Pracownia z analizy numerycznej

Sprawozdanie do zadania **P2.19**
Prowadzący: dr hab. prof. Paweł Woźny

Martyna Firgolska, Michał Dymowski

Wrocław, 12 stycznia 2020

Wstęp

...

Metoda trapezów

...

Kwadratury Gaussa-Legendre'a

Wagą nazywam funkcję ciągłą, która nie jest tożsamościowo równa 0.

Kwadratura

Metoda całkowania numerycznego polegająca na obliczeniu wartości wyrażenia

$$\sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) \approx \int_a^b f(x)dx$$

gdzie $x_0, ..., x_n \in [a, b]$.

Kwadratura Gaussa-Legendre'a

Kwadratura w której węzły $x_0, x_1, ..., x_n$ są pierwiastkami $n+1$-szego wielomianu ortogonalnego w_{n+1} na przedziale $[a, b]$ (z wagą $p \equiv 1$), a współczynniki są równe

$$A_i = \int_a^b \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx$$

. O istnieniu wystarczająco wielu pierwiastków wielomianu ortogonalnego, oraz zasadności takiego doboru węzłów mówią następujące twierdzenia:

Twierdzenie 1 *Jeśli niezerowa funkcja $f \in C[a, b]$ jest ortogonalna w tym przedziale z wagą w względem wszystkich wielomianów klasy $\prod_n$, to w (a, b) zmienia znak co najmniej $n+1$ razy.*

Dowód $1 \equiv w \in \prod_n$, więc $\int_a^b f(x)w(x)dx = 0$, co oznacza, że f musi zmieniać znak co najmniej raz. Przypuśćmy, że f zmienia znak tylko r razy, gdzie $r \leqslant n$. Zatem istnieją punkty $a = a_0 < a_1 < ... < a_{r+1} = b$ takie, że w każdym z przedziałów (a_i, a_{i+1}) funkcja f ma stały znak. Wielomian $\prod_r^{i=1}(x - a_i) = b(x) \in \prod_n$ ma tę samą własność, więc ponieważ f jest niezerowa, a $f(x)b(x)$ jest ciągła to powinno być $\int_a^b f(x)b(x)w(x)dx \neq 0$, co jest sprzeczne z założeniem, że $\int_a^b f(x)b(x)w(x)dx = 0$.

W szczególności wielomian w_{n+1} spełnia założenia powyższego twierdzenia, więc musi mieć dokładnie $n+1$ pierwiastków jednokrotnych.

Twierdzenie 2 *Jeśli węzły $x_0, x_1, ..., x_n$ są zerami $n+1$-szego wielomianu ortogonalnego w_{n+1} na przedziale $[a, b]$ z wagą w, to kwadratura o współczynnikiach*

$$A_i = \int_a^b w(x) \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx$$

jest dokładana dla każdego wielomianu $f \in \prod_{2n+1}$.

Dowód Niech r będzie resztą z dzielenia wielomianu f przez w_{n+1}: $(q, r \in \prod_n)$

$$f = q w_{n+1} + r.$$

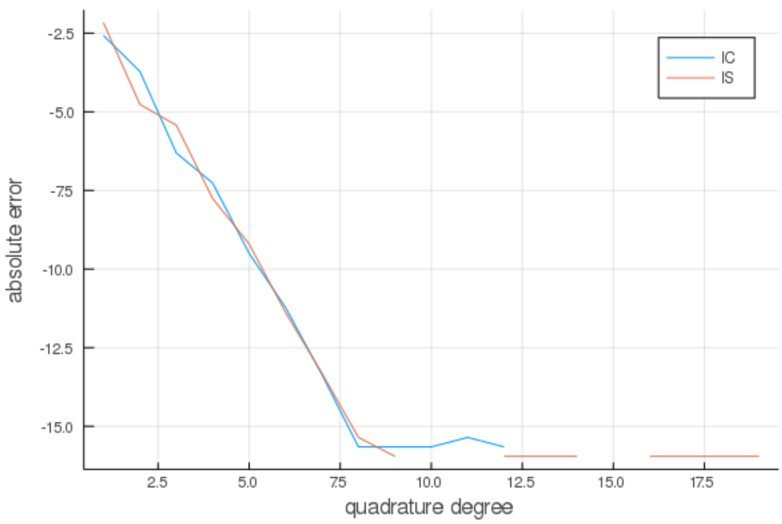
Stąd $r(x_i) = f(x_i)$. Ponieważ kwadratura Gaussa-Legendre'a jest z założenia dokładna dla wielomianów postaci $\sum_{i=0}^{n} B_i \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$, to jest dokładna dla wszystkich wielomianów z $\prod_n$. Dla takich wielomianów kwadratura oblicza dokładną wartoś całki wielomianu interpolacyjnego danego wielomianu w węzłach $x_0, x_1, ..., x_n$. Ponieważ liczba użytych węzłów jest większa niż stopień wyjściowego wielomianu to otrzymany wielomian interpolacyjny jest mu równy. Ponieważ w_{n+1} jest ortogonalny względem wszystkich wielomianów stopnia co najwyżej n,to

