Какой сдвиг предложить сделать Мише для проверки фазы FFP

−i5-6 $\quad u^{inc} = e^{-i(k^i, x)} \to u^{sc}(\hat{x}) = \frac{e^{-ik|x|}}{\sqrt{|x|}} u_\infty(\hat{x})$

для тела в начале координат

Если тело переносится в точку $\vec{R}$, то

скалярное произведение

$$u'^{sc}(\hat{x}) = \frac{e^{-ik|x|}}{\sqrt{x}} \underbrace{e^{ik(\hat{x},\vec{R})} e^{-i(\vec{k}^i,\vec{R})} u_\infty(\hat{x})}_{u_\infty(\hat{x})}$$

Надо выбрать R так, чтобы вариации $(\hat{x}, R)$ были видны на графике

$(\hat{x}, R) \in [-R, R]$; $\Rightarrow k(\hat{x}, R) \in [-kR, kR]$

хочу $[-kR, kR] = [-\frac{4}{5}\pi, \frac{4}{5}\pi]$

$\Rightarrow kR = \frac{4}{5}\pi \qquad R = \frac{4\pi}{5k}$

Если $k = 10$ то $R = \frac{4\pi}{50} \approx \frac{12}{50} \approx \frac{1}{4}$

взять $\varphi_{сдвиг} = 20^\circ$; $R = \left(\frac{4\pi}{50}\cos\varphi_{сдвиг}, \frac{4\pi}{50}\sin\varphi_{сдвиг}\right)$

Формулы SAR для "$-i$"

Я переписываю существенные формулы из $\underbrace{FP1}$ ÷ $\underbrace{FP10}$ в парадигме
(a) $u(x,t) \sim e^{-i[(k,x)-\omega t]}$. В $\underbrace{FP...}$ я предполагал $e^{+i[...]}$, как у Колтона-Кресса, однако код Медвинского использует "второй ~~Бессе~~ Ханкель", что мы своими глазами видели. Это свидетельствует о расхождении ~~КО~~ с КК, см. и ~~Х~~ (3.83), где используется "первый Ханкель".

"КК" — это "Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory" Third Edition by D. Colton and R. Kress

Начинаем с формулы

$$(\text{KK } 2.9) \quad u(x) = \int_{\partial D} \left[u(y) \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial n(y)} - \frac{\partial u}{\partial n}(y)\, \Phi(x,y) \right] ds_y$$

где $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$, и

$$(\text{KK } 2.1) \quad \Phi(x,y) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}$$

Выбор Φ с плюсом как в (KK 2.1)$^{-i2}$ не обязателен, поскольку Φ должно быть фундаментальным решением уравнения Гельмгольца ~~но~~ для к. Тогда $\overline{\Phi}(x,y) = \frac{1}{4\pi}\frac{e^{-ik|x-y|}}{|x-y|}$ — фундаментальное решение для $(-k)$, но в уравнении есть только $k^2 \Rightarrow \overline{\Phi}$ — Гельмгольца фундаментальное решение и для к тоже.

Разложение после (2.14) для $|x| \to \infty$:

$$|x-y| = \sqrt{|x|^2 - 2(x,y) + |y|^2} = |x| - (\hat{x},y) + O\left(\frac{1}{|x|}\right)$$

$$\hat{x} \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{x}{|x|}$$

тогда $e^{-ik|x-y|} \simeq e^{-ik|x|} e^{+ik(\hat{x},y)}$

(KK2.16) $$\frac{\partial}{\partial n(y)} \frac{e^{-ik|x-y|}}{|x-y|} \simeq \frac{e^{-ik|x|}}{x} \frac{\partial}{\partial n(y)} e^{+ik(\hat{x},y)}$$

Эти выражения входят в формулу для FFP (KK 2.9), точнее — в её двумерный вариант, где в качестве $\overline{\Phi}$ мы берём $\frac{i}{4} H_0^{(2)}(k|x-y|)$ (в отличие от $H_0^{(1)}$ в (KK 3.83)).

Мы можем убедиться с помощью (КК 3.82), что $H^{(1,2)}$ удовлетворяют разным вариантам условия Зоммерфельда. Действительно.

