سیر مطالعاتی من برای ارائه پایان نامه کارشناسی ارشد

محسن مهرانی ــ استاد راهنما: دکتر سامان مقیمی عراقی

۱ مطالعه مقاله شماره [۱]:

در این مقاله مدلی را مشاهده کردیم که به کمک مدل IF یک شبکه نورونی کامل را توصیف کرده است. این شبکه شامل نورون‌های مهاری است که روشن شدن هر کدوم از آن‌ها باعث مهار شدن نورون‌های همسایه می‌شود. معادله تحول اختلاف پتانسیل هر کدام از نورون‌ها با محیط بیرونش از رابطه زیر داده می‌شود (: g ضریب اتصال هر جفت نورون، : S ماتریس اتصال، t_d زمان تاخیر میان زدن تیزه و تحریک آن، a_i یک پتانسیل تحریکی و خارجی):

$$\dot{v_i} = a_i - v_i - \frac{g}{N}\sum_{n|t_n<t} S_{i,l(n)}\delta(t - t_n - t_d) \tag{۱}$$

پارامتر نظم سیستم را به کمک میدان (E) تعریف کرده است اما پارامتر نظم را انحراف از معیار آن در طول زمان معرفی کرده است.

$$\ddot{E} + 2\alpha\dot{E} + \alpha^2 E = 2\alpha N \sum_{n|tn<t}\delta(t - t_n - t_d) \tag{۲}$$

$$\sigma^2 = \langle E^2\rangle_t - \langle E\rangle_t^2 \tag{۳}$$

در طول زمان میدان E و σ را رصد کرده است و دیده‌است که میدان خاموش و روشن می‌شود و انحراف از معیار آن مقدار خوبی مثبت است چنان که این خاموش و روشن‌ها را با معنا نشان می‌دهد. حال ادعای این مقاله است که این خاموش و روشن شدن‌ها الگویی آشوبناک دارند و ادعا کرده است که به اندازه متناهی سامانه نیز وابسته نیست.

۱.۱ سوالات

۱. مدل IF به قرار زیر است. چطور معادله ۱ به آن تبدیل می‌شود. دلتای یاد شده در معادله ۱ دلتای دیراک است؟ یا دلتایی که بیشینه آن عدد یک است؟

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \sum_{j=1}^{N} a_{ij}\sin(\theta_j - \theta_i), \qquad i = 1\ldots N \tag{۴}$$

۲. t_n چیست؟

۳. اگر قرار باشد جمعی که در رابطه ۱ نوشته‌ایم روی تمام زمان‌های از ازل تا t باشد پس آیا هر نورون حافظه‌ای از کل رخدادهای گذشته دارد؟ حتی از لحظاتی که قبل از تیزه زدن ها وجود دارند؟

۴. میدان E به چه معناست؟ چطور تعریف کردیم؟ آیا مشخصه‌ای از کل سیستم است؟

پاسخ استاد:

۱. قرار نیست انباشت‌وشلیک به این تبدیل بشود. ممکنه یه شباهت‌های کلی (به این معنی که مثلا دور می‌زنند) باشه ولی کلا دو تا معادله‌ی متفاوتند. در ضمن تابع دلتای دیراک است.

۲. کمیت‌های t_n زمان‌هایی است که تیزه‌ای در سیستم زده می‌شود. [*می‌گویم: پس احتمالا معادله دیفرانسیلی ما دائم در حال به روز کردن سمت راست خودش است. هر وقت نورونی تیزه زد آن را در جمله سمت راست ذخیره می‌کنیم. پس احتمالا تقارن زمانی نداریم مگر پس مدتی طولانی که تاثیر شرایط اولیه بسیار کوچک دیده شود.]

۳. داستان اینه که هر نورونی که تیزه بزنه، اطرافیانش رو تحت تاثیر قرار می‌ده. پس وضعیت نورون به تمام تیزه‌های زمان‌های قبل وابسته است.

۴. هر وقت در هر جای دستگاه، تیزه‌ای زده بشه، کمیتE کمی بالا می‌ره و بعد افت پیدا می‌کنه. حالا اگر تند و تند جاهای مختلف تیزه زده بشه، این کمیت کم و بیش مقداری غیر صفر پیدا می‌کنه.[این کمیت را خودمون تعریف کرده‌ایم که بر حسب پارامترهای سیستم متحول می‌شود. مانند یک آشکارساز که به سامانه متصل می‌شود تا اندازه‌گیری خود را با یک عقربه نشان دهد.] اما اگر این تیزه زدن‌ها همگام باشه، یعنی همه با هم یه زمانی بزنند و بعد یه مدتی خاموش باشند، این کمیت، اول کلی زیاد می‌شه و بعد یه مدتی کم می‌مونه و در نتیجه انحراف معیارش زیاد می‌شه.

