



## پاسخ تمرین شماره شش

پرسش یک

تابع تبدیل سیستم برابر است با:

$$G(s) = \frac{10}{s(s^2 + 2s + 5)(s + 3)}$$

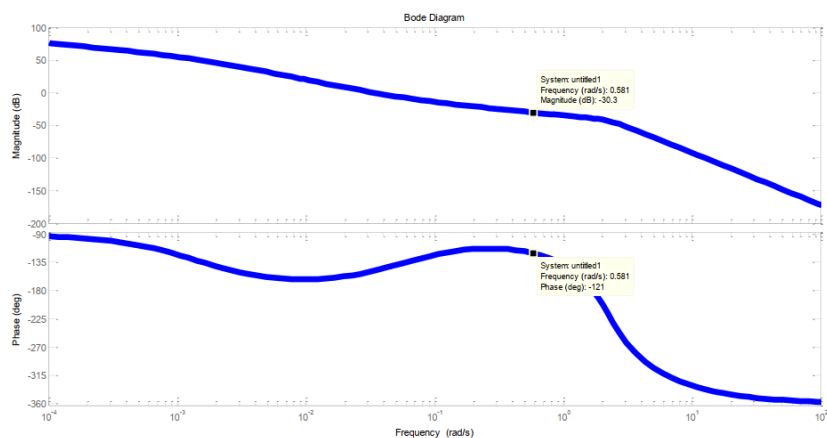
$$k_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) \cdot s = \frac{2}{3}$$

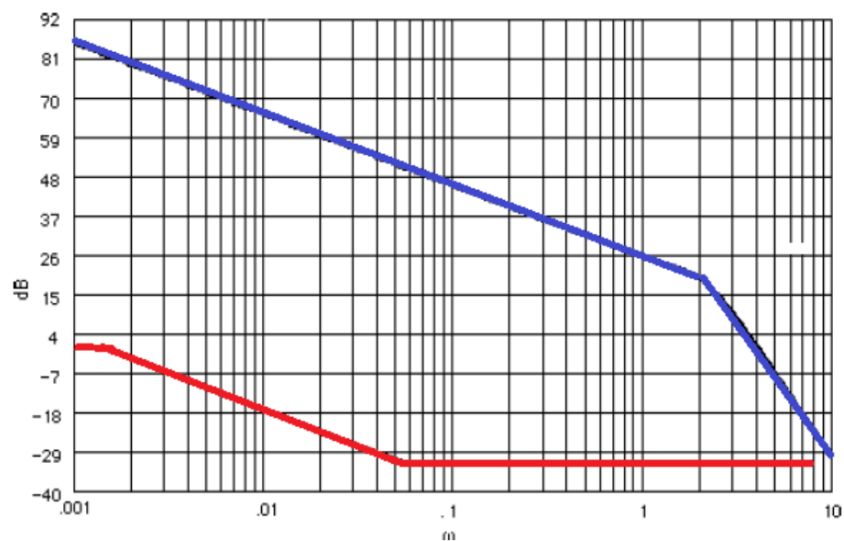
$$k_p \times 30 = 20$$

$$G(s) = \frac{300}{s(s^2 + 2s + 5)(s + 3)}$$

برای فراجش 11% مقدار حد فاز برابر با 57.48 است. با اصلاح آن حد فاز را حدود 65 می‌شود که در فرکانس 0.58 rad/s رخ می‌دهد. مقدار بهره در این فرکانس برابر با -39 dB است. با رسم کردن دامنه جبران‌ساز پس فاز در شکل زیر تابع تبدیل آن به صورت زیر به دست می‌آید.

$$G_C(s) = 25.86 \times 10^{-3} \cdot \frac{s + 0.058}{s + 0.0015}$$





پرسش دو

پاسخ ساده‌ترین کنترل‌کننده می‌تواند ثابت بهره باشد. بهره مورد نیاز برای رسیدن به پهنای مورد نظر برابر است با:

$$k = 40.2 \text{ dB} = 102.33$$

$$\text{Ph.M.} = 180 - 162 = 12^\circ$$

اما در این حالت حاشیه فاز برابر است با:

$$\phi_{\max} = 32 - 12 = 20^\circ$$

که کمتر از حاشیه فاز مورد نیاز است. پس حداقل کنترل‌کننده، پس فاز مورد نیاز است. این کنترل‌کننده بایستی  $20^\circ$  درجه فاز در فرکانس 10 رادیان بر ثانیه به سیستم اضافه کند. لذا:

$$\phi_{\max} = 32 - 12 = 20^\circ$$

$$\alpha = \frac{1 + \sin 20^\circ}{1 - \sin 20^\circ} = 0.342$$

$$\sqrt{\alpha} = 1.85, \quad \omega_T = 10$$

$$T = \frac{1}{\omega_T \sqrt{\alpha}} = 0.07$$

$$k = 40.2 \text{ dB} = 102.33$$

$$C(s) = \frac{k\alpha Ts + 1}{\sqrt{\alpha}Ts + 1} = \frac{0.14s + 1}{0.07s + 1} \times 71.65$$

