پاسخ تمرین شمارهٔ سه

پرسش یک

در سیستم زیر

$$GH = \frac{K(s+a)}{(s+b)(s+2)^2(s+4)}$$

رابطه a، b، و K را چنان تعیین نمایید که سیستم پایدار باشد.

(الف) معادله مشخصه سیستم

$$s^4 + (8+b)s^3 + (20+8b)s^2 + (16+20b+k)s + 16b + a = 0$$

s^4	1	$20+8b$	$16b+a$	0
s^3	$8+b$	$16+20b+k$		
s^2	k_1	k_2		
s^1	k_3			
s^0	k_4			

که در آن:

$$k_1 = 144 + 8b(8+b) - k$$

$$k_2 = 16b + a$$

$$k_3 = 16 + 20b + k - (8+b)(16b+a)$$

$$k_4 = 16b + k$$

شرایط پایداری:

$$b > -8$$

$$k < 144 + 8b(8+b)$$

$$a < -16b$$

$$k > -(16 + 20b - (8+b)(16b+a))$$

پرسش دو

مکان هندسی ریشه ها را برای سیستم حلقه بسته با تابع تبدیل حلقه باز $G(s)=\frac{K(s+1)}{s^3+4s^2+5s}$ به ازای مقادیر مثبت K رسم کنید.
(تمامی روابط مربوط به نقطه شکست، زاویه خروج از قطب و ورود به صفر، مجانب ها محاسبه شوند)

در خصوص پایداری و عملکرد سیستم حلقه بسته به ازای تغییرات K از صفر تا بی‌نهایت بحث نمایید.
پاسخ:

(الف)

$$G(s)=\frac{k(s+1)}{s(s^2+4s+5)} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \text{قطب ها}: s=0, s=-2\pm j \\ \text{صفرها}: s=-1 \end{cases}$$

$$\frac{d}{ds}G(s)=0 \quad \Rightarrow \quad 2s^3+7s^2+8s+5=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} s=-2.19 & \text{برای} k<0 \\ s=-0.65\pm 0.84j \end{cases}$$

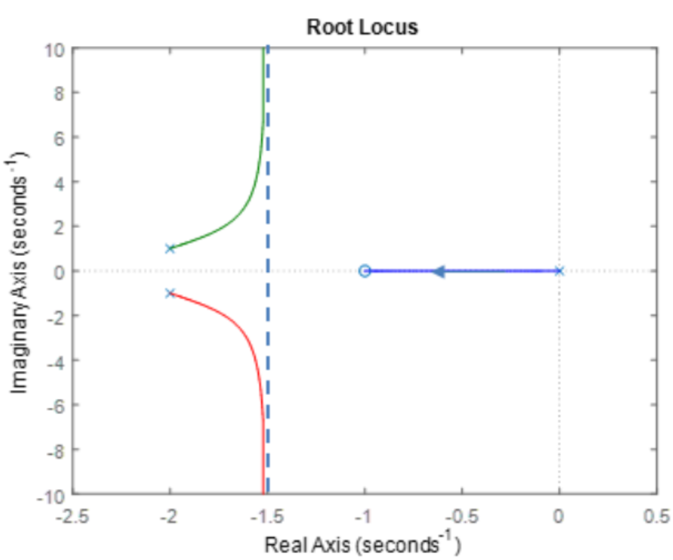
$$\sigma=\frac{(0-2+j-2-j)-(-1)}{2}=\frac{-3}{2}=-1.5$$

$$\theta=\frac{(2l+1)\pi}{2}=\begin{cases} \frac{\pi}{2} \\ \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$$135-\left((180-\tan^{-1}\frac{1}{2})+90+\theta\right)=-180 \quad \Rightarrow \quad \theta=71.56$$

زاویه خروج از قطب $-2+j$ برابر است با:

$$\theta=71.56$$



شکل ۱: مکان هندسی ریشه ها

(ب)

به ازای $k > 0$ سیستم همواره پایدار و زیرمیرا است.

پرسش سه

معادله مشخصه زیر را در نظر بگیرید:

$$s(s+5)(s+6)(s^2+2s+2)+k(s+3)=0$$

(الف) مکان هندسی ریشه‌های معادله مشخصه را به ازای تغییرات $k > 0$ رسم کنید.
(ب) به ازای چه بهره‌ای سیستم نوسانی می‌شود. فرکانس نوسان را نیز محاسبه کنید.

