

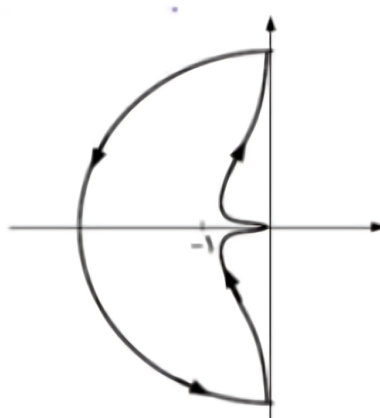


پاسخ تمرین شماره چهار

پاسخ یک

s	$+\infty$	$+j\infty$	$-j\infty$
GH	$\frac{K}{Ts^2}$	$0\angle -180^\circ$	$0\angle 180^\circ$

s	0	$+j0$	$-j0$
GH	$\frac{K}{-s}$	$\omega\angle -270^\circ$	$\omega\angle 270^\circ$



شکل ۱: نمودار نایکوئیست سوال اول

پاسخ دو

از آن جایی که نوع سیستم یک است، خطای حالت ماندگار به ورودی $u(t)$ صفر می‌باشد. بنابراین کافیت خطای حالت ماندگار به ورودی $tu(t)$ را محاسبه نماییم. ابتدا k را چنان می‌یابیم که حد بهره سیستم ۱.۱ باشد. لذا:

$$G(s) = \frac{1.1K}{s(s+1)(s+10)}, \quad H(s) = 1 \implies G(s)H(s) = \frac{1.1K}{s(s+1)(s+10)}$$

معادله مشخصه:

$$\Delta(s) = 1 + G(s)H(s) = s^3 + 11s^2 + 10s + 1.1K = 0$$

از شرط پایداری داریم:

$$110 - 1.1K = 0 \implies K = 100$$

حال ثابت خطای سرعت را به دست می‌آوریم:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s(s+1)(s+1)} = \frac{K}{10} = 100$$

بنابراین:

$$e_s = \frac{R}{K_v} = \frac{1}{10} = 0.1$$

پاسخ سه

تحلیل تبدیل حلقه باز سیستم

تابع تبدیل حلقه باز سیستم عبارت است از:

$$G(s)H(s) = \frac{5(s+1)e^{-2s}}{s(5s+1)} \quad (1)$$

با جایگذاری $s = j\omega$ داریم:

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{5(j\omega+1)e^{-2j\omega}}{j\omega(5j\omega+1)} \quad (2)$$

بنابراین معادله‌های دامنه و زاویه فاز عبارت‌اند از:

$$20 \log |G(j\omega)H(j\omega)| = 20 \log \left| \frac{5(j\omega+1)e^{-2j\omega}}{j\omega(5j\omega+1)} \right| \quad (3)$$

و یا:

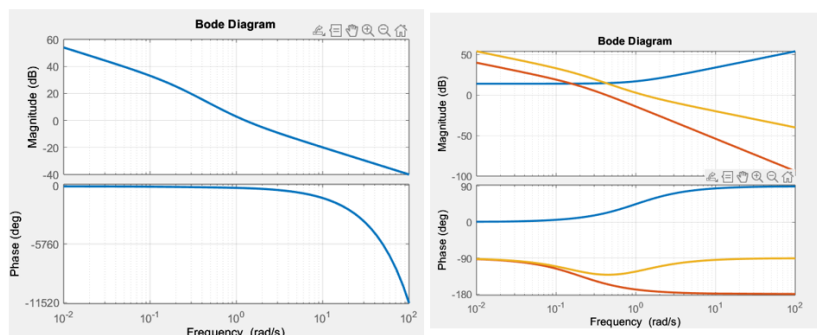
$$L = 20 \log 5 + 20 \log \sqrt{\omega^2 + 1} - 20 \log \omega - 20 \log \sqrt{(5\omega)^2 + 1} \quad (4)$$

زاویه فاز به صورت زیر است:

$$\tan^{-1} \frac{1}{\omega} - 2\omega - \tan^{-1} \frac{\omega}{0} - \tan^{-1} \frac{5\omega}{1} = -90 - 2\omega - \tan^{-1} \frac{5\omega}{1} + \tan^{-1} \frac{1}{\omega} \quad (5)$$

با جایگذاری مقادیر ω از ۰.۰۱ تا ۵ در رابطه، جدول زیر از معادله‌های بالا تشکیل می‌شود:

Degree	dB	w
-90.69	67.96	0.002
-93.44	53.97	0.01
-146.61	25.12	0.2
-238.29	2.84	1
-672.02	-13.82	5



شکل ۲: نمودار بود سوال سه

پاسخ چهار

۱. تابع تبدیل

تابع تبدیل داده شده به صورت زیر است:

$$G(s) = \frac{-(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}{s^3(s+100)}$$

با جایگذاری $s = j\omega$ خواهیم داشت:

$$G(j\omega) = \frac{-(j\omega+1)(j\omega+2)(j\omega+3)(j\omega+4)}{(j\omega)^3(j\omega+100)}$$

