بنام خدا

آمار و احتمالات مهندسی

فصل اول: احتمال

مبحث احتمال با چند تعریف پایه‌ای آغاز می‌شود.

* آزمایش تصادفی: آزمایشی که تمام نتایج ممکن آن را می‌دانیم اما نتیجه‌ی هر بار انجام آزمایش را قبل از اجرا نمی‌دانیم.

مثال: آزمایش پرتاب سکه. که همه‌ی نتایج ممکن شامل شیر و خط است اما نتیجه هر پرتاب از قبل به طور قطع مشخص نیست.

* فضای نمونه: مجموعه‌ای شامل تمام نتایج ممکن یک آزمایش تصادفی که به آن فضای نمونه گفته می‌شود و با S نمایش داده می‌شود.
Sample Space

در مثال فوق داریم: $S = \{\underset{Head}{H}, \underset{Tail}{T}\}$ که در آن H نشانه‌ی شیر و T نشانه‌ی خط است.

* پیشامد: هر زیر مجموعه از فضای نمونه را یک پیشامد می‌نامیم.
Event

در مبحث احتمال، هدف محاسبه‌ی احتمال رخداد پیشامدها است.

در مثال فوق ۴ پیشامد ممکن عبارتند از: $E_1=\{H\}, E_2=\{T\}, E_3=\{H,T\}, E_4=\phi$

که در آن احتمال رخداد هر یک به شرح زیر است:

احتمال رخداد E_1 برابر است با احتمال اینکه در پرتاب سکه شیر ظاهر شود ← $\frac{1}{2}$

" " E_2 " " " " " " " خط " ← $\frac{1}{2}$

" " E_3 " " " " " " " شیر یا خط ظاهر شوند ← 1

" " E_4 " " " " " " " نه شیر ظاهر شود و نه خط ← 0

* پیشامدهای ناسازگار (جدا از هم): پیشامدهای A و B را ناسازگار گوییم هرگاه $A \cap B = \phi$. یعنی نمی‌توانند هم زمان اتفاق بیفتند.

*** احتمال:** احتمال رخداد پیشامد دلخواه A را با $p(A)$ (Probability) نمایش می‌دهیم و به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$p(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\text{تعداد حالات پیشامد } A}{\text{تعداد کل اعضای فضای نمونه}} \quad ; \quad n(S)\neq 0$$

*** اصول احتمال:** سه اصل زیر در مورد احتمال پیشامدها همواره برقرار است:

(1) $\forall A : p(A)\geqslant 0$

(2) $p(S)=1$

(3) برای $A_1, A_2, \dots$ که پیشامدها دو به دو ناسازگارند: $p(A_1\cup A_2\cup\dots)=p(A_1)+p(A_2)+\dots$

*** قوانین مهم احتمال:** با استفاده از سه اصل احتمال می‌توان فرمول‌های زیر را به دست آورد:

* $p(\phi)=0$

* $p(A')=1-p(A)$; A' متمم پیشامد A است

* $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$

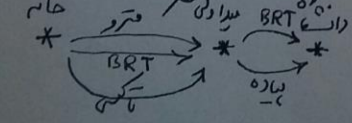
* $p(A\cup B\cup C)=p(A)+p(B)+p(C)-p(A\cap B)-p(A\cap C)-p(B\cap C)+p(A\cap B\cap C)$

برای محاسبه‌ی کسر احتمال لازم است توانایی شمارش حالات ممکن فضای نمونه و پیشامد مورد نظر را داشته باشیم. برای این منظور لازم است روش‌های شمارش را بیاموزیم.

*** قواعد شمارش:**

قواعد شمارش با دو اصل اساسی شروع می‌شود:

(1) اصل ضرب در شمارش: انجام کار C منوط به انجام کار A و کار B است. از طرفی می‌دانیم کار A به n طریق و کار B به m طریق ممکن است انجام شوند. پس کار C به $n\times m$ طریق رخ خواهد داد.



مثال: برای رفتن از خانه به دانشگاه (کار C) می‌توانیم به سه طریق به میدان ولی‌عصر (کار A، n) برسیم و سپس به دو طریق از میدان به دانشگاه (کار B، m) برسیم. پس کار C به شش طریق ممکن است انجام شود.

