



جواب سؤال 1-

(الف)

$$\bar{X} = \frac{\sum x}{n} = \frac{9,95 + 9,8 + 9,95 + 9,9}{4} = 9,9$$

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \times \sum (x_i - \bar{X})^2} = \sqrt{\frac{0,015}{3}} = \sqrt{0,005} = 0,07071$$

$$\begin{aligned} \sum (x_i - \bar{X})^2 &= (9,95 - 9,9)^2 + (9,8 - 9,9)^2 + (9,95 - 9,9)^2 + (9,9 - 9,9)^2 \\ &= 0,0025 + 0,01 + 0,0025 + 0 = 0,015 \end{aligned}$$

$$\text{سطح اطمینان} = 99\% = 0,99 = 1 - \alpha \rightarrow \alpha = 0,01$$

$$t_{n-1, \alpha} = t_{3, 0,01} = 4,541$$

$$\beta = \frac{s_x \times t_{3, 0,01}}{\sqrt{n}} = \frac{0,07071 \times 4,541}{2} = \frac{0,321}{2} = 0,1605$$

$$Pr[S \leq \beta + \bar{X}] = 0,99 \rightarrow \beta + \bar{X} = 10,0605$$

متوسط زمان پاسخ با سطح اطمینان 99٪ لزوماً پایین‌تر از 10 میلی‌ثانیه نیست



(ب)

$$1-\alpha = 0,9 \leadsto \alpha = 0,1$$

$$t_{n-1, \alpha} = t_{3, 0,1} = 1,638$$

$$\beta = \frac{\delta_u \times t_{3, 0,1}}{\sqrt{n}} = \frac{0,07071 \times 1,638}{2} = \frac{0,1158}{2} = 0,058$$

$$P[\beta \leq \beta + \bar{X}] = 0,9 \leadsto \beta + \bar{X} = 9,958$$

متوسط زمان پاسخ با سطح اطمینان 90% از 10 ms کمتر است.

جواب سؤال 2-

$$15 + 10 + 5 + 25 + 30 + 15 = 100$$

تعداد کل درخواستها

$$P(X = 10 \text{ هزار تومان}) = \frac{15}{100} = 0,15$$

$$P(X = 20 \text{ هزار تومان}) = \frac{10}{100} = 0,1$$

$$P(X = 30 \text{ هزار تومان}) = \frac{5}{100} = 0,05$$

$$P(X = 50 \text{ هزار تومان}) = \frac{25}{100} = 0,25$$

$$P(X = 100 \text{ هزار تومان}) = \frac{30}{100} = 0,3$$

$$P(X = 200 \text{ هزار تومان}) = \frac{15}{100} = 0,15$$



$$R \leq 0,15 \longrightarrow X = 10 \text{ هزار تومن} \longrightarrow R_4$$

$$0,15 < R \leq 0,25 \longrightarrow X = 20 \text{ هزار تومن} \longrightarrow R_5$$

$$0,25 < R \leq 0,3 \longrightarrow X = 30 \text{ هزار تومن} \longrightarrow R_2$$

$$0,3 < R \leq 0,55 \longrightarrow X = 50 \text{ هزار تومن} \longrightarrow R_3$$

$$0,55 < R \leq 0,85 \longrightarrow X = 100 \text{ هزار تومن} \longrightarrow R_1$$

$$0,85 < R \leq 1 \longrightarrow X = 200 \text{ هزار تومن}$$





جواب سؤال 3 -

$$p_0 = \frac{1}{20}, p_1 = \frac{4}{20}, p_2 = \frac{5}{20}, p_3 = \frac{6}{20}, p_4 = \frac{3}{20}, p_5 = \frac{1}{20}$$

الن -

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{i=0}^n i \times p(i) \rightarrow 0 \times \frac{1}{20} + 1 \times \frac{4}{20} + 2 \times \frac{5}{20} + 3 \times \frac{6}{20} + 4 \times \frac{3}{20} + 5 \times \frac{1}{20} \\ &= 0 + \frac{4}{20} + \frac{10}{20} + \frac{18}{20} + \frac{12}{20} + \frac{5}{20} = \frac{49}{20} = 2,45 \end{aligned}$$

$$E[N_Q] = \sum i \times p(N_Q = i)$$

ب -

$$\text{چون در سیستم 3 سرور داریم} \rightarrow P(0) = P(1) = P(2) = 0$$

$$\frac{6}{20} + \frac{6}{20} + \frac{3}{20} = \frac{15}{20} = 0,75$$

ج -

$$\text{میانگین تعداد افراد لا در حال رفتن} = E[X] - E[N_Q] = 2,45 - 0,75 = 1,7$$

