Pracownia z analizy numerycznej

Sprawozdanie do zadania **P2.19**
Prowadzący: dr hab. prof. Paweł Woźny

Martyna Firgolska, Michał Dymowski

Wrocław, 17 grudnia 2019

Wstęp

...

Metoda trapezów

...

Kwadratury Gaussa-Legendre'a

Kwadratura

Metoda całkowania numerycznego polegająca na obliczeniu wartości wyrażenia

$$\sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) \approx \int_a^b f(x)dx$$

gdzie $x_0, ..., x_n \in [a, b]$.

Kwadratura Gaussa-Legendre'a

Kwadratura w której węzły $x_0, x_1, ..., x_n$ są pierwiastkami $n+1$-szego wielomianu ortogonalnego na przedziale $[a, b]$, a współczynniki są równe

$$A_i = \int_a^b \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx$$

. O istnieniu wystarczająco wielu pierwiastków wielomianu ortogonalnego, oraz zasadności takiego doboru węzłów mówią następujące twierdzenia:

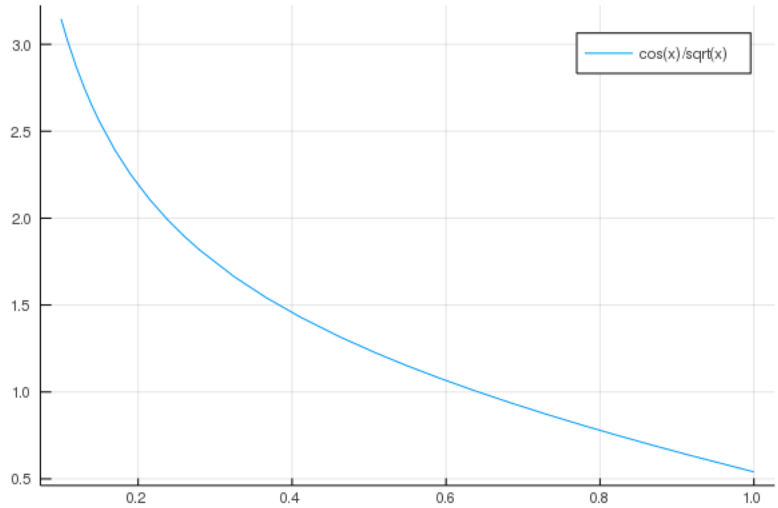
zera funkcji ortogonalnych 1 *elo*

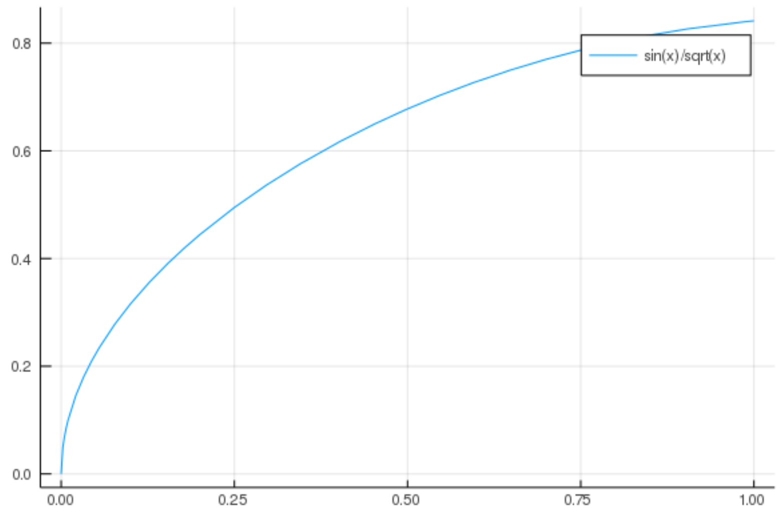
Badane funkcje

W tym sprawozdaniu zbadamy skuteczność różnych metod numerycznych w obliczaniu przybliżonych wartości całek dla funkcji $C = \frac{cos(x)}{\sqrt{x}}$ i $S = \frac{sin(x)}{\sqrt{x}}$ na przedziale $[0, 1]$. Całkowane funckje nie są zdefiniowane w 0, na potrzeby obliczeń przyjmiemy, że wartości tych funkcji w 0 są równe 0.

$$I_C = \int_0^1 \frac{cos(x)}{\sqrt{x}} dx \approx 1.8090484758005441629... \tag{1}$$

$$I_S = \int_0^1 \frac{sin(x)}{\sqrt{x}} dx \approx 0.6205366034467622036... \tag{2}$$





