



دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده فیزیک

پایان نامه کارشناسی ارشد
سامانه های پیچیده

عنوان:

مطالعه همگامی در شبکه های عصبی مهاری

نگارش:

محسن مهرانی اردبیلی

استاد راهنما:

استاد سامان مقیمی عراقی

شهریور ۱۴۰۱

اللهُ أَكْبَرُ

فهرست مطالب

۱	سراگاز	۷
۱-۱	تشکر	۸
۲-۱	شروع داستان	۸
۳-۱	شروع مکاتبات	۹
۲	شرح مسئله	۱۱
۱-۲	علوم اعصاب نیازمند آرامش	۱۱
۲-۲	کارکرد سالم	۱۳
۳-۲	صرع	۱۴
۴-۲	لزوم شبیه‌سازی	۱۶
۵-۲	مسئله‌ات را به من بده!	۱۶
۳	شبکه انباشت و شلیک	۱۹
۱-۳	آهنگ تیزه زدن	۲۰
۲-۳	نشانگر تشخیص فاز هم‌گامی	۲۱
۳-۳	مسائل پیشروی پیاده سازی شبیه سازی	۲۱
۱-۳-۳	تابع بی‌کران دلتا	۲۱

۲۲	ثبت تاریخ تیزه زدن‌ها	۲-۳-۳
۲۳	نتایج	۴-۳
۲۳	انحراف از معیار میدان	۱-۴-۳
۲۳	نورون‌های خاموش	۲-۴-۳
۲۵	توزيع تناوب زمانی تیزه‌ها	۳-۴-۳
۲۵	پهن کردن قالی صفحه‌ی فاز	۴-۴-۳
۲۷	شبکه‌ی نورون‌های چرخنده	۴
۲۸	آهنگ تیزه زدن	۱-۰-۴
۲۸	نشانگر توسعه یافته‌ی تشخیص همگامی	۲-۰-۴
۲۹	شبیه‌سازی	۳-۰-۴
۲۹	نتایج	۴-۰-۴
۳۲	پهن کردن قالی صفحه‌ی فاز	۵-۰-۴
۳۵	شبکه نورون‌های ساده	۵
۳۶	شبیه‌سازی	۱-۰-۵
۳۷	نتایج	۲-۰-۵
۳۹	تصویرسازی سامانه‌ها	۶
۴۱	تلاش برای توصیف	۷
۴۲	حل معادله‌ی شبکه‌ی ساده	۱-۰-۷

فهرست شکل‌ها

۱-۲ مقاله‌ی اندرسون در سال ۱۹۷۲ که آغازگر جهان‌بینی جدیدی در حل مسائل پیچیده بود	۱۲
۲-۲ تفکیک بخش‌های مختلف مغز بر حسب کنترل اعضای بدن [؟]	۱۳
۳-۲ سوابیت هم‌گامی از کانون آن به ناحیه‌های همسایه [؟] محور عمودی در شکل بالا نمایش دهنده شمارنده‌های گیرنده‌هایی است که سیگنال‌های دریافتی از ناحیه‌های مختلف مغز را ضبط کرده‌اند. در این شکل به وضوح می‌بینیم که پس گذشت ۱۰ ثانیه از شروع فعالیت کانون صرع، بقیه بقیه نواحی هم شروع به تشدید می‌کند و پس از گذشت ۸۰ ثانیه حمله‌ی صرع متوقف می‌شود.	۱۵
۴-۲ آزمایش جعبه‌ی سیاه - در این آزمایش بررسی می‌شود که آیا مدل یا برنامه‌ی ارائه شده توانسته است که با توجه به ورودی‌ها خروجی‌های مورد انتظار را بازنویسی کند یا خیر.	۱۷
۲-۴ تعداد تیزه بر حسب جریان تصادفی برای سامانه‌ای با ده هزار نورون و ضربیت تاثیر $g = 50$	۳۳
۱-۶ تصویر فضای فاز سامانه نورونی انباشتوشلیک	۳۹
۱-۷ تطابق جریان پایای بdst آمده از حل عددی و تحلیلی	۵۰

فصل ۱

سرآغاز

به یاری خداوند برگی دیگر از داستان زندگی من در دانشگاه شریف ورق خورد. پس از انتظار بسیار و دوران طولانی کارشناسی و ارشد، بالاخره زمانی رسید که اثری کوچک با نام خودم در دنیای بی‌انتهای علم برجای بگذارم. برای تمام فیزیک‌پیشگان و متخصصان علمی کاملاً واضح و ملموس است که این مسیر همواره پر از رنج، سختی و لذت است. حال که به این نقطه رسیده‌ام تا نامه‌ای را در پایان به جامعه علمی تقدیم کنم؛ دریغ است که از سختی‌های مسیر نتویسم. از راهی که هر متخصص و پیشگام علمی باید تجربه کند.

به همین خاطر می‌خواهم پایان‌نامه‌ام را به شیوه‌ی داستانی نگارش کنم. این نامه، نه تنها شامل نتایج پژوهش استاد ارجمند «سامان مقیمی عراقی» و من است بلکه شامل راههای بن‌بستی نیز هست که در این دوسال به آن برخوردم. بعضاً شامل حدسهایی است که در ابتدا زدیم و صحیح نبودند. شامل مکاتباتی است که بین من و استادم صورت می‌گرفت.

مایل هستم تا از آن بن‌بست‌ها هم بنویسم هر چند که نگارش آن‌ها نیازمند متحمل شدن سختی دیگری است. پس این نامه را نه تنها ارزشمند می‌دانم به خاطر مطالب علمی آن؛ بلکه یک روایت و رمانی است از مسیری که یک دانشجوی ارشد باید در دوران تحصیل خود تجربه کند. هم شامل مقصد است و هم از راه روایت می‌کند.

۱-۱ تشكر

سپاسگزارم از خداوند متعال تا توفيق داد که این فصل از زندگی من در تحصيل و پژوهش رقم بخورد. از او به خاطر حضور پدر و مادر نازنینم تشكر می‌کنم که آن‌ها همواره در اين مسیر تکيه‌گاه و پشتيبان من بودند.

همچنین تشكر می‌کنم از استاد بزرگوارم که همراهی، دلسوزی و تواضع او هم تسهيل بخش مسیر بود و هم سرمشقاً ادامه‌ی راهم. از او بسيار آموختم و تنها گوشهاي از آن را می‌توانم در اين نامه بازگو کنم.

۲-۱ شروع داستان

در ابتدای تابستان پيش از شروع دوره‌ی ارشد؛ از برنامه‌نويسی رايانيه‌های کوانتمی خبردار شدم. اگر اين پردازنهای از پایه، طريقي محاسبه‌ی متفاوتی دارند؛ پس باید برنامه‌نويسی آن‌ها نيز تفاوت کند. اين يعني در دهه‌های پيشرو دیگر خبری از برنامه‌نويسی کلاسيکي نخواهد بود. اين رايانيه‌ها ساخته شده‌اند تا محاسبات پیچیده را با الگوريتم‌های حل کنند تا مرتبه‌ی زمان لازم برای حل آن‌ها به طريقي خيره کننده‌ای کاسته شود.

پس اين ايده در ذهن من متولير شد که آيا اين فناوري می‌تواند در حل مسائلی که آن‌ها را پیچیده می‌ناميم هم کاربرد داشته باشد يا خير. آيا آينده‌ی اين دو گرايش به يك دیگر گره خواهد خورد؟ شروع کردم به پرسش از اساتيد دانشکده و کسانی که در اين دو گرايش فعال و متخصص بودند. جملات زير شرح مختصری از نظرات چندتن از اساتيد متخصص است. اين جملات نقل به مضامون هستند.

۱. دکتر صادق رئيسي: امروز در مورد معماري رايانيه‌های کوانتمی تحقیق می‌کنيم و هنوز تا کاربرد مستقيم اين رايانيه‌ها فاصله داريم. پس از بلوغ اين رايانيه‌ها على الاصول متخصصان اين حوزه برنامه‌نويسی آن را به گرايش‌هایي همچون سامانه‌های پیچیده خواهند آموخت و علاقه‌مندی به برنامه‌نويسی کوانتمی شرط کافي برای ورود به اين حوزه نiest.

۲. دکتر سامان ابوالفتح بيگي: معماري اين رايانيه‌ها به گونه در حال توسعه است که آن‌ها را دوگانه‌سوز پيش ببرد. پس با اضافه شدن معماري کوانتمی لزوماً شيوهی کار با آن‌ها متفاوت از رايانيه‌های

^۱ هيبريد

کلاسیکی نخواهد شد و این تفاوت تنها در لایه‌های محاسباتی خواهد ماند.

۳. دکتر وحیدکریمی‌پور: مطمئناً شیوه‌ی حل مسائل در عصر رایانه‌های کوانتومی تغییر خواهد کرد. اولین تفاوت مهم بین منطق این دو رایانه‌ها این است که رایانه‌های کلاسیکی «گزاره‌های شرطی» را می‌فهمند و در سمت دیگر اصلاً حالت صحیح و غلط اصلاً مطلق نیست و برهمنهی از این دو حالت وجود دارد. پس اگر کسی می‌خواهد اصول کار با این رایانه‌های را بیاموزد باید از معماری آن‌ها نیز اطلاع داشته باشد.

۱-۳ شروع مکاتبات

پس از تمام این صحبت‌ها به این نتیجه رسیدم؛ زمانی که در آن زندگی می‌کنم هنوز فاصله‌ی زیادی با آینده‌ی ایده‌آل من دارد؛ پس تصمیم گرفتم همچنان به علاقه‌ی اول خود یعنی «سامانه‌های پیچیده» برگردم و آن را فعلاً به شکل کلاسیکی دنبال کنم. از آنجا که رابطه‌ی بسیار خوبی با استاد سامان مقیمی داشتم و همچنین از متخصصان نامی این حوزه هستند؛ تصمیم گرفتم تا درخواست خودم را با یک نامه الکترونیکی به ایشان تقدیم کنم.

صندوق پیام‌ها

من : سلام استاد خوبین؟ سلام مجدد

می‌گم من پیرو صحبت دفعه پیشی که کردیم به این نتیجه رسیدم توی این مقطع فعلاً زمان مناسبی برای پرداختن به اون مطلب نیست و باید به صورت علاقه شخصی مطالعه کنم و پیگیرش باشم تا در مقاطع دیگه با تجربه بیشتر به سمتش برم.

از حضورتون وقتی رو برای ملاقات می‌خواستم. تا اگر قابل بدونید با شما پژوهه کارشناسی ارشدم رو شروع کنم.

ارادتمند شما

محسن

استاد : سلام

قابل دونستن یعنی چی. من معمولاً احساسم برعکسه. اگر توانایی اش رو داشته باشم بتونم لذت این رو داشته باشم که همراه شما باشم. برای هفته‌ی بعد می‌توnim هماهنگ کنیم. مثلًا شنبه یک‌شنبه.

(پنجشنبه، ۲۹ آبان ۱۳۹۹)

سامان مقیمی

پس یک‌شنبه شروع رسمی کار من با استاد بود. در این جلسه به توضیح مسئله، افق پیشرو و قدم‌های اولیه پرداختیم که در بخش بعد شرح مختصری از آن آورده شده‌است.

فصل ۲

شرح مسئله

۱-۲ علوم اعصاب نیازمند آرامش

مطالعه فعالیت شبکه‌های عصبی برای تحقیق و بررسی کارکردهای مغز اهمیت زیادی دارد. همه بر این باوریم که مغز محمل اندیشه و تفکر است. ما کنچکاو هستیم که چگونه همکاری بین نورون‌های آن باعث می‌شود تا حافظه، کشف و پردازش صورت گیرد. شاید در نگاه اول مطالعه‌ی علوم اعصاب فقط از منظر زیست‌شناسی دارای معنا باشد اما در حقیقت مسائل علوم اعصاب چنان پیچیده و جذاب می‌نماید که توجه گستره‌ی بزرگی از علوم بنیادی از جمله فیزیک، شیمی، علوم رایانه و ... را به خود جلب کرده است. شایان ذکر است که تا کنون گرایش‌های یاد شده خدمات بزرگی را به این حیطه ارائه کرده‌اند که دستاوردهای آن‌ها قابل ملاحظه است.

از نگاه علم فیزیک، دستگاه اعصاب مغز به مانند یک سامانه‌ی بس‌ذره‌ای است که هر ذره‌ی آن را واحدهای سلولی نورونی تشکیل می‌دهند. بی‌تردید فیزیکدانان تبحر خود را در مطالعه‌ی سامانه‌های بس‌ذره‌ای نشان داده‌اند. یک مثال بسیار آشنا برای آن‌ها مطالعه‌ی الکترون‌هاست که در میان اتم‌های فلزی نوسان می‌کنند و پدیده‌های خارق‌العاده‌ای چون رسانایی یا ابررسانایی را در کل سامانه پدیدار می‌کنند. اگر هر نورون را به مانند یک نوسانگر توصیف کنیم که میان حالت فعال [روشن] یا غیرفعال [خاموش] رفت و آمد می‌کند؛ آنگاه فیزیک بس‌ذره‌ای می‌تواند رفتارهای بسیاری از این سامانه را برای ما آشکار کند و چگونگی رخداد آن‌ها را با مدلسازی توضیح دهد.