(2) اصل جمع در شمارش: انجام کار C منوط به انجام کار A یا کار B است. از طرفی می‌دانیم که کار A به n طریق و کار B به m طریق ممکن است انجام شود. پس کار C به $(n+m)$ طریق ممکن است انجام شود.

مثال: برای رسیدن از خانه به میدان ولیعصر در مثال فوق می‌توان از BRT یا مترو یا تاکسی استفاده کرد. پس کل این کار را اگر C بگیریم به $1+1+1=3$ طریق ممکن است رخ دهد.

* جایگشت ها: ترتیبی را که می‌توان اشیای یک مجموعه را در کنار هم قرار داد یک جایگشت می‌گویند.

مثال: جایگشت های مختلف حروف a و b و c عبارتند از:

a, b, c
a, c, b
b, a, c
b, c, a
c, a, b
c, b, a

$\rightarrow$ 6 جایگشت مختلف حروف a و b و c هستند.

نکته: تعداد جایگشت ها (ترتیب ها)یی که می‌توان n شیء متمایز را به ترتیب کنار هم چید برابر با $n!$ طریق است.

مثال ۱: تعداد حالت هایی که می‌توان حروف کلمه‌ی computer را کنار هم قرار داد؟ $8!$

مثال ۲: تعداد حالاتی که می‌توان حروف کلمه‌ی error را کنار هم قرار داد؟

در این مثال $5!$ حالات کلی است اما بدیهی است که جایگشت های مختلف حروف ۳ کلمه‌ی جدیدی را ایجاد نمی‌کنند پس باید از شمارش حذف شوند یعنی خواهیم داشت: $\frac{5!}{3!}$

نکته: تعداد حالت هایی که می‌توان a شیء از n شیء را انتخاب کرد، عبارت است از:

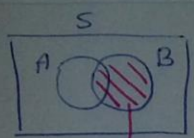
$$\binom{n}{a} = \frac{n!}{a!\,(n-a)!}$$

$\rightarrow$ ایده‌ی فنی: می‌شود این طور تعبیر کرد که بین این n شیء a تا دیگر یکسان انتخاب شدن را دارند و $(n-a)$ تا دیگر یکسان انتخاب نشدن پس از بین $n!$ حالت کلی حالات (جایگشت ها) یکسان را حذف می‌کنیم. (مثل مثال error). البته این تعبیر خودمه!! و اثبات های دقیق‌تری در کتاب ها دارد.

نکته: اگر n شیء داشته باشیم که n_1 تای آن ها شبیه هم، n_2 تا شبیه هم، ... n_k تا شبیه هم باشند، به طوری که $n_1+n_2+\cdots+n_k=n$ آن گاه تعداد جایگشت های این عناصر عبارت است از:

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\,\cdots\,n_k!}$$

* احتمال شرطی: ۱۹



$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \quad ; P(B) \neq 0$$

اطلاعات (تجربه قبلی): می‌دانیم B رخ داده است و احتمال رخداد A را می‌خواهیم.

به نوعی فضای نمونه‌ی جدید است.

* قانون ضرب احتمال:

$$P(A\cap B) = P(A|B)P(B)$$

محاسبه‌ی احتمال رخداد هم‌زمان (توأم) دو پیشامد

* پیشامدهای مستقل: $A \perp B : P(A\cap B) = P(A)P(B)$.

* تعمیم قانون ضرب احتمال:

$$P(A_1\cap A_2\cap \cdots \cap A_k) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1\cap A_2)\cdots P(A_k|A_1\cap \cdots \cap A_{k-1})$$

* قانون احتمال کل:

فضای نمونه افراز می‌شود به k پیشامد. پیشامد دیگر هم به نام A داریم.