(КК 3.82)
$$\begin{cases} H_n^{(1,2)}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\, e^{\pm i\left(t - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}\left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right) \\ H_n^{(1,2)\prime}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\, e^{\pm i\left(t - \frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}\left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right) \end{cases}$$

Тогда для $y = 0$

$$\frac{\partial \Phi(x)}{\partial |x|} - ik\Phi = \left(\frac{\partial}{\partial |x|} - ik\right)\cdot\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x|) =$$

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\approx \frac{i}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi k|x|}}\, e^{+i\left(k|x| - \frac{\pi n}{2}\right)}\underbrace{\left(k e^{+i\frac{\pi}{4}} - ik e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)}_{=0} = 0$$

$$\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial |x|} + ik\overline{\Phi} = \left(\frac{\partial}{\partial |x|} + ik\right)\frac{i}{4} H_0^{(2)}(k|x|) =$$

$$= \frac{i}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi k|x|}}\, e^{-i\left(k|x| - \frac{\pi n}{2}\right)}\underbrace{\left(k e^{-i\frac{\pi}{4}} + ik e^{\frac{\pi}{4}}\right)}_{= k\left(e^{-i\frac{\pi}{4}} + e^{i\frac{3\pi}{4}}\right) = 0} = 0$$

Значит, решения на основе $H_0^{(2)}$ соответствуют $\frac{\partial u}{\partial x} \pm ik u \to 0$, т.е., $u(x) \sim e^{-i(k,x)}$, как и ожидалось

-i4

Тогда в формуле (3.87) меняется знак в экспоненте: $(n=0)$

(КК 3.86) $~~u_\infty(x)~~$ $$u(x) = \frac{e^{-ik|x|}}{\sqrt{|x|}}\left(u_\infty(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{|x|}\right)\right)$$

(КК 3.87) $$u_\infty(\hat{x}) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{8\pi k}}\int_{\partial D}\left(u(y)\frac{\partial}{\partial n} e^{+ik(\hat{x},y)} - \frac{\partial u}{\partial n}(y)\, e^{+ik(\hat{x},y)}\right) ds_y$$

я не уверен в этом знаке, но неважно

Из программы Медвинского я получаю

(y, n_y) — координаты и нормаль (каждое — 2 действ. числа)

(u, u_n) — поле и нормальная производная (каждое — одно комплексное число)

также знаю k и $\hat{x}$ — направл. отражения

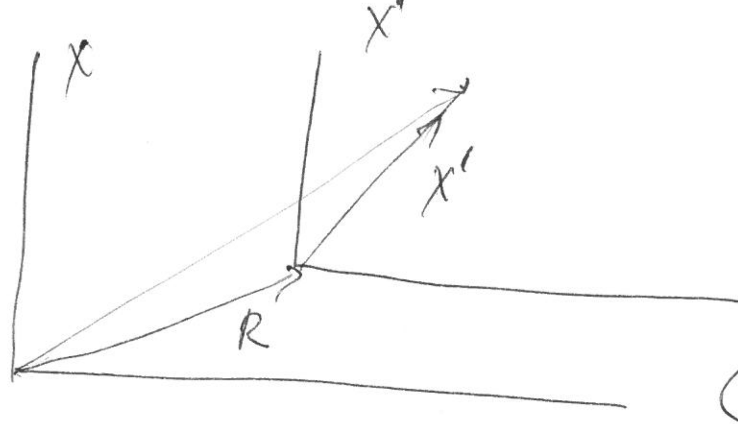
(a) тогда $$u_\infty(\hat{x}) \sim \frac{1}{\sqrt{k}}\int\left(u\frac{\partial}{\partial n} e^{ik(\hat{x},y)} - u_n e^{ik(\hat{x},y)}\right) dS_y$$

(b) $$\frac{\partial}{\partial n_y} e^{ik\hat{x},y} = n_y \cdot \nabla_y\left(e^{ik(\hat{x},y)}\right) = n_y \, ik\hat{x}\, e^{ik(\hat{x},y)}$$

(c) $$\sim \frac{1}{\sqrt{k}}\sum_j\left(u_j \cdot ik(n_{yj}, \hat{x}) - u_{n_j}\right) e^{ik(\hat{x}, y_j)} \cdot \Delta S_j$$

! важно: считать ΔS_j — я это не делал; для сферы — неважно, для остальных форм — важно.

