmatrix}a&c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b\\d\end{bmatrix}\rightarrow(a^2+c^2)\hat{x}=ab+cd\xrightarrow{(a,c)\neq(0,0)}\hat{x}=\frac{ab+cd}{a^2+c^2}$$

ب)

$$\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}x=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}a_1&a_2&\cdots&a_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}\hat{x}=\begin{bmatrix}a_1&a_2&\cdots&a_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}\rightarrow\hat{x}=\frac{\sum_{i=1}^n a_ib_i}{\sum_{i=1}^n a_i^2}$$

.۹ فرض میکنیم تمام نقاط روی خط داده شده باشد. پاسخ کمترین مربعات دستگاه حاصل، همان خطی است که به ازای آن، کمترین فاصله از نقاط بدست می آید.

$$\begin{cases}y_1=mx_1+b\\y_2=mx_2+b\\\vdots\\y_n=mx_n+b\end{cases}\rightarrow\begin{bmatrix}x_1&1\\x_2&1\\\vdots&\vdots\\x_n&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}x_1&x_2&\cdots&x_n\\1&1&\cdots&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1&1\\x_2&1\\\vdots&\vdots\\x_n&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{m}\\\hat{b}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1&x_2&\cdots&x_n\\1&1&\cdots&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^n x_i^2&\sum_{i=1}^n x_i\\\sum_{i=1}^n x_i&\sum_{i=1}^n 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{m}\\\hat{b}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^n x_iy_i\\\sum_{i=1}^n y_i\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}\hat{m}\\\hat{b}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^n x_i^2&\sum_{i=1}^n x_i\\\sum_{i=1}^n x_i&n\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^n x_iy_i\\\sum_{i=1}^n y_i\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{n\sum_{i=1}^n x_i^2-\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2\neq0}\begin{bmatrix}\hat{m}\\\hat{b}\end{bmatrix}=\frac{1}{n\sum_{i=1}^n x_i^2-\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}\begin{bmatrix}n&-\sum_{i=1}^n x_i\\-\sum_{i=1}^n x_i&\sum_{i=1}^n x_i^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^n x_iy_i\\\sum_{i=1}^n y_i\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}\hat{m}\\\hat{b}\end{bmatrix}=\frac{1}{n\sum_{i=1}^n x_i^2-\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}\begin{bmatrix}n\sum_{i=1}^n x_iy_i-\sum_{i=1}^n x_i\sum_{i=1}^n y_i\\-\sum_{i=1}^n x_i\sum_{i=1}^n y_i+\sum_{i=1}^n x_i^2\sum_{i=1}^n y_i\end{bmatrix}$$

.۱۰

آ)

$$\forall w\in W.w=c_1u_1+c_2u_2\rightarrow z.w=c_1(z.u_1)+c_2(z.u_2)=0\rightarrow z.w=0\rightarrow z\perp w\Rightarrow z\in W^{\perp}$$

(ب) فرض کنیم W درای پایه های متعامد $\{u_1, u_2, \dots, u_p\}$ باشد(طبق گرام-اشمیت می توان هر پایه را تبدیل به پایه ی متعامد کرد). اگر ثابت کنیم $z = proj_W\ y - y$ بر u_i ها عمود است، طبق (آ) بر W عمود است. برای اثبات:

$$z = \frac{y.u_1}{u_1.u_1}u_1 + \frac{y.u_2}{u_2.u_2}u_2 + \cdots + \frac{y.u_p}{u_p.u_p}u_p - y$$

$$z.u_1 = \frac{y.u_1}{u_1.u_1}(u_1.u_1) + \frac{y.u_2}{u_2.u_2}(u_2.u_1) + \cdots + \frac{y.u_p}{u_p.u_p}(u_p.u_1) - y.u_1 = y.u_1 + 0 - y.u_1 = 0$$

$$\to z \perp u_1$$

به طور مشابه ثابت می شود z بر u_i ها عمود است، پس طبق (آ)، z بر W عمود است.

(ج) فرض کنیم W درای پایه های متعامد $\{u_1, u_2, \dots, u_p\}$ باشد.

$$y \in W \to y = c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_pu_p \to proj_W\ y = \sum_{i=1}^{p} \frac{y.u_i}{u_i.u_i}u_i$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \frac{(c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_pu_p).u_i}{u_i.u_i}u_i \xrightarrow{u_j.u_i=0} proj_W\ y = \sum_{i=1}^{p} \frac{c_i(u_i.u_i)}{u_i.u_i}u_i = \sum_{i=1}^{p} c_iu_i = y$$

۱۱.