هدف $\rightsquigarrow P(A) = P(A\cap A_1) + P(A\cap A_2) + P(A\cap A_3) + \cdots + P(A\cap A_k)$

$$\overset{\text{طبق قانون ضرب احتمال}}{=} \sum_{i=1}^{k} P(A_i)P(A|A_i)$$

* فرمول بیز: در فضای نمونه‌ای مانند حالت بالا، هدف محاسبه $P(A_j|A)$.

$$P(A_j|A) = \frac{P(A_j\cap A)}{P(A)} = \frac{P(A_j)P(A|A_j)}{P(A)} = \frac{P(A_j)P(A|A_j)}{\sum_{i=1}^{k} P(A_i)P(A|A_i)}$$

مانند آنچه در بالا محاسبه شد.

فصل دوم : متغیرهای تصادفی

* متغیر تصادفی : تابعی از فضای نمونه به مجموعه اعداد حقیقی است . $X : S \longrightarrow \mathbb{R}$

* انواع متغیر تصادفی
  - گسسته : مقادیر آن متناهی یا نامتناهی شمارش پذیر است .
  - پیوسته : مقادیر آن یک فاصله عددی یا اجتماع چند فاصله‌ی عددی است .

توزیع احتمالات گسسته :

نحوه‌ی پخش یک واحد جرم احتمال روی خط حقیقی را توزیع احتمالات می‌نامیم . در حالت گسسته این توزیع به شرح زیر است :

* تابع $p_X(x) = p(X = x)$ را تابع احتمال متغیر تصادفی X گویند هرگاه :

$$\begin{cases} (1)\ \forall x \in \mathbb{R} : p_X(x) \geq 0 \\ (2)\ \sum_{x \in \mathbb{R}} p_X(x) = 1 \end{cases}$$

* برای محاسبه‌ی $p(X \in C)$ (C زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی) به صورت زیر عمل می‌کنیم :

$$p(X \in C) = \sum_{x \in C} p_X(x)$$

* تابع توزیع تجمعی :

$$F_X(x) = p(X \leq x) = \sum_{t \leq x} p_X(t)$$

✓ خواص تابع توزیع تجمعی :

(1) $\forall x \in \mathbb{R} : 0 \leq F_X(x) \leq 1$

(2) $x_1 < x_2 \Rightarrow F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$

(3) $F_X(-\infty) = 0 \ , \ F_X(+\infty) = 1$

(4) $\lim_{x \to a^+} F_X(x) = F_X(a)$

* دستور محاسبه‌ی تابع احتمال از روی تابع توزیع تجمعی :

$$p_X(x) = F_X(x) - F_X(x^-)$$

* محاسبه‌ی احتمال در بازه‌ها به وسیله‌ی تابع توزیع تجمعی :

$$p(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

$$p(a < X < b) = F_X(b^-) - F_X(a)$$

$$p(a \leq X < b) = F_X(b^-) - F_X(a^-)$$

$$p(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a^-)$$

$$p(X > a) = 1 - p(X \leq a) = 1 - F_X(a)$$

$$p(X = a) = F_X(b) - F_X(b^-)$$

توزیع احتمالات پیوسته :

در متغیرهای تصادفی پیوسته مقادیر متغیر در بازه‌هایی وجود دارد و بنابراین مثلاً بین نقاط a و b بی‌نهایت مقدار وجود دارد و احتمال اتفاق شدن یک نقطه‌ی به خصوص در این بازه ناچیز و تقریباً صفر است یعنی در پیوسته‌ها احتمال رخداد یک نقطه مانند $r \in (a,b)$ را برابر صفر در نظر می‌گیریم. ← $P(X=r)=0$

در این حالت توزیع احتمال متغیر تصادفی پیوسته X را با تابع چگالی احتمال $f_X(x)$ نمایش می‌دهیم.

$$\begin{cases} 1) \ \forall x \in \mathbb{R} : f_X(x) \geq 0 \\ 2) \ \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = 1 \end{cases}$$

* تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی X :

$$F_X(x) = p(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt$$

* بدست آوردن تابع چگالی احتمال به کمک تابع توزیع تجمعی :

$$F'_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = f_X(x)$$

* محاسبه‌ی احتمال در حالت پیوسته به کمک تابع چگالی احتمال: $P(a<X\leq b)=\int_a^b f_X(x)\,dx$

* " " " " به کمک تابع توزیع تجمعی $\longleftarrow$ $P(a<X\leq b)=F_X(b)-F_X(a)$

توزیع احتمالات توأم دو متغیره:

در آزمایش تصادفی دو متغیر تصادفی X و Y تعریف کنیم.