پاسخ:

(الف)

برای رسم مکان هندسی ریشه‌ها در ابتدا استانداردسازی انجام می‌دهیم:

$$G(s)H(s)=\frac{K(s+3)}{s(s+5)(s+6)(s^2+2s+2)}$$

این سیستم ۵ قطب و یک صفر دارد:

$$n=5,\ m=1$$

زاویه مجانب‌ها:

$$\theta=\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4},\ \frac{7\pi}{4}$$

محل برخورد مجانب‌ها:

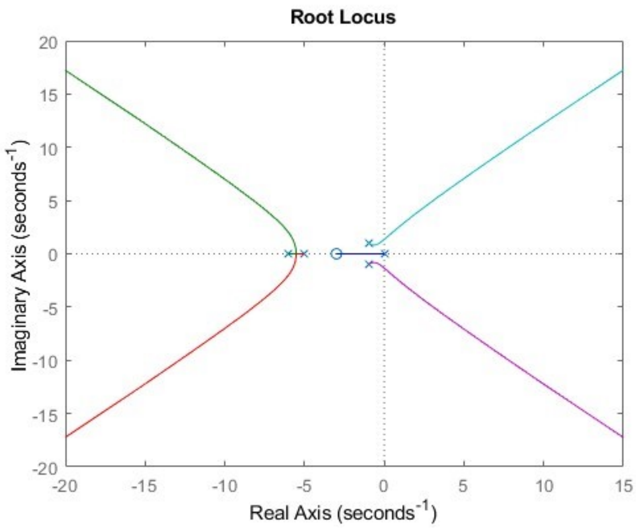
$$\sigma=\frac{0-5-6-2-(-3)}{4}=\frac{-5}{2}$$

نقطه شکست:

$$\frac{dk}{ds}=4s^2+54s^4+264s^3+568s^2+492s+180=0 \quad \Rightarrow \quad s=-5.52$$

زاویه خروج از قطب:

$$\theta=180^\circ+\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)-90^\circ-90^\circ-\tan^{-1}(1)-\tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)=-43.83^\circ$$



شکل ۲: مکان هندسی ریشه ها

جدول و شرایط پایداری

(ب)

s^5	1	54	$60+K$
s^4	13	82	$3K$
s^3	47.7	$0.769K$	0
s^2	$65.6-0.212K$	$3K$	0
s^1	$\frac{3940-105K-0.163K^2}{65.6-0.212K}$	0	0
s^0	$3K$	0	0

شرایط پایداری:

$$65.6-0.212K>0 \quad \text{or} \quad K<309$$

$$3940-105K-0.163K^2>0 \quad \text{or} \quad K<35$$

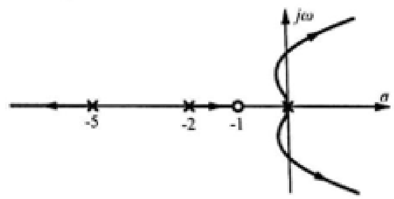
$$K>0$$

ناحیه پایداری به صورت $35 > K > 0$ خواهد بود. که به ازای $K = 35$ دو تا از قطب‌ها روی محور موهومی هستند، که مختصات آن از معادله کمکی بالای سطر صفر بدست می‌آید:

$$58.2s^2+105=0 \quad \Rightarrow \quad s=\pm j1.34$$

پرسش چهار

برای سیستمی که مکان هندسی ریشه‌های آن در شکل زیر داده شده است، مقدار بهره را طوری تعیین کنید که خطای حالت ماندگار به ورودی سهمی برابر 0.1 گردد.



شکل ۳: سوال۴

پاسخ:
با توجه به ریشه‌های داده شده تابع تبدیل حلقه باز به صورت زیر خواهد بود:

$$GH(s) = \frac{k(s+1)}{s(s+2)(s+5)^2}$$

و خطای حالت ماندگار سیستم نیز برابر است با:

$$e_{ss} = \frac{1}{k_u} = \frac{1}{\lim_{s\to 0} s^2 GH(s)} = \frac{10}{k}$$

برای اینکه $e_{ss} = 0.1$ شود باید $k = 100$ باشد، ولی به شرطی که سیستم پایدار باشد. با تشکیل معادله مشخصه سیستم و استفاده از روش راث پایداری سیستم را بررسی می‌کنیم.

$$\Delta(s) = s^4 + 7s^3 + 10s^2 + ks + k = 0$$

s^4	1	10	k
s^3	7	k	
s^2	$70-k$	$7k$	$\times 7$
s^1	$\frac{k(21-k)}{70-k}$		
s^0	$7k$		

برای پایداری باید علامت همه درایه‌های ستون اول مثبت باشد:

$$70 - k > 0 \quad \& \quad k(21-k) > 0 \Rightarrow 0 < k < 21$$

سیستم به ازای $K = 100$ ناپایدار است و حداقل خطای ماندگار برای این سیستم 0.476 می‌باشد.