۲. محاسبه اندازه و فاز

اندازه و فاز $G(j\omega)$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

صورت

$$(j\omega + k) = \sqrt{\omega^2 + k^2} \angle \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{k} \right), \quad k = 1, 2, 3, 4$$

اندازه صورت:

$$|| = \prod_{k=1}^4 \sqrt{\omega^2 + k^2}$$

فاز صورت:

$$\angle = \sum_{k=1}^4 \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{k} \right)$$

مخرج

$$(j\omega)^3 = \omega^3 \angle -270^\circ, \quad (j\omega + 100) = \sqrt{\omega^2 + 100^2} \angle \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{100} \right)$$

اندازه مخرج:

$$|| = \omega^3 \sqrt{\omega^2 + 100^2}$$

فاز مخرج:

$$\angle = -270^\circ + \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{100} \right)$$

کل تابع

اندازه $G(j\omega)$:

$$|G(j\omega)| = \frac{\prod_{k=1}^4 \sqrt{\omega^2 + k^2}}{\omega^3 \sqrt{\omega^2 + 100^2}}$$

فاز $G(j\omega)$:

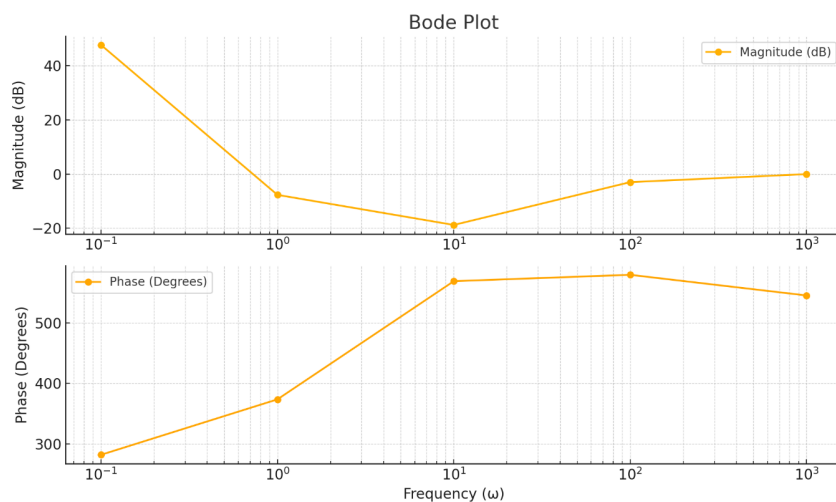
$$\angle G(j\omega) = \sum_{k=1}^4 \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{k} \right) - 270^\circ - \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{100} \right)$$

۳. محاسبه برای فرکانس‌های خاص

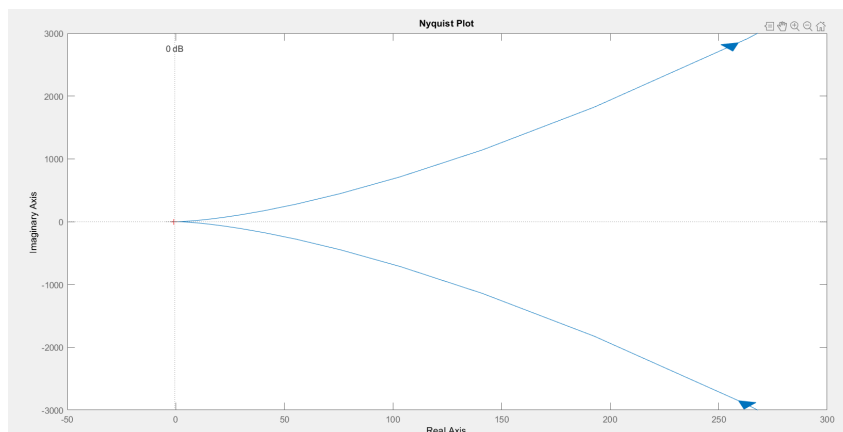
محاسبات اندازه و فاز برای فرکانس‌های

$\omega = 0.1, 1, 10, 100, 1000$

Phase	Magnitude	Frequency
۲۸۱.۸۵	۴۷.۶۶	۰.۱
۳۷۳.۴۶	-۷.۶۹	۱
۵۶۸.۷۶	-۱۸.۸۱	۱۰
۵۷۹.۲۷	-۲.۹۹	۱۰۰
۵۴۵.۱۳	-۰.۰۴	۱۰۰۰



شکل ۳: نمودار بودی سوال ۴



شکل ۴: نمودار نایکوئیست

پاسخ پنج

مرحله اول:

از نمودار بودی، فرکانس‌های گوشه به شرح زیر تعیین می‌شوند:

$\omega_{c1} = 10$ رادیان بر ثانیه، شیب از ۰ دسی‌بل در دقیقه به $+20$ دسی‌بل در دقیقه تغییر می‌کند. بنابراین این یک صفر است و عبارت مربوطه به صورت $(1 + j\frac{\omega}{10})$ خواهد بود.