* اگر X و Y گسسته باشند:

$P_{X,Y}(x,y)=P(X=x\,,\,Y=y)\rightarrow$ تابع احتمال توأم X و Y

ویژگی‌ها:
$$\begin{cases}(1)\ \forall\, x,y : P_{X,Y}(x,y)\geq 0\\ (2)\ \sum\sum P_{X,Y}(x,y)=1\end{cases}$$

محاسبه‌ی احتمال قرار گرفتن (X,Y) در ناحیه‌ی A در صفحه‌ی xoy : $P((X,Y)\in A)=\sum\sum_{(x,y)\in A} P_{X,Y}(x,y)$

* اگر X و Y پیوسته باشند:

$f_{X,Y}(x,y)\longrightarrow$ تابع چگالی احتمال توأم X و Y

ویژگی‌ها:
$$\begin{cases}(1)\ \forall\, x,y : f_{X,Y}(x,y)\geq 0\\ (2)\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy=1\end{cases}$$

محاسبه‌ی احتمال قرار گرفتن (X,Y) در ناحیه‌ی A در صفحه‌ی xoy : $P((X,Y)\in A)=\iint_A f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$

توزیع احتمالات حاشیه‌ای (کناری) :

در حالت گسسته ←

$$p_X(x) = \sum_y p_{X,Y}(x,y) \quad , \quad p_Y(y) = \sum_x p_{X,Y}(x,y)$$

در حالت پیوسته ←

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dy \quad , \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dx$$

توزیع احتمالات شرطی :

در حالت گسسته ←

$$P_{X|Y}(x|y) = \frac{P_{X,Y}(x,y)}{P_Y(y)} \; ; \; P_Y(y) \neq 0$$

در حالت پیوسته ←

$$f_{X|Y}(x,y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \; ; \; f_Y(y) \neq 0$$

محاسبه‌ی احتمال در بازه‌ها در حالت شرطی :

$$P(a < X < b \mid Y = c) = \begin{cases} \sum_{a<x<b} f_{X|Y}(x|c) & \text{اگر X و Y گسسته باشند} \\ \int_a^b f_{X|Y}(x|c)\, dx & \text{اگر X و Y پیوسته باشند.} \end{cases}$$

متغیرهای تصادفی مستقل :

$$X \perp Y : \; f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \rightarrow \text{X و Y پیوسته}$$

$$p_{X,Y}(x,y) = p_X(x) \cdot p_Y(y) \rightarrow \text{X و Y گسسته}$$

فصل سوم: امید ریاضی

* فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع احتمال یا چگالی احتمال $f_X(x)$ یا $p_X(x)$ باشد. امید ریاضی (میانگین) متغیر تصادفی X عبارت است از:

(برای گسسته‌ها — برای پیوسته‌ها)

$$E(X)=\sum_x x \cdot p_X(x) \longrightarrow X \text{ گسسته}$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)\, dx \longrightarrow X \text{ پیوسته}$$

$E(X)$ را با μ نیز نمایش می‌دهیم.

در حالت کلی اگر $g(x)$ تابعی از متغیر X باشد داریم:

$$E(g(X))=\sum_x g(x) \cdot p_X(x)$$

$$E(g(X))=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f_X(x)\, dx$$

در حالت دو متغیره برای $g(X,Y)$ که تابعی از دو متغیر تصادفی X و Y است داریم:

$$E(g(X,Y))=\sum_x \sum_y g(x,y) \cdot p_{X,Y}(x,y) \xrightarrow[\text{حالت } g(X,Y)=Y]{\text{حالت خاص } g(X,Y)=X} \begin{cases} g(X,Y)=X \rightarrow E(X)=\sum\sum x\, p_{X,Y}(x,y) \\ g(X,Y)=Y \rightarrow E(Y)=\sum\sum y\, p_{X,Y}(x,y) \end{cases}$$

$$E(g(X,Y))=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y) \cdot f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy \xrightarrow{\text{حالت خاص}} \begin{cases} g(X,Y)=X \rightarrow E(X)=\iint x\, f_{X,Y}(x,y)\, dx\,dy \\ g(X,Y)=Y \rightarrow E(Y)=\iint y\, f_{X,Y}(x,y)\, dx\,dy \end{cases}$$

