

# **Transformaciones en imágenes**

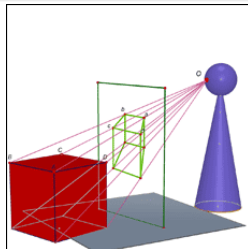
Cátedra Visión por Computadoras

19 de abril del 2023

# Geometría proyectiva

## Geometría proyectiva

Modela la distorsión geométrica introducida por una transformación proyectiva. Intuitivamente puede entenderse como la descripción de lo que se obtiene cuando miramos el mundo con un solo ojo.



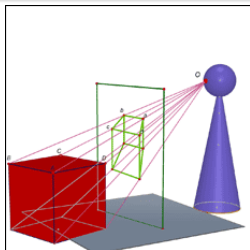
El espacio donde se define se llama *espacio proyectivo*  $\mathbb{P}$ .

# Geometría proyectiva

## Coordenadas homogéneas

Un espacio proyectivo  $\mathbb{P}^n$  está formado por elementos (vectores) de dimensión  $n$  que representan elementos de un espacio vectorial  $n + 1$ . Se usan coordenadas ampliadas, llamadas *coordenadas homogéneas*.

Por ej  $(x, y, z) \rightarrow (x, y, z, w)$ .



Las coordenadas homogéneas fueron introducidas por el matemático alemán August Ferdinand Möbius en el año 1837.

Wikipedia.

## Coordenadas homogéneas (2D)

### Puntos y rectas - Representación algebraica

Un punto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  puede representarse por el vector  $\mathbf{x}$  formado por sus coordenadas

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [x, y]^T$$

## Coordenadas homogéneas (2D)

### Puntos y rectas - Representación algebraica

Un punto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  puede representarse por el vector  $\mathbf{x}$  formado por sus coordenadas

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [x, y]^T$$

Una recta en el plano  $ax + by + c = 0$  puede representarse por el vector  $\mathbf{l}$  formado por los coeficientes que la definen

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = [a, b, c]^T$$

# Coordenadas homogéneas (2D)

## Puntos y rectas - Representación algebraica

Un punto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  puede representarse por el vector  $\mathbf{x}$  formado por sus coordenadas

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [x, y]^T$$

Una recta en el plano  $ax + by + c = 0$  puede representarse por el vector  $\mathbf{l}$  formado por los coeficientes que la definen

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = [a, b, c]^T$$

Pero el vector  $\hat{\mathbf{l}} = [ka, kb, kc]^T$ , con  $k \neq 0$ , representa la misma recta. . .

- Una recta tienen 2 DOF, dado por los cocientes de sus componentes  $\{a : b : c\}, \forall c \neq 0$ .
- Estos vectores equivalentes se conocen como *vectores homogéneos*.
- El conjunto de vectores homogéneos en  $\mathbb{R}^3$ , menos el vector  $[0, 0, 0]^T$ , forman el espacio proyectivo  $\mathbb{P}^3$ .

## Coordenadas homogéneas (2D)

Puntos y rectas - Representación algebraica

Si seguimos... un punto  $(x_1, y_1)$  pertenece a la recta  $l$  si satisface  $ax_1 + by_1 + c = 0$ .

# Coordenadas homogéneas (2D)

## Puntos y rectas - Representación algebraica

Si seguimos... un punto  $(x_1, y_1)$  pertenece a la recta  $l$  si satisface  $ax_1 + by_1 + c = 0$ .

En forma matricial

$$[x_1, y_1, 1][a, b, c]^T = 0$$

donde el vector  $[x_1, y_1, 1]$  representa el punto  $(x_1, y_1)$ .



## Coordenadas homogéneas (2D)

### Puntos y rectas - Representación algebraica

**Si seguimos...** un punto  $(x_1, y_1)$  pertenece a la recta  $l$  si satisface  $ax_1 + by_1 + c = 0$ .

En forma matricial

$$[x_1, y_1, 1][a, b, c]^T = 0$$

donde el vector  $[x_1, y_1, 1]$  representa el punto  $(x_1, y_1)$ .

Pero para el mismo punto se tiene que  $kax_1 + kby_1 + kc = 0$

$$[kx_1, ky_1, k][a, b, c]^T = 0$$

es decir, los vectores  $[kx_1, ky_1, k]^T$  y  $[x_1, y_1, 1]^T$  representan el mismo punto.