سروس دهنده



$$\lambda = 3$$

جـ-

$$E[N] = \lambda E[T]$$

$$\text{میانگین زمان انتظار در صف} = \frac{0,75}{3} = 0,25$$

$$\text{میانگین زمان انتظار در سیستم} = \frac{2,45}{3} = 0,81$$

جـ-

mean service time = mean response time - mean waiting time

$$E[S] = [E-T] - [EQ] = 0,81 - 0,25 = 0,56$$

جواب سؤال 4-

Poisson Distribution: $P_x(i) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!}$ $i=0,1,2,\dots$, $\lambda=3$

$$P_x(0) = \frac{e^{-3} \times 3^0}{0!} = 0,049$$

$$P_x(4) = \frac{e^{-3} \times 3^4}{4!} = 0,165$$

$$P_x(1) = \frac{e^{-3} \times 3^1}{1!} = 0,147$$

$$P_x(5) = \frac{e^{-3} \times 3^5}{5!} = 0,099$$

$$P_x(2) = \frac{e^{-3} \times 3^2}{2!} = 0,22$$

$$P_x(3) = \frac{e^{-3} \times 3^3}{3!} = 0,22$$



الف-

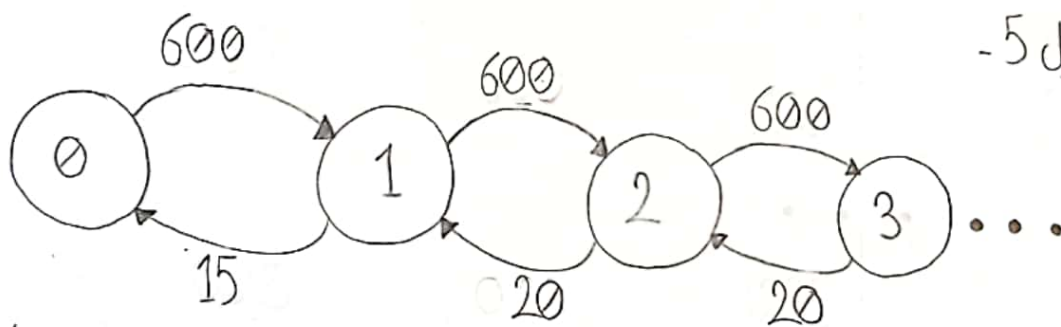
$$P_X(3) = 0,22 = \text{دقیقاً سه مشتری}$$

ب-

$$P_X(4) + P_X(5) = 0,165 + 0,099 = 0,264 = \text{چهار یا پنج مشتری}$$

پ-

$$P_X(\geq 6) = 1 - \left(\sum_{i=0}^5 P_X(i) \right) = 1 - (0,049 + 0,147 + 0,22 + 0,22 + 0,165 + 0,099) = 1 - 0,9 = 0,1 = \text{بیش از شش مشتری}$$

جواب سؤال 5 -
الف)

600 پردازش در هر ساعت $\rightarrow 10 \times 60 = 600 \rightarrow$ ده پردازش در هر دقیقه

در هر ساعت 15 پردازش خدمت می‌گیرد $\rightarrow \frac{60}{4} = 15 \rightarrow$ با 1 مشتری زمان خدمت رسانی به یک پردازش 4 دقیقه است

در هر ساعت 20 پردازش سرور می‌گیرد $\rightarrow \frac{60}{3} = 20 \rightarrow$ بیش از یک مشتری زمان خدمت رسانی به یک پردازش 3 دقیقه است