اما در مورد خطای ماندگار چون در فرکانس صفر فاز سیستم برابر  $-20^\circ$  درجه و شیب بهره  $-20$  است، مشخص است که سیستم حلقه باز دارای انتگرال گیر بوده و از نوع یک است. لذا به صورت کلی خطای ماندگار آن نسبت به ورودی پله برابر صفر است و نیازی به کنترل کننده پس فاز و فاز وجود ندارد. حدی از نوع PI را اضافه نماییم.

پرسش سه

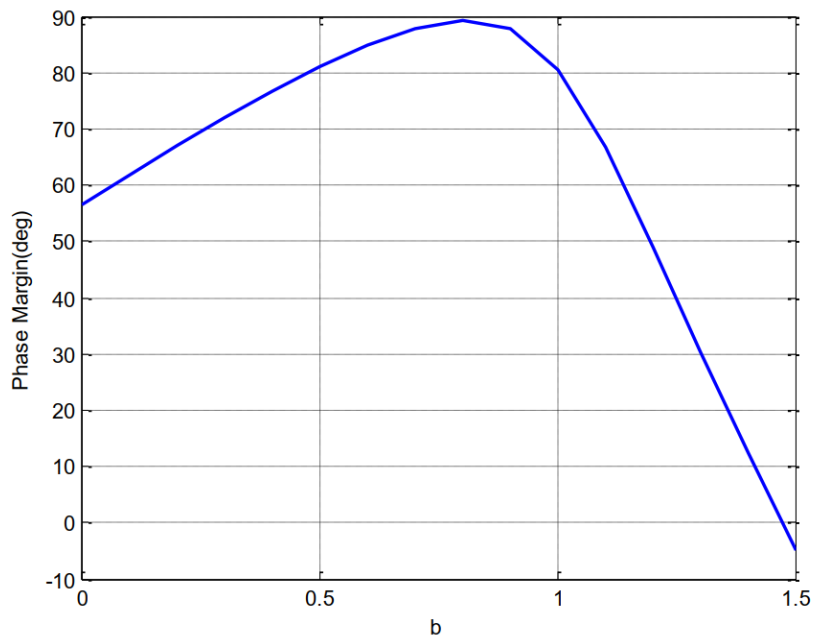
در این سیستم داریم:

$$G_C(s)G(s) = \frac{K_2(bs+1)e^{-0.4s}}{s(0.2s+1)}$$

که در آن مطلوب این است که  $P.O < 20\%$  که معادل  $\zeta = 0.4$  و یا  $PM = 40^\circ$  است.  $K_I = 1$  است.

$$b = \frac{k_I}{k_P}$$

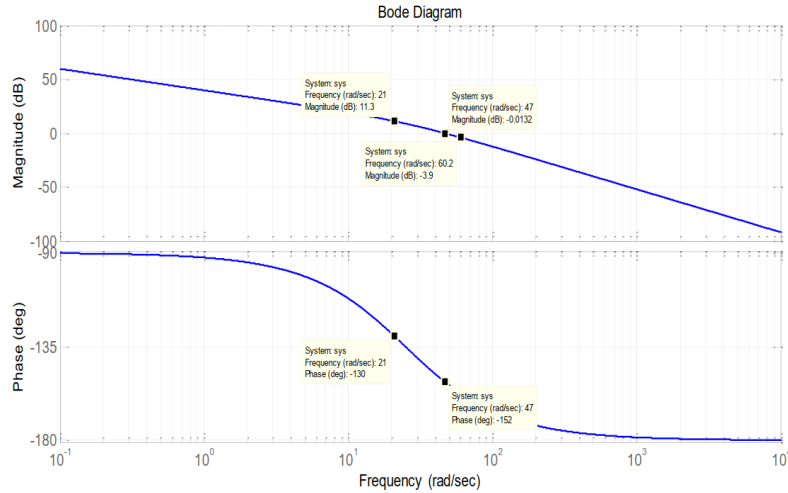
در نظر می گیریم  $b$  و  $K_2$  را بدست می آوریم. برای این  $PM$  سیستم را بر حسب  $b$  رسم می کنیم که در شکل زیر نشان داده شده است.