# Coordenadas homogéneas (2D)

## Puntos y rectas - Representación algebraica

Si seguimos... un punto  $(x_1, y_1)$  pertenece a la recta  $l$  si satisface  $ax_1 + by_1 + c = 0$ .

En forma matricial

$$[x_1, y_1, 1][a, b, c]^T = 0$$

donde el vector  $[x_1, y_1, 1]$  representa el punto  $(x_1, y_1)$ .

Pero para el mismo punto se tiene que  $kax_1 + kby_1 + kc = 0$

$$[kx_1, ky_1, k][a, b, c]^T = 0$$

es decir, los vectores  $[kx_1, ky_1, k]^T$  y  $[x_1, y_1, 1]^T$  representan el mismo punto.

Por lo que ...

### Vectores homogéneos

Los vectores  $[x_1, y_1, 1]^T$  y  $[kx_1, ky_1, k]^T$  son vectores homogéneos, y son la representación del punto  $(x_1, y_1)$  en *coordenadas homogéneas*.

# Coordenadas homogéneas

## Rectas y puntos

### Punto en coordenadas homogéneas

Un punto en el plano de coordenadas finitas  $(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3})$ , (con  $x_3 \neq 0$ ), se representa en coordenadas homogéneas por el vector  $\mathbf{x} \in \mathbb{P}^3$  dado por

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$$

Nota: Un punto también tiene dos DOF, dados por  $\{x_1 : x_2 : x_3\}$

# Coordenadas homogéneas

## Rectas y puntos

### Punto en coordenadas homogéneas

Un punto en el plano de coordenadas finitas  $(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3})$ , (con  $x_3 \neq 0$ ), se representa en coordenadas homogéneas por el vector  $\mathbf{x} \in \mathbb{P}^3$  dado por

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$$

Nota: Un punto también tiene dos DOF, dados por  $\{x_1 : x_2 : x_3\}$

Por lo anterior ...

### Punto en una recta

Sean el punto  $\mathbf{x} \in \mathbb{P}^3$  y la recta  $\mathbf{l} \in \mathbb{P}^3$ , entonces  $\mathbf{x}$  está en  $\mathbf{l}$  si

$$\mathbf{x}^T \mathbf{l} = \mathbf{l}^T \mathbf{x} = ax + by + c = 0$$

# Coordenadas homogéneas

## Rectas y puntos

### Punto en coordenadas homogéneas

Un punto en el plano de coordenadas finitas  $(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3})$ , (con  $x_3 \neq 0$ ), se representa en coordenadas homogéneas por el vector  $\mathbf{x} \in \mathbb{P}^3$  dado por

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$$

Nota: Un punto también tiene dos DOF, dados por  $\{x_1 : x_2 : x_3\}$

Por lo anterior ...

### Punto en una recta

Sean el punto  $\mathbf{x} \in \mathbb{P}^3$  y la recta  $\mathbf{l} \in \mathbb{P}^3$ , entonces  $\mathbf{x}$  está en  $\mathbf{l}$  si

$$\mathbf{x}^T \mathbf{l} = \mathbf{l}^T \mathbf{x} = ax + by + c = 0$$

Notar que ... El producto escalar entre  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{l}$  también es nulo, ya que

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{l} = xl \cos \theta = ax + by + c = 0 \rightarrow \theta = \pi/2$$

por lo que los vectores  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{l}$  son perpendiculares.

# Coordenadas homogéneas

## Rectas y puntos

### Intersección de dos rectas

Sean  $l_1$  y  $l_2$  dos rectas en  $\mathbb{P}^3$ . Definiendo el vector  $x = l_1 \times l_2$ , que es un vector perpendicular a ambas rectas, se tiene que los productos escalares

$$l_1 \cdot (l_1 \times l_2) = l_2 \cdot (l_1 \times l_2) = 0$$

es decir

$$l_1^T x = l_2^T x = 0$$

luego, si  $x$  representa a un punto, este es el punto de intersección de  $l_1$  y  $l_2$ .

# Coordenadas homogéneas

## Rectas y puntos

### Recta por dos puntos

Sean  $\mathbf{x}_1$  y  $\mathbf{x}_2$  dos puntos en  $\mathbb{P}^3$ . Definiendo  $\mathbf{l} = \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2$  se tiene

$$\mathbf{l}^T \mathbf{x}_1 = \mathbf{l}^T \mathbf{x}_2 = 0$$

luego, el vector  $\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2$  representa a la recta  $\mathbf{l}$  que pasa por los puntos  $\mathbf{x}_1$  y  $\mathbf{x}_2$ .

