مطالعه همگامی در شبکه‌های عصبی مهاری

محسن مهرانی - استاد راهنما: دکتر سامان مقیمی عراقی

فهرست مطالب

۱ سخن نخست ۵
۱.۱ مقدمه ۵

۲ شبکه انباشت و شلیک ۷
۱.۰.۲ آهنگ تیزه زدن ۷
۲.۰.۲ نشانگر تشخیص فاز هم‌گامی ۸
۳.۰.۲ مسائل پیشروی پیاده سازی شبیه سازی ۸
۴.۰.۲ نتایج ۹
۵.۰.۲ پهن‌کردن قالی صفحه‌ی فاز ۱۲

۳ تصویرسازی سامانه‌ها ۱۳

۴ شبکه‌ی نورون‌های چرخنده ۱۵
۱.۰.۴ آهنگ تیزه زدن ۱۵
۲.۰.۴ نشانگر توسعه یافته‌ی تشخیص همگامی ۱۶
۳.۰.۴ شبیه‌سازی ۱۶
۴.۰.۴ نتایج ۱۶
۵.۰.۴ پهن‌کردن قالی صفحه‌ی فاز ۱۹

۵ شبکه نورون‌های ساده ۲۱
۱.۰.۵ شبیه‌سازی ۲۱
۲.۰.۵ نتایج ۲۲

۶ تلاش برای توصیف ۲۳
۱.۰.۶ حل معادله‌ی شبکه‌ی ساده ۲۳
۲.۰.۶ بازی از نو(سامانه‌ی تک‌جریان) ۳۵

آ نمونه‌گیری صفحه فاز ۴۵
آ.۱ انباشت‌وشلیک ۴۵
آ.۲ چرخنده ۴۶
آ.۳ ساده ۴۶

فصل ۱

سخن نخست

مطالعه فعالیت شبکه‌های عصبی برای تحقیق و بررسی کارکردهای مغز اهمیت زیادی دارد. همه بر این باوریم که مغز محمل اندیشه و تفکر است. ما کنجکاو هستیم که چگونه همکاری بین نورون‌های آن باعث می‌شود تا حافظه، کشف و پردازش صورت گیرد. هر کدام از نورون‌های مغز می‌تواند در حالت فعال [روشن] یا غیرفعال [خاموش] قرار گیرد. هم اکنون شواهدی وجود دارد که کارکردهایی طلایی یاد شده مغز در زمان‌هایی رخ می‌دهند که الگوی خاموش و روشن شدن نورون‌های آن باهم «**هم‌گامی**» دارند. هم‌گامی به این معناست که جمعیت بزرگی از نورون‌ها هم باهم خاموش و روشن می‌شوند و یک الگوی تکرار شونده‌ای را دنبال می‌کنند. تو گویی که باهم هم‌آهنگ یا هم‌گام شده‌اند.

بی‌تردید دستیابی به تمام جزییات مغز برای ما میسّر نیست و به آن به عنوان یک «**جعبه‌ی سیاه**» نگاه می‌کنیم که مدت‌هاست به دنبال ارائه مدلی هستیم که رابطه‌ی بین ورودی‌ها و خروجی‌های ثبت شده را بازتولید کند. کاری که در این پژوهش انجام خواهیم داد تلاشی است برای پیشنهاد دادن یک مدل برای این جعبه‌ی سیاه که رفتار نسبتا مشابهی را میان ورودی و خروجی‌های این جعبه سیاه و یا مغز ایجاد می‌کند.

۱.۱ مقدمه

مدل‌های زیادی برای شبکه‌های عصبی ارائه شده است که توانایی تولید رفتار هم‌گام شدن نورون‌ها را در آن‌ها می‌توانیم جستجو کنیم. یکی از این مدل‌ها که در تمام فصول شبیه‌سازی از آغاز تا کنون از آن بهره برده شده است؛ مدل انباشت و شلیک است[۱]. در این جستار ابتدا با مدل انباشت و شلیک شروع می‌کنیم و سپس مدلی توسعه یافته که آن را «**چرخنده**» صدا خواهیم کرد؛ می‌پردازیم.
متن اصلی این جستار شامل معرفی این مدل‌ها و پویایی آن‌ها در زمان و نتایج ضبط شده از نشانگرهایی است که برای آشکارسازی هم‌گامی تعبیه شده‌اند.

فصل ۲

شبکه انباشت و شلیک

در این نوشتار [۱] نویسندگان تلاش می‌کنند تا هم‌گامی را برای شبکه‌ی نورون‌های مهاری رصد کنند. این نورون‌ها به گونه‌ای باهم مرتبط هستند که تیزه زدن هر نورون منجر به مهار پتانسیل دیگر نورون‌ها می‌شود. تک‌تک نورون‌های این شبکه از تحول انباشت و شلیک تبعیت می‌کند. معادله تحول اختلاف پتانسیل هر کدام از نورون‌ها با محیط بیرونش از رابطه زیر داده می‌شود:

$$\dot{v}_i = a_i - v_i - \frac{g}{N} \sum_{n|t_n<t} S_{i,l(n)} \delta(t - t_n - t_d) \tag{۱.۲}$$

- g: ضریب اتصال هر جفت نورون. از آن‌جا که همه‌ی نورون‌ها در این مطالعه مهاری هستند؛ باید این کمیت مثبت انتخاب شود تا تاثیر جمله‌ی پایانی در نهایت منفی باشد.
- S: ماتریس همسایگی. این کمیت نشان می‌دهد که آیا دو نورون به هم متصل و تاثیرگذار هستند یا خیر.
- t_d: زمان تاخیر میان زدن تیزه هر نورون و تاثیر آن روی نورون‌های دیگر.
- a_i: یک پتانسیل تحریکی و خارجی. در این مطالعه این مقدار برای هر نورون به صورت تصادفی انتخاب می‌شود و تا پایان شبیه‌سازی ثابت باقی می‌ماند.
- N: تعداد نورون‌های در شبکه

۱.۰.۲ آهنگ تیزه زدن

پیش از آن که به شبیه‌سازی یک شبکه از نورون‌ها بپردازیم؛ خوب است تا یک نورون تنها را مطالعه کنیم. یک نورون تنها که پویایی از جنس مدل انباشت‌وشلیک دارد؛ دوره تناوب تیزه‌زدن آن از رابطه‌ی زیر قابل

محاسبه است .

$$\dot{v_i} = I - v_i \rightarrow \frac{dv_i}{I - v_i} = dt \tag{۲.۲}$$

$$\rightarrow T = ln(\frac{I}{I - ۱}) \tag{۳.۲}$$

این رابطه نشان می‌دهد که بسامد تیزه‌زدن یک نورون با افزایش مجموع جریان‌های ورودی آن به صورت لگاریتمی افزایش می‌یابد.

۲.۰.۲ نشانگر تشخیص فاز هم‌گامی

برای آن که متوجه شویم که شبکه در حالت هم‌گامی یا ناهم‌گامی است نیاز است تا آشکارسازی را تعبیه کنیم که باتوجه به رفتار سامانه، هم‌گامی یا ناهم‌گامی را با عقربه‌ی خود نشان دهد. برای این منظور ابتدا مفهوم میدان (E) را تعریف می‌کنیم که بیانگر شدت فعالیت نورون‌های شبکه است. انحراف از معیار این کمیت در طول زمان، پارامتر مناسبی است که به کمک آن هم‌گامی را تشخیص دهیم.

$$\ddot{E} + ۲\alpha\dot{E} + \alpha^۲ E = \frac{\alpha^۲}{N} \sum_{n|tn<t} \delta(t - t_n - t_d) \tag{۴.۲}$$

$$\sigma^۲ = \langle E^۲ \rangle_t - \langle E \rangle_t^۲ \tag{۵.۲}$$

*دقت کنیم که شدت میدان با تعداد تیزه زدن‌ها رفتاری ملایم دارد. به عنوان مثال اگر تیزه‌ها متوقف شوند؛ شدت میدان پس از لحظاتی چند [متناسب با α] صفر می‌شود.