More Is Different

Broken symmetry and the nature of the hierarchical structure of science.

P. W. Anderson

The reductionist hypothesis may still be a topic for controversy among philosophers, but among the great majority of active scientists I think it is accepted

explanation of phenomena in terms of known fundamental laws. As always, distinctions of this kind are not absolute, but they are clear in most cases. Solid state physics, plasma physics, and perhaps

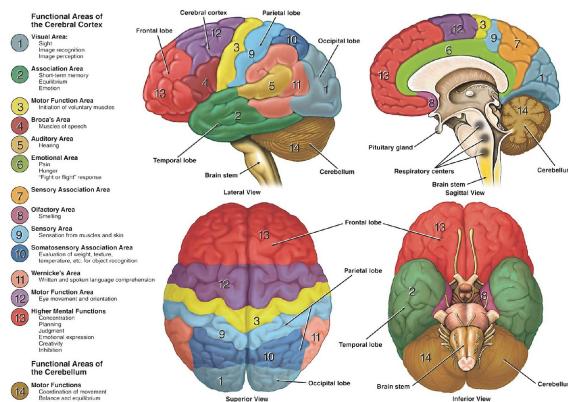
شکل (۱-۲) مقاله‌ی اندرسون در سال ۱۹۷۲ که آغازگر جهان‌بینی جدیدی در حل مسائل پیچیده بود.

همه‌ی دانشمندان حوزه‌ی علوم اعصاب بر این باور هستند که حافظه یا پردازش اطلاعات درون مغز به کمک «جمعیت» نورونی انجام می‌شود و هیچ «تک‌نورونی» به تنهایی نمی‌تواند این خواص را پدیدار کند. گواه آن که اگر بخشی از نورون‌های مغز را از جمعیت جدا کنیم؛ آنگاه اختلالات بسیاری در این فرآیندهای طلایی پیش می‌آید. در واقع کلید فهم دقیق این رفتارها درون برهمنکش‌ها نهفته است و نه مطالعه‌ی تک‌ذره و در مقیاس کوچک.

شاید این جملات ما را به یاد جمله‌ی معروف و تاریخی فیزیکدان بزرگ اندرسون بیاندازد. او مقاله‌ی جنجالی خود را در سال ۱۹۷۲ با عنوان تاریخی «بیشتر، متفاوت است». منتشر کرد – شکل ۱-۲. در واقع نقد او به جریان علمی زمان خودش آن بود که دانشمندان برای مطالعه‌ی هر پدیده‌ای آن را به تکه پازل‌های کوچکتر خرد می‌کردند تا رفتار آن سامانه را توضیح دهند. او اظهار کرد که گویا سامانه‌ای که از کنار هم قرار دادن اجزای کوچک ساخته می‌شود گاه از جمع اعضا فراتر می‌رود و رفتارهایی متفاوت از خود نشان می‌دهد که درون هیچ کدام از اجزا به تنهایی قابل مطالعه نیست.

او تاکید کرد که برای مطالعه‌ی برخی خواص سامانه‌های پیچیده مطالعه در مقیاس کوچک راهبردی نیست و باید کلید را در مقیاس بزرگ جستجو کرد. به عنوان مثال برای مطالعه‌ی طوفان، تشریح مولکول آب روشنگر نیست و باید همه‌ی جمعیت مولکول‌های آب را در کنار یکدیگر مطالعه کنیم. او جهان‌بینی جدیدی را با نام «پیچیده»^۱ برای دسته‌ای از مسائل سامانه‌های بس‌ذره‌ای پیشنهاد کرد.

¹ Complex paradigm



شکل (۲-۲) تفکیک بخش‌های مختلف مغز بر حسب کنترل اعضای بدن [؟]

اکنون که بیش از نیم قرن از عمر گفتمانی که او پایه‌گذاری کرد می‌گذرد؛ فیزیکدانان زیادی با جهان بینی «پیچیده» تلاش می‌کنند از علت رفتارهای جمعیتی زیادی پرده برداری کنند. یکی از معروف‌ترین شاخه‌ی این جریانات، فیزیکدانانی هستند که در حیطه‌ی علوم اعصاب فعالیت می‌کنند. آن‌ها تلاش می‌کنند با مدلسازی رفتارهای طلایی مغز همچون حافظه، خواب و ... و همچنین اختلالات و بیماری‌هایی چون آلزایمر، پارکینگسون، صرع و ... را با این جهان‌بینی توصیف کنند. کاری که در این پایان‌نامه ما انجام خواهیم داد مطالعه‌ی بیماری صرع است. یک اختلال که ناشی از فاصله گرفتن «جمعیت» نورونی از کارکرد سالم خود است.

۲-۲ کارکرد سالم

هر نورون می‌تواند در حالت فعال [روشن] یا غیرفعال [خاموش] قرار گیرد. از آزمایش‌های بالینی انجام شده از افراد سالم دریافت‌هایم که الگوهای روشن و خاموش شدن نورون‌های مغز صورتی مشخص دارند. به این صورت که در هنگام پردازش اطلاعات دریافتی از هر ناحیه‌ی بدن تنها بخشی از مغز را به فعالیت در می‌آورد. تو گویی که هر کدام از قسمت‌های مغز وظیفه‌ی کنترل بخشی از اعضای بدن را در اختیار دارد - شکل ۲-۲.

در حالت سالم هر کدام از ناحیه‌های مغز می‌تواند به تفکیک فعال شوند و سپس خاموش شوند. به این معنا که روشن و خاموش شدن یک ناحیه نباید روی ناحیه‌های همسایه به گونه‌ای مؤثر اثر بگذارد.

و کارکرد آن را دچار اختلال کند. در صورت بروز این اختلال فرد تمرکز خود را از کنترل یا پردازش صحیح از دست می‌دهد. به عنوان مثال سخرانان و خوانندگان پیشرفته قادر هستند تا ناحیه‌ای که مربوط به تکلم است را به تنها ی در اختیار گیرند و به صورت جداگانه به زبان بدن خود بیاندیشند. این رفتار ماهرانه اغلب در افراد مقدماتی یا دچار اختلال دیده نمی‌شود. به این ترتیب که تکلم فرد همواره همراه با الگوهای نامنظمی از تکان خوردن دست و پاست.

بیماری صرع که در ادامه با آن آشنا خواهیم شد در واقع حالتی کاملاً مختل از مغز را ناشی می‌شود که تمام ناحیه‌های مغز همدیگر را به گونه‌ای خاص مختل می‌کنند که امکان دارد فرد دارای این بیماری هشیاری خودش را کاملاً از دست بدهد.

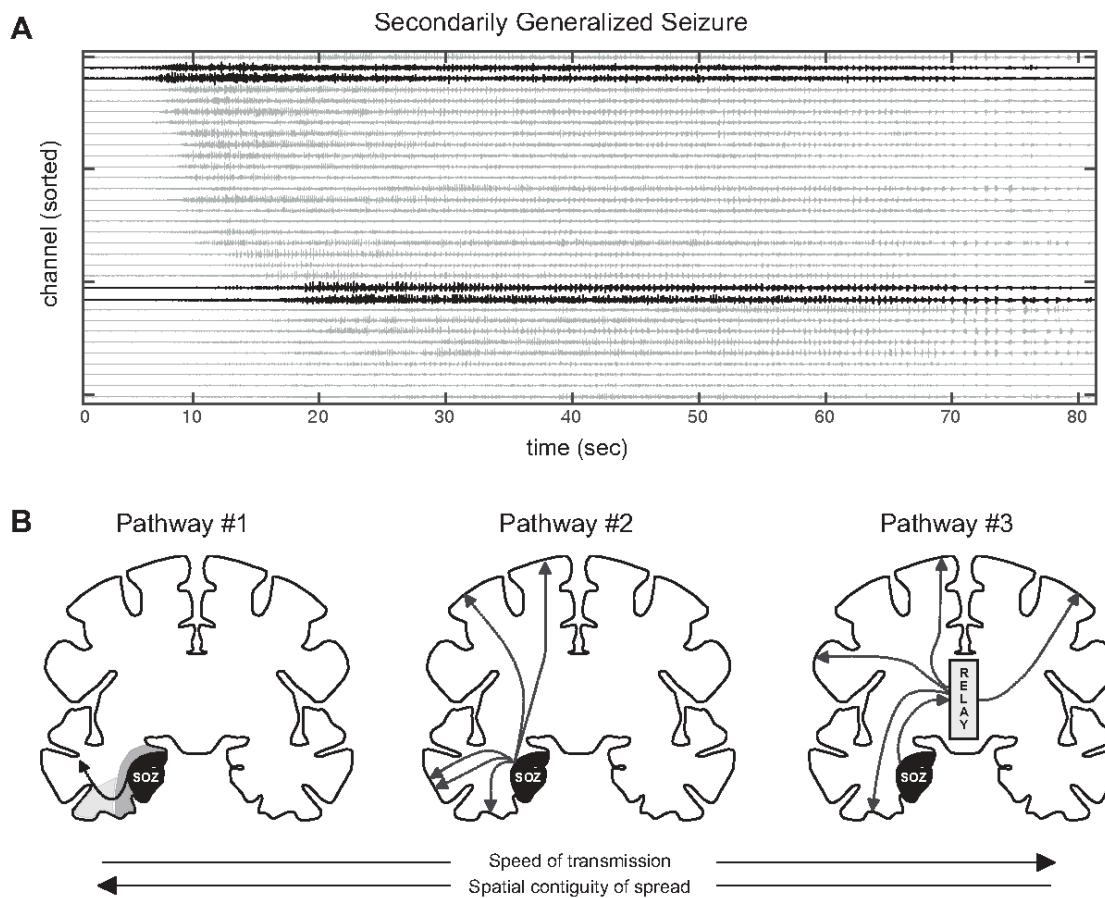
۳-۲ صرع

شاخص‌ترین علامت بیماری صرع تشنج‌های مداوم است. گاه این تشنج‌ها در افراد بسیار خفیف و آهسته است و گاه در برخی بیماران دیگر بسیار ناگهانی و شدید اتفاق می‌افتد که می‌تواند بیمار را کاملاً از هشیاری ببرد.

بیماری صرع یک اختلال در کارکرد جمعیت نورونی است. هم اکنون شواهدی وجود دارد که نشان می‌دهد این تشنج‌ها همراه با الگویی خاص از خاموش‌وروشن شدن جمعیت‌های نورونی همراه است. در زمان حمله‌ی تشنج دیده می‌شود که نورون‌های درگیر شده همگی با یکدیگر خاموش‌وروشن می‌شوند که تو گویی با یک دیگر هم ضربان یا «هم‌گام» شده‌اند. گاه این هم‌گامی فقط در یک ناحیه‌ای خاص از مغز اتفاق می‌افتد و فقط عملکرد آن ناحیه را متاثر می‌کند و گاه به ناحیه‌ای گسترده از مغز سرایت می‌کند و عملکردهای مختلف بدن را مختل می‌کند.

مثلاً در صورتی که کانون صرع در لوب آهیانه‌ای^۲ باشد احتمالاً منجر به اختلال در سیستم حرکتی و لرزش ماهیچه‌ها می‌شود، یا در لوب پس سری^۳ و گیج گاهی^۴ باعث اختلال در پردازش اطلاعات

Parietal Lobe^۲
Occipital Lobe^۳
Temporal Lobe^۴



Multiple pathways compatible with secondary seizure generalization are demonstrated. A: electrographic recording of a secondarily generalized seizure.

شکل (۳-۲) سرایت همگامی از کانون آن به ناحیه‌های همسایه [؟] محور عمودی در شکل بالا نمایش دهنده‌ی شمارنده‌های گیرنده‌ای است که سیگنال‌های دریافتی از ناحیه‌های مختلف مغز را ضبط کرده‌اند. در این شکل به وضوح می‌بینیم که پس گذشت ۱۰ ثانیه از شروع فعالیت کانون صرع، بقیه بقیه نواحی هم شروع به تشدید می‌کند و پس از گذشت ۸۰ ثانیه حمله‌ی صرع متوقف می‌شود.

حسی و در لوب پیشانی^۵ منجر به ازدست رفتن توجه و هوشیاری می‌شود.

۴-۲ لزوم شبیه‌سازی

آیا در میان تمام میلیاردها نورون‌های مغز، نورون‌هایی که کانون صرع می‌شوند ژنتیک خاصی دارند؟ شبکه‌ی اتصال حقیقی نورون‌ها به چگونه است؟ بی‌تردید دستیابی به تمام جزیات مغز برای ما میسر نیست اما در صورت جمع‌آوری همه‌ی این اطلاعات هم پردازش و فهمیدن آن‌ها کاری بس دشوار است. به همین علت به فراصت می‌افتیم تا اطلاعات مسئله را گزینشی‌تر بررسی کنیم و تا جایی که امکان دارد مسئله را ساده کنیم.