# Coordenadas homogéneas

## Rectas y puntos

### Recta por dos puntos

Sean  $\mathbf{x}_1$  y  $\mathbf{x}_2$  dos puntos en  $\mathbb{P}^3$ . Definiendo  $\mathbf{l} = \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2$  se tiene

$$\mathbf{l}^T \mathbf{x}_1 = \mathbf{l}^T \mathbf{x}_2 = 0$$

luego, el vector  $\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2$  representa a la recta  $\mathbf{l}$  que pasa por los puntos  $\mathbf{x}_1$  y  $\mathbf{x}_2$ .

### Dualidad

Debido a la representación dual de rectas y puntos, los enunciados tiene siempre su forma dual.

En este caso la recta que pasa por dos puntos es dual al anterior, que puede leerse como “el punto que pasa por dos rectas”.



# Coordenadas homogéneas

## Rectas paralelas - Punto en el infinito

Que pasa con las paralelas?

### Intersección de rectas paralelas

Sean  $\mathbf{l} = [a, b, c]^T$  y  $\mathbf{l}' = [a, b, c']^T$  dos rectas paralelas en  $\mathbb{P}^3$ , la intersección de las rectas  $\mathbf{l}$  y  $\mathbf{l}'$  será

$$\mathbf{x} = \mathbf{l} \times \mathbf{l}' = [b, -a, 0]^T$$

con  $\mathbf{x}$  un punto ideal o punto en el infinito.

# Coordenadas homogéneas

## Rectas paralelas - Punto en el infinito

Que pasa con las paralelas?

### Intersección de rectas paralelas

Sean  $\mathbf{l} = [a, b, c]^T$  y  $\mathbf{l}' = [a, b, c']^T$  dos rectas paralelas en  $\mathbb{P}^3$ , la intersección de las rectas  $\mathbf{l}$  y  $\mathbf{l}'$  será

$$\mathbf{x} = \mathbf{l} \times \mathbf{l}' = [b, -a, 0]^T$$

con  $\mathbf{x}$  un punto ideal o punto en el infinito.

### Punto en el infinito

Un punto en  $\mathbb{P}^3$  de coordenadas

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, 0]^T$$

no representa ningún punto finito en el plano, se le llama punto ideal o punto en el infinito.

# Coordenadas homogéneas

## Recta en el infinito

### Recta en el infinito

Todo punto ideal  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, 0]^T$  pertenece a la recta  $\mathbf{l}_\infty = [0, 0, 1]^T$ , ya que

$$\mathbf{x}^T \mathbf{l}_\infty = 0$$

$\mathbf{l}_\infty$  se llama recta en el infinito.

# Coordenadas homogéneas

## Recta en el infinito

### Recta en el infinito

Todo punto ideal  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, 0]^T$  pertenece a la recta  $\mathbf{l}_\infty = [0, 0, 1]^T$ , ya que

$$\mathbf{x}^T \mathbf{l}_\infty = 0$$

$\mathbf{l}_\infty$  se llama recta en el infinito.

### Intersección con $\mathbf{l}_\infty$

La intersección de las rectas paralelas  $\mathbf{l}$  y  $\mathbf{l}'$  con  $\mathbf{l}_\infty$  es en el punto ideal  $\mathbf{x} = [b, -a, 0]^T$  (recordar que  $\mathbf{l} \times \mathbf{l}' = [b, -a, 0]^T$ )

$$[b, -a, 0]^T \mathbf{l} = [b, -a, 0]^T \mathbf{l}' = [b, -a, 0]^T \mathbf{l}_\infty = 0$$

# Coordenadas homogéneas

## Recta en el infinito

### Recta en el infinito

Todo punto ideal  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, 0]^T$  pertenece a la recta  $\mathbf{l}_\infty = [0, 0, 1]^T$ , ya que  $\mathbf{x}^T \mathbf{l}_\infty = 0$

$\mathbf{l}_\infty$  se llama recta en el infinito.