Отражённое поле для "сдвинутого" точечного отражателя



$$\vec{X} = \vec{R} + \vec{x'}$$
$$\vec{X'} = \vec{X} - \vec{R}$$

см FPS

при этом $u^{inc} = e^{-i(k^i, x)}$

В штрихованной системе:

$$\left(u^{inc} = e^{-i(k^i, x')}\right) \to \left(u^{sc} = \frac{e^{-ik|x'|}}{\sqrt{x'}} A\right)$$

где $A = u_\infty = const$, т.к. отражатель — точечный. Если $u^{inc} = C e^{-i(k^i, x')}$, то $u^{sc} = \frac{e^{-ik|x'|}}{\sqrt{x'}} CA$

Найдём C из того, что реально $u^{inc} = e^{-i(k^i, x)}$, тогда

$$u^{inc} = e^{-i(k^i, (x'+R))} = e^{-i(k^i, x')} \underbrace{e^{-i(k^i, R)}}_{=C}$$

$$\Rightarrow C = e^{-i(k^i, R)} \quad \Rightarrow u^{sc} = \frac{e^{-ik|x'|}}{\sqrt{x'}} e^{-i(k^i, R)} \cdot A$$

Со стр. -i2:

$$|x-y| \approx |x| - (\hat{x}, y)$$

$$\Rightarrow |x'| = |x-R| = |x| - (\hat{x}, R)$$

$$\Rightarrow u^{sc} = \frac{e^{-ik(|x|-(\hat{x},R))}}{\sqrt{|x|}} e^{-i(k^i, R)} \cdot A =$$

$\sqrt{|x'|} \approx$

$$= \frac{e^{-ik|x|}}{\sqrt{|x|}} e^{ik(\hat{x},R)} e^{-i(k^i,R)} A$$

ср. с FP6: поменялись два знака

~~если~~ Для обратного рассеяния $k\hat{x} = -k^i$

$$\Rightarrow e^{ik(\hat{x},R)} e^{-i(k^i,R)} A = e^{-2i(k^i,R)} A$$

Если у нас есть разные "падающие" k^l и много точек (A_j, R_j), то

$$u^l_{\infty_j}(\hat{x}) = A_j e^{ik^l(\hat{x},R_j)} e^{-i(k^l,R_j)}$$

$$u^{l\,\text{"back"}}_{\infty_j} (\widehat{k^l}) = A_j e^{-2i(k^l, R_j)}$$

Это отличается по ~~форм~~ представлению от FP6, где было $u^{l\,\text{"back"}}_{\infty_j}(\hat{x})$: здесь у меня $u^{\text{"back"}}(\widehat{k^l})$, т.е., зависимость от "падающего" направления

Совершим ритуал вывода формулы для картинки в Фурье – представлении (27) → (29) на листочках, или (9.12) → (9.11) (?) в Cheney – Borden.

У нас $I(y) = \sum_m \int \overline{P}\left(t - \frac{2R_y^m}{c}\right) u_m^{sc}(x^m, t)\,dt$

На время отбросим m, $\sum_m$, x^m:

$$I(y) = \int dt\, \overline{P}(t - t_y)\, u^{sc}(t)\,dt, \quad \text{где } t_y = \frac{2R_y}{c}$$

Сейчас удобно считать: $P(t) = e^{i\omega_0 t} e^{i\alpha t^2}$

$$P(t) = \frac{1}{2\pi}\int \hat{P}(\omega) e^{i\omega t}\,d\omega$$

$$u^{sc}(t) = \frac{1}{2\pi}\int \hat{u}^{sc}(\omega') e^{i\omega' t}\,d\omega'$$

здесь крышки означают просто Фурье – представление

$$\overline{P}(t - t_y) = \frac{1}{2\pi}\int \overline{\hat{P}}(\omega)\, e^{-i\omega(t - t_y)}\,d\omega$$

$$\Rightarrow I(y) = \int dt \cdot \frac{1}{2\pi}\int d\omega\, \overline{\hat{P}}(\omega) e^{i\omega t_y} e^{-i\omega t} \cdot \frac{1}{2\pi}\int d\omega'\, \hat{u}^{sc}(\omega') e^{i\omega' t}$$

Используем: $\int dt\, e^{i(\omega' - \omega)t} = 2\pi\delta(\omega - \omega')$

$\Rightarrow I(y) = \frac{1}{2\pi}\int d\omega\, \hat{\bar{p}}(\omega)\, \hat{u}^{sc}(\omega)\, e^{i\omega t_y}$ — i8

