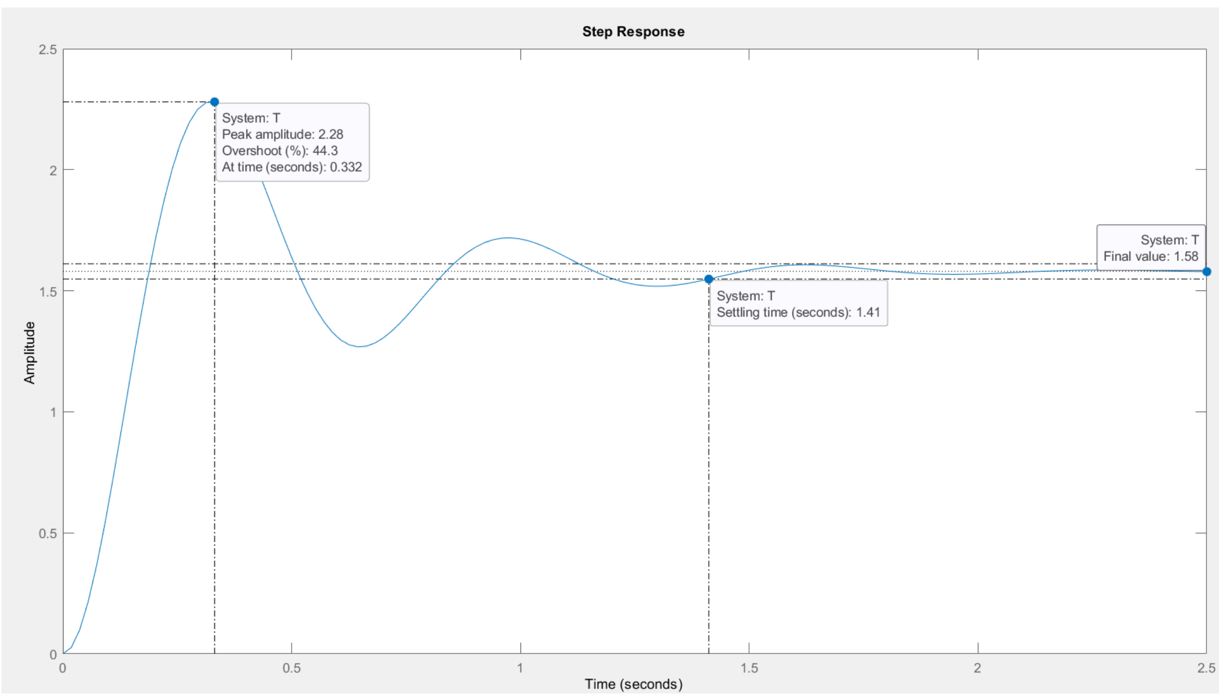
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی تهران

کنترل خطی (پاییز ۱۴۰۳)، حمیدرضا تقی راد

پاسخ تمرین سری دوم

پرسش یک

در یک سیستم حلقه بسته با فیدبک واحد قصد شناسایی سیستم حلقه باز مسیر پیشرو را داریم(شکل ۱). با دادن ورودی پله با دامنه واحد به سیستم حلقه بسته به فرم $T(s)=\frac{k\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n+\omega_n^2}$، سیگنال خروجی به شکل زیر به دست آمده است. تابع تبدیل سیستم حلقه باز مسیر پیشرو را به دست آورید سپس با استفاده از نرم افزار متلب درستی پاسخ خود را چک کنید و سیستم حلقه باز و حلقه بسته را با هم مقایسه کنید. (معیار زمان نشست را ۲٪در نظر بگیرید)



پاسخ:

$$M_p = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \rightarrow\ 0.443 =\ e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \rightarrow\ Ln(0.443) =\ \frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}} \Rightarrow\ \xi \approx 0.2508$$

$$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} \rightarrow 1.41 = \frac{4}{0.25 * \omega_n} \Rightarrow\ \omega_n = 11.311$$