۲.۱ مسائل پیشروی پیاده سازی شبیه سازی

۱.۲.۱ تابع بی‌کران دلتا

یکی از مشکلات شبیه سازی معادلات دیفرانسیلی حضور تابع دلتای دیراک است. این تابع در نقطه صفر خود دارای مقداری بینهایت است. برای برطرف کردن این معذل چه باید کرد؟ نکته در این جا نهفته است که چون ما برای حل عددی معادله دیفرانسیلی خود از زمان پیوسته استفاده نمی‌کنیم و

از گام‌هایی با طول مثبت Δt استفاده می‌کنیم این مشکل به صورت زیر مدیریت می‌شود.

$$v_i(t+\Delta t) = v_i(t) + \int_t^{t+\Delta t} \dot{v}_i dt \tag{۵}$$

$$= v_i(t) + \int_t^{t+\Delta t} \left[a_i - v_i - \frac{g}{N} \sum_{n|t_n<t} S_{i,l(n)} \delta(t - t_n - t_d) \right] dt \tag{۶}$$

$$\approx v_i(t) + [a_i - v_i(t)]\,\Delta t - \frac{g}{N} \sum_{n|t_n<t} S_{i,l(n)} \int_t^{t+\Delta t} \delta(t - t_n - t_d) dt \tag{۷}$$

$$\approx v_i(t) + [a_i - v_i(t)]\,\Delta t - \frac{g}{N} \sum_{n|t_n<t} S_{i,l(n)} H(t + \Delta t - t_n - t_d) \tag{۸}$$

حالا تابع پله کاملا برای ما آشنا و قابل مدلسازی است. دقت شود که تابع پله یاد شده فقط در محدوده $t, t+\Delta t$ زندگی می‌کند و پس از آن اعتبار ندارد. معادله ۸ می‌گوید که باید برای تحول پتانسیل نورون iام بررسی کنیم که آیا نورونی در همسایگی آن تیزه زده است یا نه. اگر چنان باشد یک واحد به جمع تیزه زدگان اضافه کنیم.

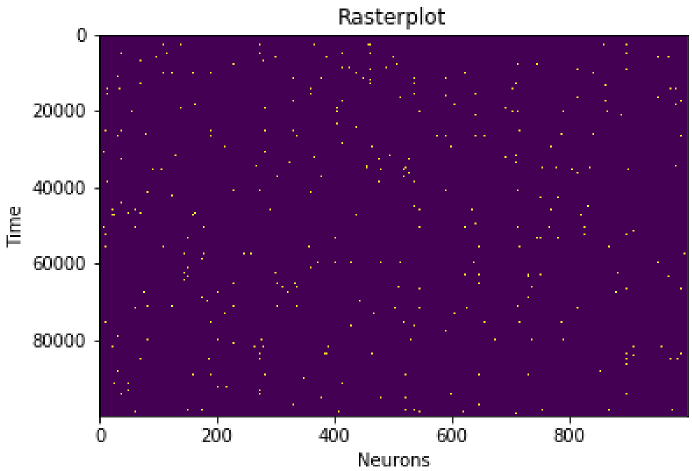
۲.۲.۱ ثبت تاریخ تیزه زدن‌ها

برای محاسبه تحول پتانسیل در رابطه ۸ چنان که توضیح داده شد نیاز به دانستن تاریخ تیزه زدن‌ها هستیم. در صورت ثبت زمان تیزه زدن برای هر نورون، یک آرایه مربعی خواهیم داشت که شماره سطر آن می‌تواند معرف زمان باشد و ستون نماد شماره نورون. شکل شماره (۱) اما مشکلی که برای این شبیه سازی رخ خواهد داد آن است که در صورت افزایش تعداد نورون‌ها و زمان شبیه سازی با یک ابر آرایه روبرو خواهیم شد که امکان دارد در ذخیره سازی آن دچار مشکل شویم. به همین خاطر در شبیه سازی انجام شده تنها مجموع تیزه زدن‌ها را ذخیره کردیم تا یک آرایه یک ستونه داشته باشیم و در ذخیره‌سازی به مشکل نخوریم.

