مطالعه همگامی در شبکه‌های عصبی مهاری

محسن مهرانی - استاد راهنما: دکتر سامان مقیمی عراقی

فهرست مطالب

۱ سخن نخست

مطالعه فعالیت شبکه‌های عصبی برای تحقیق و بررسی کارکردهای مغز اهمیت زیادی دارد. همه بر این باوریم که مغز محمل اندیشه و تفکر است. ما کنجکاو هستیم که چگونه همکاری بین نورون‌های آن باعث می‌شود تا حافظه، کشف و پردازش صورت گیرد. هر کدام از نورون‌های مغز می‌تواند در حالت فعال [روشن] یا غیرفعال [خاموش] قرار گیرد. هم اکنون شواهدی وجود دارد که کارکردهایی طلایی یاد شده مغز در زمان‌هایی رخ می‌دهند که الگوی خاموش و روشن شدن نورون‌های آن باهم «**هم‌گامی**» دارند. هم‌گامی به این معناست که جمعیت بزرگی از نورون‌ها هم باهم خاموش و روشن می‌شوند و یک الگوی تکرار شونده‌ای را دنبال می‌کنند. تو گویی که باهم هم‌آهنگ یا هم‌گام شده‌اند.

بی‌تردید دستیابی به تمام جزییات مغز برای ما میسّر نیست و به آن به عنوان یک «**جعبه‌ی سیاه**» نگاه می‌کنیم که مدت‌هاست به دنبال ارائه مدلی هستیم که رابطه‌ی بین ورودی‌ها و خروجی‌های ثبت شده را بازتولید کند. کاری که در این پژوهش انجام خواهیم داد تلاشی است برای پیشنهاد دادن یک مدل برای این جعبه‌ی سیاه که رفتار نسبتا مشابهی را میان ورودی و خروجی‌های این جعبه سیاه و یا مغز ایجاد می‌کند.

۲ مقدمه

مدل‌های زیادی برای شبکه‌های عصبی ارائه شده است که توانایی تولید رفتار هم‌گام شدن نورون‌ها را در آن‌ها می‌توانیم جستجو کنیم. یکی از این مدل‌ها که در تمام فصول شبیه‌سازی از آغاز تا کنون از آن بهره برده شده است؛ مدل انباشت و شلیک است[۱]. در این جستار ابتدا با مدل انباشت و شلیک شروع می‌کنیم و سپس مدلی توسعه یافته که آن را «**چرخنده**» صدا خواهیم کرد؛ می‌پردازیم. متن اصلی این جستار شامل معرفی این مدل‌ها و پویایی آن‌ها در زمان و نتایج ضبط شده از نشانگرهایی است که برای آشکارسازی هم‌گامی تعبیه شده‌اند.

۳ شبکه انباشت و شلیک

در این نوشتار [۱] نویسندگان تلاش می‌کنند تا هم‌گامی را برای شبکه‌ی نورون‌های مهاری رصد کنند. این نورون‌ها به گونه‌ای باهم مرتبط هستند که تیزه زدن هر نورون منجر به مهار پتانسیل دیگر نورون‌ها می‌شود. تک‌تک نورون‌های این شبکه از تحول انباشت و شلیک تبعیت می‌کند. معادله تحول اختلاف پتانسیل هر کدام از نورون‌ها با محیط بیرونش از رابطه زیر داده می‌شود:

$$\dot{v}_i = a_i - v_i - \frac{g}{N} \sum_{n|t_n<t} S_{i,l(n)} \delta(t - t_n - t_d) \tag{۱}$$

- g: ضریب اتصال هر جفت نورون. از آن‌جا که همه‌ی نورون‌ها در این مطالعه مهاری هستند؛ باید این کمیت مثبت انتخاب شود تا تاثیر جمله‌ی پایانی در نهایت منفی باشد.
- S: ماتریس همسایگی. این کمیت نشان می‌دهد که آیا دو نورون به هم متصل و تاثیرگذار هستند یا خیر.
- t_d: زمان تاخیر میان زدن تیزه هر نورون و تاثیر آن روی نورون‌های دیگر.
- a_i: یک پتانسیل تحریکی و خارجی. در این مطالعه این مقدار برای هر نورون به صورت تصادفی انتخاب می‌شود و تا پایان شبیه‌سازی ثابت باقی می‌ماند.
- N: تعداد نورون‌های در شبکه

۱.۳ آهنگ تیزه زدن

پیش از آن که به شبیه‌سازی یک شبکه از نورون‌ها بپردازیم؛ خوب است تا یک نورون تنها را مطالعه کنیم. یک نورون تنها که پویایی از جنس مدل انباشت‌وشلیک دارد؛ دوره تناوب تیزه‌زدن آن از رابطه‌ی زیر قابل محاسبه است .

$$\dot{v}_i = I - v_i \rightarrow \frac{dv_i}{I - v_i} = dt \tag{۲}$$

$$\rightarrow T = ln(\frac{I}{I - ۱}) \tag{۳}$$

این رابطه نشان می‌دهد که بسامد تیزه‌زدن یک نورون با افزایش مجموع جریان‌های ورودی آن به صورت لگاریتمی افزایش می‌یابد.

۲.۳ نشانگر تشخیص فاز هم‌گامی

برای آن که متوجه شویم که شبکه در حالت هم‌گامی یا ناهم‌گامی است نیاز است تا آشکارسازی را تعبیه کنیم که باتوجه به رفتار سامانه، هم‌گامی یا ناهم‌گامی را با عقربه‌ی خود نشان دهد. برای این منظور ابتدا مفهوم میدان (E) را تعریف می‌کنیم که بیانگر شدت فعالیت نورون‌های شبکه است. انحراف از معیار این کمیت در طول زمان، پارامتر مناسبی است که به کمک آن هم‌گامی را تشخیص دهیم.

$$\ddot{E} + ۲\alpha\dot{E} + \alpha^۲ E = \frac{\alpha^۲}{N}\sum_{n|tn<t}\delta(t - t_n - t_d) \quad (۴)$$

$$\sigma^۲ = \langle E^۲\rangle_t - \langle E\rangle_t^۲ \quad (۵)$$

*دقت کنیم که شدت میدان با تعداد تیزه زدن‌ها رفتاری ملایم دارد. به عنوان مثال اگر تیزه‌ها متوقف شوند؛ شدت میدان پس از لحظاتی چند [متناسب با α] صفر می‌شود.

