پاسخ تمرین سری اول

نکات مهم

- در صورتی که به‌دلیل مشکل و اشتباه تایپی موجود در نسخهٔ اولیهٔ سوالات موفق به رسیدن به پاسخ نهایی نشده باشید این موضوع در تصحیح لحاظ خواهد شد.

۱ پاسخ سؤال اول

تابع داده شده $f(t)$ ضابطه‌ای است و به شکل زیر تعریف شده است:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{24}{a^3}t, & 0 \leq t \leq \frac{a}{2} \\ -\frac{24}{a^3}t + \frac{24}{a^2}, & \frac{a}{2} \leq t \leq a \\ 0, & t > a \end{cases}$$

اکنون تبدیل لاپلاس هر قسمت را محاسبه کرده و نتایج را جمع می‌کنیم.

مرحله ۱: تبدیل لاپلاس بخش اول $0 \leq t \leq \frac{a}{2}$

برای $0 \leq t \leq \frac{a}{2}$ تابع به شکل زیر است:

$$f(t) = \frac{24}{a^3}t$$

تبدیل لاپلاس تابع t به شکل زیر است:

$$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$$

بنابراین تبدیل لاپلاس $f(t) = \frac{24}{a^3}t$ به شکل زیر خواهد بود:

$$F_1(s) = \frac{24}{a^3} \cdot \frac{1}{s^2}$$

از آنجا که این قسمت فقط برای $0 \leq t \leq \frac{a}{2}$ تعریف شده است، آن را در تابع پله واحد $u(t) - u\left(t - \frac{a}{2}\right)$ ضرب می‌کنیم:

$$F_1(s) = \frac{24}{a^3} \cdot \frac{1}{s^2}\left(1 - e^{-\frac{as}{2}}\right)$$

مرحله ۲: تبدیل لاپلاس بخش دوم $\frac{a}{2} \leq t \leq a$

برای $\frac{a}{2} \leq t \leq a$ تابع به شکل زیر است:

$$f(t) = -\frac{24}{a^3}t + \frac{24}{a^2}$$

می‌توان این تابع را به دو بخش تقسیم کرد:

تبدیل لاپلاس $-\frac{24}{a^3}t$:

$$\mathcal{L}\left\{-\frac{24}{a^3}t\right\} = -\frac{24}{a^3} \cdot \frac{1}{s^2}$$

تبدیل لاپلاس $\frac{24}{a^2}$:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{24}{a^2}\right\} = \frac{24}{a^2} \cdot \frac{1}{s}$$

بنابراین تبدیل لاپلاس این بخش به شکل زیر خواهد بود:

$$F_2(s) = \left(-\frac{24}{a^3} \cdot \frac{1}{s^2} + \frac{24}{a^2} \cdot \frac{1}{s}\right) e^{-\frac{as}{2}}$$

مرحله ۳: تبدیل لاپلاس کلی

با جمع کردن نتایج هر دو بخش، به شکل زیر دست خواهیم یافت:

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s)$$

با جایگزینی عبارات، تبدیل لاپلاس کلی به شکل زیر خواهد بود:

$$F(s) = \frac{24}{a^3} \cdot \frac{1}{s^2}\left(1 - e^{-\frac{as}{2}}\right) + \left(-\frac{24}{a^3} \cdot \frac{1}{s^2} + \frac{24}{a^2} \cdot \frac{1}{s}\right) e^{-\frac{as}{2}}$$

این تبدیل لاپلاس تابع ضابطه‌ای داده شده است.

۲ پاسخ سؤال دوم

۱.۲ الف)

$$\text{معادلات الکتریکی} : V_{in} = R_1.I + \overbrace{\frac{1}{\frac{1}{Ls} + \frac{1}{R} + Cs}}^{A}.I + V_{emf} \qquad (۱)$$

$$\text{معادلات مکانیکی} : \tau_m = b.\omega + Js.\omega + \frac{k}{s}.\omega + T_L \qquad (۲)$$

می‌دانیم:

$$\begin{aligned} V_{emf} &= K_v.\omega \\ \tau_m &= K_m.I \end{aligned} \qquad (۳)$$

حال مقادیر ۳ را در ۱ و ۲ جایگذاری می‌کنیم:

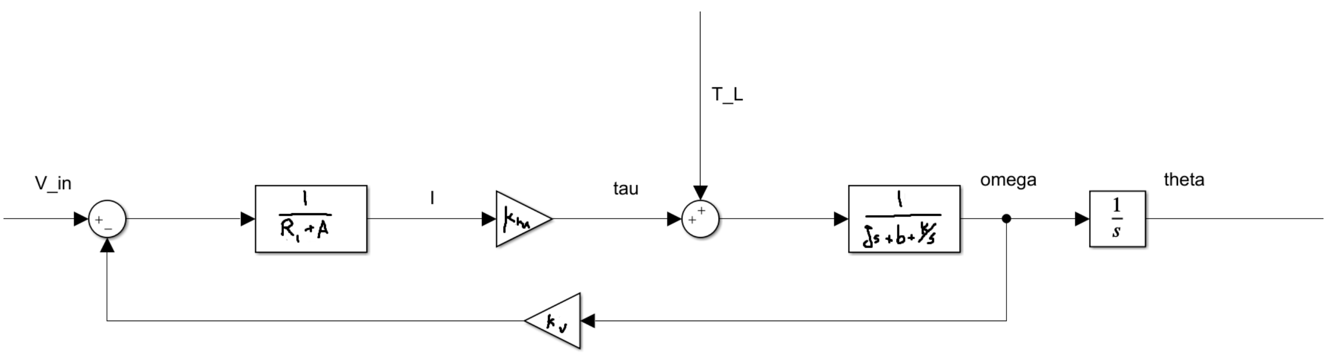
$$\text{معادلات الکتریکی} : V_{in} = R_1.I + \frac{1}{\frac{1}{Ls}+\frac{1}{R}+Cs}.I + K_v.\omega \tag{۴}$$

$$\text{معادلات مکانیکی} : K_m.I = b.\omega + Js.\omega + \frac{k}{s}.\omega + T_L \tag{۵}$$

در این بخش برای مدلسازی از حوزه لاپلاس استفاده شد. اگر مدلسازی با استفاده از معادلات دیفرانسیل هم انجام شود، قابل پذیرش است.

۲.۲ ب)

بلوک دیاگرام سیستم به صورت زیر می‌باشد:



شکل ۱: نمودار بلوکی موتور dc داده شده

۳.۲ ج)

در این قسمت باید از معادله ۵، I محاسبه شود. (از آنجایی که خواسته سوال این است که θ بر حسب R_1 محاسبه شود، پس باید از تاثیر T_L صرف نظر کنیم.)

$$I = \frac{Js + b + \frac{1}{s}}{K_m}.\omega \tag{۶}$$

معادله ۶ را در معادله ۴ جایگذاری می‌کنیم.

$$V_{in} = \left((R_1 + A)\,\frac{Js + b + \frac{k}{s}}{K_m} + K_v \right)\omega \tag{۷}$$

سپس $\omega = s.\theta$ را جایگذاری می‌کنیم:

$$V_{in} = \left((R_1 + A) \frac{Js + b + \frac{k}{s}}{K_m} + K_v \right) s.\theta \tag{۸}$$

در صورت سوال، ولتاژ ورودی را به صورت یک تابع پله فرض شده است:

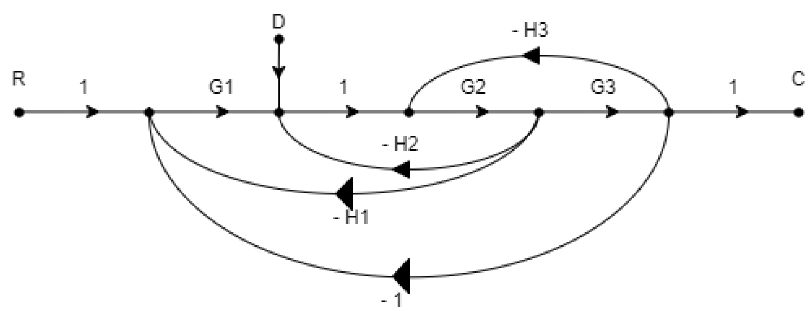
$$\frac{1}{s} = \left((R_1 + A) \left(Js^2 + bs + k \right) \frac{1}{K_m} + K_v s \right) \theta \tag{۹}$$

۳ پاسخ سؤال سوم

در این سوال، باید نمودار جریان سیگنال (SFG) را رسم کنیم، و بهره $\frac{C(s)}{R(s)}$ را محاسبه کنیم.