در طول زمان میدان E و σ را رصد می‌کنیم. برای دریافت شهودی عملکرد مناسب این پارامتر نظم، فرض کنید که شبکه در حالتی است که جمعیت بزرگی از آن در حال خاموش و روشن شدن هم‌گام است. پس مشاهده خواهم کرد که میدان که شدت فعالیت نورون‌ها را نشان می‌دهد در حال ضربان رفت و برگشتی است. این افت‌وخیز با تقویت هم‌گامی دامنه‌ی بزرگتر پیدا می‌کند به طوری که انحراف آن از میانگین پهنای قابل توجهی کسب می‌کند. از این رو انحراف معیار میدان، کمیت مناسبی است که میزان هم‌گامی را گزارش کند.

۳.۰.۲ مسائل پیشروی پیاده سازی شبیه سازی

تابع بی‌کران دلتا

یکی از مشکلات شبیه سازی معادلات دیفرانسیلی حضور تابع دلتای دیراک است. این تابع در نقطه صفر خود دارای مقداری بینهایت است. معرفی چنین تابعی به رایانه کاری دشوار است و همانندی محاساتی

ندارد. حال برای برطرف کردن این مشکل چه باید کرد؟ نکته در این جا نهفته است که چون ما برای حل عددی معادله دیفرانسیلی خود از زمان پیوسته استفاده نمی‌کنیم و از گام‌هایی با طول مثبت Δt استفاده می‌کنیم این مشکل به صورت زیر مدیریت می‌شود.

$$v_i(t+\Delta t) = v_i(t) + \int_t^{t+\Delta t} \dot{v}_i dt \tag{۶.۲}$$

$$= v_i(t) + \int_t^{t+\Delta t} \left[a_i - v_i - \frac{g}{N} \sum_{n|t_n<t} S_{i,l(n)} \delta(t - t_n - t_d) \right] dt \tag{۷.۲}$$

$$\approx v_i(t) + [a_i - v_i(t)]\,\Delta t - \frac{g}{N} \sum_{n|t_n<t} S_{i,l(n)} \int_t^{t+\Delta t} \delta(t - t_n - t_d) dt \tag{۸.۲}$$

$$\approx v_i(t) + [a_i - v_i(t)]\,\Delta t - \frac{g}{N} \sum_{n|t_n<t} S_{i,l(n)} H(t + \Delta t - t_n - t_d) \tag{۹.۲}$$

حالا تابع پله کاملا برای ما آشنا و قابل مدلسازی است. دقت شود که تابع پله یاد شده فقط در محدوده $t, t+\Delta t$ زندگی می‌کند و پس از آن اعتبار ندارد. معادله ۹.۲ می‌گوید که باید برای تحول پتانسیل نورون iام بررسی کنیم که آیا نورونی در همسایگی آن تیزه زده است یا نه. اگر چنان باشد؛ یک واحد به جمع تیزه زدگان اضافه کنیم.

ثبت تاریخ تیزه زدن‌ها

برای محاسبه تحول پتانسیل در رابطه ۹.۲ چنان که توضیح داده شد نیاز به دانستن تاریخ تیزه زدن‌ها داریم. اگر بخواهیم برای تمامی نورون‌ها در هر گام زمانی تیزه‌زدن آن را به صورت مجزا ثبت کنیم؛یک آرایه مربعی خواهیم داشت که شماره سطر آن می‌تواند معرف زمان باشد و ستون نماد شماره نورون - شکل شماره (۱.۲آ).

اما مشکلی که برای این شبیه سازی رخ خواهد داد. در صورت افزایش تعداد نورون‌ها و زمان شبیه سازی با یک ابر آرایه روبرو خواهیم شد که امکان دارد در ذخیره سازی آن دچار مشکل شویم. به همین خاطر در شبیه سازی انجام شده تنها مجموع تیزه زدن‌ها را ذخیره کردیم تا یک آرایه یک ستونه داشته باشیم و در ذخیره‌سازی به مشکل نخوریم.

۴.۰.۲ نتایج

اندازه‌ی پارامترهایی که برای این شبیه‌سازی انتخاب کردیم؛ کاملا از صورت مقاله یاد شده برداشته شده و به قرار زیر است.

* $\alpha = ۲۰\ s^{-۱}$
* جریان‌های تصادفی خارجی نورون‌ها از اعضای بازه‌ی (۱/۲, ۲/۸) انتخاب می‌شوند.
* $N = ۱۰۰۰۰$
* $t_d = ۰/۱\ s$

این شبیه سازی برای ۱۰۰۰ ثانیه اجرا شده است که در آن هر گام زمانی برابر ۰/۰۱ ثانیه گرفته شده است. کد شبیه‌سازی در پوشه مسئله همگامی برای مدل انباشت‌وشلیک قابل مشاهده است.

انحراف از معیار میدان

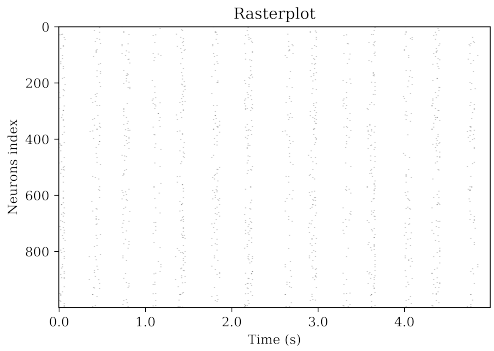
مهم‌ترین شاخصه ما برای ردگیری همگامی، انحراف معیار میدان E است که با زیگما σ نمایش می‌دهیم. جهش به وجود آمده در شکل (۱.۲ب) به این معنی است که سامانه از حالت ناهم‌گامی به هم‌گامی تغییر فاز داده است.

نورون‌های خاموش

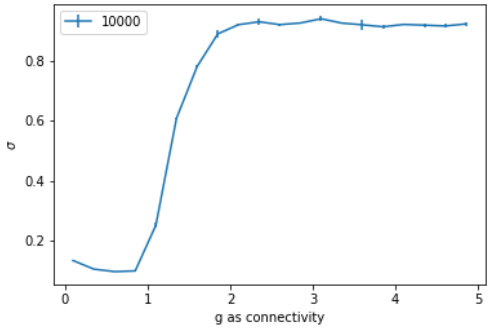
بی‌تردید میدان داخلی نورون‌ها کاملا تابعی است از آمارتیزه‌های درون سامانه. نورون‌هایی که گاهی برای تیزه زدن به پیش می‌روند و گاه به علت حضور میدان داخلی مهار به عقب برمی‌گردند. خوب است بپرسیم که برآیند این رفت و برگشت برای هر نورون چگونه است. آیا این رفت و برگشت منجر به رسیدن به آستانه‌ی تیزه زدن می‌شود و یا نورون در برآیند اصلا پیشروی نمی‌کند و هیچگاه به آستانه نمی‌رسد و خاموش می‌ماند. در شکل ۱.۲ج شمار نورون‌هایی که هیچگاه در سامانه تیزه نمی‌زنند را آورده‌ایم و این که چگونه با با افزایش ضریب تاثیر مهاری میدان این آمار رشد می‌کند.
این مشاهده نشان می‌دهد که در فاز هم‌گام، تقریبا ۲۵ درصد نورون‌ها خاموش هستند و نقشی در برقراری جریان داخلی ندارند. قابل حدس است که نورون‌هایی خاموش هستند که جریان‌های تصادفی خارجی پایین دست را داشته‌اند. به این معنی که اگر بازه‌ی جریان تصادفی را تنگ‌تر می‌گرفتیم [مثلا از۱/۶] شروع می‌کردیم؛ سامانه در فاز هم‌گام تفاوت رفتاری نمی‌داشت.
همچنین جالب است که تغییر فاز مشاهده شده در تعداد نورون‌های خاموش - شکل ۱.۲ج ـ در حالتی در همسایگی و متمایز از تغییر فاز شکل ۱.۲ب نشان می‌دهد.