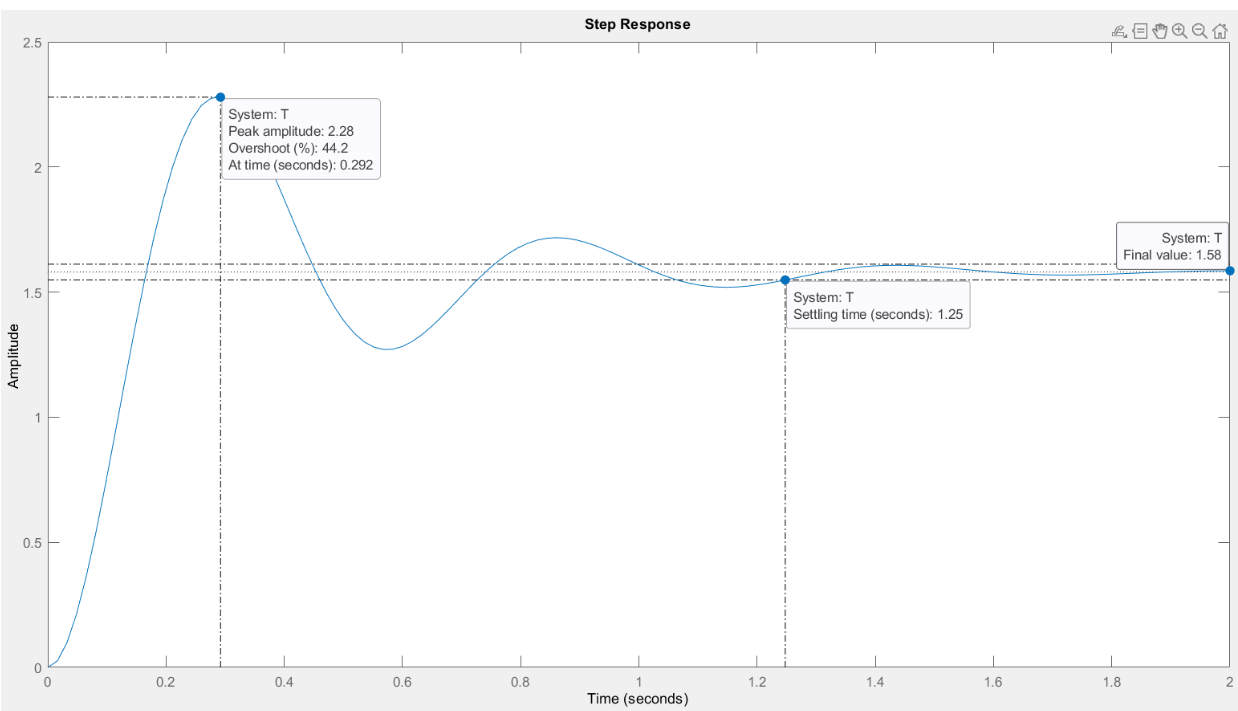
با توجه به مقادیر به دست آمده معادله مشخصه حلقه بسته به صورت زیر میشود:

$$T(s) = \frac{k(11.311)^2}{s^2 + 2(0.25)(11.347)s + (11.311)^2}$$

مقدار نهایی پاسخ 1.58 است و طبق قضیه مقدار نهایی لاپلاس داریم:

$$T(0) = y_{ss} = \frac{k(11.311)^2}{(11.311)^2} = 1.58\ \rightarrow\ k\ = 1.58$$

که پاسخ با توجه به مقادیر فوق به صورت زیر خواهد شد. تفاوت اندک در مقادیر گزارش شده روی نمودار زیر به دلیل تقریب در اعشار و گرد کردن برخی مقادیر توسط متلب نظیر مقدار فراجهش میباشد و مشکلی نیست.