Заменим $\int d\omega \to \sum_l$; $\omega \to \omega_l$,
уберём $\frac{1}{2\pi}$ и прочие коэффициенты
вроде ~~"$d\omega$"~~ $\Delta\omega$:

$$I(y) = \sum_l \hat{\bar{p}}_l\, \hat{u}^{sc}_l\, e^{i\omega_l t_y}, \text{ где}$$

$$\left.\begin{aligned} p(t) &= \sum_l \hat{p}_l\, e^{i\omega_l t} \\ u^{sc}(t) &= \sum_l \hat{u}^{sc}_l\, e^{i\omega_l t} \end{aligned}\right\} \text{ всё в точке } x$$

Как выразить $\hat{u}^{sc}_l$ через u_∞?
По определению, если $u^{in}(t) = e^{i\omega_l t}$,
то $u^{sc}(t) = u^l_\infty e^{i\omega_l t}$ в точке $z=0$,
т.е. u_∞ привязано к началу координ.
У нас $u^{in}(t) = \sum \hat{p}_l\, e^{i\omega_l (t - |x|/c)}$

$$= \sum_l \underbrace{\hat{p}_l\, e^{-i\omega_l |x|/c}}\, e^{i\omega_l t}$$

$$\Rightarrow u^{sc}(t) = \sum_l u^l_\infty\, \hat{p}_l\, e^{-i\omega_l |x|/c}\, e^{i\omega_l t}$$

Тогда в точке x: $\xrightarrow{\quad}$ (-i 9

$$u^{sc}(t;x) = \sum_\ell u_\infty^\ell \hat{P}_\ell e^{-i\omega_\ell |x|/c} e^{i\omega_\ell (t-|x|/c)}$$

$$= \sum_\ell \underbrace{u_\infty^\ell \hat{P}_\ell e^{-2i\omega_\ell |x|/c}} e^{i\omega_\ell t}$$

$$\Rightarrow \hat{u}_\ell^{sc} = u_\infty^\ell \hat{P} e^{-2i\omega_\ell |x|/c}$$

Теперь: $t_y = \frac{2}{c}|x-y| \approx \frac{2}{c}\left(|x| - (\hat{x}, y)\right)$

стр. (-i 8

$$\Rightarrow I(y) = \sum_\ell \overline{\hat{P}_\ell} \cdot \underbrace{u_\infty^\ell \hat{P}_\ell e^{-2i\omega_\ell |x|/c}}_{=\hat{u}_\ell^{sc}} \cdot e^{i\omega_\ell \cdot \frac{2}{c}(|x| - (\hat{x}, y))}$$

$$= \sum_\ell |\hat{P}_\ell|^2 u_\infty^\ell e^{-2i k_\ell (\hat{x}, y)}, \text{ где } |k_\ell| = \frac{\omega_\ell}{c}$$

Изменился знак в экспоненте по сравнению с (31).

Для чирпа $|\hat{P}_\ell|^2 \simeq const(\ell) \Rightarrow$

$$I(y) = \sum_\ell u_\infty^\ell e^{-2i|k_\ell|(\hat{x}, y)}$$

потом можно добавить сумму по апертуре:

$\sum_m$; $u_\infty^\ell \to u_\infty^{\ell, m}$; $\hat{x} \to \hat{x}^m$

Одномерная картинка

a.k.a. Range Compression

$$I(y_r) \overset{-i9}{=} \sum_l u_\infty^l e^{-2i|k_l| y_r}, \quad \text{где} \quad y_r = (\hat{x}, y)$$

так как $\hat{x}$ направлено на источник, положительные y_r ближе к источнику, чем отрицательные.

т.е., не в начале координат

Для "сдвинутых" отражателей надо выразить $u^l_{\infty,j}$ через R_j и $\hat{x}$

стр (-i6) $\quad u^l_{\infty,j}(\hat{x}) = A_j e^{ik^l(\hat{x}, R_j)} e^{-i(k^i, R_j)}$

Для обратного рассеяния $k^l \hat{x} = -k^i$

(a) Тогда $u^l_{\infty,j} = A_j e^{2i|k^l|(\hat{x}, R_j)}$

$$I(y_r) = \sum_l \Big(\sum_j A_j e^{2i|k^l|(\hat{x}, R_j)}\Big) \cdot e^{-2i|k^l|\overbrace{(\hat{x}, y)}^{=y_r}}$$

(б) $$= \sum_l u^l_\infty e^{-2i|k^l| \cdot y_r}$$

(c) $$= \sum_l u^l_\infty e^{-2i|k^l|(\hat{x}, y)}$$