توزیع تناوب زمانی تیزه‌ها

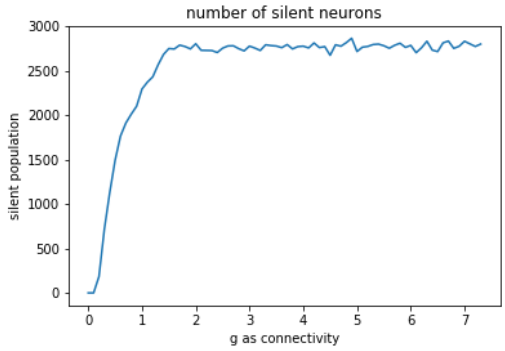
شبکه‌ی ما متشکل از نورون‌هایی است که مدام در حال تیزه زدن و فعال نگه‌داشتن شبکه هستند. برخی با بسامد بیشتری تیزه می‌زنند و برخی آهسته‌تر. اگر کنجکاو باشیم که جمعیت کل نورون‌های ما چگونه میان دسته‌های مختلف با تناوب‌های متفاوت توزیع شده است؛ لازم است تا توزیع فراوانی آن‌ها را یکجا رسم کنیم - شکل ۱.۲د.



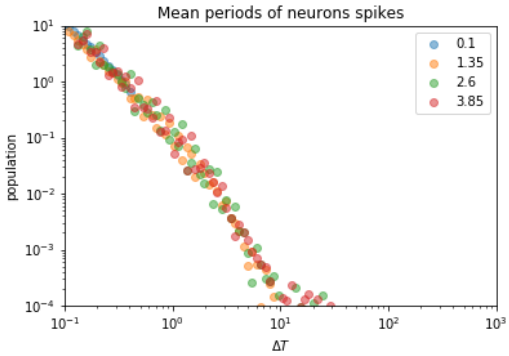
(آ) ثبت لحظه‌ای تیزه زدن هر نورون به صورت مجزا – در این نمودار ضریب تاثیر هر نورون روی همسایه‌هایش $g = ۵$ بوده است. چنان که انتظار می‌رفت شاهد هم‌گامی هستیم.



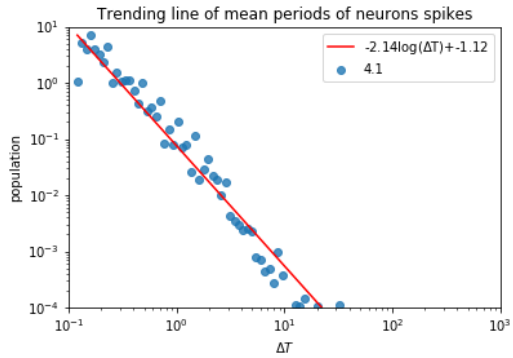
(ب) تغییر فاز از ناهم‌گامی به هم‌گامی برای ۱۰۰۰ نورون



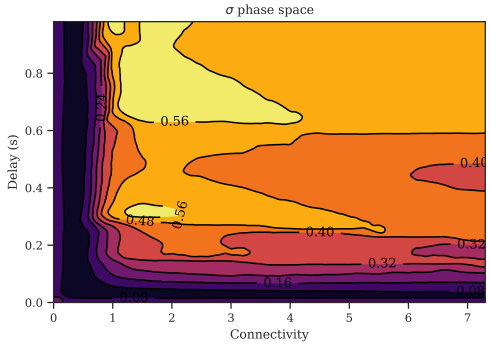
(ج) آمار نورون‌های خاموش درون سامانه



(د) توزیع بسامدی شبکه‌های ۱۰۰۰ نورونی که هر کدام قدرت اتصال متفاوتی دارند.



(ه) محاسبه‌ی نمای توزیع توانی فاصله زمانی بین تیزه‌ها



(و) صفحه‌ی فاز مربوط به سامانه‌ی نورون‌های انباشت‌وشلیک: پیوست آ.۱

همان طور که می‌بینید به ظاهر این توزیع رفتاری توانی دارد و اگر کنجکاو باشیم می‌توانیم شیب این نمودار تمام لگاریتمی آن را جهت محاسبه‌ی نمای توزیع بدست آوریم - شکل ۱.۲ه.

۵.۰.۲ پهن‌کردن قالی صفحه‌ی فاز

در قسمت‌های پیشین تنها به مطالعه‌ی تاثیر ضریب اتصال در تغییرفاز پرداختیم و زمان تاخیر را تنها در $t_d = ۰/۱s$ خلاصه کردیم. حال اجازه دهید تا به تاخیر نیز اجازه‌ی تغییر دهیم. در ادامه‌ی این قسمت از نوشتارمان، به فرش‌کردن صفحه‌ی فاز خود خواهیم پرداخت. امید است که چهره‌ی تمام نمای سامانه بر صورت این قالی نقش بندد.

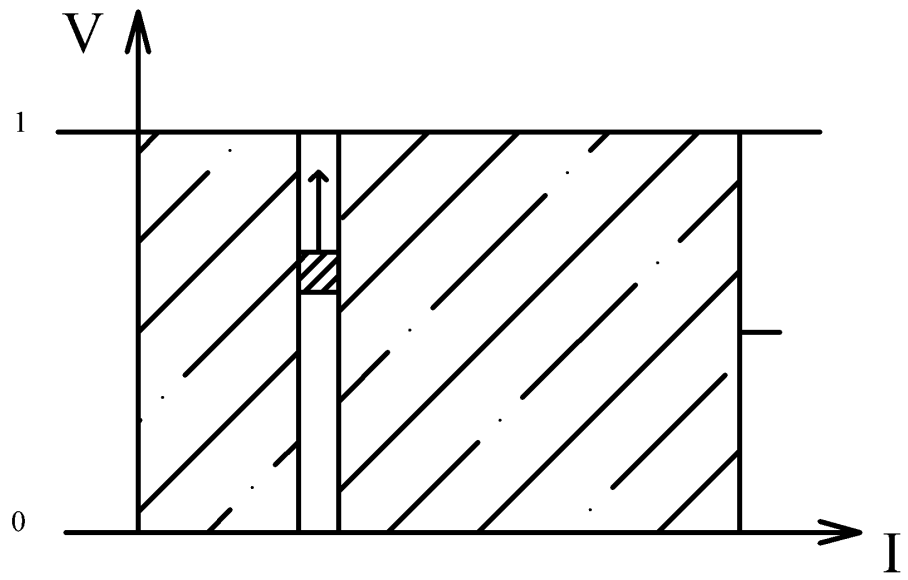
قالی انحراف از معیار میدان

در شکل ؟؟ مشاهده می‌کنیم که شدت هم‌گامی در هر کدام از هنگردهای سامانه چقدر است. بنظر می‌رسد که با افزایش زمان تاخیر و ضریب تاثیر همگامی قدرت پیدا می‌کند و هر دو در ظهور این رفتار شریک هستند. اگر چه تاخیر در جابجایی ضریب‌تاثیر بحرانی تغییری ایجاد نکرده است اما هم‌گامی را قدرت می‌بخشد.