$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \dots = 1$$

$$600 \pi_0 = 15 \pi_1$$

$$\pi_1 = \frac{600}{15} \pi_0$$

$$615 \pi_1 = 600 \pi_0 + 20 \pi_2$$

$$\pi_2 = 1200 \pi_0$$

$$620 \pi_2 = 600 \pi_1 + 20 \pi_3$$

$$\pi_3 = 37080 \pi_0$$

⋮

$$620 \pi_i = 600 \pi_{i-1} + 20 \pi_{i+1}$$

$$\pi_i = \frac{3}{2^{i+1}} \pi_0$$

$$\pi_0 \left(1 + \frac{3}{2} \sum \frac{1}{2^n} \right) = 1 \leadsto \pi_0 \left(1 + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{\frac{1}{2}} - 1 \right) \right) = 1$$

$$\pi_0 \left(1 + \frac{3}{2} \right) = 1 \leadsto \pi_0 = \frac{2}{5}$$

$$\pi_i = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2^n}$$

$$\leadsto \sum_{n=0}^{\infty} n \pi_n = \frac{3}{5} \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{1}{2^n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{1}{2^{n-1}} \xrightarrow{\text{مشق ملحق}} \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d \left(\frac{1}{2} \right)^n}{d \left(\frac{1}{2} \right)} = \frac{1}{2} \frac{d}{d \frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \right)$$

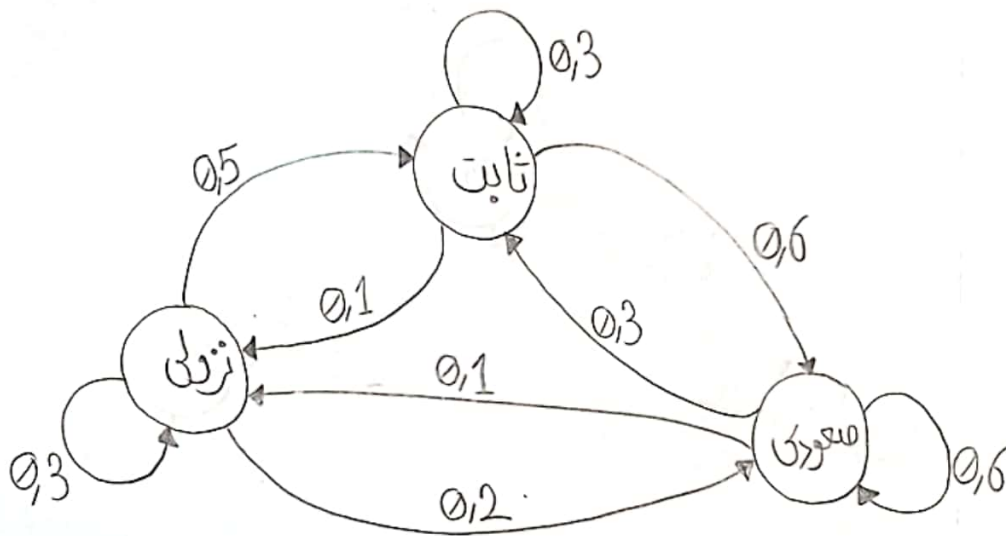
$$= \frac{1}{2} \frac{d}{d \frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\left(\frac{1}{2} \right)^2} \right) \leadsto \frac{3}{5} \times \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{6}{5}$$

$$\omega = \frac{L}{\lambda} = \frac{\frac{5}{6}}{30} = \frac{1}{25}$$



بواب سؤال 6-

(الف)



Markov Matrix =

	نزولی	ثابت	صعودی
نزولی	0,3	0,5	0,2
ثابت	0,1	0,3	0,6
صعودی	0,1	0,3	0,6

(ب) کاهش پذیری → چون هر حالت به حالت دیگر راه دارد و یا به بیان دیگر زنجیره یک کس است می توان گفت این زنجیره مارکوف کاهش پذیر است.

تجدید پذیری → حالات این مارکوف چون می توانیم آن ها را نامتناهی بار ملاقات کنیم، تجدید پذیر اند و چون همه حالات تجدید پذیر اند، این مارکوف تجدید پذیر است.

دوره ای بودن → در این مارکوف تمامی حالت های ما به علت وجود طوق غیر پرلودیک اند پس مارکوف پرلودیک نیست، این مارکوف اِپِروِدیک است.