مرحله ۱: رسم SFG

در این مرحله، شما باید نمودار جریان سیگنال (SFG) را رسم نمایید.



شکل ۲: نمودار جریان سیگنال

مرحله ۲: محاسبه بهره $\frac{C(s)}{R(s)}$

اکنون بهره $\frac{C(s)}{R(s)}$ را با استفاده از فرمول میسون محاسبه می‌کنیم.

فرمول میسون

فرمول میسون به شرح زیر است:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\sum P_k \Delta_k}{\Delta}$$

مرحله ۳: محاسبه مسیرها و حلقه‌ها

یک مسیر رو به جلو P_1 داریم:

$$P_1 = G_1 G_2 G_3$$

دترمینان مسیر 1 $\Delta_1 = 1$ است.

در مرحله بعد حلقه‌ها را محاسبه می‌کنیم:

۱. $L_1 = 1 \cdot G_2 \cdot (-H_2)$

۲. $L_2 = G_1 \cdot 1 \cdot G_2 \cdot (-H_1)$

۳. $L_3 = G_2 \cdot G_3 \cdot (-H_3)$

۴. $L_4 = G_1 \cdot 1 \cdot G_2 \cdot G_3 \cdot (-1)$

مرحله ۴: محاسبه Δ

دترمینان کل Δ به شرح زیر است:

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4)$$

با جایگذاری مقادیر حلقه‌ها در فرمول:

$$\Delta = 1 - (-G_2H_2 - G_1G_2H_1 - G_2G_3H_3 - G_1G_2G_3)$$

مرحله ۵: محاسبه بهره F

با استفاده از فرمول میسون، بهره کلی F را محاسبه می‌کنیم:

$$F = \frac{P_1\Delta_1}{\Delta} = \frac{G_1G_2G_3}{1 - (-G_2H_2 - G_1G_2H_1 - G_2G_3H_3 - G_1G_2G_3)}$$

قسمت ۲: حذف اثر اعوجاج

برای حذف اثر اعوجاج در سیستم، ابتدا باید $\frac{C}{D}$ را پیدا کرده و سپس آن را صفر کنیم.

مرحله ۱: محاسبه $\frac{C}{D}$

بهره $\frac{C}{D}$ با استفاده از همان فرمول میسون به شرح زیر است:

$$\frac{C}{D} = \frac{P_1\Delta_1}{\Delta} = \frac{G_2G_3}{1 - (-G_2H_2 - G_1G_2H_1 - G_2G_3H_3 - G_1G_2G_3)}$$

مرحله ۲: قرار دادن $G_2G_3 = 0$

قرار دادن $G_2G_3 = 0$ به معنای حذف اعوجاج است، اما این غیرممکن است زیرا اگر G_2 یا G_3 صفر شوند، تابع اصلی صفر خواهد شد:

$$T = 0$$

بنابراین، حذف اثر اعوجاج در این سیستم غیرممکن است.

۴ پاسخ سؤال چهارم

نمودار بلوکی داده شده نیاز به یافتن تابع انتقال $\frac{Y_5}{Y_1} = \frac{Y_5}{Y_2}$ دارد. پاسخ به صورت عبارت زیر است:

$$T = \frac{G_1G_2G_3 + G_4G_3}{1 + G_1H_1 + G_3H_2 + H_4 + G_1G_2G_3H_3 + G_1H_1G_3H_2 + G_1H_1H_4}$$

این سوال را می‌توان با ساده‌سازی نمودار بلوکی یا استفاده از روش میسون حل کرد.