فصل ۳

تصویرسازی سامانه‌ها

از آنچه که اشکال صفحه‌ی قبل در مورد سامانه روایت می‌کنند؛ می‌توان تنها «حدس» زد که در پس پرده [جعبه سیاه] چه می‌گذرد. به همین دلیل برآن شدم تا روشی برای به تصویر کشیدن سامانه ابداع کنم تا از لحظه‌لحظه‌ی سامانه با خبر شوم. شکل ۱.۳



شکل (۱.۳) تصویر فضای فاز سامانه نورونی انباشت‌وشلیک

پویایی شکل ۱.۳ به ما نشان خواهد داد که چگونه سامانه در زمان متحول می‌شود. هر نقطه در این صفحه نمایانگر حالت یک نورون است. محور افقی نشان دهنده‌ی جریان ثابت خارجی است که به هر نورون در ابتدا متصل کرده‌ایم و محور عمودی نشان دهنده‌ی پتانسیل نورون است.

طبق توصیفی که از پویایی سامانه‌ی خود داریم؛ توقع داریم که نورون‌هایی که از آستانه عبور کردند؛ مجددا از محور صفر پیدا شوند.

فرصتی برای مدل‌های دیگر نورونی

در بخش قبل به بررسی ویژگی‌های مدل انباشت‌ـ‌شلیک پراختیم. اگر چه این مدل بسیار ساده توانست رفتارهای آشنایی را برای ما بازتولید کند اما شامل محدودیت‌هایی است. این محدودیت‌ها باعث می‌شود تا ما به سراغ مدل‌های نورونی دیگری مانند نورون‌های چرخنده برویم.

این مدل نسبت به مدل قبلی شامل ویژگی‌های مثبتی است. یکی از ویژگی‌های خوب آن این است که پس از بازنشانی فاز نورون تیزه زده، فاز آن به زاویه‌ای برده می‌شود که دارای خواص مثلثاتی مشابهی است. به این معنا که دیگر شاهد گسستگی در اندازه‌ی جملاتی که تحول نورون را توصیف می‌کنند؛ نیستیم.

فصل ۴

شبکه‌ی نورون‌های چرخنده

در این مدل به جای آن که برای شبکه خود از مدل انباشت‌ـ‌شلیک استفاده کنیم از مدل چرخنده استفاده می‌کنیم. در این مدل نورون‌های ما مانند دونده‌هایی به دور میدان مثلثاتی می‌دوند. ما نقطه‌ی فاز π را به عنوان علامت برای این دونده‌ها قرار دادیم. هر زمان که دونده‌ای از علامت خود گذشت یک تیزه برای او درنظرمی‌گیریم و بلافاصله او را به فاز $-\pi$ باز می‌گردانیم.

برای توصیف فاز هر نورون از معادلات زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_i = I_i - cos(\theta_i) - gE, \quad -۵\pi/۲ \leq \theta_i \leq \pi \\ \dot{E} = M - \alpha E \\ \dot{M} = -\alpha M + \frac{\alpha^۲}{N} \sum_{n|tn<t} \delta(t - t_n - t_d) \end{cases} \tag{۱.۴}$$

- θ_i: مشخص کننده‌ی فاز هر نورون. این فاز میان دو لبه در حال حیات است. کوچکترین کران بالای آن همان حالت آستانه در π است و بزرگترین کران پایین آن نگه‌دارنده‌ای است که از ریزش نورون‌ها جلوگیری می‌کند.
- E: میدانی است که شدت فعالیت شبکه را نشان می‌دهد.
- M: یک پارامتر فرعی که در حل معادله دیفرانسیل مرتبه دوم به دو معادله‌ی تحول مرتبه اول ما را یاری کرده است.

۱.۰.۴ آهنگ تیزه زدن

برای نورونی تنها که پویایی از جنس چرخنده دارد؛ دوره‌ی تناوب تیزه زدن آن بر حسب مجموع جریان ورودی رفتاری مطابق زیر دارد [۲]:

$$T = \frac{۲\pi}{\sqrt{I^۲ - ۱}} \tag{۲.۴}$$

این به این معناست که مدل چرخنده و انباشت‌وشلیک اگر چه هر دو با افزایش جریان، بسامد تیزه زدنشان افزایش می‌یابد اما رفتار تغییر آن به دو گونه‌ی متفاوت صورت می‌پذیرد. این نکته‌ی مهمی است که در هنگام مقایسه‌ی دو مدل باید به خاطر داشته باشیم.

۲.۰.۴ نشانگر توسعه یافته‌ی تشخیص همگامی

برای تشخیص هم‌گامی از یک پارامتر دیگری که در این مقاله [۲] توسط نویسندگان ابداع شده‌است؛ بهره می‌بریم.

$$s = \langle [\frac{۱}{N_a} \sum_{i_a} sin(\theta_{i_a})]^۲ \rangle_t \tag{۳.۴}$$

میانگین‌گیری بالا روی ۱۰۰۰ گام آخر زمانی انجام می‌شود. این فاصله زمانی باید حتما بزرگ‌تر از گام‌های زمانی تحول ریزمقیاس آن باشد. همچنین برای این متوسط‌گیری نورون‌هایی را مدنظر می‌گیریم که در منطقه ی فعال قرار گرفته‌اند. منطقه‌ی فعال، سمت چپ دایره مثلثاتی است.

۳.۰.۴ شبیه‌سازی

ثوابت مسئله را به گونه‌ی زیر انتخاب می‌کنیم.

* $\alpha = ۲۰\ s^{-۱}$
* جریان‌های تصادفی خارجی نورون‌ها از اعضای بازه‌ی (۹/۵, ۱۳/۵) انتخاب می‌شوند. این بازه به گونه‌ای انتخاب شده است که نورون خاموشی در سامانه وجود نداشته باشد.
* $N = ۱۰۰۰۰$
* $t_d = ۰/۱\ s$

حال شبکه‌ی خود را به ازای قدرت اتصال‌های مختلف اجرا می‌کنیم تا مجددا تحقیق کنیم که چگونه تغییر در قدرت اتصال g می‌تواند باعث شود تا تغییر فاز از ناهم‌گامی به هم‌گامی رخ دهد. برای مشاهده‌ی دفترچه شبیه‌سازی به آدرس مسئله همگامی برای مدل چرخنده مراجعه کنید.

۴.۰.۴ نتایج

مرتبه‌ی اجرای این الگورتیم خطی است و برای یک شبکه شامل ۱۰۰۰ نورون و برای ۱۰۰۰۰ گام شبیه‌سازی زمانی در حدود ۴ ثانیه به طول می‌انجامد.

در جستجوی تغییرفاز

پس از رصد کردن تغییرات رفتار سیستم بر حسب قدرت مهار نورون‌ها، تغییر فاز مانند مدل قبلی مشاهده شد اما مکان تغییر فاز تغییر کرد و حول $g = ۳۰$ قرارگرفت. این تغییر فاز در دو شکل ۱.۴آ و ۱.۴ب قابل مشاهده‌است.