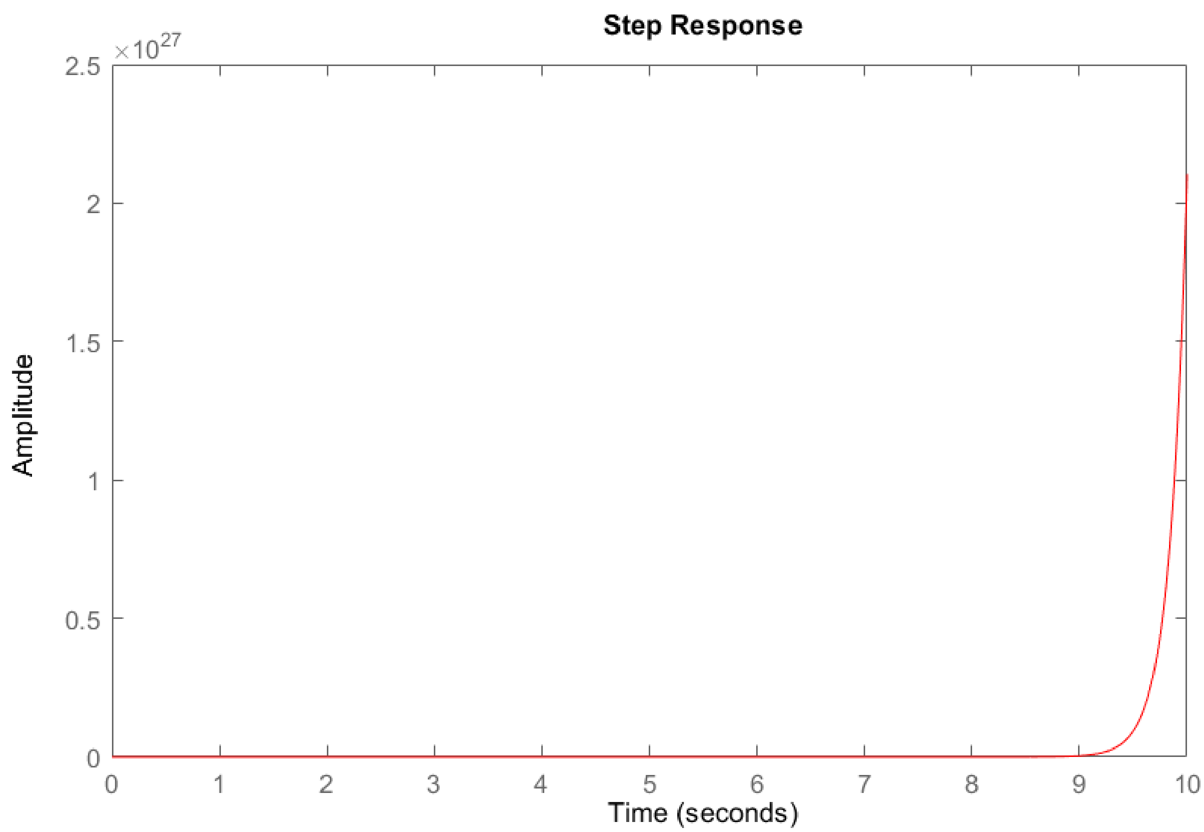


خواسته سوال سیستم حلقه باز است. لذا داریم:

$$T = \frac{G}{1+G} \rightarrow G = \frac{T}{1-T}$$

$$G = \frac{202.1}{s^2 + 5.674s - 74.2}$$

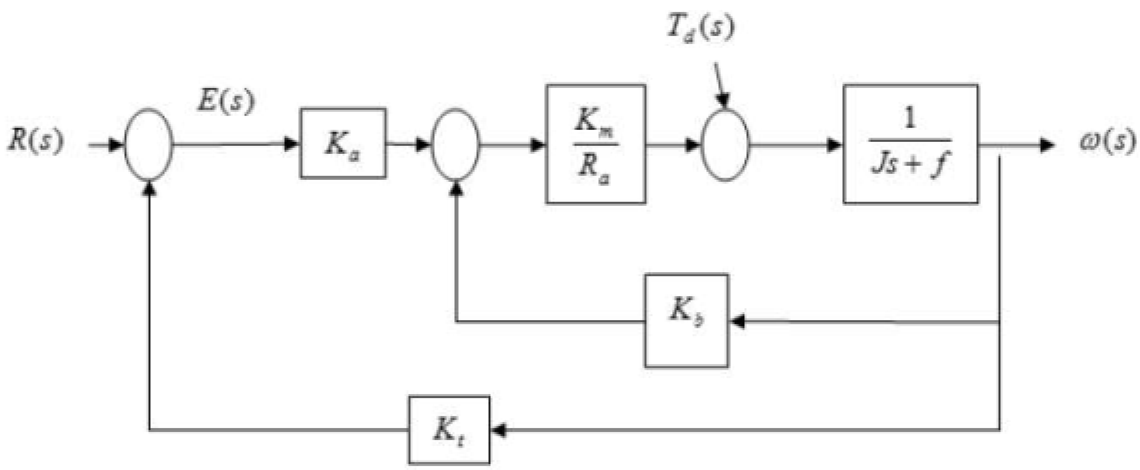
پاسخ سیستم حلقه باز به صورت زیر است. همان گونه که از معادله نیز برداشت میشود یک قطب در سمت راست محور دارد و سیستم ناپایدار است. سیستم حلقه بسته سبب پایداری این سیستم شده است.



پرسش دو

یک سیستم کنترل سرعت موتور *dc* دارای بلوک دیاگرامی به صورت شکل ۲ می‌باشد و مقادیر پارامتر های آن برابر با $k_t = 1,\ k_b = 0.5,\ f = 0.2,\ J = 1,\ R_a = 2, k_m = 0.8, ka = 1$ است.

(توجه کنید برای حلقه باز $(k_t = 0)$ و برای حلقه بسته $(k_t = 1)$ در نظر بگیرید.)