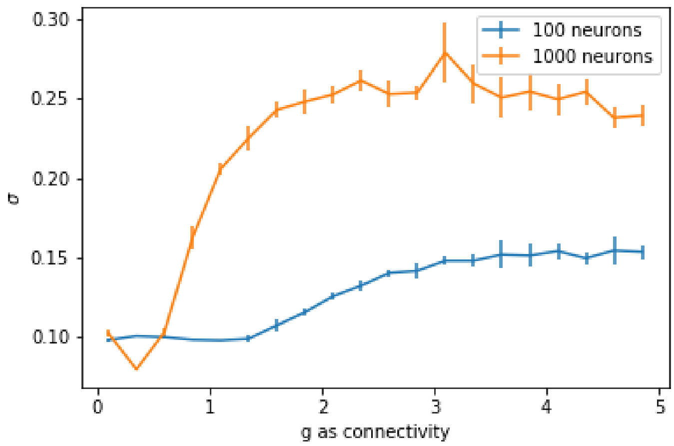
۳.۱ نتایج

در این قسمت به خروجی شبیه سازی می‌پردازیم. این شبیه سازی برای ۱۰۰۰ ثانیه اجرا شده است که در آن هر گام زمانی برابر ۰.۰۱ ثانیه گرفته شده است. بقیه پارامترها هم کاملا از صورت مقاله برداشته شده اند. کد شبیه‌سازی در پوشه مسئله همگامی برای مدل انباشت‌وشلیک قابل مشاهده است.

مهم‌ترین شاخصه ما برای ردگیری همگامی، انحراف معیار E است که با زیگما σ نمایش می‌دهیم. جهش به وجود آمده در شکل (۲) به این معنی است که سامانه از حالت ناهمگامی به همگامی تغییر فاز داده است. نکته قابل توجه آن است که با افزایش تعداد نورون‌ها این دو فاز از یک دیگر متمایزتر می‌شوند و فاصله‌ی رفتاری آن‌ها بیشتر می‌شود.



شکل (۱) ثبت لحظه‌ای تیزه زدن هر نورون به صورت مجزا ــ در این نمودار ضریب تاثیر هر نورون روی همسایه‌هایش $g = 5$ بوده است. چنان که انتظار می‌رفت شاهد هم‌گامی هستیم.



شکل (۲) تغییر فاز از ناهم‌گامی به هم‌گامی برای دو جمعیت متفاوت

۲ شبیه‌سازی مدل چرخنده

در این مدل به جای آن که برای شبکه خود از مدل انباشت_شلیک استفاده کنیم از مدل چرخنده استفاده می‌کنیم. این مدل نسبت به مدل قبلی شامل ویژگی‌های مثبتی است. یکی از ویژگی‌های خوب آن این است که برای قسمت شلیک یک منحنی پیوسته ارائه می‌کند و دیگر پتانسیل آن نیازی به بازنشانی لحظه‌ای ندارد. برای توصیف فاز هر نورون از معادلات زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_i = I_i - cos(\theta_i) - gE \\ \dot{E} = M - \alpha E \\ \dot{M} = -\alpha M + \frac{\alpha^2}{N} \sum_{n|tn<t} \delta(t - t_n - t_d) \end{cases} \tag{۹}$$

برای تشخیص هم‌گامی ما شاخصه نظمی دیگری را نیز مطابق زیر تعریف می کنیم:

$$s = \langle \left[\frac{1}{N_a} \sum_{i_a} sin(\theta_{i_a}) \right]^2 \rangle_t \tag{۱۰}$$

میانگین‌گیری بالا روی ۱۰۰۰ گام آخر زمانی انجام می‌شود. این فاصله زمانی باید حتما بزرگ‌تر از گام‌های زمانی تحول ریزمقیاس آن باشد. همچنین برای این متوسط‌گیری نورون‌هایی را مدنظر می‌گیریم که در منطقه ی تیزه زدن قرار گرفته‌اند. منطقه تیزه زدن یعنی تنها در سمت چپ دایره مثلثاتی قرار دارند.

