$$X \sim f_X(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 1 \\ 2-x & 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

الف) $F_X(x) = ?$

ب) $P(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}) = ?$

الف) $\forall\ x < 0 \longrightarrow F_X(x) = 0$

$\forall\ 0 < x < 1 \longrightarrow F_X(x) = P(X \leq x) = \int_0^x t\, dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^x = \frac{x^2}{2}$

$\forall\ 1 \leq x < 2 \longrightarrow F_X(x) = P(X \leq x) = \int_0^1 t\, dt + \int_1^x 2-t\, dt$

$= \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 + 2t - \frac{t^2}{2} \Big|_1^x$

$= \frac{1}{2} + 2x - \frac{x^2}{2} - 2 + \frac{1}{2}$

$= -\frac{x^2}{2} + 2x - 1$

$\forall\ x \geq 2 \longrightarrow F_X(x) = 1$

$$\Rightarrow F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x^2}{2} & 0 \leq x < 1 \\ -\frac{x^2}{2} + 2x - 1 & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

ب) $P(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}) = \int_{1/2}^{1} x\, dx + \int_1^{3/2} 2-x\, dx = \cdots = \frac{3}{4}$

$$X \sim F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1-(1+x)e^{-x} & x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad p(X>3)=? \quad f_X(x)=?$$

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = -e^{-x} + (1+x)e^{-x} = xe^{-x}$$

$$\Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} xe^{-x} & x > 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$p(X>3) = \int_3^{+\infty} xe^{-x}\,dx = (-x-1)e^{-x}\Big|_3^{+\infty} = 4e^{-3}$$

(1)

$$\sum_{x=1}^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)} = \sum_{x=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)$$ سری تلسکوپی

$$= \left(1 - \cancel{\tfrac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{2}} - \cancel{\tfrac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{3}} - \cancel{\tfrac{1}{4}}\right) + \cdots$$

$$= 1$$

$$E(X) = \sum_{x=1}^{+\infty} \frac{x}{x(x+1)} = \sum_{x=1}^{+\infty} \frac{1}{x+1} = +\infty$$

که در مقایسه با سری هارمونیک $\sum_{x=1}^{+\infty} \frac{1}{2x}$ یک سری واگرا است.

(2)

سفید 2 سیاه 3

بدون جایگذاری

X: تعداد مهره های سفید مشاهده شده در این دو انتخاب

تابع احتمال X ؟

واریانس X ؟

مقادیر ممکن X عبارتند از : 0, 1, 2 .

x	0	1	2
$p_X(x)$	$p(X=0)$	$p(X=1)$	$p(X=2)$

W : پیشامد انتخاب مهره سفید در بار اول

B : " " " سیاه " " اول

$$p(X=0) = p(W)\,p(X=0 \mid W) + p(B)\,p(X=0 \mid B)$$

$$= \frac{2}{5} \times \frac{\binom{3}{2}}{\binom{7}{2}} + \frac{3}{5} \times \frac{\binom{5}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{12}{35}$$

$$p(X=1) = p(W)\,p(X=1 \mid W) + p(B)\,p(X=1 \mid B)$$

$$= \frac{2}{5} \times \frac{\binom{4}{1}\binom{3}{1}}{\binom{7}{2}} + \frac{3}{5} \times \frac{\binom{2}{1}\binom{5}{1}}{\binom{7}{2}} = \frac{18}{35}$$

$\Rightarrow$

x	0	1	2
$p_X(x)$	$12/35$	$18/35$	$5/35$

$p(X=2) = \ldots$ مشابه بالا $\ldots = 5/35$

$$E(X) = \left(0 \times \frac{12}{35}\right) + \left(1 \times \frac{18}{35}\right) + \left(2 \times \frac{5}{35}\right) = \frac{28}{35}$$

$$E(X^2) = \left(0 \times \frac{12}{35}\right) + \left(1 \times \frac{18}{35}\right) + \left(2^2 \times \frac{5}{35}\right) = \frac{38}{35}$$

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{38}{35} - \left(\frac{28}{35}\right)^2 = \frac{78}{175}$$

با توجه به خواص تابع چگالی احتمال:

الف) $$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = 1$$

$$\Rightarrow \int_0^1 k_1 x\, dx + \int_1^2 k_2 (2-x)\, dx = 1$$

$$\Rightarrow \frac{k_1}{2} + \frac{k_2}{2} = 1 \quad (*)$$

از طرفی با توجه به اینکه $E(X)=1$ داریم:

$$E(X) = \int_0^1 k_1 x^2\, dx + \int_1^2 k_2 x(2-x)\, dx = 1$$

$$\Rightarrow \frac{k_1}{3} + \frac{2k_2}{3} = 1 \quad (**)$$

از (*) و (**)

$$\Rightarrow \begin{cases} k_1 + k_2 = 2 \\ k_1 + 2k_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 2 - k_2 \\ 2 - k_2 + 2k_2 = 3 \Rightarrow k_2 = 1, \; k_1 = 1 \end{cases}$$

ب) $$P\left(X < \tfrac{3}{2} \,\middle|\, X > \tfrac{1}{2}\right) = \frac{P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right)}{P\left(X > \frac{1}{2}\right)} = \frac{\int_{1/2}^{1} x\, dx + \int_1^{3/2} (2-x)\, dx}{1 - \int_0^{1/2} x\, dx}$$

$$= \frac{\frac{3}{8} + \frac{3}{8}}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{6}{7}$$

در هر مورد امید و واریانس X را بیابید:

الف) $p_X(x) = p^x (1-p)^{1-x} \qquad x = 0, 1$

$$E(X) = \sum_{x=0}^{1} x\, p^x (1-p)^{1-x} = 0 + p^1 (1-p)^0 = \boxed{p}$$

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{1} x^2 p^x (1-p)^{1-x} = 0 + p^1(1-p)^0 = p$$

$$\mathrm{var}(X) = p - p^2 = p(1-p) = pq \quad ; \quad q = 1-p$$

ب) $p_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad ; \quad x = 0, 1, \dots, n$

$$E(X) = \sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \sum_{x=1}^{n} x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$= \sum_{x=1}^{n} \cancel{x} \frac{\overset{n(n-1)!}{n!}}{\underset{(x-1)!}{\cancel{x!}}\,(n-x)!} \overset{p\,p^{x-1}}{p^x} (1-p)^{n-x}$$

$$= np \sum_{x=1}^{n} \underbrace{\frac{(n-1)!}{(x-1)!\,(n-x)!}}_{\binom{n-1}{x-1}} p^{x-1} (1-p)^{n-x}$$

$$y = x-1 \xrightarrow{\text{تغییر متغیر}} \quad x = y-1 \qquad = np \underbrace{\sum_{y=0}^{n-1} \binom{n-1}{y} p^y (1-p)^{(n-1)-y}}_{\text{شبیه تابع احتمال داده شده در صورت سؤال است پس برابر ۱ است}}$$

$$= \boxed{np}$$

$$\cancel{E(X^2) = \sum_{x=0}^{n} x^2 \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \sum_{x=1}^{n} x^2 \frac{n!}{x!\,(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}}$$

برای محاسبه واریانس X از $E(X(X-1))$ استفاده می‌کنیم:

$$E(X(X-1)) = \sum_{x=0}^{n} x(x-1) \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x(x-1) \frac{n!}{x!\,(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \qquad x! = x(x-1)(x-2)!$$

$$= \sum_{x=2}^{n} \frac{n!}{(x-2)!\,(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \overset{\substack{y = x-1 \\ m = n-1}}{=} n(n-1)p^2 \underbrace{\sum_{y=0}^{m} \frac{m!}{y!\,(m-y)!} p^y (1-p)^{m-y}}_{1}$$

$$= n(n-1)p^2$$

$$E(X^2) - E(X) = n(n-1)p^2 \Rightarrow \mathrm{Var}(X) = np(1-p)$$

2) $E(X) = \int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} \, dx = \lambda \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} \, dx = \cdots = \frac{1}{\lambda}$

$var(X) = E(X^2) - E^2(X) \; ; \; E(X^2) = \int_0^{+\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x} \, dx$

$\Rightarrow var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$