ویژگی‌های امید ریاضی: اگر a و b اعدادی ثابت و X و Y متغیرهای تصادفی باشند:

1) $E(a)=a$

2) $E(aX)=aE(X)$

3) $E(aX+b)=aE(X)+b$

4) $E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$

نکته: اگر X و Y دو متغیر تصادفی مستقل باشند آنگاه $E(XY)=E(X)E(Y)$ ولی برای دو متغیر X و Y ممکن است رابطه‌ی $E(XY)=E(X)E(Y)$ برقرار باشد اما این دو متغیر از هم مستقل نباشند.

گشتاور: گشتاور rام متغیر X حول مبدأ ← $\mu'_r = E(X^r)$

گشتاور مرکزی مرتبه‌ی rام X ← $\mu_r = E\left[(X-\mu)^r\right]$

* واریانس: میزان پراکندگی مقادیر متغیر تصادفی نسبت به میانگین آن را می‌سنجد.

هرچه واریانس بزرگتر باشد، میزان پراکندگی توزیع متغیر تصادفی نسبت به میانگین بیشتر است و
" " کوچکتر " " " " " " " " کمتر است.

* جذر واریانس ← انحراف معیار.

محاسبه‌ی واریانس و انحراف معیار:

$$\sigma^2 = var(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

واریانس همواره عددی بزرگتر یا مساوی صفر است.

* کوواریانس: رابطه‌ی دو متغیر تصادفی X و Y را نشان می‌دهد. با $Cov(X,Y)$ نمایش داده می‌شود و عبارت است از:

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

اگر X و Y هم جهت باشند آنگاه کوواریانس X,Y مثبت است و
" " " خلاف جهت هم " " " " منفی است.

ویژگی‌های واریانس و کوواریانس: اگر a و b و c و d اعداد ثابت و X و Y و W متغیرهای تصادفی باشند داریم:

(1) $var(c) = 0$

(2) $var(aX+b) = a^2 var(X)$

(3) $Cov(X,X) = var(X)$

(4) $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$

(5) $Cov(X,c) = 0$

(6) $Cov(aX+b, cY+d) = ac\,Cov(X,Y)$

(7) $var(aX \pm bY + c) = a^2 var(X) + b^2 var(Y) \pm 2ab\,Cov(X,Y)$

(8) $X \perp Y$: $var(aX+bY+c) = a^2 var(X) + b^2 var(Y)$

(9) $Cov(aX+bY, W) = a\,Cov(X,W) + b\,Cov(Y,W)$

ضریب همبستگی: به منظور حذف واحد اندازه‌گیری از کوواریانس :

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \, \sigma_Y} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \, \sigma_Y}$$

که در آن $\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$ و $\sigma_Y = \sqrt{Var(Y)}$ است.

ضریب همبستگی میزان رابطه‌ی خطی بین دو متغیر تصادفی X و Y را می‌سنجد.

* همبستگی یعنی وابستگی خطی.

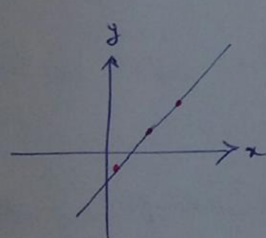
ویژگی‌های ضریب همبستگی: اگر a و b و c و d اعداد ثابت و X و Y متغیرهای تصادفی باشند:

(1) $\rho(aX+b, cY+d) = \rho(X,Y)$

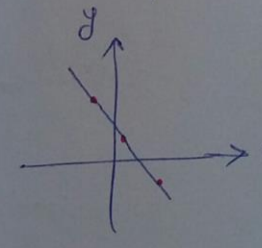
(2) $|\rho| \leq 1$ or $-1 \leq \rho \leq 1$