### Intersección con $\mathbf{l}_\infty$

La intersección de las rectas paralelas  $\mathbf{l}$  y  $\mathbf{l}'$  con  $\mathbf{l}_\infty$  es en el punto ideal  $\mathbf{x} = [b, -a, 0]^T$  (recordar que  $\mathbf{l} \times \mathbf{l}' = [b, -a, 0]^T$ )

$$[b, -a, 0]^T \mathbf{l} = [b, -a, 0]^T \mathbf{l}' = [b, -a, 0]^T \mathbf{l}_\infty = 0$$

- Notar que el vector  $[b, -a]^T \in \mathbb{R}^2$  representa la dirección de la recta  $\mathbf{l} = [a, b, c]^T$ . Por lo tanto

$$\mathbf{l}_\infty : \{\text{Conjunto de direcciones de rectas de } \mathbb{R}^2\}$$

# Transformaciones proyectivas

## Definición

### Definición

Una proyectividad es un mapa invertible  $h$  de  $\mathbb{P}^3$  en  $\mathbb{P}^3$  que lleva un conjunto de puntos  $\{x_1, \dots, x_n\}$  pertenecientes a una recta a otro conjunto  $\{h(x_1), \dots, h(x_n)\}$  pertenecientes también a una recta.

es decir **mapea rectas en rectas** (lo que hacen las cámaras).

# Transformaciones proyectivas

## Definición

### Definición

Una proyectividad es un mapa invertible  $h$  de  $\mathbb{P}^3$  en  $\mathbb{P}^3$  que lleva un conjunto de puntos  $\{x_1, \dots, x_n\}$  pertenecientes a una recta a otro conjunto  $\{h(x_1), \dots, h(x_n)\}$  pertenecientes también a una recta.

es decir **mapea rectas en rectas** (lo que hacen las cámaras).



# Transformaciones proyectivas

## Definición

### Definición

Una proyectividad es un mapa invertible  $h$  de  $\mathbb{P}^3$  en  $\mathbb{P}^3$  que lleva un conjunto de puntos  $\{x_1, \dots, x_n\}$  pertenecientes a una recta a otro conjunto  $\{h(x_1), \dots, h(x_n)\}$  pertenecientes también a una recta.

es decir **mapea rectas en rectas** (lo que hacen las cámaras).





# Transformaciones proyectivas

## Definición

### Definición

Una proyectividad es un mapa invertible  $h$  de  $\mathbb{P}^3$  en  $\mathbb{P}^3$  que lleva un conjunto de puntos  $\{x_1, \dots, x_n\}$  pertenecientes a una recta a otro conjunto  $\{h(x_1), \dots, h(x_n)\}$  pertenecientes también a una recta.

es decir **mapea rectas en rectas** (lo que hacen las cámaras).



- Proyectividad, transformación proyectiva, homografía, colinealidad, son sinónimos.
- Las homografías forman un grupo, ya que su inversa también es una homografía, como también la composición de homografías es otra homografía.

# Transformaciones proyectivas

## Definición

En términos algebraicos

### Definición

Un mapa lineal  $h : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$  es una homografía si y sólo si existe una matriz  $H$   $3 \times 3$  invertible tal que

$$h(\mathbf{x}) = H\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{P}^3$$

**Prueba 1:** Si  $h : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$  es una homografía entonces existe una matriz  $H$   $3 \times 3$  invertible que cumple  $h(\mathbf{x}) = H\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{P}^3$

# Transformaciones proyectivas

## Definición

En términos algebraicos

### Definición

Un mapa lineal  $h : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$  es una homografía si y sólo si existe una matriz  $H$   $3 \times 3$  invertible tal que

$$h(\mathbf{x}) = H\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{P}^3$$

**Prueba 1:** Si  $h : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$  es una homografía entonces existe una matriz  $H$   $3 \times 3$  invertible que cumple  $h(\mathbf{x}) = H\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{P}^3$

Se complica...

# Transformaciones proyectivas

## Definición

En términos algebraicos

### Definición

Un mapa lineal  $h : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$  es una homografía si y sólo si existe una matriz  $H$   $3 \times 3$  invertible tal que

$$h(\mathbf{x}) = H\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{P}^3$$

**Prueba 1:** Si  $h : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$  es una homografía entonces existe una matriz  $H$   $3 \times 3$  invertible que cumple  $h(\mathbf{x}) = H\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{P}^3$

Se complica...