فاصله زمانی بین تیزه‌ها

حال که دیدیم برخی نورون‌ها همواره خاموش می‌مانند و یا به عبارتی دوره‌ی تیزه زدن آن‌ها بینهایت است؛ خوب است که دوره‌ی تیزه زدن‌های نورون‌های دیگر را نیز بررسی کنیم. شکل ۱.۴ج این شکل نمایان‌گر آن است که توزیع دوره‌ها به توزیع بی‌توانی و رفتار بی‌مقیاس نزدیک است.
همچنین توجه کنیم که با افزایش ضریب تاثیر رفتار توانی آن‌ها تغییر نمی‌کند. تنها تفاوت در چگونگی انتخاب جایگاه‌های روی خط است. هر چه ضریب تاثیر بزرگتر می‌شود نورون‌ها فاصله‌ی زمانی تیزه‌های بزرگتری را اتخاذ می‌کنند.
با این مشاهده، کنجکاو می‌شویم تا نمای بحرانی را برای آن حساب کنیم. در شکل ۱.۴د با گذراندن یک خط بر داده‌های بدست آمده از شبکه‌ای با قدرت مهار ۲۰ را می‌بینیم.

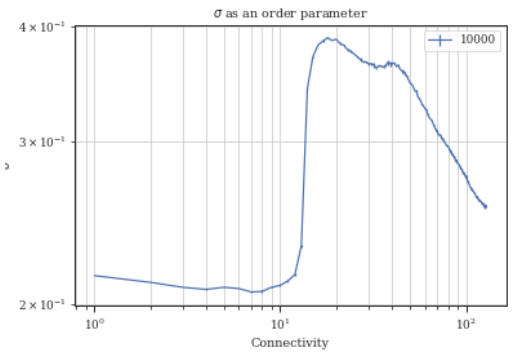
فعالیت شبکه

همان طور که دیدیم تعدادی از نورون‌ها در شبکه به حالت خاموش درمی‌آیند. قابل حدس است که اگر جمعیتی خاموش در شبکه داشته باشیم؛ احتمالا آنهایی هستند که جریان تصادفی اولیه آن‌ها از بقیه کمتر است. برای تحقیق این حدس لازم است تا تعداد تیزه‌های نورون‌های شبکه را بر حسب جریان تصادفی اولیه آنها مرتب کنیم. شکل ۲.۴ نشانگر سامانه‌ای از ده هزار نورون است که با قدرت $g = ۵۰$ روی هم تاثیر می‌گذارند. لازم به ذکر است که این رفتار در فاز هم‌گام قابل مشاهده است. در فاز ناهم‌گام تمام نورون‌ها که از هم تاثیر کمتری می‌پذیرند؛ فعال هستند.
تعداد تیزه‌های کل شبکه رابطه‌ی مستقیمی با جریان خارجی جاری در شبکه دارد. می‌توانیم با محاسبات تحلیلی نیز به شکل بدست آمده از شبیه‌سازی عددی نزدیک شویم:

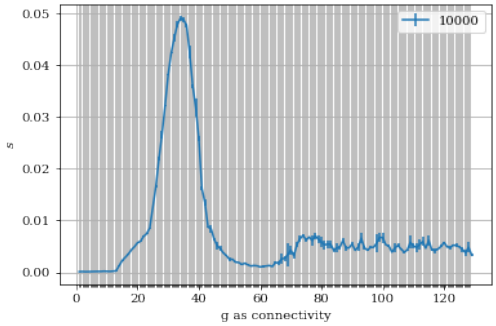
$$\begin{cases} I_{in} & = -g \int_{a_{min}}^{a_{max}} p(a) f(a + I_{in}) da \\ f(a) & = \frac{\sqrt{a^۲ - ۱}}{۲\pi} \end{cases} \tag{۴.۴}$$

در رابطه ۴.۴ ، $f(a)$ تابع فعالیت (تعداد تیزه بر ثانیه) تک نورون بر حسب جریان کل ورودی آن است. همچنین I_{in} تمام جریان خارجی جاری در شبکه است.
حل این رابطه کمی دشوار است زیرا جریان کل را بر حسب خودش محاسبه کرده است. اما از آنجایی که در انتگرال‌ده تنها یک جابجایی ثابت رخداده است؛ صورت کلی پاسخ انتگرال تغییر نمی‌کند و به صورت زیر بدست خواهد آمد.

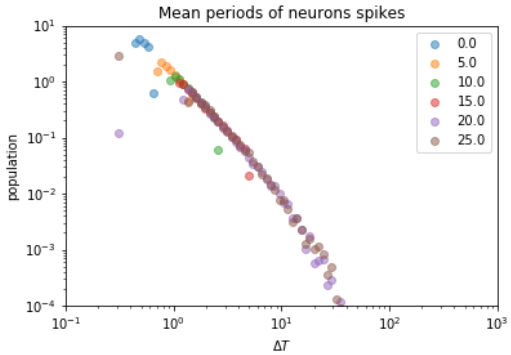
$$I_{in} = \frac{-g}{۲}(-a\sqrt{-۱ + a^۲} + log(a + \sqrt{-۱ + a^۲}))\Big|_{a_{min}+I_{in}}^{a_{max}+I_{in}} \tag{۵.۴}$$



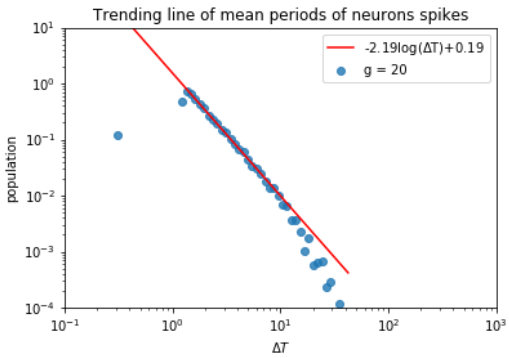
(آ) پهنای جریان یک سامانه چرخنده با ده هزار نورون



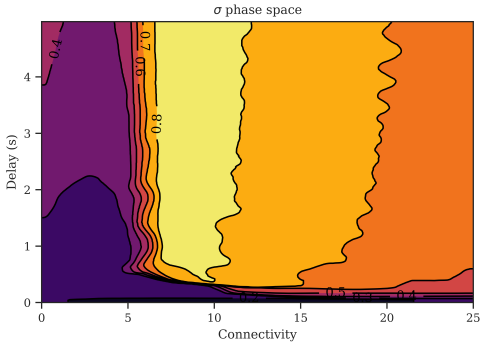
(ب) پارامتر نظم تعریف شده در رابطه ۳.۴ برای مدل چرخنده



(ج) فاصله‌ی زمانی بین تیزه زدن‌ها



(د) محاسبه‌ی نمای بحرانی



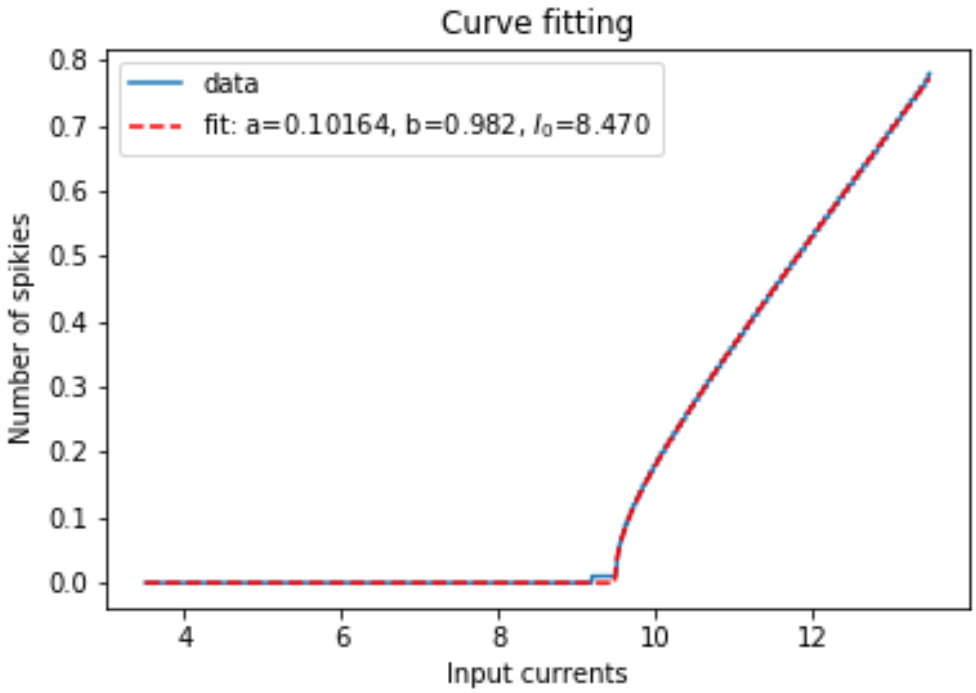
(ه) صفحه‌ی فاز مربوط به سامانه‌ی نورون‌های چرخنده: پیوست آ.۲

