بسمه تعالی

دوستان گرامی سلام

سال نو را صمیمانه به همه‌ی شما تبریک می‌گویم. ان شاالله سالی همراه با سلامتی و آرامش و موفقیت پیش رو داشته باشید.

امیدوارم تا الان تعطیلات را به خوبی سپری کرده باشید و خستگی‌هایتان رفع شده باشد. در این پی دی اف پاسخ تمرین‌های احتمال را قرار داده‌ام. سری بعدی تمرین‌ها را نیز به زودی آپلود می‌کنم.

با توجه به اینکه از روی حل تمرین‌ها عکس گرفته‌ام و کمی تاریک افتاده است، در صورتی که خوانا نبود حتما اطلاع بدهید تا نسخه‌ی واضح‌تری را آپلود کنم.

بنام خدا

پاسخ تمرین‌های آمار مهندسی	سری ۱ و ۲

۱) اگر پسر بودن فرزند را با B و دختر بودن را با G نمایش دهیم آنگاه:

فضای نمونه $S=\{(B,B,B),(B,B,G),(B,G,B),(G,B,B),(B,G,G),(G,B,G),(G,G,B),(G,G,G)\}$

A: پیشامد داشتن دقیقاً دو پسر

$$A=\{(B,B,G),(B,G,B),(G,B,B)\}$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{3}{8}$$

---

۲) دو پیشامد را ناسازگار گوییم هرگاه اشتراک آن‌ها تهی باشد و اگر A و B دو پیشامد دلخواه باشند داریم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

با توجه به این مطلب داریم:

الف)
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$\frac{7}{11}=\frac{3}{11}+\frac{4}{11}-? \Rightarrow P(A\cap B)=0 \Rightarrow A\cap B=\emptyset$$

پس A و B ناسازگارند.

ب)
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$\frac{13}{18}=\frac{5}{18}+\frac{11}{18}-? \Rightarrow P(A\cap B)=\frac{3}{18} \Rightarrow$$ A و B ناسازگار نیستند

---

۳) ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که انتخاب مهره‌ها به صورت با جایگذاری صورت گیرد.

* تعداد کل حالات ممکن ←
  - کار اول: انتخاب یک مهره از بین ۱۰ مهره ← به ۱۰ طریق
  - کار دوم: " " " " " ← " "
  - کار سوم: " " " " " ← " "

بنابراین $n(S)=10^3$

الف) حالات مورد نظر عبارت است از جواب‌های صحیح معادله‌ی زیر:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 9 \qquad x_i \geq 1$$

در این حالت فرض می‌کنیم 9 مهره غیرمتمایز داریم و 3 جعبه که مهره مکرر مجاز است.

$$y_1 + y_2 + y_3 = 6 \qquad y_i = x_i - 1 \geq 0 \quad \to \binom{6+3-1}{6} = \binom{8}{6} = 28$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{28}{1000}$$

ب)

$$P(x_1+x_2+x_3 \geq 9) = 1 - P(x_1+x_2+x_3 \leq 8)$$

کوچکتر یا مساوی 8 در اینجا یعنی مقادیر 3 و 4 و 5 و 6 و 7 و 8 را می‌گیرند.

$$x_1+x_2+x_3 = 8 \quad x_i \geq 1 \Rightarrow y_1+y_2+y_3 = 5 \quad y_i \geq 0 \to \binom{7}{5} = 21$$

$$x_1+x_2+x_3 = 7 \quad x_i \geq 1 \Rightarrow y_1+y_2+y_3 = 4 \quad y_i \geq 0 \to \binom{6}{4} = 15$$

$$x_1+x_2+x_3 = 6 \quad x_i \geq 1 \Rightarrow y_1+y_2+y_3 = 3 \quad y_i \geq 0 \to \binom{5}{3} = 10$$

$$x_1+x_2+x_3 = 5 \quad x_i \geq 1 \Rightarrow y_1+y_2+y_3 = 2 \quad y_i \geq 0 \to \binom{4}{2} = 6$$

$$'' \quad = 4 \quad '' \Rightarrow \quad '' \quad = 1 \quad '' \to \binom{3}{1} = 3$$

$$'' \quad = 3 \quad '' \Rightarrow \quad '' \quad = 0 \quad '' \to \binom{2}{0} = 2$$

$$\Rightarrow P(x_1+x_2+x_3 \geq 9) = 1 - \frac{21+15+10+6+3+2}{1000} = \frac{943}{1000}$$

حالا حالتی که انتخاب مهره‌ها بدون جایگذاری است در نظر می‌گیریم:

تعداد اعضای فضای نمونه ← $\binom{10}{3} = 120$

الف) حالات مورد نظر ← جایگشت‌های $(1,3,5)$ و $(2,3,4)$ و $(1,2,6)$

$$P(A) = \frac{18}{120}$$

همه‌ی حالات مورد نظر

ب) حالات مورد نظر ← جایگشت‌های

8 مجموع $(1,2,5)$, $(1,3,4)$

7 مجموع $(1,2,4)$

6 مجموع $(1,2,3)$

$$\Rightarrow P(A) = 1 - \frac{24}{120} = \frac{96}{120}$$

---

(4) A: پیشامد اینکه از بین n نفر هیچ دو نفری در یک ماه متولد نشده باشند.

$$n(S) = 12^n$$

$$n(A) = \binom{12}{n} \times n! = 12 \times 11 \times \cdots \times (12-n+1)$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{12 \times 11 \times \cdots \times (12-n+1)}{12^n}$$

---

(5) $$P(\pi R^2 < \frac{\pi}{2}) = P(R^2 < \frac{1}{2}) = P(|R| < \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - 0}{1 - 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(6) می‌توان با دو نگرش به این سؤال پاسخ داد :

اگر فرض کنیم افراد مهره‌های متمایز از هم هستند پس 8 مهره متمایز و 6 جعبه داریم که مهره تکرار مجاز است پس تعداد حالات برابر $6^8 = 1679616$ است.

اگر فرض کنیم تفاوتی نکند که کدام فرد در چه طبقه‌ای پیاده شود و فقط هدف قرار دادن 8 نفر در 6 طبقه باشد پس 8 مهره غیرمتمایز در 6 جعبه و مهره تکرار مجاز است پس

$$\binom{6+8-1}{8} = \binom{13}{8} = 1287$$

با توجه به اینکه در صورت سؤال در مورد تمایز افراد و عدم تمایز آن‌ها صحبتی نشده است به هر یک از روش‌های بالا می‌توان اعتماد کرد. امّا اغلب انسان‌ها را متمایز در نظر خواهیم گرفت و در این صورت روش اول درست‌تر به نظر می‌رسد.

---

(7) A : پیشامد غایب بودن شخص A (از آن جلسه خصوصی)

B : ~ ~ ~ ~ B ~ ~ ~ ~

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \%20 + \%40 - (\%20)(\%40) = 0.52$$

---

(8) A_i : پیشامد اینکه اسپرینگ از تولیدی i خریداری شده است.

B : ~ ~ ~ اتفاقی معیوب است.

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3)$$

$$= P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3)$$

$$= (0.5)(0.02) + (0.3)(0.03) + (0.2)(0.04) = 0.027$$

$$P(A_2|B) = \frac{P(B|A_2)\,P(A_2)}{P(B)} = \frac{(0.03)(0.3)}{0.027} = \frac{1}{3} \qquad (9)$$

---

(10) B : پیشامد اینکه دستگاه گناهکار نشان دهد.

A : پیشامد بی‌گناه بودن شخص.

A' : « گناهکار بودن شخص.

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)} = \frac{(0.95)(0.01)}{(0.95)(0.01)+(0.05)(0.9)}$$

---

(11) a و b را دو نفر در نظر می‌گیریم که دو مهره متمایزند و 3 جعبه داریم و در نتیجه داریم:

$$P(A) = \frac{\binom{3}{2}\times 2!}{3^2} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

---

(12) A : تقسیم پذیر بودن بر 3

B : « « « « 5

$$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$= \frac{333}{1000} + \frac{200}{1000} - \frac{66}{1000} = \frac{467}{1000}$$

* نکته در مورد این سؤال: تعداد اعدادی که به a تقسیم پذیر هستند در بین اعداد 1,...,1000 عبارت است از:

$$\left[\frac{1000}{a}\right]$$

---

(13) E_n : پیشامد انقراض جامعه بعد از نسل n ام

$$E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots \subseteq E_n \subseteq E_{n+1} \subseteq \cdots$$

$$P(\text{بقای جامعه برای همیشه}) = 1 - P(\text{انقراض جامعه در نهایت}) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)$$

$$= 1 - \lim_{n\to\infty} P(E_n) = 1 - \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{2n^2+7}{6n^2}} = 1 - e^{-1/3}$$

(14)

A: پیشامد اینکه تعداد شیرها برابر 3 باشد.

احتمال شیر آمدن $\frac{1}{2}$ است.