(3) $X \perp Y \Rightarrow \rho = 0$

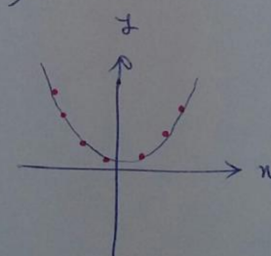
(4) $Y = aX+b \rightarrow$ اگر $a>0$ آنگاه $\rho>0$
اگر $a<0$ 〃 〃 $\rho<0$



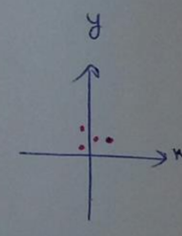
$\rho = 1$
رابطه‌ی خطی کامل با شیب مثبت



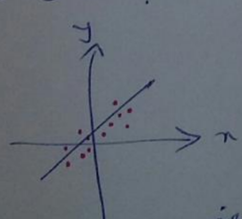
$\rho = -1$
رابطه‌ی خطی کامل با شیب منفی



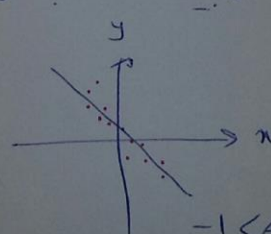
$\rho = 0$
رابطه‌ی غیرخطی بین X و Y



$\rho = 0$
هیچ رابطه‌ای بین X و Y نیست



$0 < \rho < 1$
رابطه‌ی خطی نسبتاً ضعیف با شیب مثبت



$-1 < \rho < 0$
رابطه‌ی خطی نسبتاً ضعیف با شیب منفی

امید ریاضی و واریانس شرطی : X و Y دو متغیر تصادفی . روابط زیر را داریم :

$$E(X^r \mid Y=y) = \begin{cases} \sum_x x^r \, p_{X|Y}(x|y) & \text{X و Y گسسته} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^r \cdot f_{X|Y}(x|y)\, dx & \text{X و Y پیوسته} \end{cases}$$

$$E(Y^r / X=x) = \begin{cases} \sum_y y^r \cdot p_{Y|X}(y|x) & \text{X و Y گسسته} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} y^r f_{Y|X}(y|x)\, dy & \text{پیوسته} \end{cases}$$

در نتیجه :

$$var(X \mid Y=y) = E(X^2 \mid Y=y) - (E(X \mid Y=y))^2$$

$$var(Y \mid X=x) = E(Y^2 / X=x) - (E(Y \mid X=x))^2$$

* توزیع احتمالات چندمتغیره :

تمام مباحث قبلی در مورد توزیع احتمالات توأم دو متغیر تصادفی را می‌توان به n متغیر تصادفی تعمیم داد.

فرض کنید $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ تابع احتمال توأم متغیرهای تصادفی گسسته $X_1, \dots, X_n$ باشد. تابع احتمال حاشیه‌ای X_1 و تابع احتمال توأم حاشیه‌ای X_1 و X_2 عبارتند از :

$$p_{X_1}(x_1) = \sum_{x_2}\sum_{x_3}\cdots\sum_{x_n} p(x_1, \dots, x_n)$$

$$p_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = \sum_{x_3}\sum_{x_4}\cdots\sum_{x_n} p(x_1, \dots, x_n)$$

همچنین اگر $f(x_1, \dots, x_n)$ تابع چگالی احتمال توأم متغیرهای پیوسته $X_1, X_2, \dots, X_n$ باشد. تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای X_2 و تابع چگالی احتمال توأم حاشیه‌ای X_2 و X_3 عبارتند از :

$$f_{X_2}(x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1\, dx_3 \cdots dx_n$$

$$f_{X_2, X_3}(x_2, x_3) = \int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1\, dx_4 \cdots dx_n$$

و نیز تابع احتمال (چگالی احتمال) توأم شرطی X_1, X_2, X_3 به شرط $X_4 = x_4, \dots, X_n = x_n$ به صورت زیر به دست می‌آید :

$$f_{X_1, X_2, X_3 | X_4, \dots, X_n}(x_1, x_2, x_3 | x_4, \dots, x_n) = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{f(x_4, x_5, \dots, x_n)}$$

نکته : متغیرهای تصادفی $X_1, X_2, \dots, X_n$ را دو به دو از لحاظ آماری مستقل گویند اگر و تنها اگر برای هر $x_1, x_2, \dots, x_n$ داشته باشیم :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2) \cdot \dots \cdot f_{X_n}(x_n)$$

مثال: فرض کنید متغیرهای تصادفی X_1 و X_2 و X_3 دارای تابع چگالی احتمال توأم زیر باشند:

$$f(x_1,x_2,x_3)=\begin{cases} c & 0<x_1<x_2<x_3<1 \\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

الف) مقدار c را تعیین کنید.