برای آنکه بتوان رفتار این زنجیره را در دراز مدت بدست آورد معادله $\pi \times P = \pi$ را باید حل کرد

$$\pi_{\text{ثابت}} + \pi_{\text{معمودی}} + \pi_{\text{نزولی}} = 1$$

$$\pi_{\text{معمودی}} = 0,1\pi_{\text{ثابت}} + 0,1\pi_{\text{نزولی}} + 0,3\pi_{\text{نزولی}}$$

$$\pi_{\text{نزولی}} = 0,5\pi_{\text{ثابت}} + 0,3\pi_{\text{معمودی}} + 0,3\pi_{\text{ثابت}}$$

$$\pi_{\text{ثابت}} = 0,6\pi_{\text{نزولی}} + 0,2\pi_{\text{معمودی}} + 0,6\pi_{\text{معمودی}}$$

$$\pi_{\text{معمودی}} = 0,55$$

چون در روز مهران معامله کرده برای همین روز گذشته بورس نزولی بوده است، برای اینکه امروز مهران معامله کند باید بورس نزولی باشد.

$$P(NN|N) = \frac{P(NN)}{P(N)} = \frac{\pi_{\text{نزولی}} P_{NN}}{\pi_{\text{نزولی}}} = \frac{0,12 \times 0,3}{0,12} = \boxed{0,3}$$

$N = \text{حالت نزولی}$

احتمال معامله کردن با شرط معامله در دو روز گذشته

$$P(NNN|NN) = \frac{P(NNN)}{P(NN)} = P(NN) = \boxed{0,3}$$

جواب سؤال 7- برای حل این مسئله از قوانین ابرای استفاده می‌کنیم، امید ریاضی تعداد کارهای منتظر در صف cpu مطابق است. طبق قانون Little داریم که این امید ریاضی برابر است با حاصل ضرب نرخ گذرهای کارها توسط cpu در مدت زمان مورد انتظار کار در صف تماماً به cpu منتهی می‌گردد.

$$E[N_{\varnothing}^{cpu}] = X_{cpu} \cdot E[T_{\varnothing}^{cpu}]$$

$$C_{center}(t) = 0,5 C_{cpu} \xrightarrow{\div C(t)} E[V_{center}] = 0,5 E[V_{cpu}]$$

$$C(t) = C_{center}(t) \xrightarrow{\div C(t)} 1 = E[V_{center}]$$



$$C_{cpu}(t) = 0,5 C_{cpu}(t) + C(t) \xrightarrow{\div C(t)} E[V_{cpu}] = 0,5 E[V_{cpu}] + 1$$

$$E[V_{cpu}] = 2 \rightarrow X_i = 20X$$

$$P_i = X_i E[S_i] \rightarrow 0,3 = X_i \times 0,01 \rightarrow X_i = 30$$

$$X = 1,5 \text{ و } X_{cpu} = 3$$

$$P_{cpu} = X_{cpu} \cdot E[S_{cpu}] \rightarrow 0,5 = 3 E[S_{cpu}] \rightarrow E[S_{cpu}] = \frac{1}{6}$$

$$E[N_{center}] = X_{center} \cdot E[R_{center}] \rightarrow 20 = 1,5 E[R_{center}] \rightarrow E[R_{center}] = \frac{40}{3}$$

$$E[T] = E[Z] + E[R] = 50$$

$$E[Z] = 5 \rightarrow E[R] = 45$$

$$E[R] = E[R_{cpu}] + E[R_{center}]$$

$$E[R_{cpu}] = E[R] - E[R_{center}] = 45 - \frac{40}{3} = \frac{95}{3}$$

$$E[R_{cpu}] = E[T_{\emptyset}^{cpu}] + E[S_{cpu}]$$

$$E[T_{\emptyset}^{cpu}] = \frac{95}{3} - \frac{1}{6} = \frac{189}{6}$$

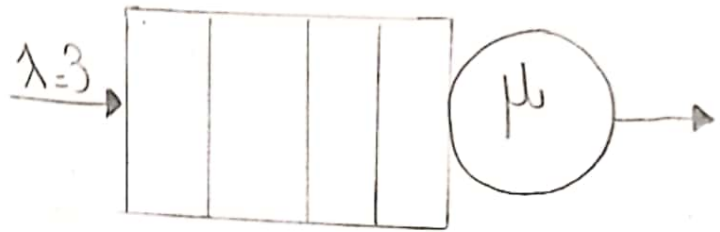
$$E[N_{\emptyset}^{cpu}] = X_{cpu} \cdot E[T_{\emptyset}^{cpu}] \rightarrow E[N_{\emptyset}^{cpu}] = 3 \times \frac{189}{6} = \boxed{94,5}$$