در طول زمان میدان E و σ را رصد می‌کنیم. برای دریافت شهودی عملکرد مناسب این پارامتر نظم، فرض کنید که شبکه در حالتی است که جمعیت بزرگی از آن در حال خاموش و روشن شدن هم‌گام است. پس مشاهده خواهم کرد که میدان که شدت فعالیت نورون‌ها را نشان می‌دهد در حال ضربان رفت و برگشتی است. این افت‌وخیز با تقویت هم‌گامی دامنه‌ی بزرگتر پیدا می‌کند به طوری که انحراف آن از میانگین پهنای قابل توجهی کسب می‌کند. از این رو انحراف معیار میدان، کمیت مناسبی است که میزان هم‌گامی را گزارش کند.

۳.۳ مسائل پیشروی پیاده سازی شبیه سازی

۱.۳.۳ تابع بی‌کران دلتا

یکی از مشکلات شبیه سازی معادلات دیفرانسیلی حضور تابع دلتای دیراک است. این تابع در نقطه صفر خود دارای مقداری بینهایت است. معرفی چنین تابعی به رایانه کاری دشوار است و همانندی محاساتی ندارد. حال برای برطرف کردن این مشکل چه باید کرد؟ نکته در این جا نهفته است که چون ما برای حل عددی معادله دیفرانسیلی خود از زمان پیوسته استفاده نمی‌کنیم و از گام‌هایی با طول مثبت Δt استفاده می‌کنیم این مشکل به صورت زیر مدیریت می‌شود.

$$v_i(t+\Delta t) = v_i(t) + \int_t^{t+\Delta t} \dot{v_i}\, dt \quad (۶)$$

$$= v_i(t) + \int_t^{t+\Delta t} \left[a_i - v_i - \frac{g}{N}\sum_{n|t_n<t} S_{i,l(n)}\delta(t - t_n - t_d)\right] dt \quad (۷)$$

$$\approx v_i(t) + \left[a_i - v_i(t)\right]\Delta t - \frac{g}{N}\sum_{n|t_n<t} S_{i,l(n)} \int_t^{t+\Delta t} \delta(t - t_n - t_d) dt \quad (۸)$$

$$\approx v_i(t) + \left[a_i - v_i(t)\right]\Delta t - \frac{g}{N}\sum_{n|t_n<t} S_{i,l(n)} H(t + \Delta t - t_n - t_d) \quad (۹)$$

حالا تابع پله کاملا برای ما آشنا و قابل مدلسازی است. دقت شود که تابع پله یاد شده فقط در

محدوده $t, t+\Delta t$ زندگی می‌کند و پس از آن اعتبار ندارد. معادله ۹ می‌گوید که باید برای تحول پتانسیل نورون iام بررسی کنیم که آیا نورونی در همسایگی آن تیزه زده است یا نه. اگر چنان باشد؛ یک واحد به جمع تیزه زدگان اضافه کنیم.

۲.۳.۳ ثبت تاریخ تیزه زدن‌ها

برای محاسبه تحول پتانسیل در رابطه ۹ چنان که توضیح داده شد نیاز به دانستن تاریخ تیزه زدن‌ها داریم. اگر بخواهیم برای تمامی نورون‌ها در هر گام زمانی تیزه‌زدن آن را به صورت مجزا ثبت کنیم؛یک آرایه مربعی خواهیم داشت که شماره سطر آن می‌تواند معرف زمان باشد و ستون نماد شماره نورون - شکل شماره (۱آ).

اما مشکلی که برای این شبیه سازی رخ خواهد داد. در صورت افزایش تعداد نورون‌ها و زمان شبیه سازی با یک ابر آرایه روبرو خواهیم شد که امکان دارد در ذخیره سازی آن دچار مشکل شویم. به همین خاطر در شبیه سازی انجام شده تنها مجموع تیزه زدن‌ها را ذخیره کردیم تا یک آرایه یک ستونه داشته باشیم و در ذخیره‌سازی به مشکل نخوریم.

۴.۳ نتایج

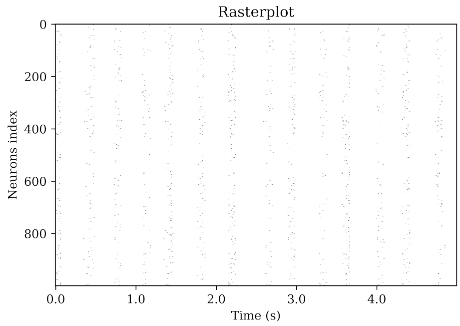
اندازه‌ی پارامترهایی که برای این شبیه‌سازی انتخاب کردیم؛ کاملا از صورت مقاله یاد شده برداشته شده و به قرار زیر است.

* $\alpha = ۲۰\ s^{-۱}$
* جریان‌های تصادفی خارجی نورون‌ها از اعضای بازه‌ی $(۱/۲, ۲/۸)$ انتخاب می‌شوند.
* $N = ۱۰۰۰۰$
* $t_d = ۰/۱\ s$

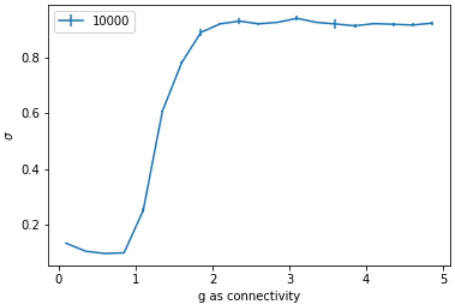
این شبیه سازی برای ۱۰۰۰ ثانیه اجرا شده است که در آن هر گام زمانی برابر ۰/۰۱ ثانیه گرفته شده است. کد شبیه‌سازی در پوشه مسئله همگامی برای مدل انباشت‌وشلیک قابل مشاهده است.

۱.۴.۳ انحراف از معیار میدان

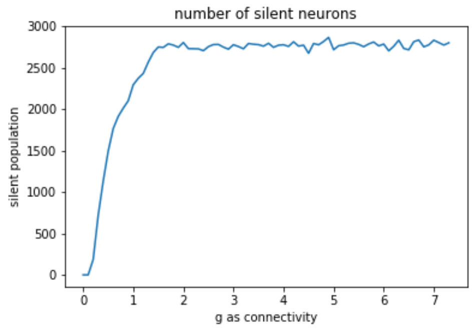
مهم‌ترین شاخصه ما برای ردگیری همگامی، انحراف معیار میدان E است که با زیگما σ نمایش می‌دهیم. جهش به وجود آمده در شکل (۱ب) به این معنی است که سامانه از حالت ناهم‌گامی به هم‌گامی تغییر فاز داده است.