۱.۲ شبیه‌سازی

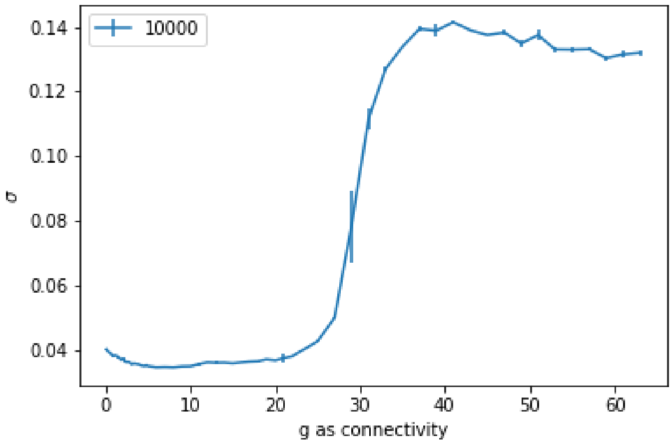
حال می‌خواهیم که شبکه کامل شامل این نورون‌ها را مدلسازی کنیم تا مجددا بپرسیم آیا تغییر در قدرت اتصال g می‌تواند باعث شود تا تغییر فاز از ناهم‌گامی به هم‌گامی رخ دهد؟ برای مشاهده دفترچه شبیه‌سازی به آدرس مسئله همگامی برای مدل چرخنده مراجعه کنید.

۱.۱.۲ مشکل: به پیمانه گرفتن

در معادلات برای ما مهم است که تنها روابط هندسی فاز هر نورون را بدانیم. حال برای آن که هم‌فازها را تشخیص دهیم می‌توانیم فازهای خارج از دایره‌ی صفر تا 2π را به آن مجددا بازرسانیم. اما جالب است اگر این تغییر را درمیانه حلقه شبیه‌سازی انجام دهیم آمار فاز نورون‌ها نیز تغییر می‌کند. در حالتی که $g = 0$ است انتظار داریم تا همگی در فازهای متفاوتی به صورت یکنواخت توزیع شده باشند اما با به پیمانه زدن این اتفاق نمی‌افتد و حول صفر و 2π انباشتگی ملاحظه می‌شود.

۲.۱.۲ مشکل: یک تیزه را چند بار می‌شماریم؟

برای آن که علامت بزنیم که کدام نورون تیزه زده است، می‌توانیم یک بازه‌ی خاص را حول π در نظر بگیریم و هر گاه فاز نورون از آن بازه رد شد به عنوان تیزه آن را حساب کنیم. اما یک مشکل فرآیندی



شکل (۳)   پهنای جریان یک سامانه چرخنده با ده هزار نورون

در شبیه‌سازی به وجود می‌آید که چگونه متوجه شویم که فاز نورونی از روی آن بازه نپریده است. هر گام زمانی ما می‌تواند لحظاتی گسسته را از حالت نورون رصد کند. پس این مشکل محتمل است و باید برای فرآیند شماره تیزه چاره‌ای بیندیشیم.

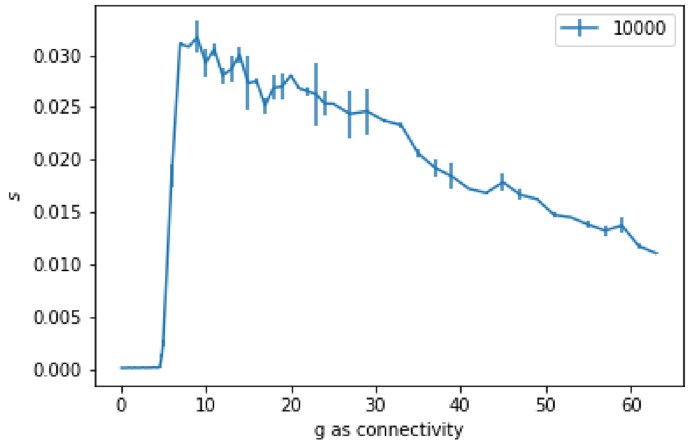
راه حل: نورون‌های ما مانند دونده‌هایی به دور میدان مثلثاتی می‌دوند. ما نقطه‌ی فاز π را به عنوان علامت برای این دونده‌ها قرار دادیم. هر زمان که دونده‌ای از علامت خود گذشت یک تیزه برای او درنظرمی‌گیریم و بلافاصله او را به فاز $-\pi$ باز می‌گردانیم.

۲.۲   نتایج

پس از برطرف کردن مشکلات ذکر شده، شبیه سازی اجرا شد. مرتبه‌ی اجرای این الگورتیم خطی است. برای یک شبکه شامل ۱۰۰۰ نورون و برای ۱۰۰۰۰ گام شبیه‌سازی زمانی در حدود ۴ ثانیه به طول انجامید.