**Prueba 2:** Si  $H$   $3 \times 3$  es una matriz invertible entonces es una homografía.

# Transformaciones proyectivas

## Definición

En términos algebraicos

### Definición

Un mapa lineal  $h : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$  es una homografía si y sólo si existe una matriz  $H$   $3 \times 3$  invertible tal que

$$h(\mathbf{x}) = H\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{P}^3$$

**Prueba 1:** Si  $h : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$  es una homografía entonces existe una matriz  $H$   $3 \times 3$  invertible que cumple  $h(\mathbf{x}) = H\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{P}^3$

Se complica...

**Prueba 2:** Si  $H$   $3 \times 3$  es una matriz invertible entonces es una homografía.

Sean  $\mathbf{x}_i, i = 1, \dots, n$  puntos en  $l$  tal que  $l^T \mathbf{x}_i = 0$ . Sea  $H$  una matriz  $3 \times 3$  invertible, entonces

$$l'^T H^{-1} H \mathbf{x}_i = (H^{-T} l)^T H \mathbf{x}_i = 0$$

todos los puntos  $H \mathbf{x}_i$  pertenecen a la recta  $l' = H^{-T} l$ .

# Transformaciones proyectivas

## Puntos y Rectas

### Transformación de puntos

Una homografía mapea el punto  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}'$  mediante  
$$\mathbf{x}' = H\mathbf{x}$$

- La proyección no cambia si se multiplica  $H$  por cualquier escalar distinto de cero.

# Transformaciones proyectivas

## Puntos y Rectas

### Transformación de puntos

Una homografía mapea el punto  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}'$  mediante  
$$\mathbf{x}' = H\mathbf{x}$$

- La proyección no cambia si se multiplica  $H$  por cualquier escalar distinto de cero.
- Se dice que  $H$  está definida hasta un factor de escala. Por lo tanto  $H$  tiene 8 DOF.

# Transformaciones proyectivas

## Puntos y Rectas

### Transformación de puntos

Una homografía mapea el punto  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}'$  mediante  
$$\mathbf{x}' = H\mathbf{x}$$

- La proyección no cambia si se multiplica  $H$  por cualquier escalar distinto de cero.
- Se dice que  $H$  está definida hasta un factor de escala. Por lo tanto  $H$  tiene 8 DOF.
- $H$  es una matriz homogénea.



# Transformaciones proyectivas

## Puntos y Rectas

### Transformación de puntos

Una homografía mapea el punto  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}'$  mediante

$$\mathbf{x}' = H\mathbf{x}$$

- La proyección no cambia si se multiplica  $H$  por cualquier escalar distinto de cero.
- Se dice que  $H$  está definida hasta un factor de escala. Por lo tanto  $H$  tiene 8 DOF.
- $H$  es una matriz homogénea.

### Transformación de rectas

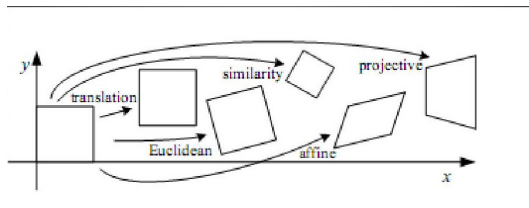
De la prueba 2 dada en la definición de homografía

$$\begin{aligned} \mathbf{l}^T H^{-1} H \mathbf{x} &= (H^{-T} \mathbf{l})^T H \mathbf{x} = 0 \\ (\mathbf{l}')^T \mathbf{x}' &= 0 \end{aligned}$$

y la recta  $\mathbf{l}$  es mapeada a  $\mathbf{l}' = H^{-T} \mathbf{l}$ .

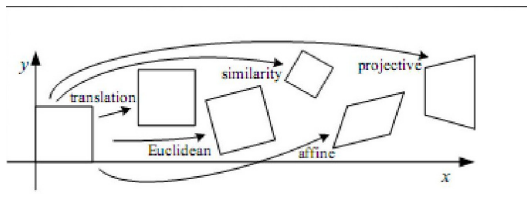
# Jerarquía de transformaciones

## Isometría



# Jerarquía de transformaciones

## Isometría



## Isometría

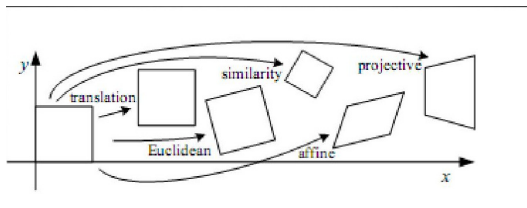
Una isometría es una transformación que **preserva distancia** Euclidea.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon \cos \theta & -\sin \theta & t_x \\ \varepsilon \sin \theta & \cos \theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

con  $\varepsilon = \pm 1$ .