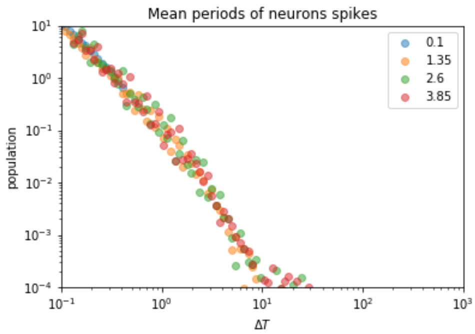
(آ) ثبت لحظه‌ای تیزه زدن هر نورون به صورت مجزا – در این نمودار ضریب تاثیر هر نورون روی همسایه‌هایش $g = ۵$ بوده است. چنان که انتظار می‌رفت شاهد هم‌گامی هستیم.



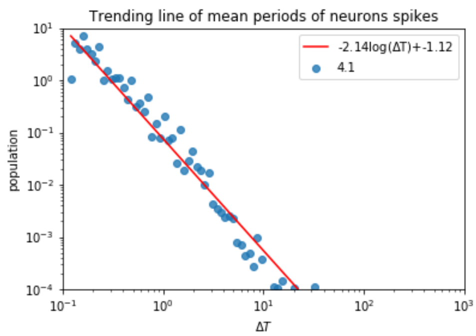
(ب) تغییر فاز از ناهم‌گامی به هم‌گامی برای ۱۰۰۰ نورون



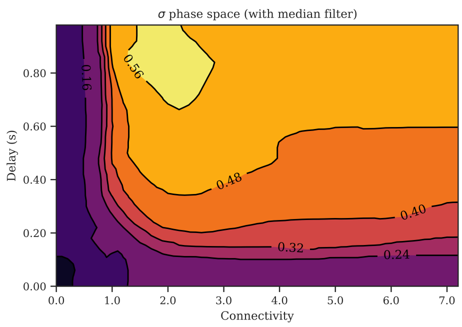
(ج) آمار نورون‌های خاموش درون سامانه



(د) توزیع بسامدی شبکه‌های ۱۰۰۰ نورونی که هر کدام قدرت اتصال متفاوتی دارند.



(ه) محاسبه‌ی نمای توزیع توانی فاصله زمانی بین تیزه‌ها انباشت‌وشلیک



(و) صفحه‌ی فاز مربوط به سامانه‌ی نورون‌های

۲.۴.۳ نورون‌های خاموش

بی‌تردید میدان داخلی نورون‌ها کاملا تابعی است از آمارتیزه‌های درون سامانه. نورون‌هایی که گاهی برای تیزه زدن به پیش می‌روند و گاه به علت حضور میدان داخلی مهار به عقب برمی‌گردند. خوب است بپرسیم که برآیند این رفت و برگشت برای هر نورون چگونه است. آیا این رفت و برگشت منجر به رسیدن به آستانه‌ی تیزه زدن می‌شود و یا نورون در برآیند اصلا پیشروی نمی‌کند و هیچگاه به آستانه نمی‌رسد و خاموش می‌ماند.
در شکل ۱ج شمار نورون‌هایی که هیچگاه در سامانه تیزه نمی‌زنند را آورده‌ایم و این که چگونه با با افزایش ضریب تاثیر مهاری میدان این آمار رشد می‌کند.
این مشاهده نشان می‌دهد که در فاز هم‌گام، تقریبا ۲۵ درصد نورون‌ها خاموش هستند و نقشی در برقراری جریان داخلی ندارند. قابل حدس است که نورون‌هایی خاموش هستند که جریان‌های تصادفی خارجی پایین دست را داشته‌اند. به این معنی که اگر بازه‌ی جریان تصادفی را تنگ‌تر می‌گرفتیم [مثلا از۱/۶] شروع می‌کردیم؛ سامانه در فاز هم‌گام تفاوت رفتاری نمی‌داشت.
همچنین جالب است که تغییر فاز مشاهده شده در تعداد نورون‌های خاموش - شکل ۱ج‌ـ در حالتی در همسایگی و متمایز از تغییر فاز شکل ۱ب نشان می‌دهد.

۳.۴.۳ توزیع تناوب زمانی تیزه‌ها

شبکه‌ی ما متشکل از نورون‌هایی است که مدام در حال تیزه زدن و فعال نگه‌داشتن شبکه هستند. برخی با بسامد بیشتری تیزه می‌زنند و برخی آهسته‌تر. اگر کنجکاو باشیم که جمعیت کل نورون‌های ما چگونه میان دسته‌های مختلف با تناوب‌های متفاوت توزیع شده است؛ لازم است تا توزیع فراوانی آن‌ها را یکجا رسم کنیم - شکل ۱د.
همان طور که می‌بینید به ظاهر این توزیع رفتاری توانی دارد و اگر کنجکاو باشیم می‌توانیم شیب این نمودار تمام لگاریتمی آن را جهت محاسبه‌ی نمای توزیع بدست آوریم - شکل ۱ه.

۵.۳ پهن‌کردن قالی صفحه‌ی فاز

در قسمت‌های پیشین تنها به مطالعه‌ی تاثیر ضریب اتصال در تغییرفاز پرداختیم و زمان تاخیر را تنها در $t_d = ۰/۱s$ خلاصه کردیم. حال اجازه دهید تا به تاخیر نیز اجازه‌ی تغییر دهیم. در ادامه‌ی این قسمت از نوشتارمان، به فرش‌کردن صفحه‌ی فاز خود خواهیم پرداخت. امید است که چهره‌ی تمام نمای سامانه بر صورت این قالی نقش بندد.

۱.۵.۳ قالی انحراف از معیار میدان

در شکل ۱و مشاهده می‌کنیم که شدت هم‌گامی در هر کدام از هنگردهای سامانه چقدر است. بنظر می‌رسد که با افزایش زمان تاخیر و ضریب تاثیر همگامی قدرت پیدا می‌کند و هر دو در ظهور این رفتار شریک هستند. اگر چه تاخیر در جابجایی ضریب‌تاثیر بحرانی تغییری ایجاد نکرده است اما هم‌گامی را قدرت می‌بخشد.

فرصتی برای مدل‌های دیگر نورونی

در بخش قبل به بررسی ویژگی‌های مدل انباشت_شلیک پراختیم.