۱.۲.۲   در جستجوی تغییرفاز

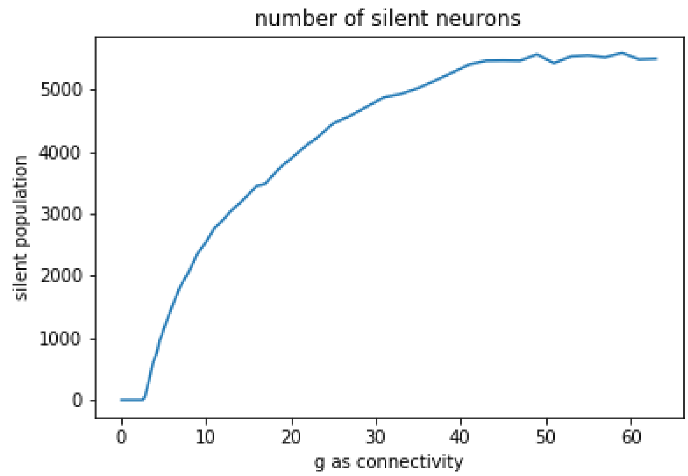
پس از رصد کردن تغییرات رفتار سیستم بر حسب قدرت مهار نورون‌ها، تغییر فاز مانند مدل قبلی مشاهده شد اما مکان تغییر فاز تغییر کرد و حول $g = 40$ قرارگرفت. این تغییر فاز در دو شکل ۳ و ۴ قابل مشاهده‌است. قابل توجه است که شکل دوم تغییرفاز را به گونه‌ای متفاوت نشان می‌دهد. این امر می‌تواند حاصل از پدیده‌ی نورون‌های خاموش باشد که در بخش بعد بررسی می‌کنیم.



شکل (۴) پارامتر نظم تعریف شده در رابطه ۱۰ برای مدل چرخنده

۲.۲.۲ نورون‌های خاموش

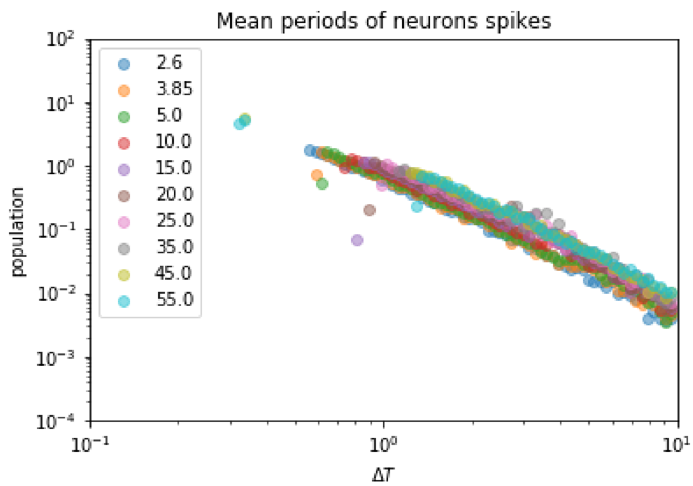
در حین شبیه‌سازی متوجه شدیم که در ناحیه‌ای که به فاز هم‌گامی در حال گذار هستیم؛ جمعیتی خاموش از نورون‌ها در حال گسترش هستند شکل ۵. هر چه قدر قدرت مهار نورون‌ها را زیاد می‌کنیم؛ این تعداد بیشتر می‌شود. همچنین شایان ذکر است که پس از تغییر فاز این مقدار به اشباع می‌رسد و تعداد نورون‌های فعال به ثبات می‌رسند.



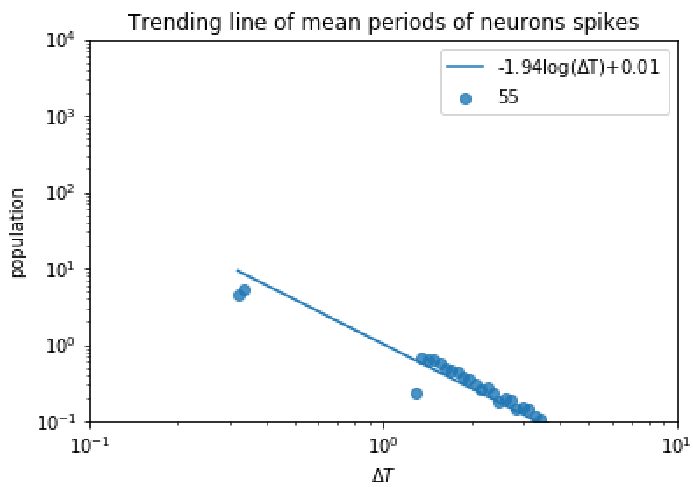
شکل (۵) تعداد نورون‌های خاموش برحسب قدرت مهار نورون‌ها