شکل ۲

الف) تابع تبدیل را در دو حالت حلقه باز $(k_t = 0)$ و حلقه بسته $(k_t = 1)$ بدست آورید. (حل باید به صورت دستی باشد)

ب) پاسخ سیستم حلقه باز به ورودی پله و پاسخ سیستم حلقه بسته به ورودی پله را در یک شکل رسم نموده و خطای حالت ماندگار، ثابت زمانی، زمان خیز، زمان نشست را با هم مقایسه و تحلیل نمایید. حل این قسمت با استفاده از متلب انجام شود.

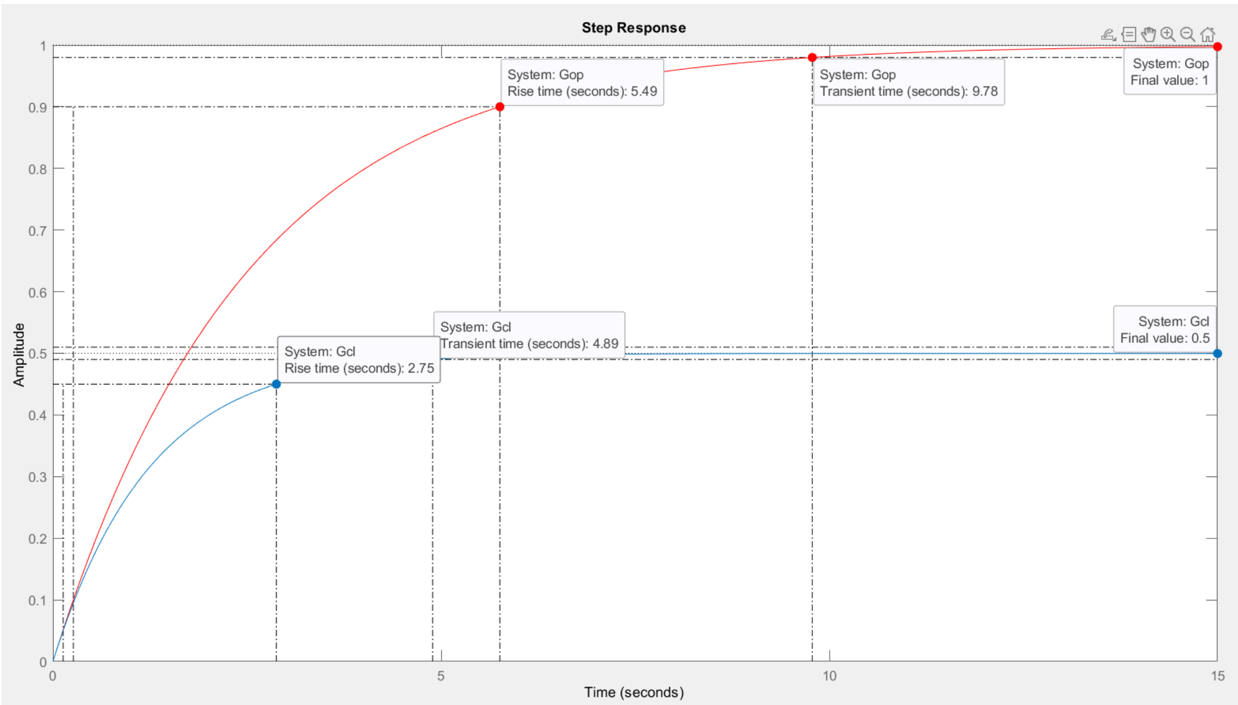
پاسخ:

الف)

$$G_{ol} = \frac{\frac{0.4}{s+0.2}}{1+\frac{0.2}{s+0.2}} = \frac{0.4}{s+0.4}$$

$$G_{cl} = \frac{\frac{0.4}{s+0.2}}{1 + \frac{0.4*0.5}{s+0.2} + \frac{0.4*1}{s+0.2}} = \frac{0.4}{s+0.8}$$

کد متلب پیوست شده است.



در شکل بالا نمودار قرمز رنگ مربوط به سیستم حلقه باز و نمودار آبی رنگ مربوط به سیستم حلقه بسته می باشد. ثابت زمانی سیستم مرتبه اول برابر ضریب s^1 مخرج هنگامی که ضریب s^0 مخرج برابر یک باشد).