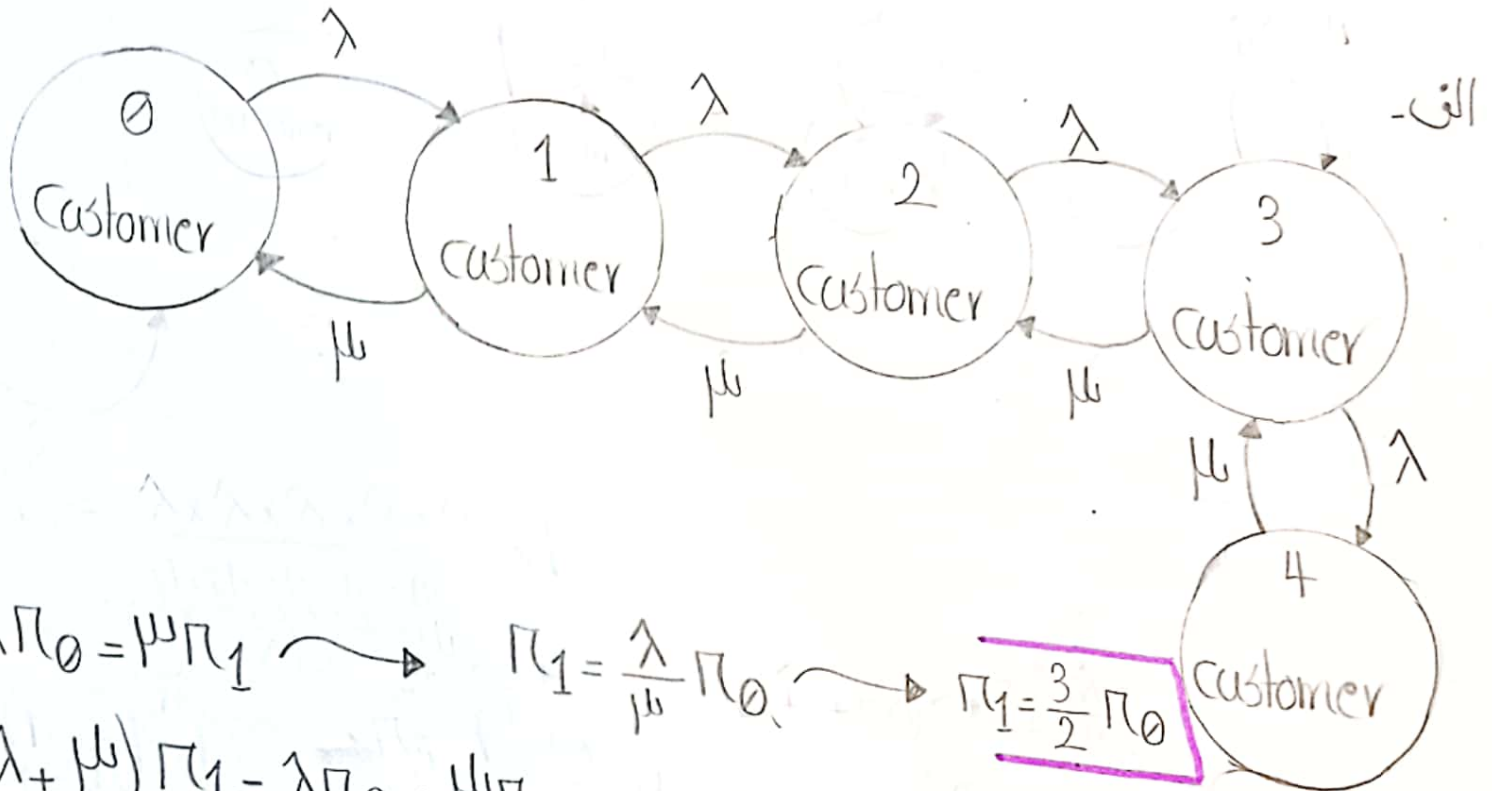
$\lambda = 3$ customers/second

$\mu = 2$

Eviction-time = 1,5 seconds



جواب سؤال ۸-



الف-

$$\begin{aligned} \lambda \pi_0 &= \mu \pi_1 \leadsto \pi_1 = \frac{\lambda}{\mu} \pi_0 \leadsto \pi_1 = \frac{3}{2} \pi_0 \\ (\lambda + \mu) \pi_1 &= \lambda \pi_0 + \mu \pi_2 \leadsto 5 \pi_1 = 3 \pi_0 + 2 \pi_2 \leadsto \pi_2 = \frac{9}{4} \pi_0 \\ (\lambda + \mu) \pi_2 &= \lambda \pi_1 + \mu \pi_3 \leadsto 5 \left(\frac{9}{4} \pi_0 \right) = 3 \pi_1 + 2 \pi_3 \leadsto \pi_3 = \frac{27}{8} \pi_0 \\ (\lambda + \mu) \pi_3 &= \lambda \pi_2 + \mu \pi_4 \leadsto 5 \left(\frac{27}{8} \pi_0 \right) = 3 \left(\frac{9}{4} \pi_0 \right) + 2 \pi_4 \\ &\leadsto \pi_4 = \frac{81}{16} \pi_0 \end{aligned}$$



$$\pi_0 + \frac{3}{2}\pi_0 + \frac{9}{4}\pi_0 + \frac{27}{8}\pi_0 + \frac{81}{16}\pi_0 = 1$$

$$\frac{16+24+36+54+81}{16}\pi_0 = 1 \rightarrow \pi_0 = \frac{16}{211} = 0,075$$

$$\pi_1 = 0,112, \pi_2 = 0,168, \pi_3 = 0,253, \pi_4 = 0,379$$

$$E[N] = \pi_0 \times 0 + \pi_1 \times 1 + \pi_2 \times 2 + \pi_3 \times 3 + \pi_4 \times 4 = \sum_{i=0}^4 i \times \pi_i$$

$$E[N] = 0 + 0,112 + 0,336 + 0,759 + 1,516 = 2,723$$

$$P_d = 1 - P_b - (1 - \pi_0) \frac{\mu}{\lambda} = 1 - 0,379 - (1 - 0,075) \times \frac{2}{3} = 0,005$$