$\omega_{c1} = 100$ رادیان بر ثانیه، شیب از 20 دسی‌بل در دقیقه به 0 دسی‌بل در دقیقه تغییر می‌کند. بنابراین این یک قطب است و عبارت مربوطه به صورت $\frac{1}{1+j\frac{\omega}{100}}$ خواهد بود.

شیب اولیه ۰ دسی‌بل در دقیقه است، بنابراین نوع سیستم ۰ می‌باشد.

مقدار اولیه به صورت

$$20 \log \left(\frac{K}{\omega} \right) = -20$$

خواهد بود.

بنابراین:

$$K = 10^{-1}$$

$$K = 0.1$$

بنابراین، تابع انتقال سیستم به صورت زیر خواهد بود:

$$G(j\omega) = \frac{0.1(1 + j\frac{\omega}{10})}{1 + j\frac{\omega}{100}}$$

که معادله ساده شده به صورت:

$$G(j\omega) = \frac{10 + j\omega}{100 + j\omega}$$

مرحله

محدوده‌های منحنی نایکوئیست به شرح زیر جایگزین می‌شوند:

$$G(j\omega) = \frac{10 + j\omega}{100 + j\omega} \times \frac{100 - j\omega}{100 - j\omega}$$

که به صورت زیر ساده می‌شود:

$$G(j\omega) = \frac{1,000 + \omega^2}{100^2 + \omega^2} + j \frac{90\omega}{100^2 + \omega^2}$$

و عبارت فاز به صورت زیر خواهد بود:

$$\angle G(j\omega) = \tan^{-1} \left(\frac{90\omega}{1000 + \omega^2} \right)$$

بنابراین:

$$G(+j0) = 0.1 + j0 \quad (\text{ربع اول}) \quad = 0.1 \angle 0^\circ$$

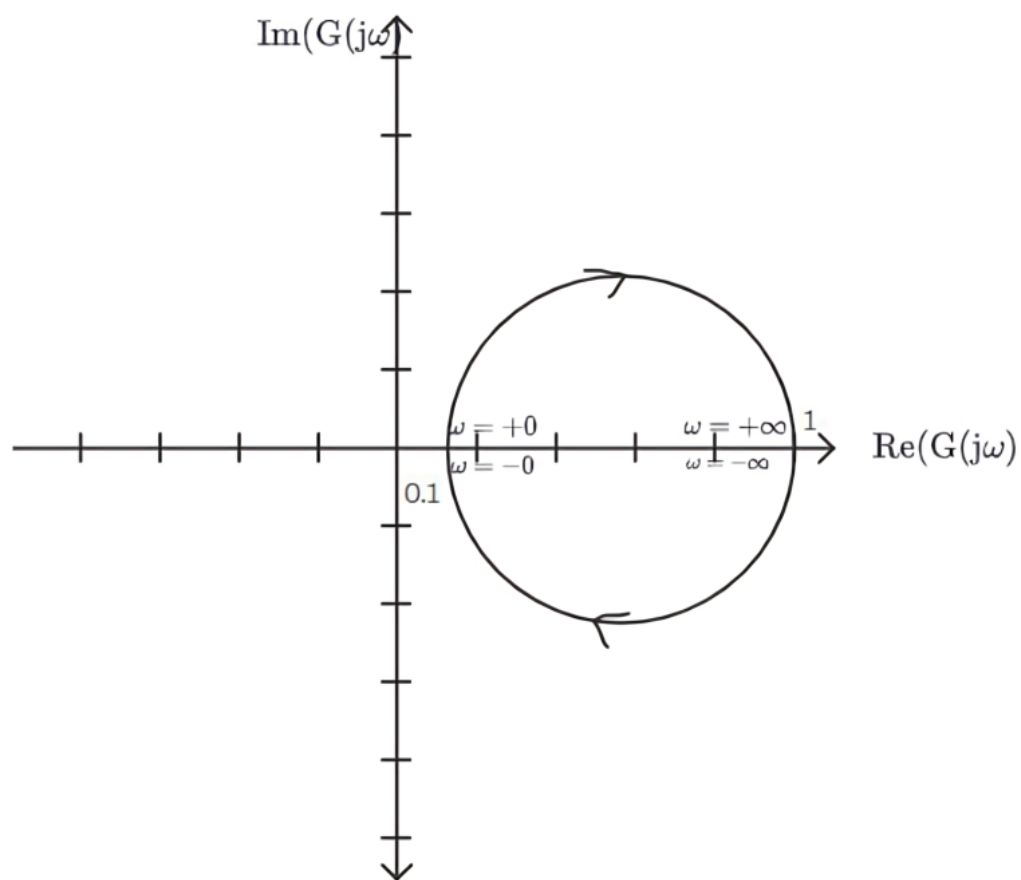
$$G(+j\infty) = 1 + j0 \quad (\text{ربع اول}) \quad = 1 \angle 0^\circ$$

نمودار نایکوئیست به طور متقارن نسبت به محور حقیقی است.

بنابراین:

$$G(-j0) = 0.1 - j0$$

$$G(-j\infty) = 1 - j0$$



شکل ۵: نمودار نایکوئیست