(آ)

$$U^TU = \begin{bmatrix} u_1^Tu_1 & u_1^Tu_2 \\ u_2^Tu_1 & u_2^Tu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1.u_1 & u_1.u_2 \\ u_2.u_1 & u_2.u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$UU^T = u_1u_1^T + u_2u_2^T = \begin{bmatrix} \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{4}{9} & \frac{-4}{9} & \frac{-2}{9} \\ \frac{-4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{-2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{9} & \frac{-2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{-2}{9} & \frac{5}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{bmatrix}$$

(ج) چون $U^TU = I$ شده است، طبق قضیه، ستون های U orthonormal هستند. لذا:

$$proj_w\ y = UU^Ty = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$y_{3\times1}(UU^T)_{3\times3} \to Invalid$$

اگر منظور UU^Ty بوده باشد:

$$UU^Ty = proj_w\ y = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

۱۲.

$$proj_L\ x = \frac{x.u}{u.u}u$$

$$proj_L\ \alpha x = \frac{(\alpha x).u}{u.u}u = \alpha \times proj_L\ x$$

$$proj_L\ x + proj_L\ y = \frac{x.u}{u.u}u + \frac{y.u}{u.u}u = \frac{(x+y).u}{u.u}u = proj_L\ (x+y)$$

خواص همگنی و جمع پذیری برقرار است، پس تبدیل خطی است.

۱۳. امتیازی

۱.

فرض کنیم E_{λ_k} فضای ویژه ی مربوط به مقدار ویژه ی λ_k باشد. درنتیجه پایه های E_{λ_k} بردار ویژه های مربوط به مقدار ویژه ی λ_k است. فرض کنیم بُعد فضای ویژه m باشد. بنابراین $E_{\lambda_k} = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$. در این صورت می توان این فضا را با $n-m$ بردار مستقل خطی دیگر گسترش داد طوری که تبدیل به یک پایه برای $\mathbb{R}^n$ شود؛ یعنی $E'_{\lambda_k} = \{v_1, v_2, \dots, v_m, u_{m+1}, u_{m+2}, \dots, u_n\}$.

اگر $X_{n\times n}$ ماتریسی با ستون های این پایه برای E'_{λ_k} باشد، چون ستون هایش مستقل خطی اند پس وارون پذیر است. $B_{m\times n}$ را به صورت $B = X^{-1}AX$ تعریف میکنیم، یعنی مشابه با A. طبق خواص ماتریس ها ی مشابه، A و B دارای معادله مشخصه یکسان هستند.

حال داریم :

$$\begin{aligned} B = X^{-1}AX = X^{1}A[v_1 \quad \cdots \quad v_m \quad u_{m+1} \quad \cdots \quad u_n] = X^{-1}[Av_1 \quad \cdots \quad Av_m \quad Au_{m+1} \quad \cdots \quad Au_n] \\ = X^{-1}[\lambda_k v_1 \quad \cdots \quad \lambda_k v_m \quad Au_{m+1} \quad \cdots \quad Au_n] \\ = [\lambda_k(X^{-1}v_1) \quad \cdots \quad \lambda_k(X^{-1}v_m) \quad X^{-1}Au_{m+1} \quad \cdots \quad X^{-1}Au_n] \end{aligned}$$

حاصل $X^{-1}v_i$ برابر e_i است زیرا :

$$X^{-1}X = I \rightarrow X^{-1}[v_1 \quad \cdots \quad v_m \quad u_{m+1} \quad \cdots \quad u_n] = [e_1 \quad \cdots \quad e_m \quad e_{m+1} \quad \cdots \quad e_n]$$

در نتیجه :

$$B = [\lambda_k e_1 \quad \cdots \quad \lambda_k e_m \quad X^{-1}Au_{m+1} \quad \cdots \quad X^{-1}Au_n]$$

معادله مشخصه B را تشکیل می دهیم:

$$\begin{aligned} \det B - \lambda I = |(\lambda_k - \lambda)e_1 \quad \cdots \quad (\lambda_k - \lambda)e_m \quad X^{-1}Au_{m+1} - \lambda e_{m+1} \quad \cdots \quad X^{-1}Au_n - \lambda e_n| \\ = (\lambda_k - \lambda)^m |e_1 \quad \cdots \quad e_m \quad X^{-1}Au_{m+1} - \lambda e_{m+1} \quad \cdots \quad X^{-1}Au_n - \lambda e_n| \end{aligned}$$

در نتیجه تکرّر λ_k حداقل به اندازه ی m است که یعنی بُعد فضای ویژه ی مربوط به مقدار ویژه ی λ_k، از تکرّر آن کمتر است.

.۲

اگر بُعد فضای ویژه هر λ_k برابر تکرّر آن باشد، چون معادله مشخصه درجه n است، لذا A دارای n بردار ویژه ی مستقل خطی است؛ طبق قضیه اثبات شده در کتاب، A قطری شدنی است.

۱۴. امتیازی

چون اعضای B مستقل خطی اند، با استفاده از روش گرام-اشمیت، پایه ای متعامد مانند B' می توانیم بسازیم. یعنی برای هر $b'_i, b'_j \in B'$:

$$b'_i . b'_j = b_i^T b_j = 0$$