۵.۰.۴ پهن‌کردن قالی صفحه‌ی فاز

در قسمت‌های پیشین تنها به مطالعه‌ی تاثیر ضریب اتصال در تغییرفاز پرداختیم و زمان تاخیر را تنها در $t_d = ۰/۱s$ خلاصه کردیم. حال اجازه دهید تا به تاخیر نیز اجازه‌ی تغییر دهیم. در ادامه‌ی این قسمت از نوشتارمان، به فرش‌کردن صفحه‌ی فاز خود خواهیم پرداخت. امید است که چهره‌ی تمام نمای سامانه بر صورت این قالی نقش بندد.

قالی انحراف از معیار میدان

در شکل ۵.۱.۴ مشاهده می‌کنیم که شدت هم‌گامی در هر کدام از هنگردهای سامانه چقدر است. بنظر می‌رسد که با افزایش زمان تاخیر و ضریب تاثیر همگامی قدرت پیدا می‌کند و هر دو در ظهور این رفتار شریک هستند.



شکل (۲.۴) تعداد تیزه بر حسب جریان تصادفی برای سامانه‌ای با ده هزار نورون و ضریب تاثیر $g = ۵۰$

فصل ۵

شبکه نورون‌های ساده

حل مسئله‌ی مدل چرخنده بسیار دشوار است و تا تاریخ نوشتن این بند، راه‌حلی تحلیلی برای توصیف گذرفاز آن نیافته‌ایم. علت این موضوع هم حضور جمله‌ی غیرخطی $-cos(\theta)$ در جمله‌ی برهم‌کنش‌های آن‌هاست. حال که با ابعاد دشوار مسئله روبرو شده‌ایم؛ اجازه دهید که زمین بازی خود را عوض کنیم.
می‌پرسیم که آیا کیفیت گذرفاز از ناهم‌گامی به هم‌گامی به این جمله وابسته است؟ بی‌تردید پاسخ این سوال را نخواهیم فهمید؛ مگر آن که شبکه‌ی جدیدی مطابق درخواست خود ابداع و شبیه‌سازی کنیم.

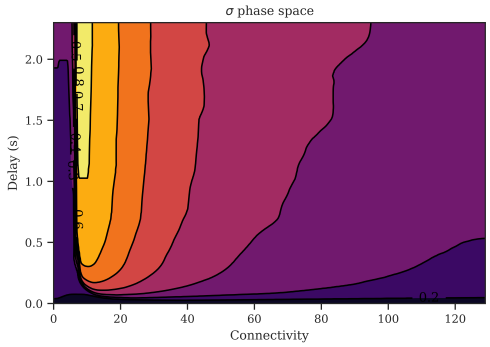
$$\begin{cases} \dot{\theta}_i = I_i - gE, \quad \theta_i \leq \pi \\ \dot{E} = M - \alpha E \\ \dot{M} = -\alpha M + \frac{\alpha^۲}{N} \sum_{n|tn<t} \delta(t - t_n - t_d) \end{cases} \tag{۱.۵}$$

- θ_i: مشخص کننده‌ی فاز هر نورون. این فاز میان دو لبه در حال حیات است. کوچکترین کران بالای آن همان حالت آستانه در π است و بزرگترین کران پایین آن نگه‌دارنده‌ای است که از ریزش نورون‌ها جلوگیری می‌کند.
- E: میدانی است که شدت فعالیت شبکه را نشان می‌دهد.
- M: یک پارامتر فرعی که در حل معادله دیفرانسیل مرتبه دوم به دو معادله‌ی تحول مرتبه اول ما را یاری کرده است.

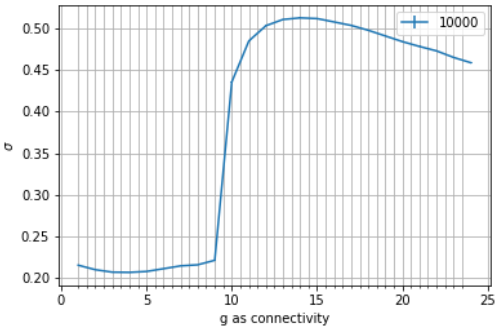
همچنین دقت کنیم که اگر چه این مدل کاهش یافته‌ای از مدل چرخنده است اما در صورت کاستن مدل انباشت‌وشلیک هم به همین جملات برهم‌کنشی می‌رسیدیم. تنها تفاوت در آن می‌شد که فاصله‌ی بین حالت تیزه (π) و بازنشانی (صفر) در حالت ابداعی π برابر مدل کاسته‌شده‌ی انباشت‌وشلیک می‌شد.

۱.۰.۵ شبیه‌سازی

برای مدل توصیف شده‌ی بالا شبیه‌سازی خود را با تنظیمات زیر به اجرا گذاشتیم.



(ب) نقاطی از صفحه فاز که از آن‌ها داده‌گیری انجام شده است به رنگ سفید درآمده‌اند.



(آ) پهنای جریان یک سامانه ساده با ده هزار نورون

* $\alpha = ۲۰\ s^{-۱}$
* جریان‌های تصادفی خارجی نورون‌ها از اعضای بازه‌ی (۹/۵, ۱۳/۵) انتخاب می‌شوند.
* $N = ۱۰۰۰۰$
* $t_d = ۰/۱\ s$

۲.۰.۵ نتایج

در جستجوی تغییرفاز

قابل توجه است که کیفیت تغییرفاز با حذف جمله‌ی ذکر شده تغییر نکرد و تنها مکان و ارتفاع انحراف از معیار جریان داخلی است که دست خور تغییر شده است - شکل ۱.۵آ.