۴ تلاش برای توصیف

از آنجا که شبیه‌سازی این سامانه شامل تعریف فرآیندهای متفاوتی بود؛ بدیهی است که نوشتن معادله‌ی تحلیلی برای توصیف کامل آن آسان نباشد. اما در این بخش تلاش می‌کنیم که با کنار هم قرار دادن معادلات اصلی چارچوب مسئله‌ی خود را مشخص کنیم.
هر نورون که از حالت $\theta = \pi$ عبور می‌کند [تیزه می‌زند] باعث می‌شود تا سهمی از جریان با کیفیت $p(t) := \alpha^{2} t \cdot exp(-\alpha t)$ به جریان درونی کل سامانه $E(t)$ اضافه شود.

$$E(t) = \frac{1}{N} \int_{0}^{\infty} \int J_a(\pi, t-d-u) da \cdot u\, e^{-\alpha u} du \tag{۱۰}$$

(چک شود آیا بعد معادله درست است؟)
اما جریان برای هر نورون با ورودی a به طریق زیر است:

$$J_a(\theta, t) = n_a(\theta, t) \cdot \dot{\theta}_a \tag{۱۱}$$

این رفتار به خوبی نشان می‌دهد جریان فقط در ناحیه‌ی $\pi \leq \theta$ وجود دارد. زیرا ورود نورون به ناحیه‌ی مثبت‌تر را ممنوع کرده‌ایم. بی‌تردید برای فهمیدن چگونگی تغییر جریان در ناحیه‌های میانی باید از معادله‌ی پخش استفاده کنیم.

$$\frac{\partial n_a}{\partial t} = -\frac{\partial J_a}{\partial \theta} \tag{۱۲}$$

$$= -\frac{\partial n_a}{\partial \theta} \cdot \dot{\theta}_a \tag{۱۳}$$

۱.۴ حل معادله‌ی شبکه‌ی ساده

اجازه بدهید تا اولین تلاش خود را از ساده‌ترین نوع شبکه‌ها شروع کنیم. شبکه‌ای که به جز جریان داخلی و جریان تصادفی اولیه ورودی دیگری ندارد. پس خواهیم داشت:

$$\begin{cases} E(t) = \frac{1}{N} \int_{0}^{\infty} \int n_a(\pi, t-d-u) \cdot \big[a - gE(t-d-u)\big] da \cdot \alpha^{2} u\, e^{-\alpha u} du \\ \frac{\partial n_a}{\partial t} = -\frac{\partial n_a}{\partial \theta} \cdot (a - gE(t)) \end{cases} \tag{۱۴}$$

چند پیشنهاد می‌شود برای ادامه‌ی راه‌حل داشت.

۱. از آنجا که میدان به گونه‌ای متناوب عمل می‌کند؛ یک پیشنهاد خوب می‌تواند آن باشد که بسط فوریه‌ی آن را بنویسیم.

$$E(t) = \sum c_i \cdot cos(\omega_i t) \qquad (۱۵)$$

که اگر ثابت کنیم c_1 از بقیه ضرایب بزرگتر است؛ مساله‌ی ما حل می‌شود.

۲. دشواری مساله از در هم تنیدگی معادلات برآمده است. اگر به تقریب در معادله‌ی پخش میدان را یک نوفه درنظر بگیریم و پاسخ را در معادله‌ی اول قرار دهیم.

۳. انتگرال اول را به صورت بازگشتی در خودش جاگذاری کنیم.

۴. مسئله را در حالت آماری بررسی کنیم و حالت پایستار آن را پیدا کنیم و بپرسیم در چه حالتی است که حالت پایستار داریم.

۱.۱.۴ روش بازگشتی

در این روش برای این که از جمله‌ی تابعیت $E(u)$ را از خودش باز کنیم؛ عبارت سمت راست را مجددا در خودش جاگذاری می‌کنیم. برای راحت‌تر شدن محاسبات ابتدا دو متغیر کمکی زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{J}(\pi, t-d-u) \equiv \int n_a(\pi, t-d-u) a \cdot da \qquad (۱۶)$$

$$\mathcal{N}(\pi, u) \equiv \int n_a(\pi, t-d-u) \cdot da \qquad (۱۷)$$

عبارت $\mathcal{J}(\pi, t-d-u)$ به معنای جمع جریان تصادفی نورون‌هایی است که در زمان u در آستانه قرار دارند. همچنین عبارت $\mathcal{N}(\pi, u)$ به معنای تعداد همین نورون‌هاست.
حال با نمادهای بالا شروع به بازنویسی جملات پیشین می‌کنیم:

$$E(t) = \frac{1}{N}\int_0^\infty \mathcal{J}(\pi, t-d-u) \cdot u\, e^{-\alpha u} du - \frac{g}{N}\int_0^\infty \mathcal{N}(\pi, u) \cdot u\, e^{-\alpha u} E(t-d-u) du \qquad (۱۸)$$

(۱۹)

حال جمله‌ی اول را نیز با عبارت دیگری خلاصه‌سازی می‌کنیم:

$$\mathcal{A}(t-d) \equiv \frac{1}{N}\int_0^\infty \mathcal{J}(\pi, t-d-u) \cdot u\, e^{-\alpha u} du \qquad (۲۰)$$

این عبارت جمع تعداد همه‌ی تیزه‌هایی است که تا گام $t-d$ زده شده‌اند و درنتیجه جمله‌ای انباشتی است. پس خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
E(t) &= \mathcal{A}(t-d) - g\int_{0}^{\infty} \mathcal{N}(\pi,u)\cdot u\, e^{-\alpha u} E(t-d-u)du \qquad (۲۱)\\
&= \mathcal{A}(t-d) - g\int_{0}^{\infty} \mathcal{N}(\pi,u_1)\cdot u_1\, e^{-\alpha u_1}\cdot\Big[\mathcal{A}(u_1-d) - g\int_{-\infty}^{u_1-d} \mathcal{N}(\pi,u_2)\cdot u_2\, e^{-\alpha u_2} E(u_2)du_2\Big]du_1 \qquad (۲۲)\\
&= \mathcal{A}(t-d) - g\int_{-\infty}^{t-d} \mathcal{N}(\pi,u_1)\cdot u_1\, e^{-\alpha u_1}\cdot \mathcal{A}(u_1-d)du_1 \qquad (۲۳)\\
&\quad + g^2\int_{-\infty}^{t-d} \mathcal{N}(\pi,u_1)\cdot u_1\, e^{-\alpha u_1}\int_{-\infty}^{u_1-d} \mathcal{N}(\pi,u_2)\cdot u_2\, e^{-\alpha u_2} E(u_2)du_2du_1 \qquad (۲۴)\\
&= \mathcal{A}(t-d) - g\int_{-\infty}^{t-d} \mathcal{N}(\pi,u_1)\cdot u_1\, e^{-\alpha u_1}\cdot \mathcal{A}(u_1-d)du_1 \qquad (۲۵)\\
&\quad + g^2\int_{-\infty}^{t-d} \mathcal{N}(\pi,u_1)\cdot u_1\, e^{-\alpha u_1}\int_{-\infty}^{u_1-d} \mathcal{N}(\pi,u_2)\cdot u_2\, e^{-\alpha u_2} \mathcal{A}(u_2-d)du_2du_1 \qquad (۲۶)\\
&\quad - g^3\int_{-\infty}^{t-d} \mathcal{N}(\pi,u_1)\cdot u_1\, e^{-\alpha u_1}\int_{-\infty}^{u_1-d} \mathcal{N}(\pi,u_2)\cdot u_2\, e^{-\alpha u_2}\int_{-\infty}^{u_2-d} \mathcal{N}(\pi,u_3)\cdot u_3\, e^{-\alpha u_3} E(u_3)du_3du_2du_1 \qquad (۲۷)
\end{aligned}
$$