Przyjrzyjmy się wykresom badanych funckji na podanym przedziale. Zauważamy, że C w zerze rozbiega do nieskończoności, a S w zerze zbiega do 0. Reczywiście obliczenie granic daje wyniki zgodne z wykresami funkcji:

$$\lim_{x \to 0} \frac{cos(x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{cos(0)}{\sqrt{x}} = +\infty \tag{3}$$

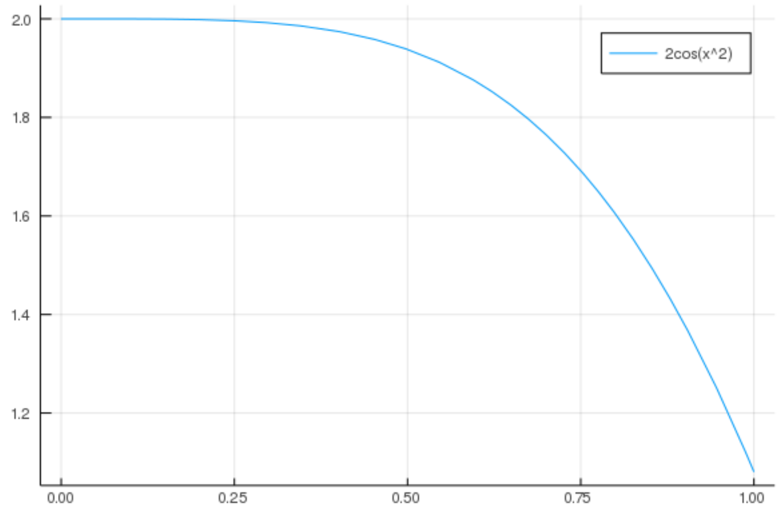
$$\lim_{x \to 0} \frac{sin(x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{sin(x)}{x} \sqrt{x} = 0 \tag{4}$$

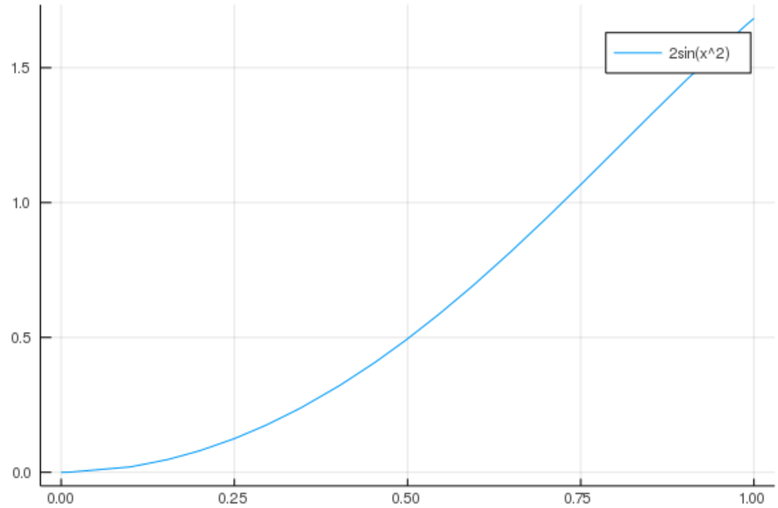
Na podstawie tej informacji możemy przypuszczać, że obliczenie całki I_S będzie łatwiejsze niż obliczenie I_C, ponieważ S jest ograniczona, a jej wartość w 0 zgadza się z jej granicą w tym punkcie. C jest nieograniczona i w zerze przyjmuje 0, ale jej granica w tym punkcie wynosi $+\infty$ zatem obliczenie całki w okolicy 0 może być niedokładne.
Możemy zmienić postać całek I_C i I_S za pomocą podstawienia $x = t^2$ Wtedy:

$$I_C = \int_0^1 \frac{cos(t^2)}{\sqrt{t^2}} 2tdt = \int_0^1 2cos(t^2) \tag{5}$$

$$I_S = \int_0^1 \frac{sin(t^2)}{\sqrt{t^2}} 2tdt = \int_0^1 2sin(t^2) \tag{6}$$

Otrzymujemy w ten sposób nowe funkcje pod całką $Snew(x) = 2sin(x^2)$ i $Cnew(x) = 2cos(x^2)$. Nowe funkcje mają określone wartości dla wszystkich punktach z przedziału $[0, 1]$ i obie funkcje są ograniczone, więc nie mamy takiego problemu jak przy funkcji C.





Omówienie wyników

...