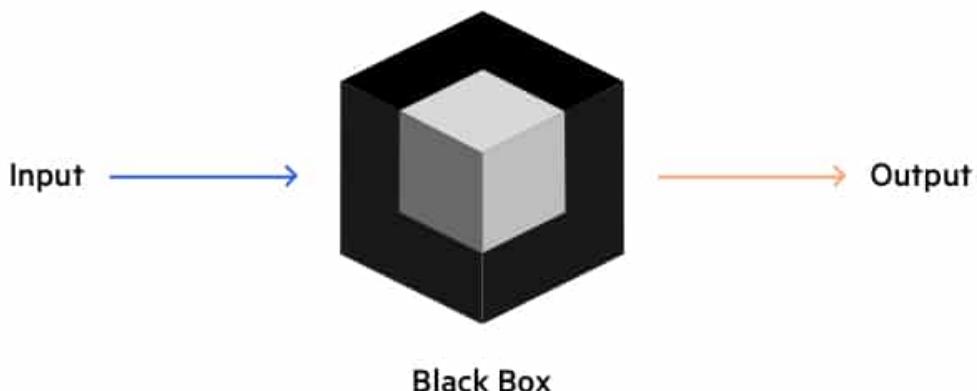
به همین دلیل به سراغ مدل‌سازی و آزمایش «جعبه سیاه» می‌رویم. اگر مسئله‌ی ما دشوار است تلاش می‌کنیم که با پیشنهاد مدل ساده آنچه درون سامانه اتفاق می‌افتد را حدس بزنیم. سپس به سامانه‌ی شبیه‌سازی شده به آن به عنوان یک «جعبه‌ی سیاه» نگاه می‌کنیم (شکل ۴-۲) و بررسی می‌کنیم که چنان که انتظار می‌رود آیا توانسته‌ایم رابطه‌ی بین ورودی‌ها و خروجی‌های ثبت شده‌ی سامانه‌ی حقیقی را بازتولید کنیم یا خیر.

کاری که در این پژوهش انجام خواهیم داد تلاشی است برای پیشنهاد دادن یک مدل برای این جعبه‌ی سیاه که رفتار نسبتاً مشابهی را میان ورودی و خروجی‌های این جعبه سیاه شبیه‌سازی می‌کند. همچنین به کمک بررسی دقیق‌تر این مدل تلاش می‌کنیم تا نقطه‌ی تقریبی گذرفاز سامانه را از فاز ناهم‌گام به هم‌گام پیدا کنیم.

۵-۲ مسئله‌ات را به من بده!

مدل‌های زیادی برای شبکه‌های عصبی ارائه شده است که توانایی تولید هم‌گامی نورون‌ها را در آن‌ها می‌توانیم جستجو کنیم. یکی از این مدل‌ها که در تمام فصول شبیه‌سازی از آغاز تا کنون از آن بهره برده شده است؛ مدل انباشت و شلیک است[۲].

Black Box Testing



شکل (۴-۲) آزمایش جعبه‌ی سیاه - در این آزمایش بررسی می‌شود که آیا مدل یا برنامه‌ی ارائه شده توانسته است که با توجه به ورودی‌ها خروجی‌های مورد انتظار را بازتولید کند یا خیر.

جستار خود را این گونه پیش می‌بریم:

(آ) ابتدا مدل پیشنهادی نویسنده‌گان [۳] را بازتولید می‌کنیم و تلاش می‌کنیم تا نتایج آن‌ها را دوباره بدست آوریم. بنظر می‌آید تمام کمیت‌های مهم را اندازه‌گیری نکرده‌اند. پس جوانب دیگر مسئله را هم بررسی خواهیم کرد. [به فصل شبکه انباست و شلیک نگاه کنید.]

(ب) «آیا این رفتار همگامی برای مدل‌های نورونی دیگر نیز اتفاق خواهد افتاد؟ یا فقط با این مدل این رفتار را مشاهده خواهیم کرد؟» پس مدل نورونی خود را عوض می‌کنیم تا پاسخ این پرسش را دریابیم. مدل پیشنهادی و جایگزین ما «چرخنده» است. [به فصل شبکه‌ی نورون‌های چرخنده نگاه کنید.]

(ج) تلاش کنیم تا مکان تغییر فاز به همگامی را با مدل‌های تحلیلی بدست آوریم. این کار برای مدل انباست و شلیک در این مقاله [۱] انجام شده است اما آیا می‌توانیم برای مدل‌های نورونی دیگر نیز آن را محاسبه کنیم؟ [به فصل تلاش برای توصیف نگاه کنید.]

فصل ۳

شبکه انباشت و شلیک

در این نوشتار [۳] نویسنده‌گان تلاش می‌کنند تا هم‌گامی را برای شبکه‌ی نورون‌های مهاری رصد کنند. این نورون‌ها به گونه‌ای باهم مرتبط هستند که تیزه زدن هر نورون منجر به مهار پتانسیل دیگر نورون‌ها می‌شود. تک‌تک نورون‌های این شبکه از تحول انباشت و شلیک تبعیت می‌کند. معادله تحول اختلاف پتانسیل هر کدام از نورون‌ها با محیط بیرونیش از رابطه زیر داده می‌شود:

$$\dot{v}_i = a_i - v_i - \frac{g}{N} \sum_{n|t_n < t} S_{i,l(n)} \delta(t - t_n - t_d) \quad (1-3)$$

- g : ضریب اتصال هر جفت نوروون. از آنجا که همه‌ی نوروون‌ها در این مطالعه مهاری هستند؛ باید این کمیت مثبت انتخاب شود تا تاثیر جمله‌ی پایانی در نهایت منفی باشد.
- S : ماتریس همسایگی. این کمیت نشان می‌دهد که آیا دو نوروون به هم متصل و تاثیرگذار هستند یا خیر.
- t_d : زمان تاخیر میان زدن تیزه هر نوروون و تاثیر آن روی نوروون‌های دیگر.
- a_i : یک پتانسیل تحریکی و خارجی. در این مطالعه این مقدار برای هر نوروون به صورت تصادفی انتخاب می‌شود و تا پایان شبیه‌سازی ثابت باقی می‌ماند.
- N : تعداد نوروون‌های در شبکه

۱-۳ آهنگ تیزه زدن

پیش از آن که به شبیه‌سازی یک شبکه از نوروون‌ها بپردازیم؛ خوب است تا یک نوروون تنها را مطالعه کنیم. یک نوروون تنها که پویایی از جنس مدل انباشت‌وشلیک دارد؛ دوره تناوب تیزه‌زدن آن از رابطه‌ی زیر قابل محاسبه است .

$$\dot{v}_i = I - v_i \rightarrow \frac{dv_i}{I - v_i} = dt \quad (2-3)$$

$$\rightarrow T = \ln\left(\frac{I}{I - 1}\right) \quad (3-3)$$

این رابطه نشان می‌دهد که بسامد تیزه‌زدن یک نوروون با افزایش مجموع جریان‌های ورودی آن به صورت لگاریتمی افزایش می‌یابد.

۲-۳ نشانگر تشخیص فاز هم‌گامی

برای آن که متوجه شویم که شبکه در حالت هم‌گامی یا ناهم‌گامی است نیاز است تا آشکارسازی را تعییه کنیم که با توجه به رفتار سامانه، هم‌گامی یا ناهم‌گامی را با عقرهای خود نشان دهد. برای این منظور ابتدا مفهوم میدان (E) را تعریف می‌کنیم که بیانگر شدت فعالیت نورون‌های شبکه است. انحراف از معیار این کمیت در طول زمان، پارامتر مناسبی است که به کمک آن هم‌گامی را تشخیص دهیم.

$$\ddot{E} + 2\alpha \dot{E} + \alpha^2 E = \frac{\alpha^2}{N} \sum_{n|tn < t} \delta(t - t_n - t_d) \quad (4-3)$$

$$\sigma^2 = \langle E^2 \rangle_t - \langle E \rangle_t^2 \quad (5-3)$$

* دقت کنیم که شدت میدان با تعداد تیزه زدن‌ها رفتاری ملایم دارد. به عنوان مثال اگر تیزه‌ها متوقف شوند؛ شدت میدان پس از لحظاتی چند [متناسب با α] صفر می‌شود.

در طول زمان میدان E و σ را رصد می‌کنیم. برای دریافت شهودی عملکرد مناسب این پارامتر نظم، فرض کنید که شبکه در حالتی است که جمعیت بزرگی از آن در حال خاموش و روشن شدن هم‌گام است. پس مشاهده خواهیم کرد که میدان که شدت فعالیت نورون‌ها را نشان می‌دهد در حال ضربان رفت و برگشتی است. این افت و خیز با تقویت هم‌گامی دامنه‌ی بزرگتر پیدا می‌کند به طوری که انحراف آن از میانگین پهناهی قابل توجهی کسب می‌کند. از این رو انحراف معیار میدان، کمیت مناسبی است که میزان هم‌گامی را گزارش کند.

۳-۳ مسائل پیشروی پیاده سازی شبیه سازی

۱-۳-۳ تابع بی‌کران دلتا

یکی از مشکلات شبیه سازی معادلات دیفرانسیلی حضور تابع دلتای دیراک است. این تابع در نقطه صفر خود دارای مقداری بینهایت است. معرفی چنین تابعی به رایانه کاری دشوار است و همانندی محاسباتی

ندارد. حال برای برطرف کردن این مشکل چه باید کرد؟ نکته در اینجا نهفته است که چون ما برای حل عددی معادله دیفرانسیلی خود از زمان پیوسته استفاده نمی‌کنیم و از گام‌هایی با طول مثبت Δt استفاده می‌کنیم این مشکل به صورت زیر مدیریت می‌شود.

$$v_i(t + \Delta t) = v_i(t) + \int_t^{t+\Delta t} \dot{v}_i dt \quad (6-3)$$

$$= v_i(t) + \int_t^{t+\Delta t} \left[a_i - v_i - \frac{g}{N} \sum_{n|t_n < t} S_{i,l(n)} \delta(t - t_n - t_d) \right] dt \quad (7-3)$$

$$\approx v_i(t) + [a_i - v_i(t)] \Delta t - \frac{g}{N} \sum_{n|t_n < t} S_{i,l(n)} \int_t^{t+\Delta t} \delta(t - t_n - t_d) dt \quad (8-3)$$

$$\approx v_i(t) + [a_i - v_i(t)] \Delta t - \frac{g}{N} \sum_{n|t_n < t} S_{i,l(n)} H(t + \Delta t - t_n - t_d) \quad (9-3)$$

حالا تابع پله کاملاً برای ما آشنا و قابل مدلسازی است. دقت شود که تابع پله یاد شده فقط در محدوده $t, t + \Delta t$ زندگی می‌کند و پس از آن اعتبار ندارد. معادله ۹-۳ می‌گوید که باید برای تحول پتانسیل نورون i ام بررسی کنیم که آیا نورونی در همسایگی آن تیزه زده است یا نه. اگر چنان باشد؛ یک واحد به جمع تیزه زدگان اضافه کنیم.

۲-۳-۳ ثبت تاریخ تیزه زدن‌ها

برای محاسبه تحول پتانسیل در رابطه ۹-۳ چنان که توضیح داده شد نیاز به دانستن تاریخ تیزه زدن‌ها داریم. اگر بخواهیم برای تمامی نورون‌ها در هر گام زمانی تیزه‌زدن آن را به صورت مجزا ثبت کنیم؛ یک آرایه مربعی خواهیم داشت که شماره سطر آن می‌تواند معرف زمان باشد و ستون نماد شماره نورون – شکل شماره (۱۱-۳).

اما مشکلی که برای این شبیه سازی رخ خواهد داد. در صورت افزایش تعداد نورون‌ها و زمان شبیه سازی با یک ابر آرایه روبرو خواهیم شد که امکان دارد در ذخیره سازی آن دچار مشکل شویم. به همین خاطر در شبیه سازی انجام شده تنها مجموع تیزه زدن‌ها را ذخیره کردیم تا یک آرایه یک ستونه داشته باشیم و در ذخیره سازی به مشکل نخوریم.

۴-۳ نتایج

اندازه‌ی پارامترهایی که برای این شبیه‌سازی انتخاب کردیم؛ کاملاً از صورت مقاله یاد شده برداشته شده و به قرار زیر است.

$$\alpha = 20 \text{ s}^{-1} *$$

جريان‌های تصادفی خارجی نورون‌ها از اعضای بازه‌ی (۱/۲, ۲/۸) انتخاب می‌شوند.

$$N = 10000 *$$

$$t_d = 0/1 \text{ s} *$$

این شبیه‌سازی برای ۱۰۰۰ ثانیه اجرا شده است که در آن هر گام زمانی برابر ۰/۰ ثانیه گرفته شده است. کد شبیه‌سازی در پوشه [مسئله همگامی برای مدل انباشت‌و‌شلیک](#) قابل مشاهده است.

۱-۴-۳ انحراف از معیار میدان

مهم‌ترین شاخصه ما برای ردگیری همگامی، انحراف معیار میدان E است که با زیگما σ نمایش می‌دهیم. جهش به وجود آمده در شکل (۱-۳ ب) به این معنی است که سامانه از حالت ناهم‌گامی به هم‌گامی تغییر فاز داده است.