چنانچه دیده می شود مقادیر مختلفی را برای  $b$  می توان در نظر گرفت. حال  $b = 0.1$  را انتخاب می کنیم:

$$G_C(s)G(s) = \frac{(0.1s+1)e^{-0.4s}}{s(0.2s+1)}$$

مقدار حد فاز  $PM = 62^\circ$  بنابراین  $\zeta = 0.62$  و  $P.O = 8.3\%$ ، مقدار فراجش و زمان نشست واقعی سیستم  $T_s = 3.25$  و  $P.O = 4.2\%$  می باشد.



با توجه به شکل بالا فرکانس عبور بهره  $\omega_1 = 47 \text{ rad/s}$  و حاشیه فاز سیستم  $28^\circ$  می‌باشد. برای رسیدن به حاشیه فاز  $45^\circ$  باید  $17^\circ$  افزایش فاز ایجاد کنیم. برای اینکه حاشیه اطمینان هم رعایت کرده باشیم  $\phi_m = 25^\circ$  برمی‌گزینیم.

$$a = \frac{1 + \sin 25^\circ}{1 - \sin 25^\circ} = 2.46$$

بهره‌ی شبکه‌ی ماکزیمم پیش‌فاز در فرکانس پیشنهادی  $3.9 \text{ dB}$  است. فرکانس  $\omega_m$  را به گونه‌ای برمی‌گزینیم که در آن بهره‌ی سیستم جبران نشده  $-3.9 \text{ dB}$  باشد. این فرکانس  $\omega_m = 60 \text{ rad/s}$  است. پس:

$$\frac{1}{aT} = 38.25, \quad \frac{1}{T} = \omega_m \sqrt{a} = 94.1$$

در نتیجه:

$$G_C(s) = \left(1 + \frac{s}{38.25}\right) \frac{1}{1 + \frac{s}{94.1}}$$

این مسئله را می‌توان با یک جبران‌ساز پ‌سفاز به آن دست یافت. به این منظور فرکانس عبور بهره را باید به جایی برد که در آن فاز سیستم:

$$-180^\circ + \phi_m + 5^\circ = -130^\circ$$

می‌شود.  $5^\circ$  به عنوان حاشیه اطمینان به کار رفته است. با توجه به نمودار فرکانس مورد نظر  $\omega_1 = 21 \text{ rad/s}$  است. در آن فرکانس بهره  $11 \text{ dB}$  است و جبران‌ساز پ‌سفاز باید این مقدار را جبران کند. پس:

$$-20 \log \beta = -11 \text{ dB} \Rightarrow \beta = 3.55.$$

صفر جبران‌ساز را یک دهه قبل از فرکانس عبور بهره جدید یعنی  $2.1 \text{ rad/s}$  قرار می‌دهیم. قطب در فرکانس:

$$\frac{2.1}{\beta} = \frac{2.1}{3.55} = 0.59 \text{ rad/s}.$$

قرار دارد. در نتیجه جبران ساز لازم به صورت زیر است:

$$G_C(s) = \left(1 + \frac{s}{2.1}\right) \frac{1}{1 + \frac{s}{0.59}}.$$

پرسش پنجم

مشخصات سیستم

سیستم به صورت زیر داده شده است:

$$G(s) = \frac{10N}{s(s+1)(s+10)}$$

که  $N = 20$  مقدار ثابتی است.

فرآیند طراحی کنترل کننده PD

برای طراحی کنترل کننده، PD مراحل زیر انجام شد:

استخراج مشخصات طراحی

- زمان رسیدن به ۹۵ درصد مقدار نهایی  $T_{95} < 3$  ثانیه.

- عدم وجود فراجهش ( $\text{Overshoot} = 0$ ).

انتخاب پارامترهای طراحی

- نسبت میرایی ( $\zeta = 1$ ) انتخاب شد تا سیستم به صورت بحرانی میرا باشد و فراجهشی وجود نداشته باشد.

- فرکانس طبیعی سیستم ( $\omega_n$ ) بر اساس رابطه زیر محاسبه شد:

$$\omega_n = \frac{3.9}{T_{95}}$$

- زمان  $T_{95} = 3$  ثانیه استفاده شد.