۳.۲.۲ فاصله زمانی بین تیزه‌ها

حال که دیدیم برخی نورون‌ها همواره خاموش می‌مانند و یا به عبارتی دوره‌ی تیزه زدن آن‌ها بینهایت است؛ خوب است که دوره‌ی تیزه زدن‌های نورون‌های دیگر را نیز بررسی کنیم. شکل ۶ این شکل نمایانگر آن است که توزیع دوره‌ها به توزیع بی‌توانی و رفتار بی‌مقیاس نزدیک است.
با این مشاهده، کنجکاو می‌شویم تا نمای بحرانی را برای آن حساب کنیم. در شکل ۷ با گذراندن یک خط بر داده‌های بدست آمده از شبکه‌ای با قدرت مهار ۵۵ را می‌بینیم.



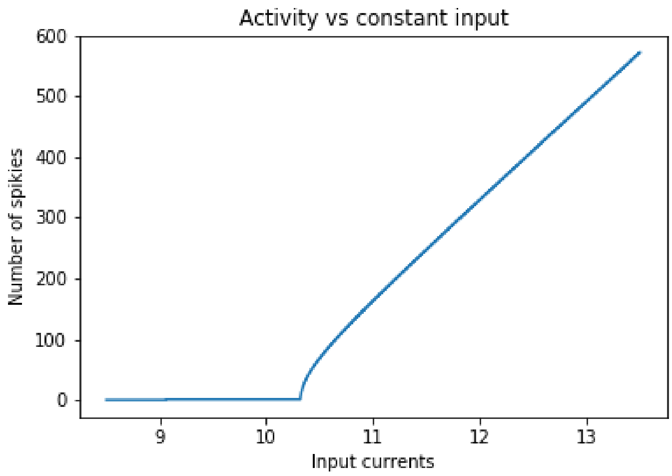
شکل (۶) فاصله‌ی زمانی بین تیزه زدن‌ها



شکل (۷) محاسبه‌ی نمای بحرانی

۴.۲.۲ فعالیت شبکه

همان طور که دیدیم تعدادی از نورون‌ها در شبکه به حالت خاموش درمی‌آیند. قابل حدس است که اگر جمعیتی خاموش در شبکه داشته باشیم؛ احتمالا آنهایی هستند که جریان تصادفی اولیه آن‌ها از بقیه کمتر است. برای تحقیق این حدس تعداد تیزه‌های نورون‌های شبکه را بر حسب جریان تصادفی اولیه آنها مرتب کردیم. شکل ۸ لازم به ذکر است که این رفتار در فاز هم‌گام قابل مشاهده است. در فاز ناهم‌گام تمام نورون‌ها که از هم تاثیر کمتری می‌پذیرند؛ فعال هستند.



شکل (۸) تعداد تیزه بر حسب جریان تصادفی

تعداد تیزه‌های کل شبکه رابطه‌ی مستقیمی با جریان خارجی جاری در شبکه دارد. می‌توانیم با محاسبات تحلیلی نیز به شکل بدست آمده از شبیه‌سازی عددی نزدیک شویم:

$$\begin{cases} I_{in} &= -g\int_{a_{min}}^{a_{max}} p(a)f(a+I_{in})da \\ f(a) &= \frac{\sqrt{a^2-1}}{2\pi} \end{cases} \tag{۱۱}$$

در رابطه ۱۱ ، $f(a)$ تابع فعالیت (تعداد تیزه بر ثانیه) تک نورون بر حسب جریان کل ورودی آن است. همچنین I_{in} تمام جریان خارجی جاری در شبکه است.
حل این رابطه کمی دشوار است زیرا جریان کل را بر حسب خودش محاسبه کرده است. اما از آنجایی که در انتگرال‌ده تنها یک جابجایی ثابت رخداده است؛ صورت کلی پاسخ انتگرال تغییر نمی‌کند و به صورت زیر بدست خواهد آمد.

$$I_{in} = \frac{-g}{2}(-a\sqrt{-1+a^2} + log(a+\sqrt{-1+a^2}))\Big|_{a_{min}+I_{in}}^{a_{max}+I_{in}} \tag{۱۲}$$

مراجع

[1] Luccioli, Stefano and Politi, Antonio. Irregular collective behavior of heterogeneous neural networks. *Phys. Rev. Lett.*, 105:158104, Oct 2010. 1