# Jerarquía de transformaciones

## Isometría



## Isometría

Una isometría es una transformación que **preserva distancia** Euclidea.

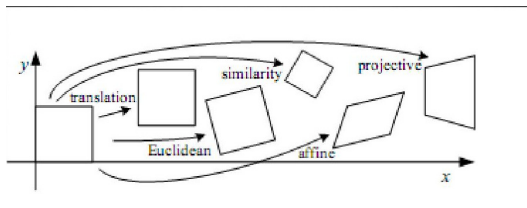
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon \cos \theta & -\sin \theta & t_x \\ \varepsilon \sin \theta & \cos \theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

con  $\varepsilon = \pm 1$ .

Si  $\varepsilon = 1$ , se llama transformación Euclidea, que además **preserva orientación**.

# Jerarquía de transformaciones

## Isometría



## Isometría

Una isometría es una transformación que **preserva distancia** Euclidea.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon \cos \theta & -\sin \theta & t_x \\ \varepsilon \sin \theta & \cos \theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

con  $\varepsilon = \pm 1$ .

Si  $\varepsilon = 1$ , se llama transformación Euclidea, que además **preserva orientación**.

Es lo que conocemos como **transformación del cuerpo rígido**.

# Jerarquía de transformaciones

## Isometría

### Transformación Euclidea

$$\mathbf{x}' = H_E \mathbf{x} = \begin{bmatrix} R & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

con  $R$  una matriz de rotación de  $2 \times 2$  ( $RR^T = R^T R = I$ ),  $\mathbf{0}^T = (0, 0)$  y  $\mathbf{t}$  un vector de traslación.

- $H_E$  tiene 3 DOF, uno de la rotación y dos de la traslación.
- Si se conocen un par de puntos  $\mathbf{x}'$  y  $\mathbf{x}$ , ¿se puede determinar  $H_E$ ?

# Jerarquía de transformaciones

## Isometría

### Transformación Euclidea

$$\mathbf{x}' = H_E \mathbf{x} = \begin{bmatrix} R & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

con  $R$  una matriz de rotación de  $2 \times 2$  ( $RR^T = R^T R = I$ ),  $\mathbf{0}^T = (0, 0)$  y  $\mathbf{t}$  un vector de traslación.

- $H_E$  tiene 3 DOF, uno de la rotación y dos de la traslación.
- Si se conocen un par de puntos  $\mathbf{x}'$  y  $\mathbf{x}$ , ¿se puede determinar  $H_E$ ?
- Los puntos  $\mathbf{x}'$  y  $\mathbf{x}$  que se corresponden según una transformación se llaman *puntos correspondientes*, y se indican  $\mathbf{x}' \leftrightarrow \mathbf{x}$ .

# Jerarquía de transformaciones

## Isometría

### Transformación Euclidea

$$\mathbf{x}' = H_E \mathbf{x} = \begin{bmatrix} R & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

con  $R$  una matriz de rotación de  $2 \times 2$  ( $RR^T = R^T R = I$ ),  $\mathbf{0}^T = (0, 0)$  y  $\mathbf{t}$  un vector de traslación.

- $H_E$  tiene 3 DOF, uno de la rotación y dos de la traslación.
- Si se conocen un par de puntos  $\mathbf{x}'$  y  $\mathbf{x}$ , ¿se puede determinar  $H_E$ ?
- Los puntos  $\mathbf{x}'$  y  $\mathbf{x}$  que se corresponden según una transformación se llaman *puntos correspondientes*, y se indican  $\mathbf{x}' \leftrightarrow \mathbf{x}$ .

### Invariantes (cantidades que se preservan en una transformación)

Longitudes, ángulos, orientación y áreas son invariantes de  $H_E$ .



# Jerarquía de transformaciones

## Similaridad

### Similaridad

Una similaridad es una isometría con escalado isotrópico.

$$\mathbf{x}' = H_S \mathbf{x} = \begin{bmatrix} sR & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

- $H_S$  tiene 4 DOF, uno de la rotación, dos de la traslación y el escalado  $s$ .
- Esta transformación queda definida mediante un par de puntos correspondientes  $\mathbf{x}' \leftrightarrow \mathbf{x}$ .