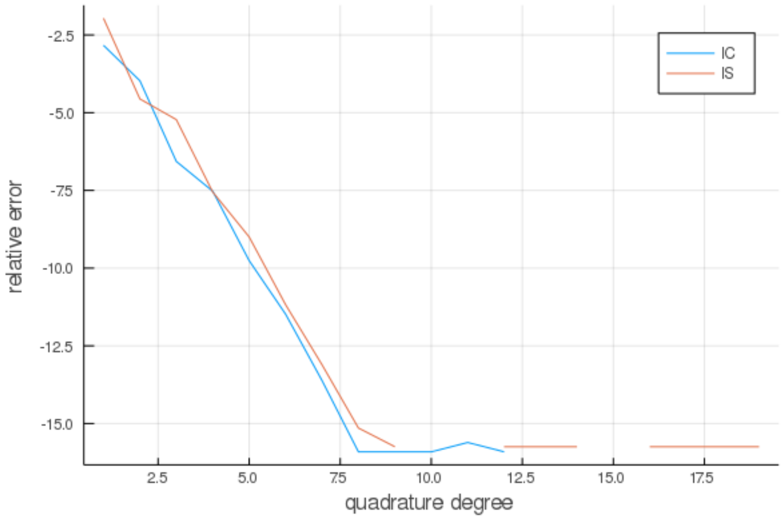
$$\int_a^b f(x)w(x)dx = \int_a^b r(x)w(x)dx = \sum_{i=0}^{n} A_i r(x_i) = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i).$$

Nie da się skonstruować kwadratury, która przy użyciu $n+1$ węzłów będzie dokładna dla wielomianów stopnia wyższego niż $2n+1$. Niech będą dane pewne $x_0, x_1, ..., x_n, A_0, A_1, ..., A_n$, kwadratura $Q(f) = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$ nie jest dokładna dla wielomianu $prod_{i=0}^{n}(x - x_i)^2$.

0.1. Otrzymane wyniki

Kwadratury Gaussa-Legendre'a wykorzystaliśmy do obliczenia wartości całek z funkcji *Snew* i *Cnew* równych odpowiednio całkom I_S, I_C.

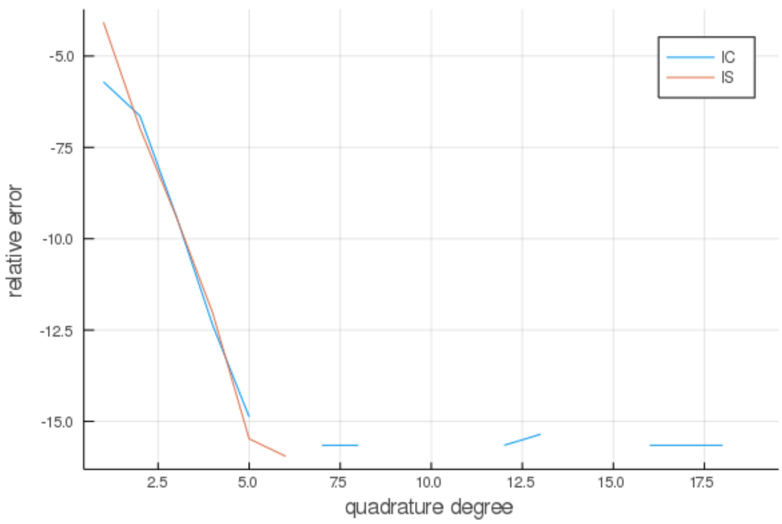




W punktach, w których wykres błędu bezwzględnego znika obliczona wartość jest równa reprezentacji wartości całki (odpowiednio I_C lub I_S) w arytmetyce Float64. Ciąg kwadratur Gaussa-Legendre'a z funkcji ciągłej na przedziale jest zbieżny do wartości całki z tej funkcji (tw. Stieltjes'a), więc tak długo można się było spodziewać, że używanie kwadratur wyższych stopni będzie poprawiać dokładność otrzymanego wyniku, ale nawet wyniki dla bardzo niskich stopni kwadratur dają rezultaty znacznie dokładniejsze niż wcześniej użyte metody, wymagające wykonania wielokrotnie większej ilości obliczeń.