$$P_b = \pi_4 = 0,379$$

$$P_b = \pi_4 = 0,379$$

$$E[T] = \frac{E[N]}{\lambda} = \frac{2,723}{3} = 0,907$$



جواب سؤال 9-

$$\lambda_i = r_i + \sum_j \lambda_j p_{ji}$$

$$\lambda_1 = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_2 = \lambda_3 + \lambda_1 \\ \lambda_3 = 0,6\lambda_2 \end{array} \right\} \rightarrow \lambda_2 = \lambda_3 + 2 \rightarrow \lambda_2 = 0,6\lambda_2 + 2$$

$$0,4\lambda_2 = 2 \rightarrow \lambda_2 = 5$$

$$\lambda_3 = 3$$

حال باید بهره‌وری هر یک را جداگانه حساب کنیم:

$$\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{2}{3} \quad \text{و} \quad \rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2} = \frac{5}{6} \quad \text{و} \quad \rho_3 = \frac{\lambda_3}{\mu_3} = \frac{3}{4}$$

حال میانگین تعداد دستگاه‌های در هر یک از سرورها را محاسبه می‌کنیم:

$$E[N_1] = \frac{\rho_1}{1 - \rho_1} = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = 2$$

$$E[N_2] = \frac{\rho_2}{1 - \rho_2} = \frac{\frac{5}{6}}{1 - \frac{5}{6}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{6}} = 5$$

$$E[N_3] = \frac{\rho_3}{1 - \rho_3} = \frac{\frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}} = 3$$

$$E[T] = \frac{E[N]}{\lambda} = \frac{10}{2} = 5$$