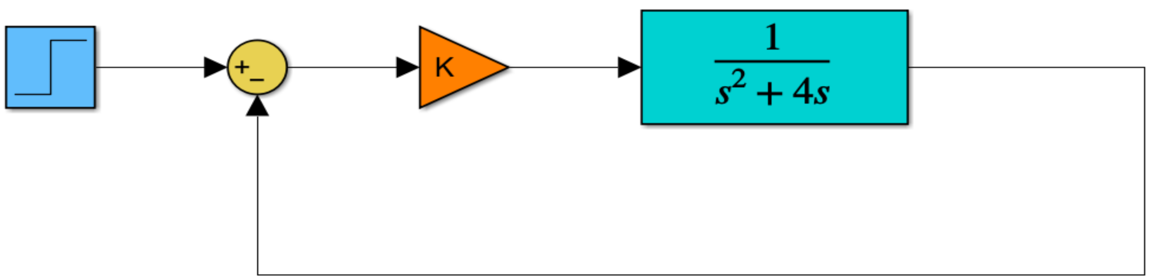
خطای حالت ماندگار	ثابت زمانی(T)	زمان خیز(tr)	زمان نشست(ts)	
صفر	2.5 ثانیه	5.49 ثانیه	9.78 ثانیه	سیستم حلقه باز (Gop)
صفر	1.25 ثانیه	2.75 ثانیه	4.89 ثانیه	سیستم حلقه بسته(Gcl)

با توجه به اینکه ورودی پله واحد و بهره DC در Gop برابر 1 می باشد و در Gcl برابر 0.5 می باشد و مقدار نهایی در این دو تابع تبدیل با توجه به نمودار دقیقا برابر حاصل ضرب بهره DC این دو تابع تبدیل و مقدار نهایی تابع ورودی می باشد پس خطای حالت ماندگار برابر صفر می باشد.

هم چنین زمان خیز و نشست و ثابت زمانی سیستم حلقه باز از حلقه بسته بیشتر است. علت این امر استفاده از فیدبک منفی می باشد که تمامی این اتفاقات از اثرات اعمال فیدبک مناسب به یک سیستم حلقه باز است.

پرسش سه

سیستم زیر را در نظر بگیرید:



شکل ۳

الف) به ازای $k=16$ خطای حالت ماندگار، فراجهش و زمان نشست را برای ورودی پله به دست آورید.

ب) چنانچه خواسته های مسئله به صورتی باشد که $M_p = 5\%$ ، محدوده k را مشخص کنید.

ج) پاسخ سیستم مربوط به قسمت ب را شبیه سازی و نتایج را تحلیل نمایید.

د) به ازای $k = 4$ قدار اورشوت را بدست آورید و پاسخ خود را تحلیل نمایید.

پاسخ:

الف)

$$G_{cL} = \frac{\frac{k}{s^2+4s}}{1+\frac{k}{s^2+4s}} = \frac{k}{s^2+4s+k} \text{ و } k=4 \Rightarrow \frac{16}{s^2+4s+16}$$

$$\omega_n = 4, \xi = 0.5$$

سیستم زیر میرا(میرای ضعیف) است.

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s} * s * \frac{1}{1+\frac{16}{s^2+4s}} = 0$$

مقدار خطا را این گونه هم میتوانستیم حساب کنیم، چون فیدبک سیستم واحد است، سیستم نوع اول میباشد و خطا به ورودی پله واحد برابر با صفر میباشد.

$$M_p = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = e^{\frac{-\pi}{\sqrt{3}}} = 0.163 \Rightarrow 16.3\%$$

$$T_s = \begin{cases} 2\% \Rightarrow \dfrac{4}{\xi\omega_n} = 2 \\ 5\% \Rightarrow \dfrac{3}{\xi\omega_n} = 1.5 \end{cases}$$

ب)