Złożne kwadratury Gaussa-Legendre'a

Dzielimy przedział $[-1, 1]$ n punktami równnodległymi, a następnie całkę z danej funkcji obliczamy osobno na każdym z powstałych $n - 1$ przedziałów, za każdym razem stosując kwadraturę Gaussa-Legendre'a.



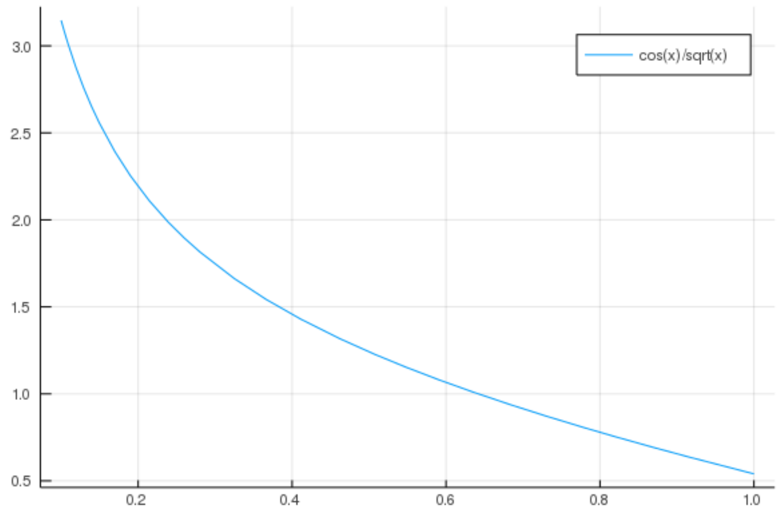
Powyżej widać wykres błędu względnego dla kwadratur rozbijających przedział $[-1, 1]$ na trzy podprzedziały. Rozbijanie wyjściowego przedziału na większą ilość podprzedziałów nie wpływa na wyniki w sposób znaczący. Poprawia się jedynie dokładność otrzymanego wyniku dla kwadratur niższych stopni. W przypadku całki I_C otrzymujemy 16 cyfr dokładnych i wynik ten nie poprawia się, nawet gdy używamy ponad 100 podprzedziałów zamiast wyjściowego $[-1, 1]$. Dla 10 i więcej użytych podprzedziałów wyniki otrzymany przy obliczaniu całki I_C jest dokładną wartością I_C w arytmetyce Float64.

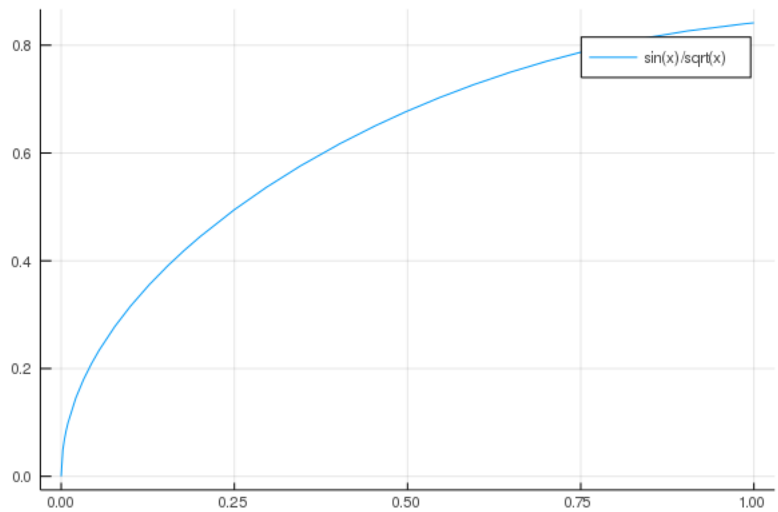
Badane funkcje

W tym sprawozdaniu zbadamy skuteczność różnych metod numerycznych w obliczaniu przybliżonych wartości całek dla funkcji $C = \frac{cos(x)}{\sqrt{x}}$ i $S = \frac{sin(x)}{\sqrt{x}}$ na przedziale $[0, 1]$. Całkowane funckje nie są zdefiniowane w 0, na potrzeby obliczeń przyjmiemy, że wartości tych funkcji w 0 są równe 0.

$$I_C = \int_0^1 \frac{cos(x)}{\sqrt{x}} dx \approx 1.8090484758005441629... \tag{1}$$

$$I_S = \int_0^1 \frac{sin(x)}{\sqrt{x}} dx \approx 0.6205366034467622036... \tag{2}$$





