پاسخ تمرین شمارهٔ پنج

پرسش یک

فرکانس عبور فاز را به دست آورده و از روی اندازه در آن فرکانس حد بهره را تعیین میکنیم.

$$\angle G(j\omega_p) = -\pi \implies -\omega_p T - \frac{\pi}{2} = -\pi \implies \omega_p = \frac{\pi}{2T}$$

$$GM = \frac{1}{|G(j\omega_p)|} = \frac{\pi}{2kT}$$

حال فرکانس عبور بهره را محاسبه کرده و با توجه به آن حد فاز را تعیین می‌کنیم:

$$\left|\frac{k}{j\omega}e^{-Ts}\right| = 1 \implies \omega_g = k$$

$$PM = \pi - \frac{\pi}{2} - T\omega_g = \frac{\pi}{2} - kT$$

برای پایداری سیستم، حد بهره باید بزرگتر از یک و حد فاز هم بزرگتر از صفر باشد:

$$\frac{\pi}{2kT} > 1 \quad \& \quad \frac{\pi}{2} - kT > 0 \implies 2kT < \pi$$

پرسش دو

تابع تبدیل:

$$GH(s) = \frac{k(s+2)}{s^2}$$

حال، از روی تابع تبدیل $GH(s)$ و با توجه به $PM = 45^\circ$، فرکانس عبور بهره را تعیین می‌کنیم:

$$PM = 180^\circ + \angle GH(j\omega_g) = 45^\circ$$

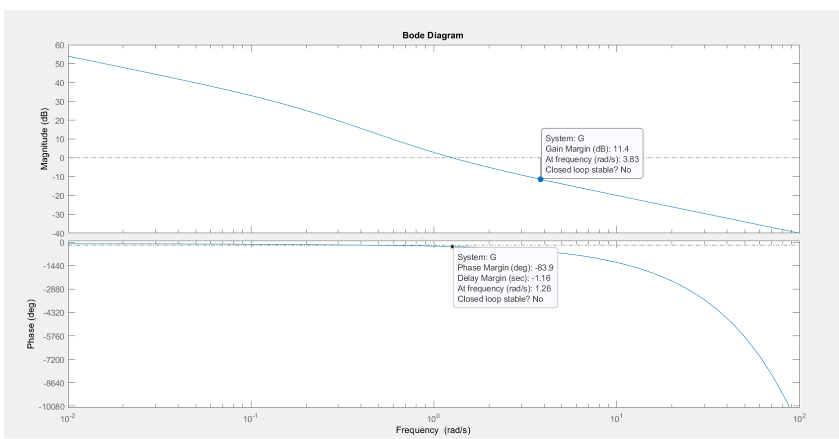
$$\angle GH(j\omega_g) = \tan^{-1}(0.5\omega_g) - 180^\circ = -135^\circ \implies \omega_g = 2$$

در فرکانس عبور بهره، اندازه تابع تبدیل حلقه باید برابر با یک باشد:

$$|GH(j\omega_g)| = 1 \implies k = \frac{\omega_g^2}{\sqrt{\omega_g^2+4}} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

پرسش سه

```
clc
clear all

s=tf('s');

G1=5/(5*s+1);
G2=exp(-2*s);
G3=(s+1)/s;
G=G1*G2*G3;

bode(G)

[GM, PM, PCF, GCF]=margin(G);

[20*log10(GM) PM PCF GCF]

%GM: Gain Margin
%PM: Phase Margin
%PCF: Phase crossover Frequency
%GCF: Gain Crossover Frequency
```



$$G(s) = \frac{5(s+1)e^{-2s}}{5(5s+1)}$$

فرکانس گوشه آن:

$$\omega = \frac{1}{5} = 0.2\,\text{rad/s}$$

به دلیل وجود عامل

$$\frac{1}{jw}$$

در فرکانس های پایین شیب $-20\,\text{dB/dec}$ باشد.

بعد از $\omega = 0.2$، شیب $-20\,\text{dB/dec}$ دیگر افزایش می‌یابد و $-40\,\text{dB/dec}$ می‌شود.

سپس در به علت وجود صفر در $\omega = 1$، شیب $+20\,\text{dB/dec}$ و در نهایت شیب به $-20\,\text{dB/dec}$ می‌رسد.

در فرکانس های پایین فاز از منفی نود درجه شروع و دلیل مقدار امگا به منفی ۱۸۰ می رسد.
حاشیه بهره $11.4\,\text{dB}$ و حاشیه فاز 83.9° است.
با توجه به اینکه سیستم دارای تأخیر است و حاشیه فاز بیشتر از مقدار مورد نیاز است، سیستم حلقه بسته ناپایدار است.

پرسش چهار

حل: حد فاز به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\left|\frac{4a^2}{(j\omega+a)^2}\right| = 1 \implies \frac{4a^2}{\omega^2+a^2} = 1 \implies \omega^2 = 3a^2 \implies \omega_g = \sqrt{3}a$$

$$\angle\frac{4a^2}{(j\omega+a)^2} = 0 - 2\tan^{-1}\frac{\omega_g}{a} = -2\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}a}{a}\right) = -120^\circ$$

$$PM = 180^\circ + (-120^\circ) = 60^\circ$$

زاویه تابع تبدیل در $\omega = \infty$ برابر -180° می‌شود بنابراین حد بهره بی نهایت است:

$$-2\tan^{-1}\frac{\omega_p}{a} = -180^\circ \implies \omega_p = \infty$$

$$GM = \frac{1}{|GH(j\omega_p)|} = \frac{1}{0} = \infty$$