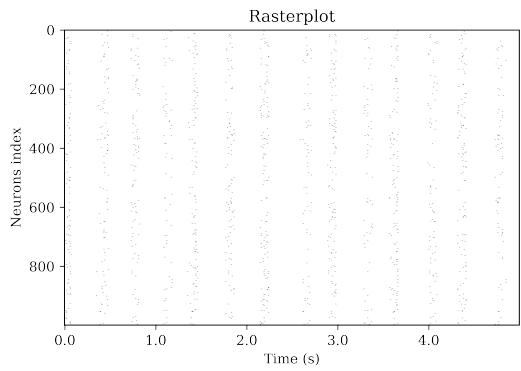
۲-۴-۳ نورون‌های خاموش

بی‌تردید میدان داخلی نورون‌ها کاملاً تابعی است از آمارتیزه‌های درون سامانه. نورون‌هایی که گاهی برای تیزه زدن به پیش می‌روند و گاه به علت حضور میدان داخلی مهار به عقب بر می‌گردند. خوب است بپرسیم که برآیند این رفت و برگشت برای هر نورون چگونه است. آیا این رفت و برگشت منجر به رسیدن به آستانه‌ی تیزه زدن می‌شود و یا نورون در برآیند اصلاً پیشروی نمی‌کند و هیچگاه به آستانه نمی‌رسد و خاموش می‌ماند.

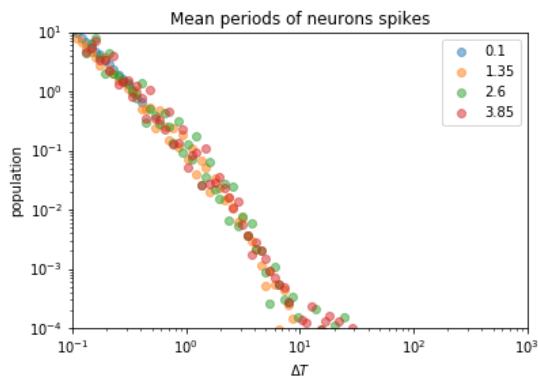
در شکل ۱-۳ ج شمار نورون‌هایی که هیچگاه در سامانه تیزه نمی‌زنند را آورده‌ایم و این که چگونه با



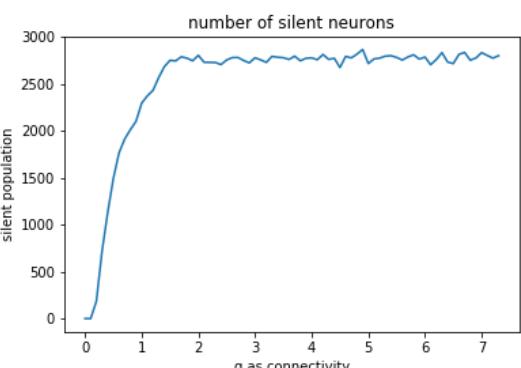
(ب) تغییر فاز از ناهم‌گامی به هم‌گامی برای ۱۰۰۰ نورون



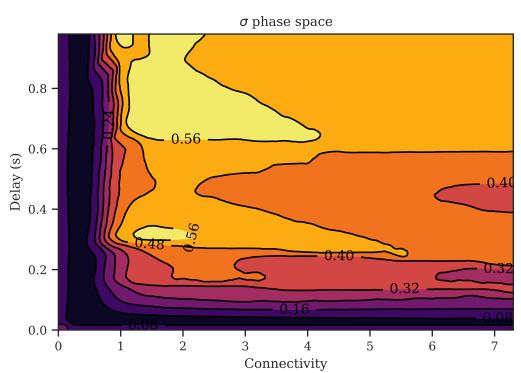
(آ) ثبت لحظه‌ای تیزه زدن هر نورون به صورت مجزا در این نمودار ضریب تاثیر هر نورون روی همسایه‌هایش $g = 5$ بوده است. چنان که انتظار می‌رفت شاهد هم‌گامی هستیم.



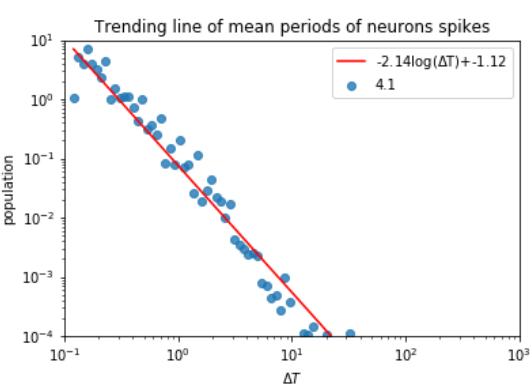
(د) توزیع بسامدی شبکه‌های ۱۰۰۰ نورونی که هر کدام قدرت اتصال متغیری دارند.



(ج) آمار نورون‌های خاموش درون سامانه



(و) صفحه‌ی فاز مربوط به سامانه‌ی نورون‌های



(ه) محاسبه‌ی نمای توزیع توانی فاصله زمانی بین تیزه‌ها انباست و شلیک: پیوست؟؟

افزایش ضریب تاثیر مهاری میدان این آمار رشد می‌کند.

این مشاهده نشان می‌دهد که در فاز هم‌گام، تقریباً ۲۵ درصد نورون‌ها خاموش هستند و نقشی در برقراری جریان داخلی ندارند. قابل حدس است که نورون‌هایی خاموش هستند که جریان‌های تصادفی خارجی پایین دست را داشته‌اند. به این معنی که اگر بازه‌ی جریان تصادفی را تنگ‌تر می‌گرفتیم [مثلاً از ۱/۶] شروع می‌کردیم؛ سامانه در فاز هم‌گام تفاوت رفتاری نمی‌داشت.

همچنین جالب است که تغییر فاز مشاهده شده در تعداد نورون‌های خاموش - شکل ۳-۱ج - در حالتی در همسایگی و متمایز از تغییر فاز شکل ۳-۱ب نشان می‌دهد.

۳-۴-۳ توزیع تناوب زمانی تیزه‌ها

شبکه‌ی ما متشكل از نورون‌هایی است که مدام در حال تیزه زدن و فعال نگهداشتن شبکه هستند. برخی با بسامد بیشتری تیزه می‌زنند و برخی آهسته‌تر. اگر کنجکاو باشیم که جمعیت کل نورون‌های ما چگونه میان دسته‌های مختلف با تناوب‌های متفاوت توزیع شده است؛ لازم است تا توزیع فراوانی آن‌ها را یکجا رسم کنیم - شکل ۳-۱د.

همان طور که می‌بینید به ظاهر این توزیع رفتاری توانی دارد و اگر کنجکاو باشیم می‌توانیم شب این نمودار تمام لگاریتمی آن را جهت محاسبه‌ی نمای توزیع بدست آوریم - شکل ۳-۱ه.

۴-۴-۳ پهن کردن قالی صفحه‌ی فاز

در قسمت‌های پیشین تنها به مطالعه‌ی تاثیر ضریب اتصال در تغییر فاز پرداختیم و زمان تاخیر را تنها در $t_d = 0/1s$ خلاصه کردیم. حال اجازه دهید تا به تاخیر نیز اجازه تغییر دهیم. در ادامه‌ی این قسمت از نوشتارمان، به فرش کردن صفحه‌ی فاز خود خواهیم پرداخت. امید است که چهره‌ی تمام نمای سامانه بر صورت این قالی نقش بندد.

قالی انحراف از معیار میدان

در شکل ؟؟ مشاهده می‌کنیم که شدت هم‌گامی در هر کدام از هنگرهای سامانه چقدر است. بنظر می‌رسد که با افزایش زمان تاخیر و ضریب تاثیر هم‌گامی قدرت پیدا می‌کند و هر دو در ظهور این رفتار

شريك هستند. اگر چه تاخير در جابجايی ضريب تاثير بحراني تغييري ايجاد نکرده است اما هم گامي را قدرت می بخشد.

فرصتی برای مدل‌های دیگر نورونی

در بخش قبل به بررسی ویژگی‌های مدل انباشت-شلیک پراختیم. اگر چه این مدل بسیار ساده توانست رفتارهای آشنایی را برای ما بازتوانید کند اما شامل محدودیت‌هایی است. این محدودیت‌ها باعث می‌شود تا ما به سراغ مدل‌های نورونی دیگری مانند نورون‌های چرخنده برویم.

این مدل نسبت به مدل قبلی شامل ویژگی‌های مشتبی است. یکی از ویژگی‌های خوب آن این است که پس از بازنشانی فاز نورون تیزه زده، فاز آن به زاویه‌ای بردۀ می‌شود که دارای خواص مثلثاتی مشابهی است. به این معنا که دیگر شاهد گستالتگی در اندازه‌ی جملاتی که تحول نورون را توصیف می‌کنند؛ نیستیم.

فصل ۴

شبکه‌ی نورون‌های چرخنده

در این مدل به جای آن که برای شبکه خود از مدل انباشت-شلیک استفاده کنیم از مدل چرخنده استفاده می‌کنیم. در این مدل نورون‌های ما مانند دونده‌هایی به دور میدان مثلثاتی می‌دوند. ما نقطه‌ی فاز π را به عنوان علامت برای این دونده‌ها قرار دادیم. هر زمان که دونده‌ای از علامت خود گذشت یک تیزه برای او در نظر می‌گیریم و بلافاصله او را به فاز π - باز می‌گردانیم.

برای توصیف فاز هر نورون از معادلات زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_i = I_i - \cos(\theta_i) - gE, & -5\pi/2 \leq \theta_i \leq \pi \\ \dot{E} = M - \alpha E \\ \dot{M} = -\alpha M + \frac{\alpha}{N} \sum_{n|t_n < t} \delta(t - t_n - t_d) \end{cases} \quad (1-4)$$

- θ_i : مشخص کننده فاز هر نورون. این فاز میان دو لبه در حال حیات است. کوچکترین کران بالای آن همان حالت آستانه در π است و بزرگترین کران پایین آن نگهدارنده‌ای است که از ریزش نورون‌ها جلوگیری می‌کند.
- E : میدانی است که شدت فعالیت شبکه را نشان می‌دهد.
- M : یک پارامتر فرعی که در حل معادله دیفرانسیل مرتبه دوم به دو معادله‌ی تحول مرتبه اول ما را یاری کرده است.

۱-۰-۴ آهنگ تیزه زدن

برای نورونی تنها که پویایی از جنس چرخنده دارد؛ دوره‌ی تناوب تیزه زدن آن بر حسب مجموع جریان ورودی رفتاری مطابق زیر دارد [۴]:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{I^2 - 1}} \quad (2-4)$$

این به این معناست که مدل چرخنده و انباستوشلیک اگرچه هر دو با افزایش جریان، بسامد تیزه زدن‌شان افزایش می‌یابد اما رفتار تغییر آن به دو گونه‌ی متفاوت صورت می‌پذیرد. این نکته‌ی مهمی است که در هنگام مقایسه‌ی دو مدل باید به خاطر داشته باشیم.

۲-۰-۴ نشانگر توسعه یافته‌ی تشخیص همگامی

برای تشخیص همگامی از یک پارامتر دیگری که در این مقاله [۴] توسط نویسنده‌گان ابداع شده است؛ بهره می‌بریم.

$$s = \left\langle \left[\frac{1}{N_a} \sum_{i_a} \sin(\theta_{i_a}) \right]^2 \right\rangle_t \quad (3-4)$$

میانگین‌گیری بالا روی ۱۰۰۰ گام آخر زمانی انجام می‌شود. این فاصله زمانی باید حتماً بزرگ‌تر از گام‌های زمانی تحول ریز مقیاس آن باشد. همچنین برای این متوسط‌گیری نورون‌هایی را مدنظر می‌گیریم که در منطقه‌ی فعال قرار گرفته‌اند. منطقه‌ی فعال، سمت چپ دایره مثلاً است.

۳-۰-۴ شبیه‌سازی

ثوابت مسئله را به گونه‌ی زیر انتخاب می‌کنیم.

$$\alpha = 20 s^{-1} *$$

* جریان‌های تصادفی خارجی نورون‌ها از اعضای بازه‌ی (۹/۵, ۱۳/۵) انتخاب می‌شوند. این بازه به گونه‌ای انتخاب شده است که نورون خاموشی در سامانه وجود نداشته باشد.

$$N = 10000 *$$

$$t_d = 0/1 s *$$

حال شبکه‌ی خود را به ازای قدرت اتصال‌های مختلف اجرا می‌کنیم تا مجدداً تحقیق کنیم که چگونه تغییر در قدرت اتصال و می‌تواند باعث شود تا تغییر فاز از ناهم‌گامی به هم‌گامی رخ دهد. برای مشاهده‌ی دفترچه شبیه‌سازی به آدرس [مسئله همگامی برای مدل چرخنده](#) مراجعه کنید.