محاسبه ضرایب کنترل کننده

با توجه به مشخصات فوق، کنترل کننده PD به صورت زیر طراحی شد:

- ضریب تناسبی  $K_p$ :

$$K_p = \frac{\omega_n^2}{10}$$

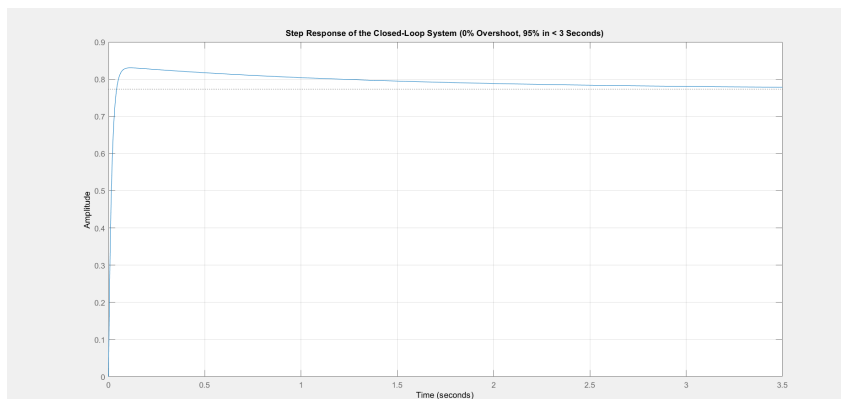
- ضریب مشتقگیر  $K_d$ :

$$K_d = \frac{2\zeta\omega_n}{10}$$

شبیه سازی سیستم حلقه بسته

سیستم حلقه بسته طراحی شده شبیه سازی و بررسی شد. پاسخ سیستم تأیید کرد که شرایط طراحی کاملاً برآورده شده است.

## نتایج شبیه‌سازی



ب

برای تحلیل و طراحی کنترل‌کننده  $PD$ ، مراحل زیر انجام شده است:

تحلیل حالت پایدار و تعیین  $k_p$

با توجه به سیستم داده شده:

$$G(s) = \frac{10N}{s(s+1)(s+10)}$$

که در آن  $N = 20$  است. تابع تبدیل کنترل‌کننده  $PD$  نیز به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C(s) = k_p + k_d s$$

برای حالت پایدار، خطای حالت پایدار برای ورودی پله واحد به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_v}, \quad \text{که در آن} \quad K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)C(s)$$

با جایگذاری:

$$G(s) \approx \frac{10N}{s(s+1)} \quad (\text{برای فرکانس‌های پایین})$$

و:

$$C(s) = k_p,$$

داریم:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{10N}{s(s+1)} \cdot k_p = 10Nk_p.$$

با توجه به شرط  $e_{ss} = 5\%$ :

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_v} = 0.05 \implies K_v = 20.$$

بنابراین:

$$10Nk_p = 20 \implies k_p = \frac{20}{10 \times 20} = 0.05.$$

تحلیل دینامیکی برای  $k_d$

حال تابع تبدیل حلقه بسته به شکل زیر است:

$$T(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \frac{(k_p + k_d s) \cdot \frac{10N}{s(s+1)(s+10)}}{1 + (k_p + k_d s) \cdot \frac{10N}{s(s+1)(s+10)}}.$$

برای بررسی پایداری و مشخصات سیستم با تغییر  $k_d$ ، سیستم حلقه باز به صورت زیر محاسبه می شود:

$$G_{OL}(s) = C(s) \cdot G(s) = (k_p + k_d s) \cdot \frac{10N}{s(s+1)(s+10)}.$$

نتایج حاصل از شبیه سازی دز متلب برای  $k_d = 0.5$  به شرح زیر است: - حاشیه فاز  $(PM)$ :  $96.26^\circ$  - حاشیه بهره  $(GM)$ : بی نهایت ( $\infty$ ) - فرکانس عبور فاز  $(W_{cp})$ :  $99.47 \text{ rad/s}$

جمع بندی

در این تحلیل: مقدار  $k_p = 0.05$  بر اساس خطای حالت پایدار تعیین شد. مقدار  $k_d = 0.5$  برای بررسی دینامیک سیستم انتخاب شد. تغییر  $k_d$  در بازه  $[0, 0.5]$  می تواند مشخصات بیشتری از سیستم ارائه دهد و شما بهتر روند تغییرات را با پلات کردن پاسخ مشاهده و تحلیل کنید.

در ادامه نیز باید توجه کرد پایداری یک سیستم با حاشیه فاز آن ارتباط عکس دارد. برای کاهش اورشوت ناچار به افزایش حاشیه فاز و کاهش زتا هستیم و این از روی پاسخ های بدست آمده برای بخش الف و ب و با جای گذاری مقادیر متفاوت از زتا و دیگر پارامترهای مربوط به پایداری مشهود است.