حال در این میان دو نکته قابل توجه است. (۱) میدان در هر زمان وابسته به اثرات انباشتگی از زمان ازل سامانه است. عمر این سامانه کراندار باشد؛ تعداد جملات بالا محدود می‌شوند. (۲) دقت کنید که بازه‌ی متغیرهای انتگرال‌ده به صورت $-\infty \leq u_{i+1} \leq u_i - d$ محدود می‌شوند. پس طبیعی است که نتیجه بگیریم بازه‌ی هر انتگرال تو در تو چند گام عقب‌تر از زمان اکنون است. یعنی $-\infty \leq u_i \leq t - i\,d$.

۲.۱.۴ روش اختلال

به نمودار ؟؟ دقت کنید. در زمانی که تعداد نورون‌ها بی‌نهایت باشد؛ در فاز ناهم‌گام انحراف معیار میدان صفر خواهد شد. این به این معنی است که جریان در زمان ثابت خواهد ماند. پس بگذارید با علم بر این موضوع یک جواب معادله‌ی ۱۴ را در حالت حدی میدان ثابت E_0 معرفی کنیم.
با فرض ثابت بودن میدان، اندازه‌ی آن را محاسبه می‌کنیم. سپس مجدد به معادلات برمی‌گردیم و می‌پرسیم که در صورت جمع با یک جمله‌ی اختلالی کوچک این انحراف رشد خواهد کرد یا خیر. به عبارت دیگر آیا این جواب جاذب است.

$$
\begin{cases}
E_0 = \frac{1}{N}\int_{-\infty}^{t-d}\int n_a(\pi,u)\cdot\big[a - gE_0\big]da\cdot\alpha^2 u\, e^{-\alpha u}du\\
\frac{\partial n_a}{\partial t} = -\frac{\partial n_a}{\partial\theta}\cdot(a - gE_0)
\end{cases} \qquad (۲۸)
$$

یک راه خوب برای پیشبرد سطر اول معادلات آن است که از دو طرف آهنگ تغییرشان با زمان را بپرسیم. از آنجا که سمت چپ معادله ثابت است؛ سمت راست هم باید جوابی مشابه را حکایت کند.

$$0 = \frac{dE_0}{dt} = \frac{\alpha^2(t-d)e^{-\alpha(t-d)}}{N} \cdot [-gE_0 \cdot \int n_a(\pi, t-d)da + \int n_a(\pi, t-d) \cdot a\, da] \tag{۲۹}$$

مشخص است که کدام جمله از جملات ضربی بالا صفر است. پس برای E_0 خواهیم داشت:

$$E_0 = \frac{1}{g} \cdot \frac{\int n_a(\pi, t-d) \cdot a\, da}{\int n_a(\pi, t-d)da} \tag{۳۰}$$

حال برای ادامه‌ی فرآیند نیاز داریم تا عبارت حاکم بر $n_a(\pi, t-d)$ را بدست آوریم. جواب پیشنهادی ما برای سطر دوم معادلات از جنس تابع دلتاست:

$$\begin{aligned}
n_a(\theta, t) &= \delta(\theta - \theta_a(t)) && (۳۱)\\
&= \delta(\theta + \theta_0 - (a - gE_0)t + 2\left\lfloor K_a^{(t)} \right\rfloor \pi) && (۳۲)\\
&= \delta(\theta - (a - gE_0)t + 2\left\lfloor K_a^{(t)} \right\rfloor \pi + \theta_0) && (۳۳)\\
\Rightarrow n_a(\pi, t) &= \delta((2\left\lfloor K_a^{(t)} \right\rfloor + 1)\pi - (a - gE_0)t + \theta_0) && (۳۴)\\
& && (۳۵)
\end{aligned}$$

که در این معادلات $K_a^{(t)}$ کسری است که تعداد دور هر نورون را از آغاز تا کنون روایت می‌کند و ما مجبور به عقب کشیدن 2π فاز کامل پس از تیزه زدن آن به تعداد $\left\lfloor K_a^{(t)} \right\rfloor$ شده‌ایم. [1] قابل محاسبه است که عبارت کامل آن به صورت زیر است.

$$K_a^{(t)} = \frac{(a - gE_0)t + \pi + \theta_0}{2\pi} \tag{۳۶}$$

برای محاسبه‌ی انتگرال‌هایی که شامل این دلتای دیراک هستند؛ لازم است تا صفرهای آرگومان آن را محاسبه کنیم.

$$\begin{aligned}
(2\left\lfloor \frac{(a - gE_0)t + \pi + \theta_0}{2\pi} \right\rfloor + 1)\pi - (a - gE_0)t + \theta_0 = 0 && (۳۷)\\
2\pi \times \left(\left\lfloor \frac{(a - gE_0)t + \pi + \theta_0}{2\pi} \right\rfloor - \frac{(a - gE_0)t + \pi + \theta_0}{2\pi} \right) = 0 && (۳۸)\\
2\pi \times \left(\left\lfloor K_a^{(t)} \right\rfloor - K_a^{(t)} \right) = 0 && (۳۹)
\end{aligned}$$

این رابطه کاملا یک تابع تناوبی را توصیف می‌کند. یک تابع مقطع که در مکانی که آرگومان آن صحیح می‌شود؛ مقدار صفر به خود می‌گیرد. پس روشن است که توقع داشته باشیم. تعداد صفرهای این

[1] دقت کنیم که معادله‌ی ذکر شده برای نورون‌هایی درست است که $(a - gE_0) > 0$

معادله به اندازه‌ی تعداد تناوبی است که در هر زمان در بازه‌ی جریان‌های داده شده دارد.