$$G_{cL} = \frac{k}{s^2+4s+k}$$

$$\Rightarrow \omega_n = \sqrt{k}, \xi = \frac{2}{\sqrt{k}}$$

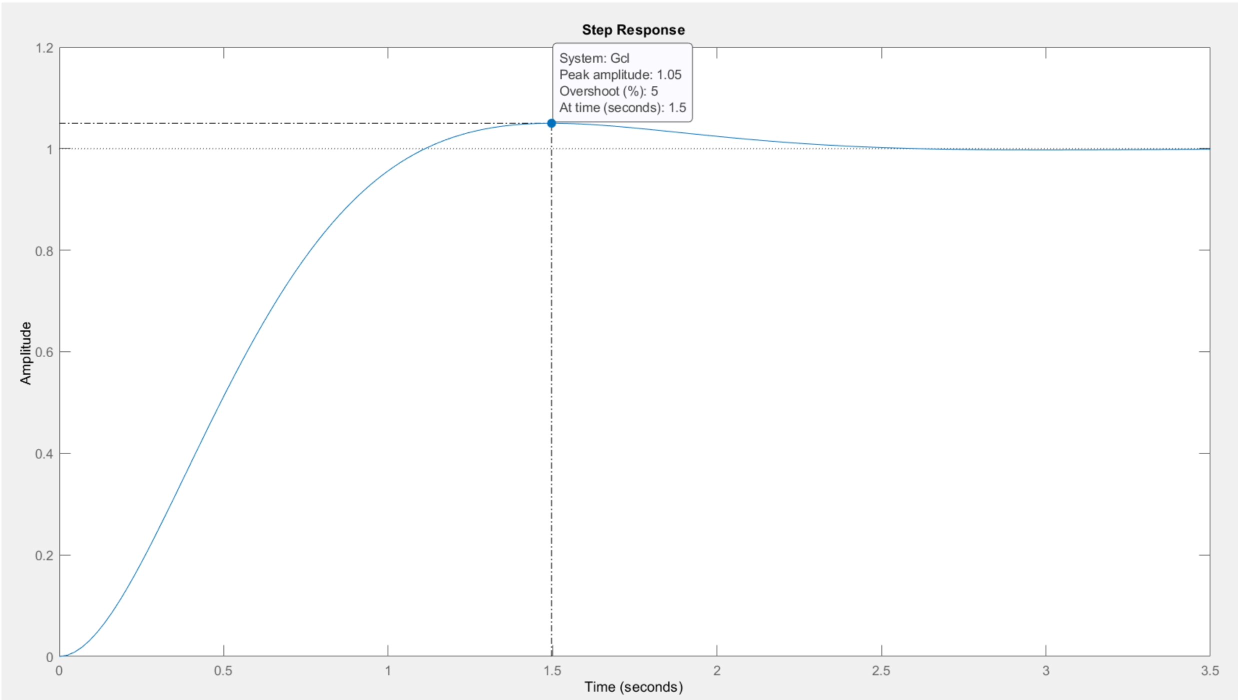
$$M_P = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 0.05 \Rightarrow \xi = 0.69210, \xi = \frac{2}{\sqrt{k}} \Rightarrow k = 8.399$$

از مورد $\xi = \frac{2}{\sqrt{k}}$ استفاده کردیم و یک مقدار برای k بدست آمد. حال باید از $\omega_n = \sqrt{k}$ استفاده کنیم. فرمولی که در آن ω_n وجود دارد و مربوط به آورشوت است زمان آورشوت است.

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} \Rightarrow 1.01 = \frac{\pi}{\sqrt{k}\sqrt{1-\left(\frac{2}{\sqrt{k}}\right)^2}} \Rightarrow k = 13.675$$

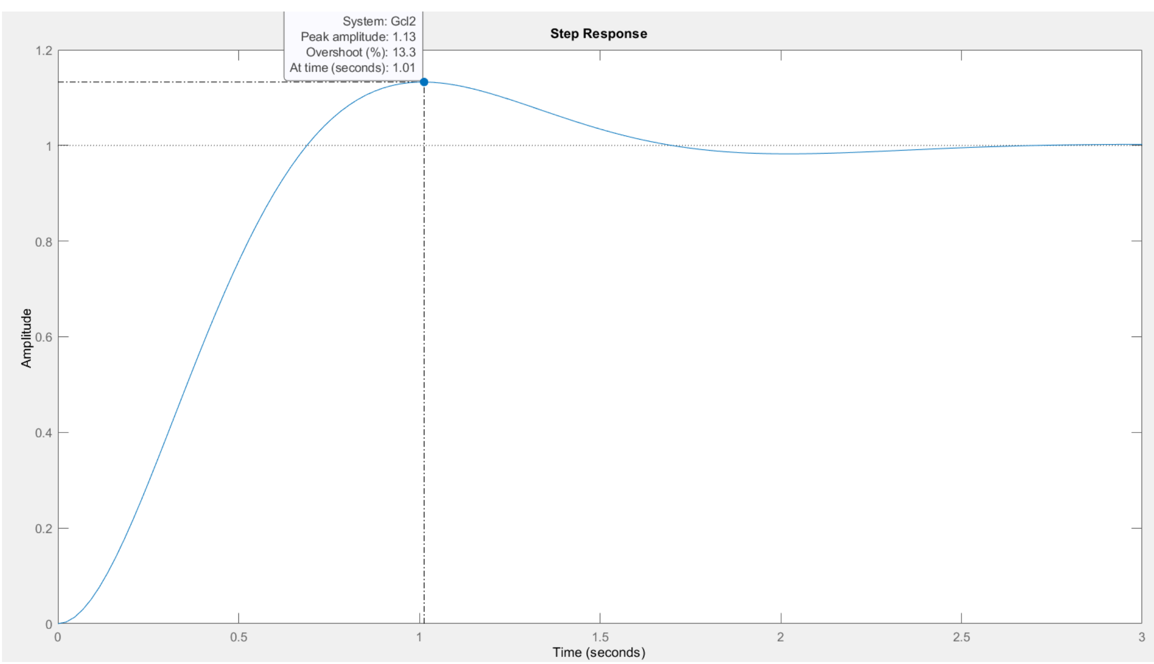
پس با توجه به خواسته های سوال دو مقدار برای K به دست می آید که برای مصالحه بین این دو خواسته میانگین دو مقدار را حساب میکنیم. $k = 11.037$