۴-۰-۴ نتایج

مرتبه‌ی اجرای این الگوریتم خطی است و برای یک شبکه شامل ۱۰۰۰ نورون و برای ۱۰۰۰ گام شبیه‌سازی زمانی در حدود ۴ ثانیه به طول می‌انجامد.

در جستجوی تغییر فاز

پس از رصد کردن تغییرات رفتار سیستم بر حسب قدرت مهار نورون‌ها، تغییر فاز مانند مدل قبلی مشاهده شد اما مکان تغییر فاز تغییر کرد و حول $30 = g$ قرار گرفت. این تغییر فاز در دو شکل ۱-۴ آ و ۱-۴ ب قابل مشاهده است.

فاصله زمانی بین تیزه‌ها

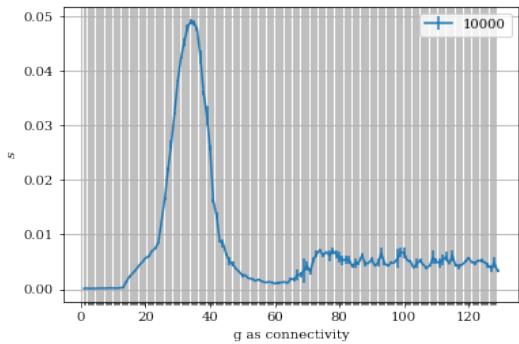
حال که دیدیم برخی نورون‌ها همواره خاموش می‌مانند و یا به عبارتی دوره‌ی تیزه زدن آن‌ها بینهایت است؛ خوب است که دوره‌ی تیزه زدن‌های نورون‌های دیگر را نیز بررسی کنیم. شکل ۱-۴ ج این شکل نمایان‌گر آن است که توزیع دوره‌ها به توزیع بی‌توانی و رفتار بی‌مقیاس نزدیک است. همچنین توجه کنیم که با افزایش ضریب تاثیر رفتار توانی آن‌ها تغییر نمی‌کند. تنها تفاوت در چگونگی انتخاب جایگاه‌های روی خط است. هر چه ضریب تاثیر بزرگتر می‌شود نورون‌ها فاصله‌ی زمانی تیزه‌های بزرگتری را اتخاذ می‌کنند.

با این مشاهده، کنجدکاو می‌شویم تا نمای بحرانی را برای آن حساب کنیم. در شکل ۱-۴ د با گذراندن یک خط بر داده‌های بدست آمده از شبکه‌ای با قدرت مهار ۲۰ را می‌بینیم.

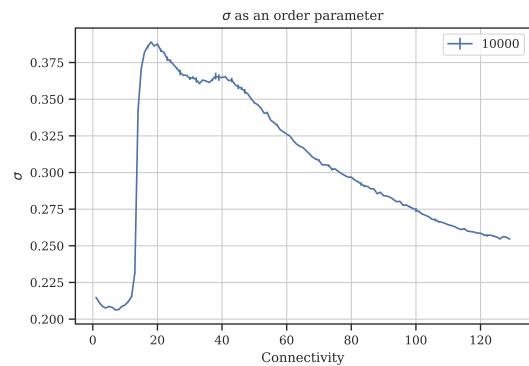
فعالیت شبکه

همان طور که دیدیم تعدادی از نورون‌ها در شبکه به حالت خاموش درمی‌آیند. قابل حدس است که اگر جمعیتی خاموش در شبکه داشته باشیم؛ احتمالاً آنها بی‌توانند که جریان تصادفی اولیه آن‌ها از بقیه کمتر است. برای تحقیق این حدس لازم است تا تعداد تیزه‌های نورون‌های شبکه را بر حسب جریان تصادفی اولیه آنها مرتب کنیم. شکل ۲-۴ نشانگر سامانه‌ای از ده هزار نورون است که با قدرت $50 = g$ روی هم تاثیر می‌گذارند. لازم به ذکر است که این رفتار در فاز هم‌گام قابل مشاهده است. در فاز ناهم‌گام تمام نورون‌ها که از هم تاثیر کمتری می‌پذیرند؛ فعال هستند.

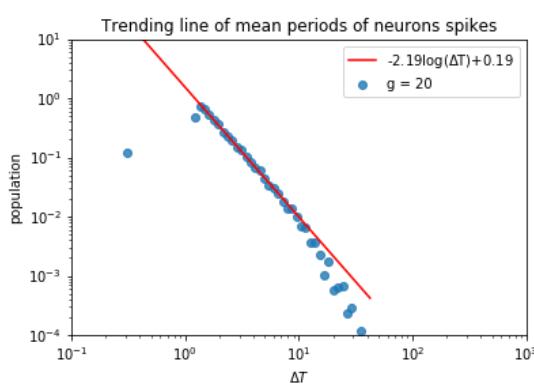
تعداد تیزه‌های کل شبکه رابطه‌ی مستقیمی با جریان خارجی جاری در شبکه دارد. می‌توانیم با محاسبات تحلیلی نیز به شکل بدست آمده از شبیه‌سازی عددی نزدیک شویم:



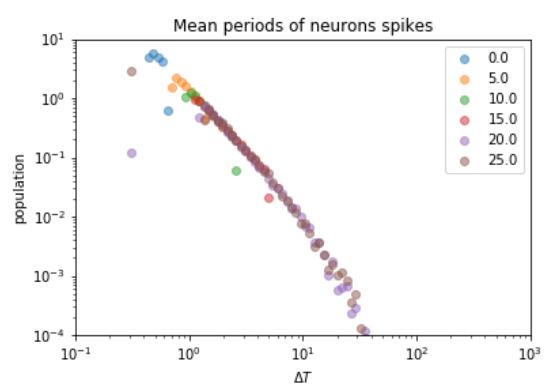
(ب) پارامتر نظم تعریف شده در رابطه ۳-۴ برای مدل



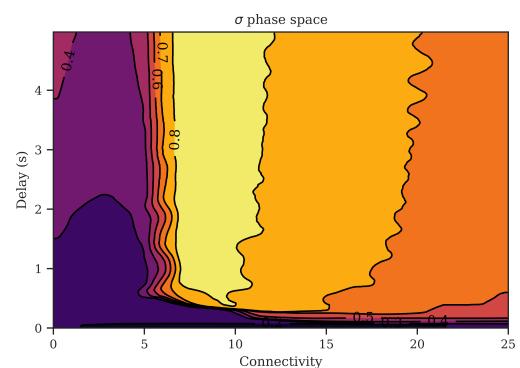
(آ) پهنهای جریان یک سامانه چرخنده با ده هزار نورون چرخنده



(د) محاسبهی نمای بحرانی



(ج) فاصلهی زمانی بین تیزه زدن‌ها



(ه) صفحهی فاز مربوط به سامانهی نورون‌های چرخنده:

پیوست ??

$$\begin{cases} I_{in} &= -g \int_{a_{min}}^{a_{max}} p(a) f(a + I_{in}) da \\ f(a) &= \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{2\pi} \end{cases} \quad (4-4)$$

در رابطه ۴-۴ ، $f(a)$ تابع فعالیت (تعداد تیزه بر ثانیه) تک نورون بر حسب جریان کل ورودی آن است. همچنین I_{in} تمام جریان خارجی جاری در شبکه است. حل این رابطه کمی دشوار است زیرا جریان کل را بر حسب خودش محاسبه کرده است. اما از آنجایی که در انتگرال ده تنها یک جابجایی ثابت رخداده است؛ صورت کلی پاسخ انتگرال تغییر نمی‌کند و به صورت زیر بدست خواهد آمد.

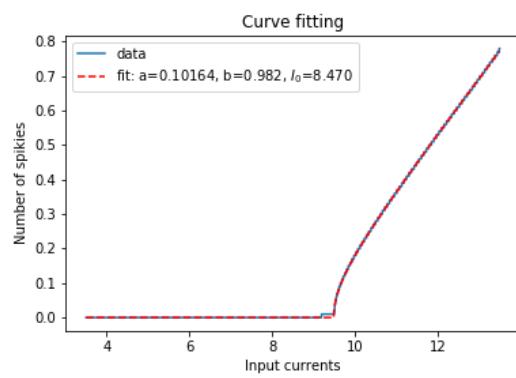
$$I_{in} = \frac{-g}{2} (-a\sqrt{-1 + a^2} + \log(a + \sqrt{-1 + a^2})) \Big|_{a_{min} + I_{in}}^{a_{max} + I_{in}} \quad (5-4)$$

۵-۰-۴ پهن کردن قالی صفحه‌ی فاز

در قسمت‌های پیشین تنها به مطالعه‌ی تاثیر ضریب اتصال در تغییر فاز پرداختیم و زمان تاخیر را تنها در $t_d = 0/1s$ خلاصه کردیم. حال اجازه دهید تا به تاخیر نیز اجازه‌ی تغییر دهیم. در ادامه‌ی این قسمت از نوشتارمان، به فرش کردن صفحه‌ی فاز خود خواهیم پرداخت. امید است که چهره‌ی تمام نمای سامانه بر صورت این قالی نقش بندد.

قالی انحراف از معیار میدان

در شکل ۴-۱۵ مشاهده می‌کنیم که شدت هم‌گامی در هر کدام از هنگرهای سامانه چقدر است. بنظر می‌رسد که با افزایش زمان تاخیر و ضریب تاثیر هم‌گامی قدرت پیدا می‌کند و هر دو در ظهور این رفتار شریک هستند.



شکل (۲-۴) تعداد تیزه بر حسب جریان تصادفی برای سامانه‌ای با ده هزار نورون و ضریب تاثیر

$$g = 50$$

فصل ۵

شبکه نورون‌های ساده

حل مسئله‌ی مدل چرخنده بسیار دشوار است و تا تاریخ نوشتن این بند، راه حلی تحلیلی برای توصیف گذر فاز آن نیافته‌ایم. علت این موضوع هم حضور جمله‌ی غیر خطی $\cos(\theta)$ در جمله‌ی برهمنش‌های آن‌هاست. حال که با ابعاد دشوار مسئله روبرو شده‌ایم؛ اجازه دهید که زمین بازی خود را عوض کنیم. می‌پرسیم که آیا کیفیت گذر فاز از ناهم‌گامی به هم‌گامی به این جمله وابسته است؟ بی‌تردید پاسخ این سوال را نخواهیم فهمید؛ مگر آن که شبکه‌ی جدیدی مطابق درخواست خود ابداع و شبیه‌سازی کنیم.

$$\begin{cases} \dot{\theta}_i = I_i - gE, & \theta_i \leq \pi \\ \dot{E} = M - \alpha E \\ \dot{M} = -\alpha M + \frac{\alpha}{N} \sum_{n|tn < t} \delta(t - t_n - t_d) \end{cases} \quad (1-5)$$

- θ_i : مشخص کننده فاز هر نورون. این فاز میان دو لبه در حال حیات است. کوچکترین کران بالای آن همان حالت آستانه در π است و بزرگترین کران پایین آن نگهدارنده‌ای است که از ریزش نورون‌ها جلوگیری می‌کند.
- E : میدانی است که شدت فعالیت شبکه را نشان می‌دهد.
- M : یک پارامتر فرعی که در حل معادله دیفرانسیل مرتبه دوم به دو معادله‌ی تحول مرتبه اول ما را یاری کرده است.

همچنین دقت کنیم که اگر چه این مدل کاهش یافته‌ای از مدل چرخنده است اما در صورت کاستن مدل انباستوشلیک هم به همین جملات برهم‌کنشی می‌رسیدیم. تنها تفاوت در آن می‌شد که فاصله‌ی بین حالت تیزه (π) و بازنشانی (صفر) در حالت ابداعی π برابر مدل کاسته‌شده انباستوشلیک می‌شد.