فصل ۶

تلاش برای توصیف

از آنجا که شبیه‌سازی این سامانه شامل تعریف فرآیندهای متفاوتی بود؛ بدیهی است که نوشتن معادله‌ی تحلیلی برای توصیف کامل آن آسان نباشد. اما در این بخش تلاش می‌کنیم که با کنار هم قرار دادن معادلات اصلی چارچوب مسئله‌ی خود را مشخص کنیم.
هر نورون که از حالت $\theta = \pi$ عبور می‌کند [تیزه می‌زند] باعث می‌شود تا سهمی از جریان با کیفیت $p(t) := \alpha^{۲} t \cdot exp(-\alpha t)$ به جریان درونی کل سامانه $E(t)$ اضافه شود.

$$E(t) = \frac{۱}{N} \int_{۰}^{\infty} \int J_a(\pi, t-d-u) da \cdot \alpha^{۲} u\, e^{-\alpha u} du \tag{۱.۶}$$

اما جریان برای هر نورون با ورودی a به طریق زیر است:

$$J_a(\theta, t) = n_a(\theta, t) \cdot \dot{\theta}_a \tag{۲.۶}$$

این رفتار به خوبی نشان می‌دهد جریان فقط در ناحیه‌ی $\theta \leq \pi$ وجود دارد. زیرا ورود نورون به ناحیه‌ی مثبت‌تر را ممنوع کرده‌ایم. بی‌تردید برای فهمیدن چگونگی تغییر جریان در ناحیه‌های میانی باید از معادله‌ی پخش استفاده کنیم.

$$\frac{\partial n_a}{\partial t} = -\frac{\partial J_a}{\partial \theta} \tag{۳.۶}$$

$$= -\frac{\partial n_a}{\partial \theta} \cdot \dot{\theta}_a \tag{۴.۶}$$

۱.۰.۶ حل معادله‌ی شبکه‌ی ساده

اجازه بدهید تا اولین تلاش خود را از ساده‌ترین نوع شبکه‌ها شروع کنیم. شبکه‌ای که به جز جریان داخلی و جریان تصادفی اولیه ورودی دیگری ندارد. پس خواهیم داشت:

$$\begin{cases} E(t) = \frac{۱}{N} \int_{۰}^{\infty} \int n_a(\pi, t-d-u) \cdot \big[a - gE(t-d-u)\big] da \cdot \alpha^{۲} u\, e^{-\alpha u} du \\ \frac{\partial n_a}{\partial t} = -\frac{\partial n_a}{\partial \theta} \cdot (a - gE(t)) \end{cases} \tag{۵.۶}$$

چند پیشنهاد می‌شود برای ادامه‌ی راه‌حل داشت. (درون یک جعبه قرار گیرد با این عنوان که پیشنهادات من چه بود و استاد چه گفت.)

۱. از آنجا که میدان به گونه‌ای متناوب عمل می‌کند؛ یک پیشنهاد خوب می‌تواند آن باشد که بسط فوریه‌ی آن را بنویسیم.

$$E(t) = \sum c_i \cdot cos(\omega_i t) \tag{۶.۶}$$

که اگر ثابت کنیم $c_۱$ از بقیه ضرایب بزرگتر است؛ مساله‌ی ما حل می‌شود.

۲. دشواری مساله از در هم تنیدگی معادلات برآمده است. اگر به تقریب در معادله‌ی پخش میدان را یک نوفه درنظر بگیریم و پاسخ را در معادله‌ی اول قرار دهیم.

۳. انتگرال اول را به صورت بازگشتی در خودش جاگذاری کنیم.

۴. مسئله را در حالت آماری بررسی کنیم و حالت پایستار آن را پیدا کنیم و بپرسیم در چه حالتی است که حالت پایستار داریم.

روش بازگشتی

نکته‌ای که برای ما حل معادلات را دشوار می‌کند تبعیت E از خودش است. بگذارید به شیوه‌ای که خود معادله درخواست دارد عمل کنیم. یعنی E را مجددا در سمت راست معادله جاگذاری کنیم. برای راحت‌تر شدن محاسبات ابتدا دو متغیر کمکی زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{J}(\pi, t-d-u) \equiv \int n_a(\pi, t-d-u) a \cdot da \tag{۷.۶}$$

$$\mathcal{N}(\pi, t-d-u) \equiv \int n_a(\pi, t-d-u) \cdot da \tag{۸.۶}$$

$$\mathcal{P}(u) \equiv \alpha^۲ u\, e^{-\alpha u} \tag{۹.۶}$$

عبارت $\mathcal{J}(\pi,)$ به معنای جمع جریان تصادفی نورون‌هایی است که در زمان u در آستانه قرار دارند. همچنین عبارت $\mathcal{N}(\pi,)$ به معنای تعداد همین نورون‌هاست.
حال با نمادهای بالا شروع به بازنویسی جملات پیشین می‌کنیم:

$$E(t) = \frac{۱}{N}\int_۰^\infty \mathcal{J}(\pi, t-d-u_۱) \cdot \mathcal{P}(u_۱) du_۱ - \frac{g}{N}\int_۰^\infty \mathcal{N}(\pi, t-d-u_۱) \cdot \mathcal{P}(u_۱) E(t-d-u_۱) du_۱ \tag{۱۰.۶}$$

حال جمله‌ی اول را نیز با عبارت دیگری خلاصه‌سازی می‌کنیم:

$$\mathcal{A}(t) \equiv \frac{۱}{N}\int_۰^\infty \mathcal{J}(\pi, t-d-u_۱) \cdot \mathcal{P}(u_۱) du_۱ \tag{۱۱.۶}$$

در خصوص جمله‌ی دوم نیز مشابها عبارت مربوط به E را در آن جاگذاری می‌کنیم.

$$E(t-d-u_۱) = \frac{۱}{N}\int_۰^\infty \mathcal{J}(\pi, t-۲d-u_۱-u_۲)\cdot\mathcal{P}(u_۲)du_۲ \tag{۱۲.۶}$$

$$-\frac{g}{N}\int_۰^\infty \mathcal{N}(\pi, t-۲d-u_۱-u_۲)\cdot\mathcal{P}(u_۲)E(t-۲d-u_۱-u_۲)du_۲ \tag{۱۳.۶}$$

این عبارت جمع تعداد همه‌ی تیزه‌هایی است که تا گام $t-d$ زده شده‌اند و درنتیجه جمله‌ای انباشتی است. پس خواهیم داشت:

$$E(t) = \mathcal{A}(t-d) - g\int_{۰}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-d-u_۱)\cdot \mathcal{P}(u_۱)E(t-d-u_۱)du_۱ \tag{۱۴.۶}$$

$$= \mathcal{A}(t-d) - g\int_{۰}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-d-u_۱)\cdot \mathcal{P}(u_۱)\cdot \Big[\mathcal{A}(t-۲d-u_۱) - g\int_{۰}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-d-u_۱-u_۲)\cdot \mathcal{P}(u_۲)E(t-۲d-u_۱-u_۲)du_۲\Big]du_۱ \tag{۱۵.۶}$$

$$= \mathcal{A}(t-d) - g\int_{۰}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-d-u_۱)\cdot \mathcal{P}(u_۱)\cdot \mathcal{A}(t-۲d-u_۱)du_۱ \tag{۱۶.۶}$$

$$+ g^{۲}\int_{۰}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-d-u_۱)\cdot \mathcal{P}(u_۱)\int_{۰}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-۲d-u_۱-u_۲)\cdot \mathcal{P}(u_۲)E(t-۲d-u_۱-u_۲)du_۲du_۱ \tag{۱۷.۶}$$

$$= \mathcal{A}(t-d) - g\int_{۰}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-d-u_۱)\cdot \mathcal{P}(u_۱)\cdot \mathcal{A}(t-۲d-u_۱)du_۱ \tag{۱۸.۶}$$

$$+ g^{۲}\int_{۰}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-d-u_۱)\cdot \mathcal{P}(u_۱)\int_{۰}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-۲d-u_۱-u_۲)\cdot \mathcal{P}(u_۲)\mathcal{A}(t-۳d-u_۱-u_۲)du_۲du_۱ \tag{۱۹.۶}$$

$$- g^{۳}\int_{۰}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-d-u_۱)\cdot \mathcal{P}(u_۱)\int_{۰}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-۲d-u_۱-u_۲)\cdot \mathcal{P}(u_۲)\int_{۰}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-۳d-u_۱-u_۲-u_۳)\cdot \mathcal{P}(u_۳)E(t-۳d-u_۱-u_۲-u_۳)du_۳du_۲du_۱ \tag{۲۰.۶}$$

حال اگر عمر این سامانه کراندار باشد؛ تعداد جملات بالا محدود می‌شوند. پس اگر سامانه پیش از یک زمانی کاملا خاموش بوده باشد $E = ۰$؛ آنگاه می‌توان میدان کنونی را بر اساس جملات ضربی بین شدت جریان و تعداد نورون‌های تیزه زده پیدا کرد.