ب) تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای X_2 را به دست آورید.

ج) تابع چگالی احتمال توأم X_1 و X_3 را به دست آورید و $p(2X_1<X_3)$ را محاسبه کنید.

د) تابع چگالی احتمال شرطی X_1 به شرط $(X_2, X_3)=(x_2, x_3)$ را بیابید.

مجموع (انتگرال)

الف) برای یافتن c باید از ویژگی دوم تابع احتمال (چگالی احتمال) استفاده کنیم. یعنی این ویژگی که مقادیر احتمال روی تمام مقادیر ممکن متغیرها باید برابر یک شود. پس:

$$1=\int_0^1\int_0^{x_3}\int_0^{x_2} c\,dx_1\,dx_2\,dx_3 = c\int_0^1\int_0^{x_3} x_2\,dx_2\,dx_3$$

$$= c\int_0^1 \frac{x_2^2}{2}\Big|_0^{x_3} dx_3 = \frac{c}{6} \Rightarrow c=6$$

ب) برای تابع احتمال هر متغیر، از تابع احتمال روی بقیه‌ی متغیرها انتگرال می‌گیریم.

$$f_{X_2}(x_2)=\int_{x_2}^1\int_0^{x_2} 6\,dx_1\,dx_3$$

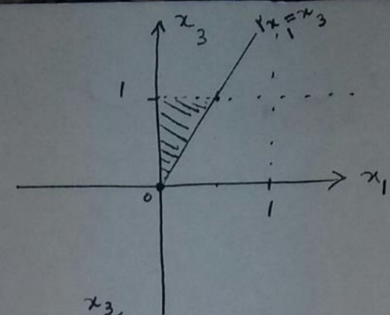
$$=\int_{x_2}^1 6x_2\,dx_3 = 6x_2(1-x_2)$$

$$\Rightarrow f_{X_2}(x_2)=\begin{cases} 6x_2(1-x_2) & 0<x_2<1 \\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

ج) برای توأم هر تعداد متغیر، روی بقیه متغیرها از تابع احتمال توأم انتگرال می‌گیریم:

$$f_{X_1,X_3}(x_1,x_3)=\int_{x_1}^{x_3} 6\,dx_2 = 6(x_3-x_1) \Rightarrow f_{X_1,X_3}(x_1,x_3)=\begin{cases} 6(x_3-x_1) & 0<x_1<x_3<1 \\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

$\Rightarrow p(2X_1<X_3)=\,?\ \rightsquigarrow$ باید ناحیه را پیدا کنیم ...



$$P(2X_1 < X_3) = \int_0^1 \int_0^{x_3/2} 6(x_3 - x_1)\, dx_1\, dx_3$$

$$= 6 \int_0^1 \left(x_1 x_3 - \frac{x_1^2}{2}\right)\Big|_0^{x_3/2} dx_3$$

$$= 6\left(\frac{3}{8}\right) \int_0^1 x_3^2 \, dx_3 = \frac{3}{4} x_3^3 \Big|_0^1 = \frac{3}{4}$$

$$f_{X_1|X_2,X_3}(x_1|x_2,x_3) = \frac{f(x_1,x_2,x_3)}{f_{X_2,X_3}(x_2,x_3)} = \frac{6}{\int_0^{x_2} 6\, dx_1} = \frac{6}{6x_2} = \frac{1}{x_2}$$

$$f_{X_2,X_3}(x_2,x_3) = \int_0^{x_2} 6\, dx_1 = \begin{cases} 6x_2 & 0<x_2<x_3<1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_{X_1|X_2,X_3}(x_1|x_2,x_3) = \begin{cases} \frac{1}{x_2} & 0<x_1<x_2<x_3<1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$