۱-۰-۵ شبیه‌سازی

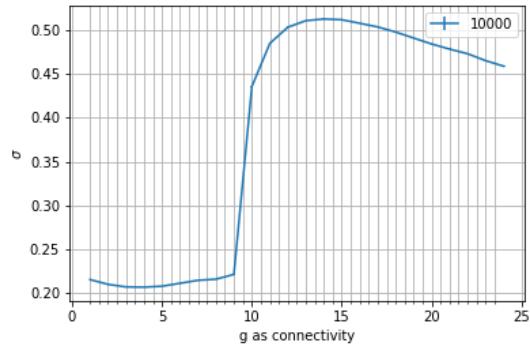
برای مدل توصیف شده بالا شبیه‌سازی خود را با تنظیمات زیر به اجرا گذاشتیم.

$$\alpha = 2 \cdot s^{-1} *$$

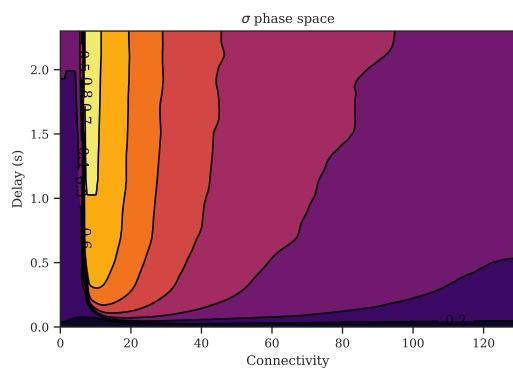
* جریان‌های تصادفی خارجی نورون‌ها از اعضای بازه‌ی (۹/۵, ۱۳/۵) انتخاب می‌شوند.

$$N = 10000 *$$

$$t_d = 0.1 s *$$



(آ) پهنهای جریان یک سامانه ساده با ده هزار نورون



(ب) صفحه‌ی فاز شبکه نورون‌های ساده: پیوست: ؟؟

۲-۰-۵ نتایج

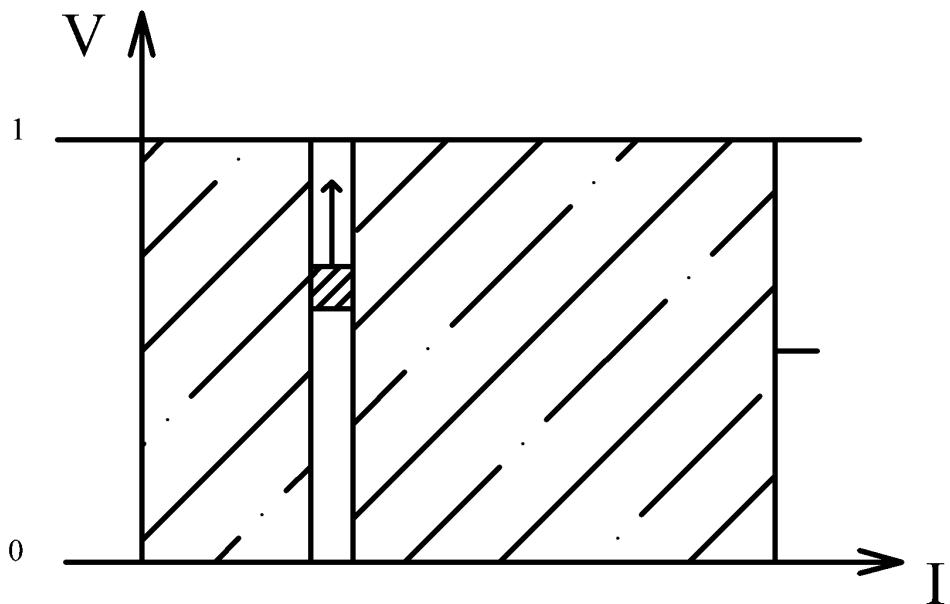
در جستجوی تغییرفاز

قابل توجه است که کیفیت تغییرفاز با حذف جمله‌ی ذکر شده تغییر نکرد و تنها مکان و ارتفاع انحراف از معیار جریان داخلی است که دست خور تغییر شده است - شکل ۱۱-۵ آ.

فصل ۶

تصویرسازی سامانه‌ها

از آنچه که اشکال صفحه‌ی قبل در مورد سامانه روایت می‌کنند؛ می‌توان تنها «حدس» زد که در پس پرده [جعبه سیاه] چه می‌گذرد. به همین دلیل برآن شدم تا روشی برای به تصویر کشیدن سامانه ابداع کنم تا از لحظه‌لحظه‌ی سامانه با خبر شوم. شکل ۱-۶



شکل (۱-۶) تصویر فضای فاز سامانه نورونی انباشت‌وشلیک

پویایی شکل ۱-۶ به ما نشان خواهد داد که چگونه سامانه در زمان متتحول می‌شود. هر نقطه در این

صفحه نمایانگر حالت یک نورون است. محور افقی نشان دهندهی جریان ثابت خارجی است که به هر نورون در ابتدا متصل کرده‌ایم و محور عمودی نشان دهندهی پتانسیل نورون است. طبق توصیفی که از پویایی سامانه‌ی خود داریم؛ موقع داریم که نورون‌هایی که از آستانه عبور کردند؛ مجدداً از محور صفر پیدا شوند.

فصل ۷

تلاش برای توصیف

از آنجا که شبیه‌سازی این سامانه شامل تعریف فرآیندهای متفاوتی بود؛ بدیهی است که نوشتن معادله‌ی تحلیلی برای توصیف کامل آن آسان نباشد. اما در این بخش تلاش می‌کنیم که با کنار هم قرار دادن معادلات اصلی چارچوب مسئله‌ی خود را مشخص کنیم.

هر نورون که از حالت $\pi = \theta$ عبور می‌کند [تیزه می‌زند] باعث می‌شود تا سهمی از جریان با کیفیت $E(t) := \alpha^2 t \cdot \exp(-\alpha t)$ به جریان درونی کل سامانه $p(t) := \alpha^2 t \cdot \exp(-\alpha t)$ اضافه شود.

$$E(t) = \frac{1}{N} \int_0^\infty \int J_a(\pi, t - d - u) da \cdot \alpha^2 u e^{-\alpha u} du \quad (1-7)$$

اما جریان برای هر نورون با ورودی a به طریق زیر است:

$$J_a(\theta, t) = n_a(\theta, t) \cdot \dot{\theta}_a \quad (2-7)$$

این رفتار به خوبی نشان می‌دهد جریان فقط در ناحیه‌ی $\pi \leq \theta$ وجود دارد. زیرا ورود نورون به ناحیه‌ی مثبت‌تر را ممنوع کردہ‌ایم. بی‌تردید برای فهمیدن چگونگی تغییر جریان در ناحیه‌های میانی باید از معادله‌ی پخش استفاده کنیم.

$$\frac{\partial n_a}{\partial t} = -\frac{\partial J_a}{\partial \theta} \quad (3-7)$$

$$= -\frac{\partial n_a}{\partial \theta} \cdot \dot{\theta}_a \quad (4-7)$$

۱-۰-۷ حل معادله‌ی شبکه‌ی ساده

اجازه بدهید تا اولین تلاش خود را از ساده‌ترین نوع شبکه‌ها شروع کنیم. شبکه‌ای که به جز جریان داخلی و جریان تصادفی اولیه ورودی دیگری ندارد. پس خواهیم داشت:

$$\begin{cases} E(t) = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} \int n_a(\pi, t - d - u) \cdot [a - gE(t - d - u)] da \cdot \alpha^u u e^{-\alpha u} du \\ \frac{\partial n_a}{\partial t} = -\frac{\partial n_a}{\partial \theta} \cdot (a - gE(t)) \end{cases} \quad (5-7)$$

چند پیشنهاد می‌شود برای ادامه‌ی راه حل داشت. (درون یک جعبه قرار گیرد با این عنوان که پیشنهادات من چه بود و استاد چه گفت).

۱. از آنجا که میدان به گونه‌ای متناوب عمل می‌کند؛ یک پیشنهاد خوب می‌تواند آن باشد که بسط فوریه‌ی آن را بنویسیم.

$$E(t) = \sum c_i \cdot \cos(\omega_i t) \quad (6-7)$$

که اگر ثابت کنیم c_1 از بقیه ضرایب بزرگتر است؛ مساله‌ی ما حل می‌شود.

۲. دشواری مساله از در هم تنیدگی معادلات برآمده است. اگر به تقریب در معادله‌ی پخش میدان را یک نوفه درنظر بگیریم و پاسخ را در معادله‌ی اول قرار دهیم.

۳. انتگرال اول را به صورت بازگشتی در خودش جاگذاری کنیم.

۴. مسئله را در حالت آماری بررسی کنیم و حالت پایستار آن را پیدا کنیم و بپرسیم در چه حالتی است که حالت پایستار داریم.

روش بازگشتی

نکته‌ای که برای ما حل معادلات را دشوار می‌کند تبعیت E از خودش است. بگذارید به شیوه‌ای که خود معادله درخواست دارد عمل کنیم. یعنی E را مجددا در سمت راست معادله جاگذاری کنیم. برای راحت‌تر شدن محاسبات ابتدا دو متغیر کمکی زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{J}(\pi, t - d - u) \equiv \int n_a(\pi, t - d - u) a \cdot da \quad (V-V)$$

$$\mathcal{N}(\pi, t - d - u) \equiv \int n_a(\pi, t - d - u) \cdot da \quad (A-V)$$

$$\mathcal{P}(u) \equiv \alpha' u e^{-\alpha u} \quad (A-V)$$

عبارت $\mathcal{J}(\pi, t - d - u)$ به معنای جمع جریان تصادفی نورون‌هایی است که در زمان u در آستانه قرار دارند.
همچنین عبارت $\mathcal{N}(\pi, t - d - u)$ به معنای تعداد همین نورون‌هاست.
حال با نمادهای بالا شروع به بازنویسی جملات پیشین می‌کنیم:

$$E(t) = \frac{1}{N} \int_{-d}^{\infty} \mathcal{J}(\pi, t - d - u_1) \cdot \mathcal{P}(u_1) du_1 - \frac{g}{N} \int_{-d}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t - d - u_1) \cdot \mathcal{P}(u_1) E(t - d - u_1) du_1 \quad (10-V)$$

حال جمله‌ی اول را نیز با عبارت دیگری خلاصه‌سازی می‌کنیم:

$$\mathcal{A}(t) \equiv \frac{1}{N} \int_{-d}^{\infty} \mathcal{J}(\pi, t - d - u_1) \cdot \mathcal{P}(u_1) du_1 \quad (11-V)$$

در خصوص جمله‌ی دوم نیز مشابها عبارت مربوط به E را در آن جاگذاری می‌کنیم.

$$E(t - d - u_1) = \frac{1}{N} \int_{-d}^{\infty} \mathcal{J}(\pi, t - 2d - u_1 - u_2) \cdot \mathcal{P}(u_2) du_2 - \frac{g}{N} \int_{-d}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t - 2d - u_1 - u_2) \cdot \mathcal{P}(u_2) E(t - 2d - u_1 - u_2) du_2 \quad (12-V)$$

(13-V)

این عبارت جمع تعداد همه‌ی تیزه‌هایی است که تا گام $t - d$ زده شده‌اند و درنتیجه جمله‌ای انباشتی است. پس خواهیم داشت:

$$E(t) = \mathcal{A}(t-d) - g \int_{\cdot}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-d-u_{\backslash}) \cdot \mathcal{P}(u_{\backslash}) E(t-d-u_{\backslash}) du_{\backslash} \quad (\text{14-V})$$

$$= \mathcal{A}(t-d) - g \int_{\cdot}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-d-u_{\backslash}) \cdot \mathcal{P}(u_{\backslash}) \cdot [\mathcal{A}(t-\gamma d-u_{\backslash}) - g \int_{\cdot}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-d-u_{\backslash}-u_{\gamma}) \cdot \mathcal{P}(u_{\gamma}) E(t-\gamma d-u_{\backslash}-u_{\gamma}) du_{\gamma}] du_{\backslash} \quad (\text{15-V})$$

$$= \mathcal{A}(t-d) - g \int_{\cdot}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-d-u_{\backslash}) \cdot \mathcal{P}(u_{\backslash}) \cdot \mathcal{A}(t-\gamma d-u_{\backslash}) du_{\backslash} \quad (\text{16-V})$$

$$+ g^{\gamma} \int_{\cdot}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-d-u_{\backslash}) \cdot \mathcal{P}(u_{\backslash}) \int_{\cdot}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-\gamma d-u_{\backslash}-u_{\gamma}) \cdot \mathcal{P}(u_{\gamma}) E(t-\gamma d-u_{\backslash}-u_{\gamma}) du_{\gamma} du_{\backslash} \quad (\text{17-V})$$

$$= \mathcal{A}(t-d) - g \int_{\cdot}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-d-u_{\backslash}) \cdot \mathcal{P}(u_{\backslash}) \cdot \mathcal{A}(t-\gamma d-u_{\backslash}) du_{\backslash} \quad (\text{18-V})$$

$$+ g^{\gamma} \int_{\cdot}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-d-u_{\backslash}) \cdot \mathcal{P}(u_{\backslash}) \int_{\cdot}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-\gamma d-u_{\backslash}-u_{\gamma}) \cdot \mathcal{P}(u_{\gamma}) \mathcal{A}(t-\gamma d-u_{\backslash}-u_{\gamma}) du_{\gamma} du_{\backslash} \quad (\text{19-V})$$

$$- g^{\gamma} \int_{\cdot}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-d-u_{\backslash}) \cdot \mathcal{P}(u_{\backslash}) \int_{\cdot}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-\gamma d-u_{\backslash}-u_{\gamma}) \cdot \mathcal{P}(u_{\gamma}) \int_{\cdot}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-\gamma d-u_{\backslash}-u_{\gamma}-u_{\gamma}) \cdot \mathcal{P}(u_{\gamma}) E(t-\gamma d-u_{\backslash}-u_{\gamma}-u_{\gamma}) du_{\gamma} du_{\gamma} du_{\backslash} \quad (\text{20-V})$$

حال اگر عمر این سامانه کراندار باشد؛ تعداد جملات بالا محدود می‌شوند. پس اگر سامانه پیش از یک زمانی کاملا خاموش بوده باشد، $E = 0$ ؛ آنگاه می‌توان میدان کنونی را بر اساس جملات ضربی بین شدت جریان و تعداد نورون‌های تیزه زده پیدا کرد.