ج) ابتدا پاسخ را برای k = 8.399 رسم میکنیم(کد پیوست شده است)

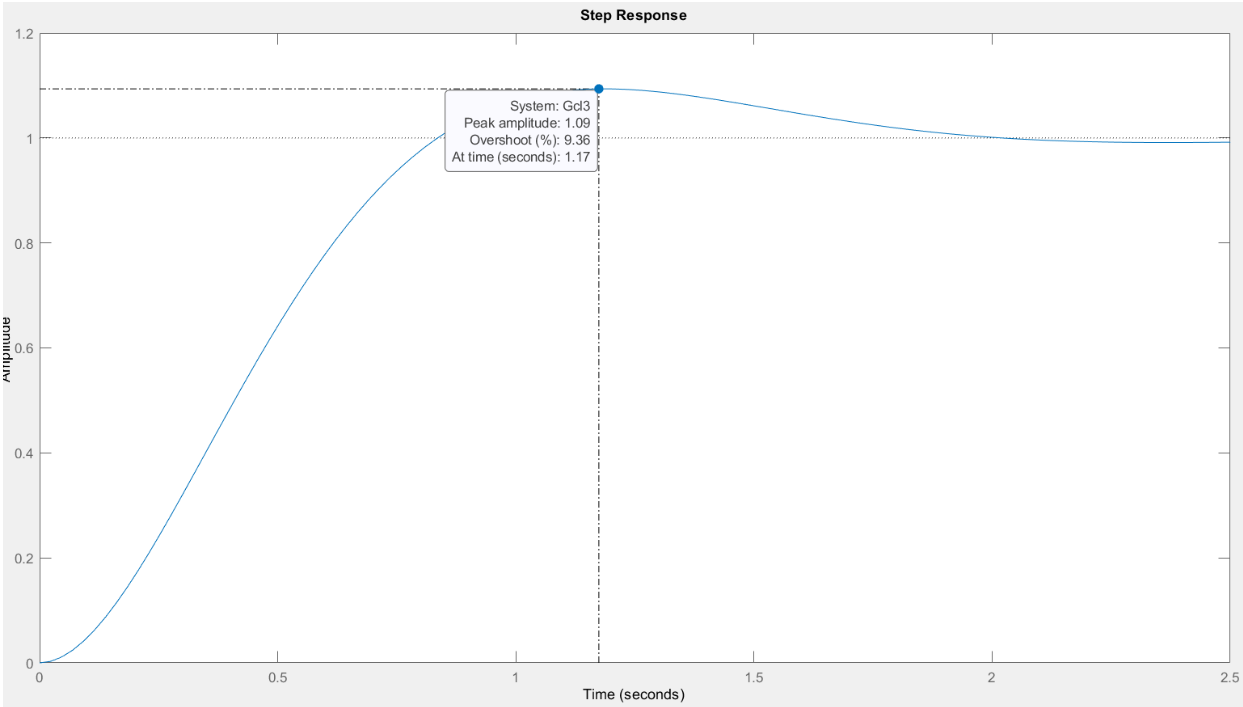


در این حالت مقدار k بدست آمده برای برقراری شرط $M_P = 5\%$ بوده که همین امر حاصل شده ولی مقدار t_P به ۱.۵ ثانیه رسیده و از مقدار خواسته شده بیشتر است.

حال پاسخ را برای k = 13.675 رسم میکنیم:



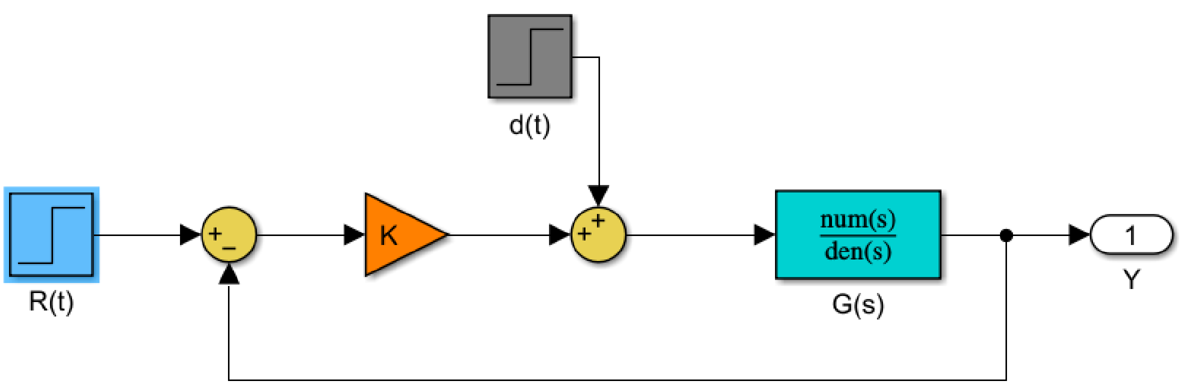
حال پاسخ را برای K=11.037 که میانگین دو مقدار به دست آمده است، رسم میکنیم:



مشاهده میشود که مصالحه ای بین خواسته ها برقرار شده است.

پرسش چهار

خطای ماندگار سیستم حلقه بسته زیر به سیگنال اغتشاش پله $d(t) = u(t)$ برابر B- میباشد. میـزان خطـای مانـدگار ناشـی از ورودی $r(t) = u(t)$ چه مقدار است؟



شکل ۴

پاسخ:

اغتشاش D(s) از نوع اغتشاش ورودی است. بنابراین خطای ماندگار به آن برابر است با:

$$e_D(\infty) = -\lim_{s\to 0} \frac{G(s)}{1+L(s)} = \frac{-G(0)}{1+kG(0)} = -B$$

بنابراین $G(0)$ برحسب به دست می‌آید:

$$G(0) = \frac{B}{1-kB}$$

خطای ماندگار به ورودی مرجع پله برابر است با:

$$e_{R\infty} = \frac{1}{1+k_P} = \frac{1}{1+\lim\limits_{s\to 0} kG(0)} = \frac{1}{1+kG(0)} = \frac{1}{1+\frac{kB}{1-kB}} = 1-kB$$

پرسش پنجم (امتیازی)

تابع تبدیل حلقه بسته سیستمی به صورت زیر است. با فرض پایداری، اگر $e(t)$ خطای سیستم به ورودی پله واحد باشد، معیار $I = \int_0^\infty e(t)\,dt$ را محاسبه نمایید.

$$T(S) = \frac{Y(s)}{X(S)} = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{(A_1 s+1)(A_2 s+1)\cdot\cdots(A_n s+1)}{(B_1 s+1)(B_2 s+1)\cdot\cdots(B_m s+1)} \quad m > n$$

پاسخ:

$$IE = \int_0^\infty e(t)\,dt = \int_0^\infty (e(t)e^0)\,dt = \lim_{s\to 0} E(s) = X(s) - Y(s)$$

$$= X(s) - X(s)T(s) = X(s)\big(1-T(s)\big)$$

$$E(s) = \frac{1}{s}\left[1 - \frac{(A_1 s+1)(A_2 s+1)\cdots(A_n s+1)}{(B_1 s+1)(B_2 s+1)\cdots(B_m s+1)}\right] =$$

$$\frac{1}{s}\left[\frac{(B_1 s+1)(B_2 s+1)\cdot\cdots(B_m s+1) - (A_1 s+1)(A_2 s+1)\cdot\cdots(A_n s+1)}{(B_1 s+1)(B_2 s+1)\cdot\cdots(B_m s+1)}\right]$$

$$E(s)=\frac{M(s)}{N(s)} \Rightarrow \lim_{s\to 0} E(s)=\frac{0}{0}$$

هوپیتال: $\lim_{s\to 0}\frac{\frac{dM(s)}{ds}}{\frac{dN(s)}{ds}}$

$$=\frac{(B_1+B_2+\cdots+B_m)+\left(\text{توان های یک و بزرگتر}\right)-(A_1+A_2+\cdots+A_n)+\left(\text{توان های یک و بزرگتر}\right)}{1+\left(\text{توان های یک و بزرگتر}\right)}$$

$$IE=\lim_{s\to 0}\frac{(B_1+B_2+\cdots+B_m)+\left(\text{توان های یک و بزرگتر}\right)-(A_1+A_2+\cdots+A_n)+\left(\text{توان های یک و بزرگتر}\right)}{1+\left(\text{توان های یک و بزرگتر}\right)}$$

$$\Rightarrow\ IE=(B_1+B_2+\cdots+B_m)-(A_1+A_2+\cdots+A_n)$$