### Invariantes

Ángulos entre rectas, paralelismo, relación entre áreas son invariantes de  $H_S$ .

# Jerarquía de transformaciones

## Transformación afín

### Transformación afín

Es una transformación no singular (invertible) seguida de una traslación.

Se puede escribir

$$\mathbf{x}' = H_A \mathbf{x} = \begin{bmatrix} A & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

con  $A$  una matriz no singular.

- $H_A$  tiene 6 DOF y puede ser recuperada con 3 puntos correspondientes  $\mathbf{x}' \leftrightarrow \mathbf{x}$ .

# Jerarquía de transformaciones

## Transformación afín

Que hace  $A$ ?

### Descomposición SVD

Puede verse mas claramente la acción de  $A$  a partir de su descomposición SVD

$$A = UDV = (UV)V^{-1}DV$$

$$A = R(\theta)R(-\varphi)DR(\varphi); \quad \text{con } D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son los valores singulares de  $A$ .

# Jerarquía de transformaciones

## Transformación afín

Que hace  $A$ ?

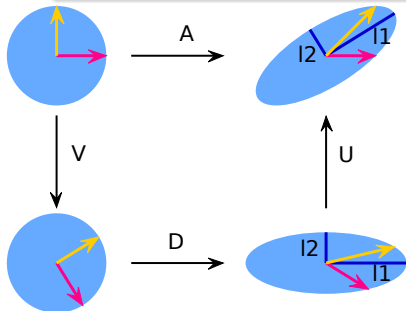
### Descomposición SVD

Puede verse mas claramente la acción de  $A$  a partir de su descomposición SVD

$$A = UDV = (UV)V^{-1}DV$$

$$A = R(\theta)R(-\varphi)DR(\varphi); \quad \text{con } D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son los valores singulares de  $A$ .



- El escalado es no isotrópico pero actúa en direcciones ortogonales.
- Si  $\det A > 0$ , la transformación preserva dirección.

# Jerarquía de transformaciones

## Transformación afín

### Invariantes

#### **Paralelismo:**

Dos rectas paralelas intersectan a  $l_\infty$  en el punto  $[x_1, x_2, 0]^T$ , luego de la transformación

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} A & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = [x'_1, x'_2, 0]$$

#### **Razón entre longitudes de segmentos paralelos:**

El escalado es común a rectas de igual dirección.

#### **Razón entre áreas:**

Las áreas son todas escaladas una cantidad  $\lambda_1 \lambda_2$ .

# Jerarquía de transformaciones

## Transformación proyectiva

### Transformación proyectiva

Es una transformación general invertible de forma

$$\mathbf{x}' = H_P \mathbf{x} = \begin{bmatrix} A & \mathbf{t} \\ \mathbf{v}^T & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

con  $\mathbf{v}^T = [v_1, v_2]$  llamado vector de perspectiva.

- $H_P$  tiene 8 DOF (los 9 elementos menos la escala) y puede computarse con 4 puntos correspondientes (3 deben ser no colineales).
- Mapea puntos ideales en puntos finitos

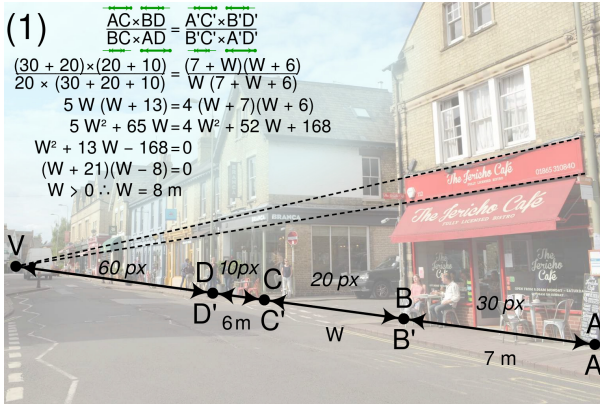
$$\begin{bmatrix} A & \mathbf{t} \\ \mathbf{v}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ v_1 x_1 + v_2 x_2 \end{bmatrix}$$

# Jerarquía de transformaciones

## Transformación proyectiva

### Invariantes

#### Relación cruzada (Cross ratio)



# Jerarquía de transformaciones

## Transformación proyectiva

### Invariantes

#### Relación cruzada (Cross ratio)





# Jerarquía de transformaciones

## Transformación proyectiva

### Descomposición

Cualquier  $H$  puede obtenerse componiendo las transformaciones anteriores

$$H = H_P H_A H_S$$

donde  $H_S$  tiene 4 DOF,  $H_A$  tiene 2 DOF mas y  $H_P$  2 DOF mas, para hacer un total de 8 DOF.