روش میسون

برای حل این سوال از روش میسون داریم:

مسیرهای پیشرو

این سیستم دو مسیر پیشرو دارد:

$$P_1 = G_1G_2G_3$$

$$P_2 = G_4G_3$$

حلقه ها

این سیستم چهار حلقه مستقل دارد:

$$L_1 = -G_1H_1$$

$$L_2 = -G_3H_2$$

$$L_3 = -H_4$$

$$L_4 = -G_1G_2G_3H_3$$

حلقه های دو به دو مستقل

دو حلقه دو به دو مستقل وجود دارد:

$$L_1L_2 = G_1H_1H_2G_3$$

$$L_1L_3 = H_1G_1H_4$$

محاسبه Δ_i

با حذف مسیرهای پیشرو و حلقه های باقی مانده :

$$\Delta_1 = 1$$

$$\Delta_2 = 1$$

محاسبه نهایی : Δ

$$\Delta = 1 + G_1H_1 + G_3H_2 + H_4 + G_1G_2G_3H_3 + G_1H_1G_3H_2 + G_1H_1H_4$$

تابع تبدیل نهایی

تابع تبدیل نهایی T بر اساس فرمول میسون :

$$T = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2}{\Delta}$$

$$T = \frac{G_1G_2G_3 + G_4G_3}{1 + G_1H_1 + G_3H_2 + H_4 + G_1G_2G_3H_3 + G_1H_1G_3H_2 + G_1H_1H_4}$$

پس از ساده سازی بلوک دیارگرام و یا روش میسون با توجه به دستورات متلب تابع تبدیل را ساده سازی میکنیم و مقادیر خواسته شده را بدست می آوریم:

دستورات MATLAB

```
% Define the symbolic variable 's'
s = tf('s');

% Define each transfer function
G1 = 1/s;
G2 = 2*s + 1;
G3 = 1/(s^2 + 1);
G4 = s/(s + 1);

H1 = 3/s;
H2 = (s - 1)/(s + 3);
H3 = s/(s^2 + 3*s + 1);
H4 = 1/(s + 2);

% Define the numerator and denominator of the transfer function
numerator = G1 * G2 * G3 + G4 * G3;
denominator = 1 + G1 * H1 + G3 * H2 + H4 + G1 * G2 * G3 * H3 + (-H1 * G1)*(-H2 * G2) + (-H1 * G1)*(-H4);

% Calculate the overall transfer functioncx
T = numerator / denominator;

% Display the overall transfer function
disp('Overall Transfer Function:');
T

% Calculate and display the poles
poles = pole(T);
disp('Poles of the Transfer Function:');
disp(poles);

% Calculate and display the zeros
zeros = zero(T);
disp('Zeros of the Transfer Function:');
disp(zeros);
```

شکل ۳: MATLAB CODES

تابع انتقال T

پس از حل نمودار بلوکی و اجرای آن MATLAB، تابع انتقال T به شکل زیر بدست می‌آید:

صورت T:

$$\begin{gathered} 3s^{21} + 42s^{20} + 253s^{19} + 886s^{18} + 2111s^{17} + 3850s^{16} + 5710s^{15} + \\ 6930s^{14} + 6985s^{13} + 5920s^{12} + 4073s^{11} + 2272s^{10} + 973s^{9} + 276s^{8} + 36s^{7} \end{gathered} \tag{۱۰}$$

مخرج T:

$$s^{23}+21s^{22}+164s^{21}+699s^{20}+2006s^{19}+4494s^{18}+8316s^{17}+12822s^{16}+17032s^{15}+ 19659s^{14}+19484s^{13}+17067s^{12}+12746s^{11}+8148s^{10}+4484s^{9}+1860s^{8}+663s^{7}+126s^{6} \quad (۱۱)$$

قطب‌های تابع انتقال

قطب‌های تابع انتقال T به صورت زیر است:

$$0,0,0,0,0,0,-9.8700,-3.0000,-2.6328,-2.1672,-2.0000,-1.0000,-0.0212+1.1912i,-0.0212-1.1912i,0+1.0000i,0-1.0000i,-0+1.0000i,-0-1.0000i,0+1.0000i,0-1.0000i,0.0486+0.8248i,0.0486-0.8248i,-0.3848 \quad (۱۲)$$

صفرهای تابع انتقال

صفرهای تابع انتقال T به صورت زیر است:

$$0,0,0,0,0,0,0,-3.0000,-3.0000,-2.6180,-2.0000,-2.0000, 0+1.0000i,0-1.0000i,-0+1.0000i,-0-1.0000i, 0+1.0000i,0-1.0000i,-0.5000+0.2887i,-0.5000-0.2887i,-0.3820 \quad (۱۳)$$