روش اختلال

به نمودار ۴-۱۱ دقت کنید. در زمانی که تعداد نورون‌ها بی‌نهایت باشد؛ در فاز ناهم‌گام انحراف معیار میدان صفر خواهد شد. این به این معنی است که جریان در زمان ثابت خواهد ماند. پس بگذارید با علم بر این موضوع یک جواب معادله ۵-۷ را در حالت حدی میدان ثابت E ، معرفی کنیم. با فرض ثابت بودن میدان، اندازه‌ی آن را محاسبه می‌کنیم. سپس مجدد به معادلات برمی‌گردیم و می‌پرسیم که در صورت جمع با یک جمله‌ی اختلالی کوچک این انحراف رشد خواهد کرد یا خیر. به عبارت دیگر آیا این جواب جاذب است.

$$\begin{cases} E_{\cdot} = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{t-d} \int n_a(\pi, u) \cdot [a - gE_{\cdot}] da \cdot \alpha^{\gamma} u e^{-\alpha u} du \\ \frac{\partial n_a}{\partial t} = -\frac{\partial n_a}{\partial \theta} \cdot (a - gE_{\cdot}) \end{cases} \quad (21-7)$$

یک راه خوب برای پیشبرد سطر اول معادلات آن است که از دو طرف آهنگ تغییرشان با زمان را بپرسیم. از آنجا که سمت چپ معادله ثابت است؛ سمت راست هم باید جوابی مشابه را حکایت کند.

$$\cdot = \frac{dE_{\cdot}}{dt} = \frac{\alpha^{\gamma}(t-d)e^{-\alpha(t-d)}}{N} \cdot [-gE_{\cdot} \cdot \int n_a(\pi, t-d) da + \int n_a(\pi, t-d) \cdot a da] \quad (22-7)$$

مشخص است که کدام جمله از جملات ضربی بالا صفر است. پس برای E خواهیم داشت:

$$E_{\cdot} = \frac{1}{g} \cdot \frac{\int n_a(\pi, t-d) \cdot a da}{\int n_a(\pi, t-d) da} \quad (23-7)$$

حال برای ادامه‌ی فرآیند نیاز داریم تا عبارت حاکم بر $n_a(\pi, t-d)$ را بدست آوریم. جواب پیشنهادی

ما برای سطر دوم معادلات از جنس تابع دلتاست:

$$n_a(\theta, t) = \delta(\theta - \theta_a(t)) \quad (24-7)$$

$$= \delta(\theta + \theta_0 - (a - gE_0)t + 2 \lfloor K_a^{(t)} \rfloor \pi) \quad (25-7)$$

$$= \delta(\theta - (a - gE_0)t + 2 \lfloor K_a^{(t)} \rfloor \pi + \theta_0) \quad (26-7)$$

$$\Rightarrow n_a(\pi, t) = \delta((2 \lfloor K_a^{(t)} \rfloor + 1)\pi - (a - gE_0)t + \theta_0) \quad (27-7)$$

$$(28-7)$$

که در این معادلات $K_a^{(t)}$ کسری است که تعداد دور هر نورون را از آغاز تا کنون روایت می‌کند و ما مجبور به عقب کشیدن 2π فاز کامل پس از تیزه زدن آن به تعداد $\lfloor K_a^{(t)} \rfloor$ شده‌ایم.^۱ قابل محاسبه است که عبارت کامل آن به صورت زیر است.

$$K_a^{(t)} = \frac{(a - gE_0)t + \pi + \theta_0}{2\pi} \quad (29-7)$$

برای محاسبه انتگرال‌هایی که شامل این دلتای دیراک هستند؛ لازم است تا صفرهای آرگومان آن را محاسبه کنیم.

$$(2 \left\lfloor \frac{(a - gE_0)t + \pi + \theta_0}{2\pi} \right\rfloor + 1)\pi - (a - gE_0)t + \theta_0 = 0 \quad (30-7)$$

$$2\pi \times \left(\left\lfloor \frac{(a - gE_0)t + \pi + \theta_0}{2\pi} \right\rfloor - \frac{(a - gE_0)t + \pi + \theta_0}{2\pi} \right) = 0 \quad (31-7)$$

$$2\pi \times \left(\lfloor K_a^{(t)} \rfloor - K_a^{(t)} \right) = 0 \quad (32-7)$$

این رابطه کاملاً یک تابع تناوبی را توصیف می‌کند. یک تابع مقطع که در مکانی که آرگومان آن صحیح می‌شود؛ مقدار صفر به خود می‌گیرد. پس روشن است که موقع داشته باشیم. تعداد صفرهای این معادله به اندازه‌ی تعداد تناوبی است که در هر زمان در بازه‌ی جریان‌های داده شده دارد.

$$\Delta K_a^{(t)} = 1 \quad (33-7)$$

$$\Delta K_a^{(t)} = \frac{t}{2\pi} \Delta a \quad (34-7)$$

$$\Delta a = \frac{2\pi}{t} \quad (35-7)$$

^۱ دقت کنیم که معادله‌ی ذکر شده برای نورون‌هایی درست است که $a - gE_0 > 0$

این دوره‌ی تناوب با افزایش زمان کوچکتر می‌شود. اگر تعداد نورون‌ها را به صورتی ترمودینامیکی بزرگ بگیریم؛ آنگاه به ازای هر دوره‌ی تناوب یک نورون حتماً هست که روی محور آستانه قرار گرفته است. حال که دوره‌ی تناوب Δa را بدست آورده‌یم؛ می‌دانیم که ریشه‌های رابطه‌ی [۳۲-۷](#) چه زمانی رخ می‌دهند. فرض کنیم که اولین صفر در جریانی مثل a_m رخ می‌دهد. توجه کنید حتماً اندازه‌ی این جریان به گونه‌ای است که نورون را به صورت فعال نگه دارد. پس باید حتماً $(a_m - gE_*) > 0$ باشد. حال می‌توانیم انتگرال‌های مورد نظر خود را این چنین بسط دهیم.

$$\int n_a(\pi, t-d) a da = \int \delta\left(2\pi(\lfloor K_a^{(t)} \rfloor - K_a^{(t)})\right) a da \quad (36-7)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{K_a^{(t)} \in Z} a_i \quad (37-7)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{m=1}^M a_m + m \cdot \Delta a \quad (38-7)$$

$$= \frac{M+1}{2\pi} \cdot \left(\frac{a_m + a_{max}}{2}\right) \quad (39-7)$$

$$(40-7)$$

واز طرفی:

$$\int n_a(\pi, t-d) da = \int \delta\left(2\pi(\lfloor K_a^{(t)} \rfloor - K_a^{(t)})\right) da \quad (41-7)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{K_a^{(t)} \in Z} 1 \quad (42-7)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{m=1}^M 1 \quad (43-7)$$

$$= \frac{M+1}{2\pi} \quad (44-7)$$

حال اگر به محاسبه‌ی میدان ثابت خود برگردیم و تکه‌های پازل را کنار هم بگذاریم؛ خواهیم داشت:

$$E_* = \frac{1}{g} \cdot \frac{\int n_a(\pi, t-d) \cdot a da}{\int n_a(\pi, t-d) da} \quad (45-7)$$

$$= \frac{1}{g} \cdot \frac{\frac{M+1}{2\pi} \cdot \left(\frac{a_m + a_{max}}{2}\right)}{\frac{M+1}{2\pi}} \quad (46-7)$$

$$= \frac{1}{g} \left(\frac{a_m + a_{max}}{2}\right) \quad (47-7)$$

این میدان معادل است با جریان میانگین بین نورونهایی که آنها را روشن خطاب کرده بودیم. این نتیجه صحیح نیست زیرا اگر میدان در میانه‌ی این جریان‌ها قرار گیرد؛ آنگاه نورونهای با جریان پایین دست $\frac{1}{g} < a < \frac{a_m + a_{max}}{2}$ را خاموش خواهد کرد و اصلاً روشن نخواهند ماند.

روش آماری

در این روش فرض می‌کنیم که برای هر جریان تصادفی اولیه، نورونهای زیادی را به اختیار گرفته‌ایم. در حالت پایا، در یک حالت خاص تغییری در چگالی جمعیت مشاهده نمی‌شود پس در معادله‌ی ۵-۷ خواهیم داشت:

$$\frac{\partial n_a}{\partial t} = 0 \quad (48-7)$$

همچنین در حالت پایا که در واقع از نگاه ما حالت ناهمگام است؛ جریان بین نورون‌ها - که کمیتی بزرگ مقیاس است - در زمان تغییری نمی‌کند. پس به این ترتیب:

$$\begin{cases} \frac{\partial n_a}{\partial t} = -\frac{\partial J_a(t)}{\partial \theta} = 0 \\ J_a(\theta, t) = n_a(\theta, t) \cdot [a - gE] \end{cases} \Rightarrow J_a(\theta, t) = J_a(t) \quad (49-7)$$

$$\Rightarrow n_a(\theta, t) = n_a \quad (50-7)$$

$$(51-7)$$

پس توزیع جمعیت نورون‌ها مستقل از زمان و حالت آنها خواهد شد. اگر توزیع را در ابتدا یکنواخت میان جریان‌های مختلف توزیع کرده باشیم؛ برای همه‌ی زمان‌ها و حالت‌ها داریم:

$$n = \frac{N}{2\pi(a_{Max} - a_{min})} \quad (52-7)$$

برای جریان بین نورون‌ها هم خواهیم داشت:

$$E = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{t-d} \int n \cdot [a - gE] da \cdot \alpha u e^{-\alpha u} du \quad (53-7)$$

$$= \int \frac{n}{N} \cdot [a - gE] da \quad (54-7)$$

دقت کنیم که انتگرال رابطه‌ی ۵۴-۷ روی نورون‌هایی است که مستعد تیزه زدن هستند.^۲

اولین جریانی که نورون را مستعد تیزه زدن می‌کند a_* نام‌گذاری می‌کنیم. وقتی جریان مهاری حاصل از تیزه زدن‌ها کوچک است؛ همه‌ی نورون‌ها فعال هستند و در نتیجه $a_* = a_{min}$ می‌شود. اما در حالتی که جریان مهاری زیاد می‌شود؛ این مقدار از کمترین جریان تصادفی اولیه سامانه بزرگتر می‌شود. محاسبات را ادامه می‌دهیم:

$$E = \int \frac{n}{N} \cdot [a - gE] da \quad (55-7)$$

$$= \frac{n}{N} \cdot \left[\frac{a_{Max}^2 - a_*^2}{2} - gE(a_{Max} - a_*) \right] \quad (56-7)$$

$$\Rightarrow E = n \cdot \left[\frac{a_{Max}^2 - a_*^2}{2} \right] / [N + gn(a_{Max} - a_*)] \quad (57-7)$$

شاید بنظر این یک معادله‌ی درجه یک ساده باشد که میدان را گزارش می‌کند اما در واقع خود a^* هم به میدان وابسته است و باید وابستگی آن را لحاظ کنیم. به تقریب: $a^* = gE$ با اضافه کردن این معادله و حل معمول یک معادله‌ی درجه‌ی دو برای میدان صراحتاً خواهیم داشت:

$$E = \left(\frac{a_{Max}}{g} + \frac{N}{ng^2} \right) \pm \left[\left(\frac{N}{ng^2} + \frac{a_{Max}}{g} \right)^2 - \frac{a_{Max}^2}{g^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (58-7)$$

نتیجه می‌دهد که a_* هم باید به صورت زیر باشد:

$$a_* = \left(a_{Max} + \frac{N}{ng} \right) \pm \left[\left(\frac{N}{ng} + a_{Max} \right)^2 - a_{Max}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (59-7)$$

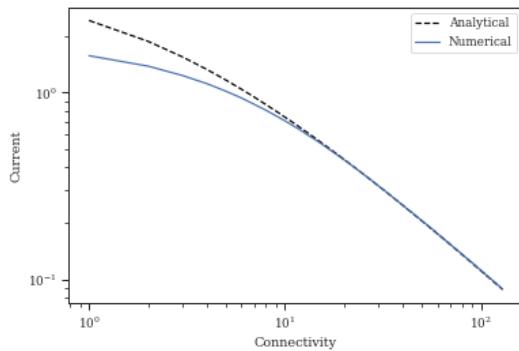
$$= \left(a_{Max} + \frac{N}{ng} \right) \pm \left[\frac{N^2}{n^2 g^2} + \frac{2a_{Max} N}{ng} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (60-7)$$

اجازه بدھید علامت مثبت را کنار بگذاریم زیرا مقدار a_* را خارج بازه‌ی جریان‌های سامانه گزارش می‌کند. پس هم برای میدان و هم جریان a_* خواهیم داشت:

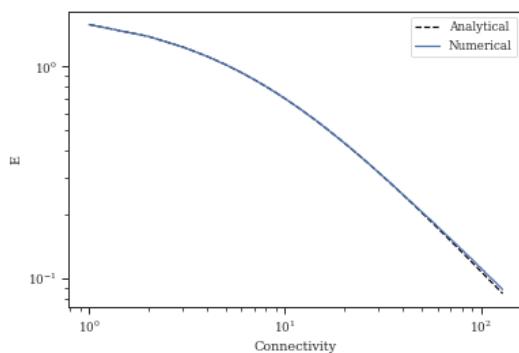
$$\begin{cases} a_* = \left(a_{Max} + \frac{N}{ng} \right) - \left[\frac{N^2}{n^2 g^2} + \frac{2a_{Max} N}{ng} \right]^{\frac{1}{2}} \\ E = \left(\frac{a_{Max}}{g} + \frac{N}{ng^2} \right) - \left[\frac{N^2}{n^2 g^2} + \frac{2Na_{Max}}{ng^2} \right]^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (61-7)$$

حال اگر نتایج بدست آمده را با داده‌های شبیه‌سازی تطبیق دهیم؛ خواهیم دید که تطابق خوبی با یک دیگر دارند.