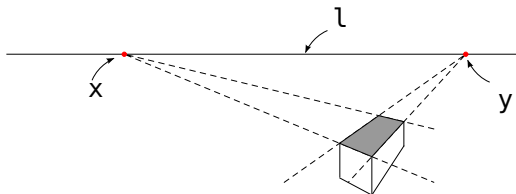
Conociendo donde fue mapeado algún invariante de un espacio, pueden recuperarse las propiedades correspondientes.

# Estimación de $H$

## Rectificación Afín

Ejemplo: conociendo donde fue mapeada  $l_\infty$  (dos DOF) luego de una transformación proyectiva, se pueden recuperar las propiedades afín.

Sea  $l'_\infty = [l_1, l_2, l_3]^T$  la imagen de  $l_\infty = [0, 0, 1]^T$ .



Luego si  $l_3 \neq 0$  se puede elegir  $H_{PA}$  tal que  $H_{PA}^{-T} l'_\infty = l_\infty$

$$H_{PA}^{-T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{l_1}{l_3} \\ 0 & 1 & -\frac{l_2}{l_3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{l_3} \end{bmatrix} \Rightarrow H_{PA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{bmatrix}$$

Aplicando  $H_{PA}$  a todos los puntos se realiza una “rectificación afín”

# Estimación de $H$

## Rectificación Completa

Ejemplo: si se conocen 4 pares de puntos correspondientes, la rectificación puede ser completa (8 DOF).

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} y'_1 &= \frac{y_1}{y_3} = \frac{h_{11}x_1 + h_{12}x_2 + h_{13}x_3}{h_{31}x_1 + h_{32}x_2 + h_{33}x_3} \\ y'_2 &= \frac{y_2}{y_3} = \frac{h_{21}x_1 + h_{22}x_2 + h_{23}x_3}{h_{31}x_1 + h_{32}x_2 + h_{33}x_3} \end{aligned}$$

y cada punto genera dos ecuaciones

$$y'_1(h_{31}x_1 + h_{32}x_2 + h_{33}x_3) = h_{11}x_1 + h_{12}x_2 + h_{13}x_3$$

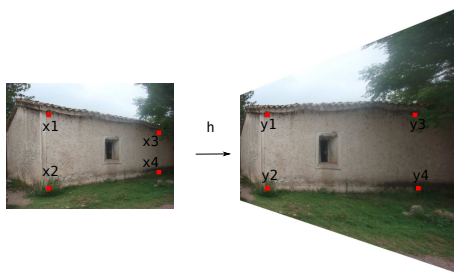
$$y'_2(h_{31}x_1 + h_{32}x_2 + h_{33}x_3) = h_{21}x_1 + h_{22}x_2 + h_{23}x_3$$

Usando notación matricial

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 0 & 0 & 0 & -x_1y'_1 & -x_2y'_1 & -x_3y'_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & x_2 & x_3 & -x_1y'_2 & -x_2y'_2 & -x_3y'_2 \end{bmatrix} [\mathbf{h}] = 0$$

# Estimación de $H$

## Rectificación Completa



$$\begin{array}{lll} H \text{ mapea} & \begin{array}{l} \mathbf{x}_1 = [35, 80, 1]^T \\ \mathbf{x}_2 = [35, 16, 1]^T \\ \mathbf{x}_3 = [131, 65, 1]^T \\ \mathbf{x}_4 = [131, 30, 1]^T \end{array} & \text{en} \quad \begin{array}{l} \mathbf{y}_1 = [35, 80, 1]^T \\ \mathbf{y}_2 = [35, 16, 1]^T \\ \mathbf{y}_3 = [153, 80, 1]^T \\ \mathbf{y}_4 = [153, 16, 1]^T \end{array} \quad \text{es decir } \mathbf{y}_i = H\mathbf{x}_i \end{array}$$

Aplicando  $H$  a todos los puntos se realiza una “rectificación completa”