Przyjrzyjmy się wykresom badanych funckji na podanym przedziale. Zauważamy, że C w zerze rozbiega do nieskończoności, a S w zerze zbiega do 0. Reczywiście obliczenie granic daje wyniki zgodne z wykresami funkcji:

$$\lim_{x \to 0} \frac{cos(x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{cos(0)}{\sqrt{x}} = +\infty \tag{3}$$

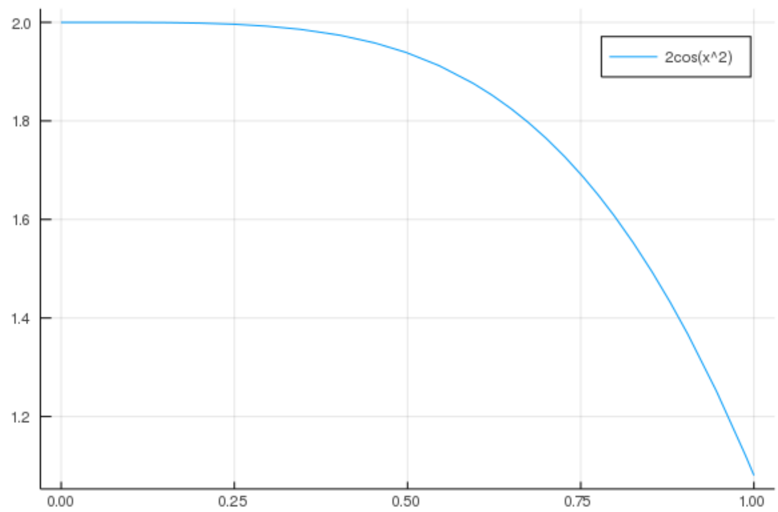
$$\lim_{x \to 0} \frac{sin(x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{sin(x)}{x} \sqrt{x} = 0 \tag{4}$$

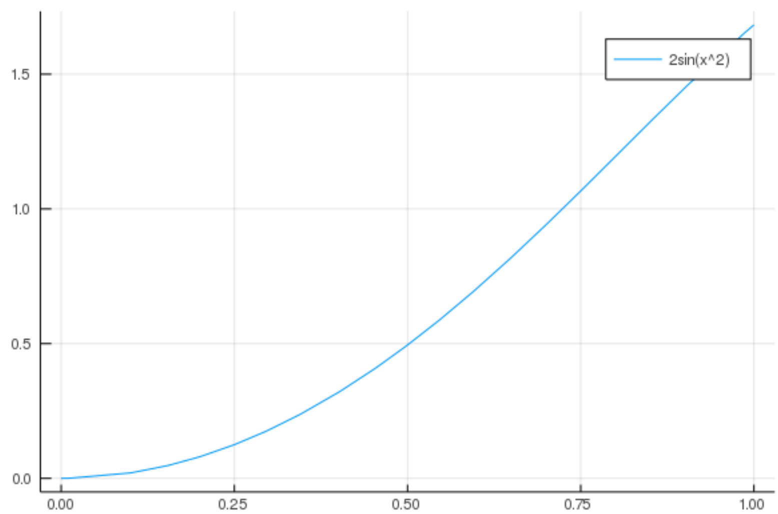
Na podstawie tej informacji możemy przypuszczać, że obliczenie całki I_S będzie łatwiejsze niż obliczenie I_C, ponieważ S jest ograniczona, a jej wartość w 0 zgadza się z jej granicą w tym punkcie. C jest nieograniczona i w zerze przyjmuje 0, ale jej granica w tym punkcie wynosi $+\infty$ zatem obliczenie całki w okolicy 0 może być niedokładne.
Możemy zmienić postać całek I_C i I_S za pomocą podstawienia $x = t^2$ Wtedy:

$$I_C = \int_0^1 \frac{cos(t^2)}{\sqrt{t^2}} 2tdt = \int_0^1 2cos(t^2) \tag{5}$$

$$I_S = \int_0^1 \frac{sin(t^2)}{\sqrt{t^2}} 2tdt = \int_0^1 2sin(t^2) \tag{6}$$

Otrzymujemy w ten sposób nowe funkcje pod całką $Snew(x) = 2sin(x^2)$ i $Cnew(x) = 2cos(x^2)$. Nowe funkcje mają określone wartości dla wszystkich punktach z przedziału $[0, 1]$ i obie funkcje są ograniczone, więc nie mamy takiego problemu jak przy funkcji C.





Omówienie wyników

...