پرسش پنج

سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$G(s) = \frac{5s+10}{s^2+4s+5}$$

الف) سیستم بالا را در محیط متلب تعریف کنید و صفرها و قطب‌های آن را به دست آورید.

ب) ورودی پله به سیستم اعمال کنید و پاسخ آن را رسم کنید. مقادیر زیر را محاسبه و تحلیل کنید:

- فراجهش
- زمان نشست
- زمان تاخیر
- زمان صعود
- خطای حالت ماندگار

ج) یک کنترلر PD در محیط سیمولینک طراحی کنید و مقادیر K_p و K_d را گزارش کنید.

د) دوباره ورودی پله به سیستم اعمال کنید و پاسخ سیستم را با استفاده از کنترلر PD رسم کنید.

ه) پاسخ سیستم در حالت‌های بدون کنترلر (بخش ب) و با کنترلر PD (بخش د) را مقایسه کنید و بهبودهای حاصل را تحلیل کنید.

همه موارد باید با تحلیل و عکس نتایج و محاسبات مورد نیاز همراه باشد.

(الف)

$$G(s) = \frac{5s+10}{s^2+4s+5}$$

صورت و مخرج تابع تبدیل را صفر قرار می‌دهیم:

$$5s+10=0 \quad \Rightarrow \quad s=-2$$

$$s^2+4s+5=0 \quad \Rightarrow \quad s=-2\pm j$$

بنابراین:

$$\text{صفر} s=-2, \quad \text{قطب ها} s=-2+j,\ s=-2-j$$

(ب) تحلیل پاسخ زمانی

۱. تابع تبدیل کل

برای ورودی پله واحد، تابع تبدیل کل برابر است با:

$$T(s) = G(s) = \frac{5s+10}{s^2+4s+5}$$

سیستم از نوع درجه دوم با مشخصات زیر است:

$$\omega_n = \sqrt{5} = 2.236, \quad \zeta = \frac{4}{2\omega_n} = \frac{4}{4.472} \approx 0.894$$

۳. محاسبه پارامترهای زمانی

۱. زمان نشست (T_s):

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{0.894 \times 2.236} \approx 2.0 \text{ ثانیه}$$

۲. زمان تاخیر (T_d):

$$T_d = \frac{1.4}{\zeta\omega_n} = \frac{1.4}{0.894 \times 2.236} \approx 0.7 \text{ ثانیه}$$

۳. زمان صعود (T_r): برای یک سیستم درجه دوم:

$$T_r = \frac{\pi - \arccos(\zeta)}{\omega_d}$$

که در آن:

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}, \quad \zeta = \frac{4}{2\omega_n}, \quad \omega_n = \sqrt{5}$$

ω_n و ζ:

$$\omega_n = \sqrt{5} \approx 2.236, \quad \zeta = \frac{4}{2\omega_n} = \frac{4}{4.472} \approx 0.894$$

ω_d:

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$\zeta^2 = (0.894)^2 = 0.799236, \quad 1-\zeta^2 = 0.200764$$

$$\sqrt{0.200764} \approx 0.448, \quad \omega_d = 2.236 \times 0.448 \approx 1.002$$

$\arccos(\zeta)$:

$$\arccos(0.894) \approx 0.467$$

T_r:

$$T_r = \frac{\pi - \arccos(\zeta)}{\omega_d}$$

$$T_r = \frac{3.14159 - 0.467}{1.002} \approx \frac{2.674}{1.002} \approx 2.67 \text{ ثانیه}$$

۴. حداکثر فراجهش (M_p):

محاسبه حداکثر فراجهش (M_p)

$$M_p = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100$$

که در آن:

$$\zeta = 0.894$$

محاسبات مرحله به مرحله:

$\sqrt{1-\zeta^2}$:

$$\zeta^2 = (0.894)^2 = 0.799236, \quad 1-\zeta^2 = 0.200764$$

$$\sqrt{1-\zeta^2} = \sqrt{0.200764} \approx 0.448$$

$-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$:

$$-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = -\frac{\pi(0.894)}{0.448}$$

$$-\frac{\pi(0.894)}{0.448} = -\frac{2.809}{0.448} \approx -6.27$$

$e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$:

$$e^{-6.27} \approx 0.0018$$

M_p:

$$M_p = 0.0018 \times 100 = 0.18 \,(\text{درصد})$$

۵. خطای حالت ماندگار (e_{ss}):

