

بسمه تعالی

سری ۶: تمرینات مبحث توابع احتمال شرطی، کوواریانس، ضریب همبستگی، امید و واریانس شرطی و توابع احتمال چند متغیره

۱- تابع چگالی احتمال توأم متغیرهای تصادفی X و Y به صورت زیر داده شده است. مقادیر $E(X^2|Y=y)$ و $COV(X,Y)$ را به دست آورید.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{y} e^{-\left(y+\frac{x}{y}\right)} & x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

۲- فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y دارای تابع چگالی احتمال توأم زیر باشند.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cx(x-y) & -x < y < x, 0 < x < 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

الف) مقدار c را تعیین کنید.

ب) $f_Y(y)$ و $p(2Y > X)$ و $p(Y < \frac{1}{2} | X=1)$ را محاسبه کنید.

۳- فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y و Z دارای تابع چگالی احتمال توأم زیر باشند.

$$f_{X,Y,Z}(x,y,z) = \begin{cases} c(x+y)e^{-z} & 0 < x < 1, 0 < y < 2, z > 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

الف) مقدار c را تعیین کنید و $p(X < Y, Z > 1)$ را محاسبه کنید.

ب) نشان دهید که هر سه متغیر X و Y و Z از یکدیگر مستقل نیستند اما Z از X و Z از Y مستقل هستند و X از Y مستقل نمی باشد.

۴- فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y دارای تابع چگالی احتمال توأم زیر باشند.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{k}{y} y^2 e^{-y} x^{y-1} & 0 < x < 1, y > 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

مقدار k را تعیین کرده و $p(X < \frac{1}{2} | Y=2)$ و $Var(X|Y=y)$ را محاسبه کنید.

۵- الف) فرض کنید برای متغیر تصادفی گسسته X ، $E(X) = 2$ ، $E(X(X-4)) = 5$. واریانس و انحراف معیار $-4X + 12$ را محاسبه کنید.

ب) متغیرهای تصادفی X و Y دارای میانگین های ۱ و ۲ و واریانس های ۳ و ۴ و کوواریانس ۱- می باشند. میانگین ها و واریانس های $U = 2X - Y$ و $V = X + 2Y$ را بیابید. همچنین $E(X^2 + 3X - 5)$ و $\rho(U, V)$ را محاسبه کنید.

موفق باشید