

۱- برای هر یک از توابع احتمال توام زیر، موارد خواسته شده را بیابید.

$$I) p(x, y) = \frac{x+y}{30} \quad x = 0, 1, 2, 3; \quad y = 0, 1, 2$$

$$a) p(X \leq 2, Y = 1)$$

$$b) p(X > 2, Y \leq 1)$$

$$c) p(X + Y = 4)$$

$$II) f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{y} & 0 < x < y < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$p(X + Y > \frac{1}{2})$$

$$III) f(x, y) = \begin{cases} 2 & 0 < x \leq y < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

a) آیا دو متغیر از هم مستقل هستند یا خیر؟

$$b) p(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2} | Y = \frac{3}{4})$$

$$IV) f(x, y) = \begin{cases} 6x & 0 < x < 1; \quad 0 < y < 1-x \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

a) آیا دو متغیر از هم مستقل هستند یا خیر؟

$$b) p(X > 0.3 | Y = 0.5)$$

۲- از یک ظرف میوه شامل ۳ پرتقال، ۲ شیب و ۳ موز، یک نمونه‌ی تصادفی شامل ۴ میوه انتخاب می‌کنیم. فرض کنید متغیر تصادفی X تعداد پرتقال‌ها در این چهار انتخاب و متغیر تصادفی Y تعداد سیب‌ها در نظر گرفته شده باشند. هر یک از موارد زیر را بیابید.

الف) تابع احتمال توام دو متغیر تصادفی X و Y .

ب) $p((X, Y) \in A); A = \{(x, y) | x + y \leq 2\}$

۳- یک کارخانه‌ی تولید کننده‌ی آبنبات شکلات‌هایی از نوع تافی، شکلات مغزدار کرمی و آبنبات را در جعبه‌هایی توزیع می‌کند. فرض کنید وزن هر جعبه یک کیلوگرم باشد اما وزن هر یک از این سه نوع شکلات در جعبه‌های مختلف متفاوت باشد. یک جعبه به تصادف انتخاب می‌کنیم. فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y به ترتیب وزن شکلات‌های مغزدار کرمی و تافی‌ها در این جعبه باشند و فرض کنید این دو متغیر دارای تابع چگالی احتمال توأم زیر باشند.

الف) احتمال اینکه در یک جعبه وزن آبنبات‌ها بیش از نصف وزن کل جعبه باشد، چقدر است؟

ب) چگالی حاشیه‌ای وزن شکلات‌های مغزدار کرمی را بیابید.

ج) احتمال اینکه وزن تافی‌ها در این جعبه کمتر از $\frac{1}{8}$ کیلوگرم باشد به شرط آنکه بدانیم شکلات‌های مغزدار کرمی $\frac{3}{4}$ وزن جعبه را به خود اختصاص داده‌اند، چقدر است؟

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 24xy & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x + y \leq 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

شاد باشید