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+G(s)} = \frac{1}{1+K_p}$$

که K_p بهره DC سیستم است و برابر است با:

$$K_p = G(0) = \frac{10}{5} = 2$$

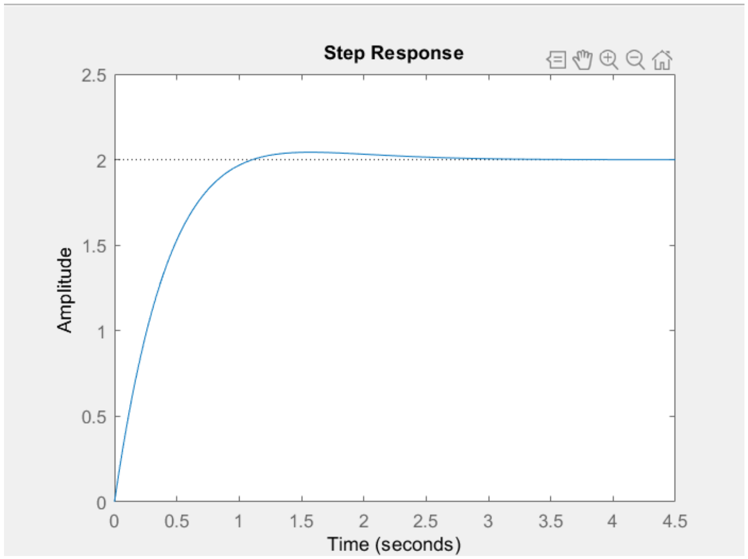
$$e_{ss} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3} \approx 0.333$$

نتایج نهایی

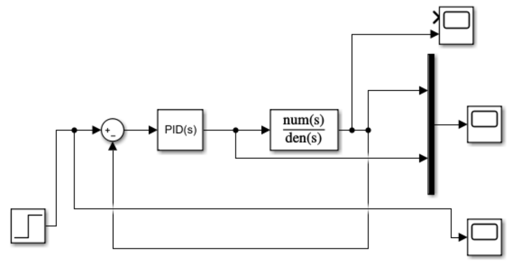
- زمان نشست: ثانیه $T_s \approx 2.0$
- زمان تاخیر: ثانیه $T_d \approx 0.7$
- زمان صعود: ثانیه $T_r \approx 2.67$
- حداکثر فراجهش: $M_p \approx 0.18\%$
- خطای حالت ماندگار: $e_{ss} \approx 0.333$

```
>> Q4
Settling time (2%): 2 seconds
Settling time (5%): 2.5 seconds
Delay time: 0.7 seconds
Rise time: 2.6779 seconds
Maximum overshoot: 0.18674 percent
Steady-state error: 0.33333
>>
```