تعداد کل پرتاب‌ها 10 بار.

$$P(A) = \binom{10}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^7$$

---

(15)

A: پیشامد اینکه هر دو معیوب دقیقاً پس از 3 امتحان پیدا شوند.

$$P(A) = P(\text{اولی سالم} \cap \text{دومی معیوب} \cap \text{سومی معیوب}) + P(\text{اولی معیوب} \cap \text{دومی سالم} \cap \text{سومی معیوب})$$

$$= P(\text{اولی سالم})\,P(\text{دومی معیوب} \mid \text{اولی سالم})\,P(\text{سومی معیوب} \mid \text{اولی سالم و دومی معیوب})$$

$$+ P(\text{اولی معیوب})\,P(\text{دومی سالم} \mid \text{اولی معیوب})\,P(\text{سومی معیوب} \mid \text{اولی معیوب و دومی سالم})$$

$$= \left(\frac{5}{7}\right)\left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{2}{7}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{5}\right) \approx 0.095$$

---

(16)

B: استفاده از کتابخانه

I: سال اول

II: سال دوم

III: سال سوم

Pre: پیش‌دانشگاهی

$$P(B) = P(B \cap Pre) + P(B \cap I) + P(B \cap II) + P(B \cap III)$$

$$= P(Pre)P(B|Pre) + P(I)P(B|I) + P(II)P(B|II) + P(III)P(B|III)$$

$$= (\%30)(\%30) + (\%25)(\%50) + (\%25)(\%70) + (\%20)(\%80) = \ldots$$

---

(17)

$$P(\text{هر دو آبی} \mid \text{سومی قرمز}) = \frac{P(\text{سومی قرمز} \cap \text{هر دو اولی آبی})}{P(\text{سومی قرمز})}$$

$$= \frac{P(\text{سومی قرمز} \mid \text{هر دو اولی آبی})\,P(\text{هر دو اولی آبی})}{P(\text{سومی قرمز} \mid \text{دو آبی})\,P(\text{دو آبی}) + P(\text{سومی قرمز} \mid \text{دو قرمز})\,P(\text{دو قرمز}) + P(\text{سومی قرمز} \mid \text{یکی قرمز یکی آبی})\,P(\text{یکی قرمز یکی آبی})}$$

$=$ ... ادامه صفحه بعد ...

$$= \frac{\frac{\binom{13}{2}}{\binom{20}{2}} \cdot \frac{7}{18}}{\frac{\binom{13}{2}}{\binom{20}{2}} \cdot \frac{7}{18} + \frac{\binom{7}{2}}{\binom{20}{2}} \cdot \frac{5}{18} + \frac{\binom{7}{1}\binom{13}{1}}{\binom{20}{2}} \cdot \frac{6}{18}} = \dots$$

---

(18) E_i : پیشامد بسته بودن کلید i ، $1 \le i \le 4$

دقت کنید جریان ورودی در صورتی خارج می‌شود که یکی از پیشامدهای E_1E_2 یا E_3E_4 رخ دهد.

$$\Rightarrow P(E_1E_2 \cup E_3E_4) = P(E_1E_2) + P(E_3E_4) - P(E_1E_2E_3E_4)$$

$$= p^2 + p^2 - p^4 = p^2(2-p^2)$$

---

(19) فرض کنید H_1 و H_2 به ترتیب تعداد شیرهای احمد و بهرام باشند. همچنین فرض کنید T_1 و T_2 تعداد خط‌هایی باشند که به ترتیب احمد و بهرام آورده‌اند.

چون سکه سالم است داریم:

$$P(H_1 > H_2) = P(T_1 > T_2)$$

اما:

$$P(T_1 > T_2) = P(n+1-H_1 > n-H_2) = P(H_1 \le H_2)$$

بنابراین $P(H_1 > H_2) = P(H_1 \le H_2)$. از طرفی می‌دانیم:

$$P(H_1 > H_2) + P(H_1 \le H_2) = 1$$

پس

$$P(H_1 > H_2) = P(H_1 \le H_2) = \frac{1}{2}$$

توجه: اگر این سؤال را با شمارش حل کرده‌اید، مسیر سخت‌تری را انتخاب کرده‌اید اما درست است.

(20)

$$P(A \mid \text{معیوب}) = \frac{P(A \cap \text{معیوب})}{P(\text{معیوب})} \overset{\text{بیز}}{=} \frac{P(\text{معیوب} \mid A)\,P(A)}{P(\text{معیوب} \mid A)\,P(A) + P(\text{معیوب} \mid B)\,P(B)}$$

$$= \frac{(\%10)(\%40)}{(\%10)(\%40) + (\%5)(\%60)} = \dots$$

دوستان عزیز

درصورتیکه در درک هر یک از پاسخ ها به مشکلی برخوردید حتماً

به آدرس sahar.asili@yahoo.com ایمیل بزنید تا

در اسرع وقت با ارائه توضیحات بیشتر، مشکل شما را رفع کنیم.