$$\Delta K_a^{(t)} = ۱ \tag{۴۰}$$

$$\Delta K_a^{(t)} = \frac{t}{۲\pi}\Delta a \tag{۴۱}$$

$$\Delta a = \frac{۲\pi}{t} \tag{۴۲}$$

این دوره‌ی تناوب با افزایش زمان کوچکتر می‌شود. اگر تعداد نورون‌ها را به صورتی ترمودینامیکی بزرگ بگیریم؛ آنگاه به ازای هر دوره‌ی تناوب یک نورون حتما هست که روی محور آستانه قرار گرفته است.
حال که دوره‌ی تناوب Δa را بدست آوردیم؛ می‌دانیم که ریشه‌های رابطه‌ی ۳۹ چه زمانی رخ می‌دهند. فرض کنیم که اولین صفر در جریانی مثل a_m رخ می‌دهد. توجه کنید حتما اندازه‌ی این جریان به گونه‌ای است که نورون را به صورت فعال نگه دارد. پس باید حتما $(a_m - gE.) > ۰$ باشد. حال می‌توانیم انتگرال‌های مورد نظر خود را این چنین بسط دهیم.

$$\int n_a(\pi, t-d) a\, da = \int \delta\Big(۲\pi(\lfloor K_a^{(t)} \rfloor - K_a^{(t)})\Big) a\, da \tag{۴۳}$$

$$= \frac{۱}{۲\pi} \cdot \sum_{K_a^{(t)} \in Z} a_i \tag{۴۴}$$

$$= \frac{۱}{۲\pi} \cdot \sum_{m=۰}^{M} a_m + m \cdot \Delta a \tag{۴۵}$$

$$= \frac{M+۱}{۲\pi} \cdot (\frac{a_m + a_{max}}{۲}) \tag{۴۶}$$

$$\tag{۴۷}$$

و از طرفی:

$$\int n_a(\pi, t-d)\, da = \int \delta\Big(۲\pi(\lfloor K_a^{(t)} \rfloor - K_a^{(t)})\Big) a\, da \tag{۴۸}$$

$$= \frac{۱}{۲\pi} \cdot \sum_{K_a^{(t)} \in Z} ۱ \tag{۴۹}$$

$$= \frac{۱}{۲\pi} \cdot \sum_{m=۰}^{M} ۱ \tag{۵۰}$$

$$= \frac{M+۱}{۲\pi} \tag{۵۱}$$

حال اگر به محاسبه‌ی میدان ثابت خود برگردیم و تکه‌های پازل را کنار هم بگذاریم؛ خواهیم داشت:

$$E_{\cdot} = \frac{۱}{g} \cdot \frac{\int n_a(\pi, t-d) \cdot a \, da}{\int n_a(\pi, t-d) da} \quad (۵۲)$$

$$= \frac{۱}{g} \cdot \frac{\frac{M+۱}{۲\pi} \cdot \left(\frac{a_m + a_{max}}{۲}\right)}{\frac{M+۱}{۲\pi}} \quad (۵۳)$$

$$= \frac{۱}{g} \left(\frac{a_m + a_{max}}{۲}\right) \quad (۵۴)$$

۳.۱.۴ روش آماری

در این روش فرض می‌کنیم که برای هر جریان تصادفی اولیه، نورون‌های زیادی را به اختیار گرفته‌ایم. در حالت پایا ، در یک حالت خاص تغییری در چگالی جمعیت مشاهده نمی‌شود پس در معادله‌ی ۱۴ خواهیم داشت:

$$\frac{\partial n_a}{\partial t} = ۰ \quad (۵۵)$$

همچنین در حالت پایا که در واقع از نگاه ما حالت ناهم‌گام است؛ جریان بین نورون‌ها - که کمیتی بزرگ مقیاس است - در زمان تغییری نمی‌کند. پس به این ترتیب:

$$\begin{cases} \frac{\partial n_a}{\partial t} = -\frac{\partial J_a(t)}{\partial \theta} = ۰ \\ J_a(\theta, t) = n_a(\theta, t) \cdot [a - gE] \end{cases} \Rightarrow J_a(\theta, t) = J_a(t) \quad (۵۶)$$

$$\Rightarrow n_a(\theta, t) = n_a \quad (۵۷)$$

$$(۵۸)$$

پس توزیع جمعیت نورون‌ها مستقل از زمان و حالت آن‌ها خواهد شد. اگر توزیع را در ابتدا یکنواخت میان جریان‌های مختلف توزیع کرده باشیم؛ برای همه‌ی زمان‌ها و حالت‌ها داریم:

$$n = \frac{N}{۲\pi(a_{Max} - a_{min})} \quad (۵۹)$$

برای جریان بین نورون‌ها هم خواهیم داشت:

$$E = \frac{۱}{N} \int_{-\infty}^{t-d} \int n \cdot \big[a - gE\big] da \cdot \alpha^{۲} u \, e^{-\alpha u} du \quad (۶۰)$$

$$= \int \frac{n}{N} \cdot \big[a - gE\big] da \quad (۶۱)$$

دقت کنیم که انتگرال رابطه‌ی ۶۱ روی نورون‌هایی است که مستعد تیزه زدن هستند. [۲]

اولین جریانی که نورون را مستعد تیزه زدن می‌کند a_* نام‌گذاری می‌کنیم. وقتی جریان مهاری حاصل از تیزه زدن‌ها کوچک است؛ همه‌ی نورون‌ها فعال هستند و در نتیجه $a_* = a_{min}$ می‌شود. اما در حالتی که جریان مهاری زیاد می‌شود؛ این مقدار از کمترین جریان تصادفی اولیه سامانه بزرگتر می‌شود. محاسبات را ادامه می‌دهیم:

$$E = \int \frac{n}{N} \cdot \big[a - gE\big] da \tag{۶۲}$$

$$= \frac{n}{N} \cdot \big[\frac{a_{Max}^{۲} - {a_*}^{۲}}{۲} - gE(a_{Max} - a_*)\big] \tag{۶۳}$$

$$\Rightarrow E = n \cdot \big[\frac{a_{Max}^{۲} - {a_*}^{۲}}{۲}\big] / \big[N + gn(a_{Max} - a_*)\big] \tag{۶۴}$$