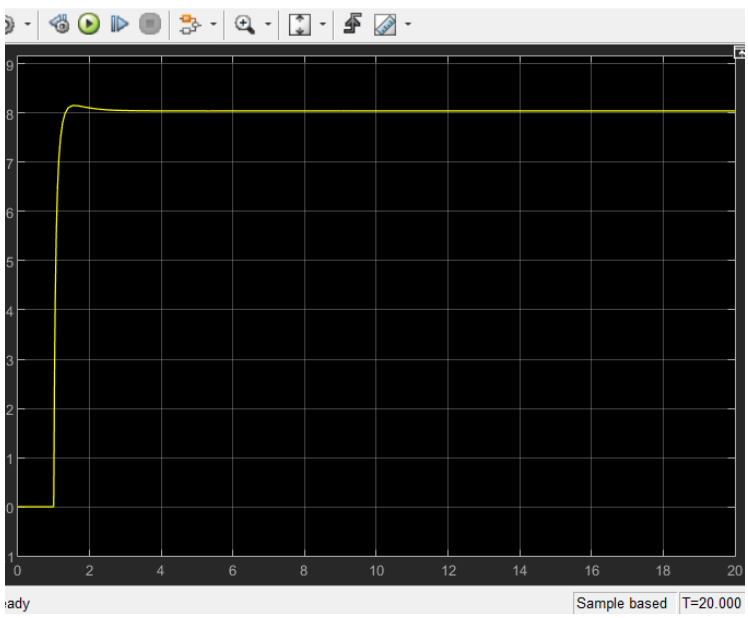
شکل ۴: محاسبه توسط کد متلب



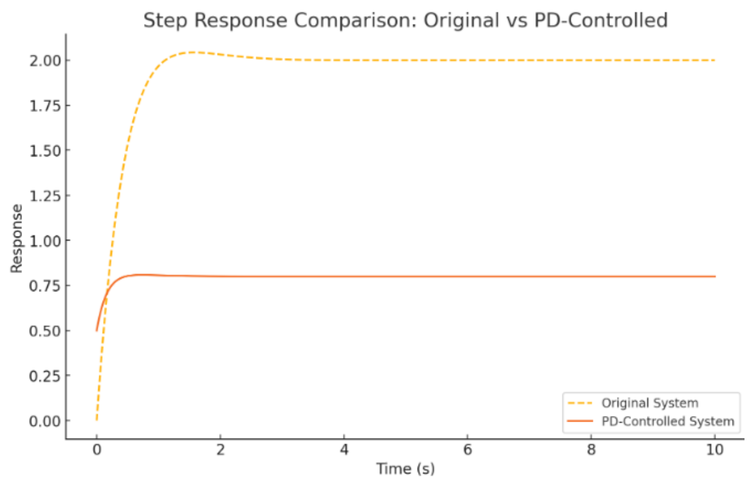
شکل ۵: پاسخ سیستم به ورودی پله



شکل ۶: کنترلر طراحی شده در سیمولینک



شکل ۷: پاسخ سیستم همراه با کنترلر طراحی شده به ورودی پله



شکل ۸: پاسخ سیستم همراه با کنترلر طراحی شده به ورودی پله

مقایسه پاسخ سیستم بدون کنترلر PD و با کنترلر PD

در این بخش، پاسخ پله سیستم اصلی و سیستم کنترل‌شده با کنترلر PD مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج نشان‌دهنده تأثیر مثبت کنترلر PD بر عملکرد سیستم است.

پاسخ سیستم اصلی - بدون کنترلر PD

پاسخ سیستم اصلی دارای ویژگی‌های زیر است:

- زمان خیز - Time Rise : سیستم زمان بیشتری برای رسیدن به مقدار نهایی نیاز دارد.
- نوسانات: پاسخ سیستم دارای نوسانات قابل توجهی است. در این سیستم چون اورشوت کم است زیاد نوسانات به چشم نمیاید.
- خطای حالت پایدار - Steady-State Error مقدار نهایی سیستم از مقدار مطلوب فاصله دارد.

پاسخ سیستم کنترل‌شده با PD

پس از اعمال کنترلر PD، ویژگی‌های زیر در پاسخ سیستم مشاهده می‌شود:

- بهبود زمان خیز: سیستم سریع‌تر به مقدار نهایی می‌رسد.
- کاهش نوسانات: کنترلر PD باعث کاهش دامنه و شدت نوسانات می‌شود.
- کاهش خطای حالت پایدار: پاسخ سیستم به مقدار نهایی مطلوب نزدیک‌تر شده است
- پایداری بهتر: رفتار سیستم پایدارتر و بدون نوسان‌های ناخواسته است.

پرسش شش (امتیازی)

برای مدلی با تابع تبدیل $G(s) = \frac{0.2}{s(s+1)}$ کنترل‌کننده‌ای پس‌فاز طراحی کنید به صورتی که $\zeta = 0.45$ و حداقل ضریب خطا سرعت (k_v) برابر با 10 باشد.

مقدار بهره و از معادله‌های قبل به‌دست‌آمده، پس برای محاسبه ضریب خطا صورت داریم:

$$k_c = \lim_{s\to 0} sKG(s) \Rightarrow \lim_{s\to 0} 6.17\frac{0.2}{s+1} = 1.25 < 10$$

مطابق با رابطه بالا مشخص است با این تابع تبدیل نمی‌توان به ضریب خطا صورت خواسته شده رسید.

$$\alpha = \frac{\text{ضریب مطلوب}}{\text{ضریب واقعی}} = \frac{10}{1.25} = 8 = \frac{z}{p}$$

در طراحی کنترل‌کننده، پس فاز نسبت بخش حقیقی قطب موثر به بخش حقیقی صفر کنترل‌کننده باید بین 10 تا 30 باشد. اگر نسبت ۲۰ در نظر گرفته شود، مقدار صفر کنترل‌کننده برابر $\frac{-1}{20}$ می‌شود. با توجه به نسبت قطب و صفر کنترل‌کننده، باید مقدار قطب کنترل‌کننده برابر با $\frac{-1}{160}$ می‌گردد.

در نهایت کنترل‌کننده مورد نظر به صورت زیر در می‌آید:

$$p = \frac{z}{8}$$

در نهایت کنترل‌کننده مورد نظر به صورت زیر در می‌آید:

$$C(s) = 6.17\frac{s+\frac{1}{20}}{s+\frac{1}{160}}$$