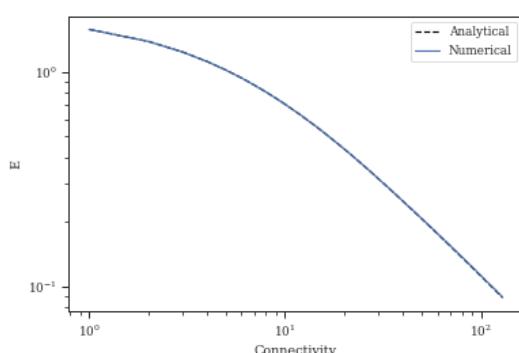
$$(a - gE) > 0$$



(آ) نسخه‌ای که کمینه‌ی جریان را از حل محاسبات درنظر می‌گیرد



(ب) نسخه‌ای که همه‌ی نورون‌ها را فعال تصور می‌کند.



(ج) نسخه ساخته شده از اتصال دوتای دیگر

شکل (۱-۷) تطابق جریان پایای بدست آمده از حل عددی و تحلیلی

در ضریب تاثیرهای بسیار بزرگ داریم:

$$E \cong \frac{a_{Max}}{g} + \frac{N}{ng^{\frac{1}{2}}} - \left(\frac{\sqrt{N}a_{Max}}{ng^{\frac{3}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{N}{\sqrt{N}ga_{Max}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (62-V)$$

$$= \frac{a_{Max}}{g} + \frac{N}{ng^{\frac{1}{2}}} - \left(\frac{\sqrt{N}a_{Max}}{ng^{\frac{3}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{N}{\sqrt{N}ga_{Max}} \right] \quad (63-V)$$

$$= \frac{a_{Max}}{g} - \left(\frac{\sqrt{N}a_{Max}}{ng^{\frac{3}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{N}{ng^{\frac{1}{2}}} - \left(\frac{N}{\sqrt{2n}} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{a_{Max}^{\frac{1}{2}} g^{\frac{5}{2}}} \quad (64-V)$$

حل اختلالی میدان

همان طور که مشخص است؛ حل دقیق میدان بسیار کار دشواری است اما می‌توان از طریق ترفندهای اختلالی به جواب آن نزدیک شد. یکی از روش‌های معمول حل زنجیری و تودرتوی دستگاه معادلات است.

به این ترتیب که ابتدا از معادله پاسخ حالت پایا (مرتبه‌ی صفرم) را در معادله‌ی پخش جاگذاری می‌کنیم تا توزیع آماری وابسته به زمان نورون‌ها بدست آید. سپس مجدداً از توزیع بدست آمده؛ میدان مرتبه‌ی اول را که وابسته به زمان است؛ محاسبه می‌کنیم.

از آنجا که توزیع سامانه رفتاری دوره‌ای به طول 2π دارد؛ می‌توانیم آن را به صورت زیر بسط دهیم:

$$\rho(\theta, a, t) = \rho_0 + \sum_k A_k(t) e^{ik\theta}, \quad k \in \mathcal{Z} \quad (65-V)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \sum_k \dot{A}_k e^{ik\theta} \quad (66-V)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \theta} = \sum_k A_k \cdot ik \cdot e^{ik\theta} \quad (67-V)$$

$$(68-V)$$

حال آن را در معادله‌ی پخش قرار می‌دهیم تا بتوانیم معادله‌ی حاکم بر ضرایب را محاسبه کنیم.

$$\sum_k \dot{A}_k e^{ik\theta} = - \sum_k A_k \cdot ik(a - gE(t)) \cdot e^{ik\theta} \quad (69-V)$$

$$\Rightarrow \dot{A}_k = -A_k \cdot ik(a - gE(t)) \quad (70-V)$$

در تقریب مرتبه‌ی اول برای توزیع داریم:

$$\dot{A}_k = -A_k \cdot ik(a - gE.) \quad (V1-V)$$

$$\Rightarrow A_k(t) = A_k(\cdot) e^{-ik(a-gE.)t} \quad (V2-V)$$

$$\Rightarrow \rho(\theta, a, t) = \rho_{\cdot} + \sum_k A_k(\cdot) e^{ik\theta - ik(a-gE.)t} \quad (V3-V)$$

پس برای نورون‌های روی آستانه خواهیم داشت:

$$\rho(\pi, a, t) = \rho_{\cdot} + \sum_k A_k(\cdot) e^{ik\pi - ik(a-gE.)t} \quad (V4-V)$$

حال از نتیجه‌ی بدست آمده استفاده می‌کنیم و همان طور که اشاره شد به محاسبه‌ی مرتبه‌ی بعدی میدان می‌رویم:

$$E(t) = \int \int_{\cdot}^{\infty} \rho(\pi, a, t-d-v) \cdot \dot{\theta} \cdot \alpha^v v e^{-\alpha v} dv da \quad (V5-V)$$

$$= E_{\cdot} + \int \int_{\cdot}^{\infty} \sum_k A_k(\cdot) e^{ik\pi - ik(a-gE.)(t-d-v)} \cdot (a-gE.) \alpha^v v e^{-\alpha v} dv da \quad (V6-V)$$

$$= E_{\cdot} + \sum_k \int \int_{\cdot}^{\infty} A_k(\cdot) e^{ik\pi - ik(a-gE.)(t-d-v)} \cdot (a-gE.) \alpha^v v e^{-\alpha v} dv da \quad (V7-V)$$

اجازه بدهید سهم مدهای متفاوت از میدان را به صورت جداگانه محاسبه کنیم و سپس مجددا در کنار یکدیگر قرار دهیم.

$$E_{k,a}(t) = -\alpha^v A_k(\cdot) (a-gE.) e^{ik\pi} \int_{\cdot}^{\infty} v e^{-[\alpha - ik(a-gE.)]v - ik(a-gE.)(t-d)} dv \quad (V8-V)$$

با با تغییر متغیر $\beta \equiv \alpha - ik(a-gE.)$ محاسبات را ادامه می‌دهیم:

$$= \alpha^v A_k(\cdot) (a-gE.) e^{ik\pi} e^{-ik(a-gE.)(t-d)} \cdot \int_{\cdot}^{\infty} v e^{-\beta v} dv \quad (V9-V)$$

$$= \alpha^v A_k(\cdot) (a-gE.) e^{ik\pi} e^{-ik(a-gE.)(t-d)} \cdot \frac{1}{\beta^2} \quad (V10-V)$$

$$= A_k(\cdot) (a-gE.) e^{ik[\pi - (a-gE.)(t-d)]} \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha - ik(a-gE.)} \right)^2 \quad (V11-V)$$

حال قدم به قدم به محاسبات پیشین خود برمی‌گردیم. ابتدا می‌پرسیم میدان همه‌ی نورون‌های با مد یکسان چه جریانی را تولید می‌کنند.

$$E_k(t) = \int E_{k,a} da \quad (83-V)$$

$$= \int A_k(\cdot)(a - gE_\cdot)e^{ik[\pi - (a - gE_\cdot)(t-d)]} \left(\frac{\alpha}{\alpha - ik(a - gE_\cdot)} \right)^{\gamma} da \quad (84-V)$$

با تغییر متغیر $h \equiv a - gE_\cdot$ تلاش می‌کنیم انتگرال را ادامه دهیم.

$$E_k(t) = A_k(\cdot)e^{ik\pi} \int_{\cdot}^{a_M - gE_\cdot} h e^{-ikh(t-d)} \left(\frac{1}{1 - ikh/\alpha} \right)^{\gamma} dh \quad (85-V)$$

نرم‌افزارهای محاسباتی همچون ابزار ولفرم به ما امکان می‌دهد تا پاسخ آن را به صورت زیر بیان کنیم:

$$E_k(t) = -A_k(\cdot) \frac{\alpha^{\gamma}}{k^{\gamma}} e^{ik\pi} \left[\frac{e^{-i(\xi(h) + k(t-d)h)}}{\sqrt{1 + h^{\gamma} k^{\gamma} / \alpha^{\gamma}}} \right] \quad (86-V)$$

$$+ e^{-\alpha(t-d)} (\alpha(t-d) + 1) Ei[(\alpha - ikh)(t-d)] \Bigg] \Bigg|_{\cdot}^{a_M - gE_\cdot} \quad (87-V)$$

به صورتی که $Ei[z] = \frac{1+ikh/\alpha}{\sqrt{1+h^{\gamma} k^{\gamma} / \alpha^{\gamma}}} - \int_{-z}^{+\infty} e^{-t} / t dt$ همان تابع انتگرال نمایی است که به صورت $e^{-i\xi(h)}$ نوشته می‌شود.

$$E_k(t) = -A_k(\cdot) \frac{\alpha^{\gamma}}{k^{\gamma}} e^{ik\pi} \left[\frac{e^{-i(\xi(a_M - gE_\cdot) + k(t-d)(a_M - gE_\cdot))}}{\sqrt{1 + (a_M - gE_\cdot)^{\gamma} k^{\gamma} / \alpha^{\gamma}}} \right] \quad (88-V)$$

$$+ e^{-\alpha(t-d)} (\alpha(t-d) + 1) Ei[(\alpha - ik(a_M - gE_\cdot))(t-d)] \quad (89-V)$$

$$- e^{-ik(t-d)(a_M - gE_\cdot)} \quad (90-V)$$

$$- e^{-\alpha(t-d)} (\alpha(t-d) + 1) Ei[\alpha(t-d)] \Bigg] \quad (91-V)$$

$$= -A_k(\cdot) \frac{\alpha^{\gamma}}{k^{\gamma}} e^{ik\pi} \left[e^{-ik(t-d)(a_M - gE_\cdot)} \left(\frac{e^{-i(\xi(a_M - gE_\cdot))}}{\sqrt{1 + (a_M - gE_\cdot)^{\gamma} k^{\gamma} / \alpha^{\gamma}}} + 1 \right) \right] \quad (92-V)$$

$$+ e^{-\alpha(t-d)} (\alpha(t-d) + 1) \left(Ei[(\alpha - ik(a_M - gE_\cdot))(t-d)] - Ei[\alpha(t-d)] \right) \Bigg] \quad (93-V)$$

پس یک جمله‌ی نوسانی دارد و جمله‌ای که شامل تکینگی است.

خبر خوب یا بد این است که این راه هم دارای ایراد است. زیرا در محاسبه‌ی مرتبه‌ی اول میدان اشتباهی

رخداده است - رابطه‌ی ۷۵-۷. در این رابطه باید ضرب مرتبه‌ی صفرم چگالی در مرتبه‌ی اول میدان جا مانده است. یعنی باید می‌نوشتیم:

$$E(t) = \int \int_{\cdot}^{\infty} (\rho_+ + \rho_-)(a - g(E_+ + E_-)) \cdot \alpha v e^{-\alpha v} dv da \quad (94-7)$$

$$= \int \int_{\cdot}^{\infty} [\rho_+(a - gE_+) + \rho_-(a - gE_-)] \cdot \alpha v e^{-\alpha v} dv da \quad (95-7)$$

$$+ \int \int_{\cdot}^{\infty} -gE_- \rho_- \cdot \alpha v e^{-\alpha v} dv da \quad (96-7)$$

$$+ \int \int_{\cdot}^{\infty} -gE_+ \rho_+ \cdot \alpha v e^{-\alpha v} dv da \quad (97-7)$$

$$(98-7)$$

در واقع جمله‌ی آخر رابطه‌ی بالا جامانده بود و باعث می‌شود بخشی از جواب در پشت آن پنهان بماند. البته با در نظر گرفتن آن جمله پیچیدگی اصلی مسئله دوباره به صفحه‌ی بازی بر می‌گردد.

مراجع

- [1] Brunel, Nicolas. Dynamics of sparsely connected networks of excitatory and inhibitory spiking neurons. *Journal of computational neuroscience*, 8(3):183–208, 2000.
- [2] Brunel, Nicolas and Van Rossum, Mark CW. Quantitative investigations of electrical nerve excitation treated as polarization. *Biological Cybernetics*, 97(5):341–349, 2007.
- [3] Luccioli, Stefano and Politi, Antonio. Irregular collective behavior of heterogeneous neural networks. *Phys. Rev. Lett.*, 105:158104, Oct 2010.
- [4] Safaeesirat, Amin and Moghimi-Araghi, Saman. Critical behaviour at the onset of synchronization in a neuronal model, 2020.