شاید بنظر این یک معادله‌ی درجه یک ساده باشد که میدان را گزارش می‌کند اما در واقع خود a^* هم به میدان وابسته است و باید وابستگی آن را لحاظ کنیم. به تقریب: $a^* = gE$ با اضافه کردن این معادله و حل معمول یک معادله‌ی درجه‌ی دو برای میدان صراحتا خواهیم داشت:

$$E = \big(\frac{a_{Max}}{g} + \frac{N}{ng^{۲}}\big) \pm \big[\big(\frac{N}{ng^{۲}} + \frac{a_{Max}}{g}\big)^{۲} - \frac{{a_{Max}}^{۲}}{g^{۲}}\big]^{\frac{۱}{۲}} \tag{۶۵}$$

نتیجه می‌دهد که a_* هم باید به صورت زیر باشد:

$$a_* = \big(a_{Max} + \frac{N}{ng}\big) \pm \big[\big(\frac{N}{ng} + a_{Max}\big)^{۲} - {a_{Max}}^{۲}\big]^{\frac{۱}{۲}} \tag{۶۶}$$

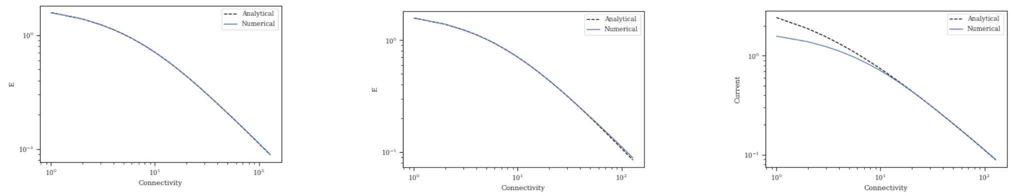
$$= \big(a_{Max} + \frac{N}{ng}\big) \pm \big[\frac{N^{۲}}{n^{۲}g^{۲}} + \frac{۲a_{Max}}{ng}\big]^{\frac{۱}{۲}} \tag{۶۷}$$

اجازه بدهید علامت مثبت را کنار بگذاریم زیرا مقدار a_* را خارج بازه‌ی جریان‌های سامانه گزارش می‌کند. پس هم برای میدان و هم جریان a_* خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a_* = \big(a_{Max} + \frac{N}{ng}\big) - \big[\frac{N^{۲}}{n^{۲}g^{۲}} + \frac{۲a_{Max}}{ng}\big]^{\frac{۱}{۲}} \\ E = \big(\frac{a_{Max}}{g} + \frac{N}{ng^{۲}}\big) - \big[\frac{N^{۲}}{n^{۲}g^{۴}} + \frac{۲Na_{Max}}{ng^{۳}}\big]^{\frac{۱}{۲}} \end{cases} \tag{۶۸}$$

حال اگر نتایج بدست آمده را با داده‌های شبیه‌سازی تطبیق دهیم؛ خواهیم دید که تطابق خوبی با یک دیگر دارند.

---
[۲] $(a - gE) > ۰$



(آ) نسخه‌ای که کمینه‌ی جریان را از حل محاسبات درنظر می‌گیرد

(ب) نسخه‌ای که همه‌ی نورون‌ها را فعال تصور می‌کند.

(ج) نسخه ساخته شده از اتصال دوتای دیگر

شکل (۲) تطابق جریان پایای بدست آمده از حل عددی و تحلیلی

در ضریب تاثیرهای بسیار بزرگ داریم:(اشتباه است تصحیح شود.)

$$E \cong \frac{a_{Max}}{g} + \frac{N}{ng^{2}} - \left(\frac{2Na_{Max}}{ng^{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\left[1 + \frac{N}{2nga_{Max}}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{۶۹}$$

$$= \frac{a_{Max}}{g} + \frac{N}{ng^{2}} - \left(\frac{2Na_{Max}}{ng^{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\left[1 + \frac{N}{4nga_{Max}}\right] \tag{۷۰}$$

$$= \frac{a_{Max}}{g} - \left(\frac{2Na_{Max}}{ng^{3}}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{N}{ng^{2}} - \left(\frac{N}{2n}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{a_{Max}^{\frac{1}{2}} g^{\frac{5}{2}}} \tag{۷۱}$$

۴.۱.۴ میانگین زمانی میدان

اگر چه محاسبه‌ی انحراف معیار میدان در طول زمان کار دشواری است اما محاسبه‌ی میانگین آن نسبتا ساده‌تر است. زیرا برای هر تابع f وابسته به زمان داریم

$$I[f] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T-d} \int_{d}^{T} dt \int_{0}^{t-d} f(u)du \tag{۷۲}$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T-d} \int_{0}^{T-d} du \int_{u+d}^{T} f(t)dt \tag{۷۳}$$

$$= \lim_{T\to\infty} \int_{0}^{T-d} du\bar{f}(u) \tag{۷۴}$$

به شرط تعادل

۵.۱.۴ حل اختلالی میدان

همان طور که مشخص است؛ حل دقیق میدان بسیار کار دشواری است اما می‌توان از طریق ترفندهای اختلالی به جواب آن نزدیک شد. یکی از روش‌های معمول حل زنجیری و تودرتوی دستگاه معادلات است.

به این ترتیب که ابتدا از معادله پاسخ حالت پایا (مرتبه‌ی صفرم) را در معادله‌ی پخش جاگذاری می‌کنیم تا توزیع آماری وابسته به زمان نورون‌ها بدست آید. سپس مجددا از توزیع بدست آمده؛

میدان مرتبه‌ی اول را که وابسته به زمان است؛ محاسبه می‌کنیم.
از آنجا که توزیع سامانه رفتاری دوره‌ای به طول 2π دارد؛ می‌توانیم آن را به صورت زیر بسط دهیم:

$$\rho(\theta, a, t) = \rho_0 + \sum_k A_k(t) e^{ik\theta}, \quad k \in \mathcal{Z} \tag{75}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \sum \dot{A}_k e^{ik\theta} \tag{76}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \theta} = \sum A_k \cdot ik \cdot e^{ik\theta} \tag{77}$$

(۷۸)

حال آن را در معادله‌ی پخش قرار می‌دهیم تا بتوانیم معادله‌ی حاکم بر ضرایب را محاسبه کنیم.

$$\sum \dot{A}_k e^{ik\theta} = -\sum A_k \cdot ik(a - gE(t)) \cdot e^{ik\theta} \tag{79}$$

$$\Rightarrow \dot{A}_k = -A_k \cdot ik(a - gE(t)) \tag{80}$$

در تقریب مرتبه‌ی اول برای توزیع داریم:

$$\dot{A}_k = -A_k \cdot ik(a - gE_0) \tag{81}$$

$$\Rightarrow A_k(t) = A_k(0) e^{-ik(a-gE_0)t} \tag{82}$$

$$\Rightarrow \rho(\theta, a, t) = \rho_0 + \sum_k A_k(0) e^{ik\theta - ik(a-gE_0)t} \tag{83}$$

پس برای نورون‌های روی آستانه خواهیم داشت:

$$\rho(\pi, a, t) = \rho_0 + \sum_k A_k(0) e^{ik\pi - ik(a-gE_0)t} \tag{84}$$

حال از نتیجه‌ی بدست آمده استفاده می‌کنیم و همان طور که اشاره شد به محاسبه‌ی مرتبه‌ی بعدی میدان می‌رویم:

$$E(t) = \int \int_0^\infty \rho(\pi, a, t - d - v) \cdot \dot{\theta} \cdot \alpha^2 v e^{-\alpha v} dv da \tag{85}$$

$$= E_0 \tag{86}$$

$$+ \int \int_0^\infty \sum_k A_k(0) e^{ik\pi - ik(a-gE_0)(t-d-v)} \cdot (a - gE_0) \alpha^2 v e^{-\alpha v} dv da \tag{87}$$

$$= E_0 + \sum_k \int \int_0^\infty A_k(0) e^{ik\pi - ik(a-gE_0)(t-d-v)} \cdot (a - gE_0) \alpha^2 v e^{-\alpha v} dv da$$

(۸۸)

اجازه بدهید سهم مدهای متفاوت از میدان را به صورت جداگانه محاسبه کنیم و سپس مجددا در کنار یکدیگر قرار دهیم.

$$E_{k,a}(t) = -\alpha^{۲} A_k(۰)(a-gE_۰)e^{ik\pi}\int_۰^{\infty} ve^{-[\alpha-ik(a-gE_۰)]v-ik(a-gE_۰)(t-d)}dv \quad (۸۹)$$

با با تغییر متغیر $\beta \equiv \alpha - ik(a-gE_۰)$ محاسبات را ادامه می‌دهیم:

$$= \alpha^{۲} A_k(۰)(a-gE_۰)e^{ik\pi}e^{-ik(a-gE_۰)(t-d)} \cdot \int_۰^{\infty} ve^{-\beta v}dv \quad (۹۰)$$

$$= \alpha^{۲} A_k(۰)(a-gE_۰)e^{ik\pi}e^{-ik(a-gE_۰)(t-d)} \cdot \frac{۱}{\beta^{۲}} \quad (۹۱)$$

$$= A_k(۰)(a-gE_۰)e^{ik[\pi-(a-gE_۰)(t-d)]} \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha-ik(a-gE_۰)}\right)^{۲} \quad (۹۲)$$

حال قدم به قدم به محاسبات پیشین خود برمی‌گردیم. ابتدا می‌پرسیم میدان همه‌ی نورون‌های با مد یکسان چه جریانی را تولید می‌کنند.

$$E_k(t) = \int E_{k,a}da \quad (۹۳)$$

$$= \int A_k(۰)(a-gE_۰)e^{ik[\pi-(a-gE_۰)(t-d)]}\left(\frac{\alpha}{\alpha-ik(a-gE_۰)}\right)^{۲}da \quad (۹۴)$$

با تغییر متغیر $h \equiv a - gE_۰$ تلاش می‌کنیم انتگرال را ادامه دهیم.

$$E_k(t) = A_k(۰)e^{ik\pi}\int_۰^{a_M-gE_۰} he^{-ikh(t-d)}\left(\frac{۱}{۱-ikh/\alpha}\right)^{۲}dh \quad (۹۵)$$

نرم‌افزارهای محاسباتی همچون ابزار ولفرم به ما امکان می‌دهد تا پاسخ آن را به صورت زیر بیان کنیم:

$$E_k(t) = -A_k(۰)\frac{\alpha^{۲}}{k^{۲}}e^{ik\pi}\Bigg[\frac{e^{-i(\xi_{(h)}+k(t-d)h)}}{\sqrt{۱+h^{۲}k^{۲}/\alpha^{۲}}} \quad (۹۶)$$

$$+ e^{-\alpha(t-d)}(\alpha(t-d)+۱)Ei[(\alpha-ikh)(t-d)]\Bigg]\Bigg|_۰^{a_M-gE_۰} \quad (۹۷)$$

به صورتی که $e^{-i\xi_{(h)}} = \frac{۱+ikh/\alpha}{\sqrt{۱+h^۲k^۲/\alpha^۲}}$ است و Ei همان تابع انتگرال نمایی است که به صورت $Ei[z] = -\int_{-z}^{+\infty} e^{-t}/tdt$ نوشته می‌شود.

$$E_k(t) = - A_k(۰)\frac{\alpha^۲}{k^۲}e^{ik\pi}\left[\frac{e^{-i(\xi_{(a_M-gE.)}+k(t-d)(a_M-gE.))}}{\sqrt{۱+(a_M-gE.)^۲k^۲/\alpha^۲}}\right. \tag{۹۸}$$

$$+ e^{-\alpha(t-d)}(\alpha(t-d)+۱)Ei[(\alpha-ik(a_M-gE.))(t-d)] \tag{۹۹}$$

$$- e^{-ik(t-d)(a_M-gE.)} \tag{۱۰۰}$$

$$\left.- e^{-\alpha(t-d)}(\alpha(t-d)+۱)Ei[\alpha(t-d)]\right] \tag{۱۰۱}$$

$$= - A_k(۰)\frac{\alpha^۲}{k^۲}e^{ik\pi}\left[e^{-ik(t-d)(a_M-gE.)}\left(\frac{e^{-i(\xi_{(a_M-gE.)})}}{\sqrt{۱+(a_M-gE.)^۲k^۲/\alpha^۲}}+۱\right)\right. \tag{۱۰۲}$$

$$\left.+ e^{-\alpha(t-d)}(\alpha(t-d)+۱)\Big(Ei[(\alpha-ik(a_M-gE.))(t-d)] - Ei[\alpha(t-d)]\Big)\right] \tag{۱۰۳}$$

پس یک جمله‌ی نوسانی دارد و جمله‌ای که شامل تکینگی است.

مراجع

[1] Luccioli, Stefano and Politi, Antonio. Irregular collective behavior of heterogeneous neural networks. *Phys. Rev. Lett.*, 105:158104, Oct 2010. 2

[2] Safaeesirat, Amin and Moghimi-Araghi, Saman. Critical behaviour at the onset of synchronization in a neuronal model, 2020.