روش اختلال

به نمودار ۱.۴آ دقت کنید. در زمانی که تعداد نورون‌ها بی‌نهایت باشد؛ در فاز ناهم‌گام انحراف معیار میدان صفر خواهد شد. این به این معنی است که جریان در زمان ثابت خواهد ماند. پس بگذارید با علم بر این موضوع یک جواب معادله‌ی ۵.۶ را در حالت حدی میدان ثابت $E_۰$ معرفی کنیم.
با فرض ثابت بودن میدان، اندازه‌ی آن را محاسبه می‌کنیم. سپس مجدد به معادلات برمی‌گردیم و می‌پرسیم که در صورت جمع با یک جمله‌ی اختلالی کوچک این انحراف رشد خواهد کرد یا خیر. به عبارت دیگر آیا این جواب جاذب است.

$$\begin{cases} E_۰ = \frac{۱}{N}\int_{-\infty}^{t-d}\int n_a(\pi,u)\cdot\left[a-gE_۰\right]da\cdot\alpha^۲ u\, e^{-\alpha u}du \\ \frac{\partial n_a}{\partial t} = -\frac{\partial n_a}{\partial \theta}\cdot(a-gE_۰) \end{cases} \tag{۲۱.۶}$$

یک راه خوب برای پیشبرد سطر اول معادلات آن است که از دو طرف آهنگ تغییرشان با زمان را بپرسیم. از آنجا که سمت چپ معادله ثابت است؛ سمت راست هم باید جوابی مشابه را حکایت کند.

$$۰ = \frac{dE_۰}{dt} = \frac{\alpha^۲(t-d)e^{-\alpha(t-d)}}{N}\cdot[-gE_۰\cdot\int n_a(\pi,t-d)da+\int n_a(\pi,t-d)\cdot a\,da] \tag{۲۲.۶}$$

مشخص است که کدام جمله از جملات ضربی بالا صفر است. پس برای $E_۰$ خواهیم داشت:

$$E_۰ = \frac{۱}{g}\cdot\frac{\int n_a(\pi,t-d)\cdot a\,da}{\int n_a(\pi,t-d)da} \tag{۲۳.۶}$$

حال برای ادامه‌ی فرآیند نیاز داریم تا عبارت حاکم بر $n_a(\pi,t-d)$ را بدست آوریم. جواب پیشنهادی ما برای سطر دوم معادلات از جنس تابع دلتاست:

$$n_a(\theta,t) = \delta(\theta-\theta_a(t)) \tag{۲۴.۶}$$
$$= \delta(\theta+\theta_۰-(a-gE_۰)t+۲\left\lfloor K_a^{(t)}\right\rfloor\pi) \tag{۲۵.۶}$$
$$= \delta(\theta-(a-gE_۰)t+۲\left\lfloor K_a^{(t)}\right\rfloor\pi+\theta_۰) \tag{۲۶.۶}$$
$$\Rightarrow n_a(\pi,t) = \delta((۲\left\lfloor K_a^{(t)}\right\rfloor+۱)\pi-(a-gE_۰)t+\theta_۰) \tag{۲۷.۶}$$
$$\tag{۲۸.۶}$$

که در این معادلات $K_a^{(t)}$ کسری است که تعداد دور هر نورون را از آغاز تا کنون روایت می‌کند و ما مجبور به عقب کشیدن ۲π فاز کامل پس از تیزه زدن آن به تعداد $\left\lfloor K_a^{(t)}\right\rfloor$ شده‌ایم. [۱] قابل محاسبه است که عبارت

[۱] دقت کنیم که معادله‌ی ذکر شده برای نورون‌هایی درست است که $(a-gE_۰) > ۰$

کامل آن به صورت زیر است.

$$K_a^{(t)} = \frac{(a - gE_۰)t + \pi + \theta_۰}{۲\pi} \tag{۲۹.۶}$$

برای محاسبه‌ی انتگرال‌هایی که شامل این دلتای دیراک هستند؛ لازم است تا صفرهای آرگومان آن را محاسبه کنیم.

$$\left(۲\left\lfloor\frac{(a - gE_۰)t + \pi + \theta_۰}{۲\pi}\right\rfloor + ۱\right)\pi - (a - gE_۰)t + \theta_۰ = ۰ \tag{۳۰.۶}$$

$$۲\pi \times \left(\left\lfloor\frac{(a - gE_۰)t + \pi + \theta_۰}{۲\pi}\right\rfloor - \frac{(a - gE_۰)t + \pi + \theta_۰}{۲\pi}\right) = ۰ \tag{۳۱.۶}$$

$$۲\pi \times \left(\left\lfloor K_a^{(t)}\right\rfloor - K_a^{(t)}\right) = ۰ \tag{۳۲.۶}$$

این رابطه کاملا یک تابع تناوبی را توصیف می‌کند. یک تابع مقطع که در مکانی که آرگومان آن صحیح می‌شود؛ مقدار صفر به خود می‌گیرد. پس روشن است که توقع داشته باشیم. تعداد صفرهای این معادله به اندازه‌ی تعداد تناوبی است که در هر زمان در بازه‌ی جریان‌های داده شده دارد.

$$\Delta K_a^{(t)} = ۱ \tag{۳۳.۶}$$

$$\Delta K_a^{(t)} = \frac{t}{۲\pi}\Delta a \tag{۳۴.۶}$$

$$\Delta a = \frac{۲\pi}{t} \tag{۳۵.۶}$$

این دوره‌ی تناوب با افزایش زمان کوچکتر می‌شود. اگر تعداد نورون‌ها را به صورتی ترمودینامیکی بزرگ بگیریم؛ آنگاه به ازای هر دوره‌ی تناوب یک نورون حتما هست که روی محور آستانه قرار گرفته است.
حال که دوره‌ی تناوب Δa را بدست آوردیم؛ می‌دانیم که ریشه‌های رابطه‌ی ۳۲.۶ چه زمانی رخ می‌دهند. فرض کنیم که اولین صفر در جریانی مثل a_m رخ می‌دهد. توجه کنید حتما اندازه‌ی این جریان به گونه‌ای است که نورون را به صورت فعال نگه دارد. پس باید حتما $(a_m - gE_۰) > ۰$ باشد. حال می‌توانیم انتگرال‌های مورد نظر خود را این چنین بسط دهیم.

$$\int n_a(\pi, t - d)a\,da = \int \delta\left(۲\pi(\left\lfloor K_a^{(t)}\right\rfloor - K_a^{(t)})\right)a\,da \tag{۳۶.۶}$$

$$= \frac{۱}{۲\pi} \cdot \sum_{K_a^{(t)} \in Z} a_i \tag{۳۷.۶}$$

$$= \frac{۱}{۲\pi} \cdot \sum_{m=۰}^{M} a_m + m \cdot \Delta a \tag{۳۸.۶}$$

$$= \frac{M + ۱}{۲\pi} \cdot (\frac{a_m + a_{max}}{۲}) \tag{۳۹.۶}$$

$$\tag{۴۰.۶}$$

و از طرفی:

$$\int n_a(\pi, t-d)\, da = \int \delta\Big(۲\pi(\lfloor K_a^{(t)} \rfloor - K_a^{(t)})\Big) a\, da \tag{۴۱.۶}$$

$$= \frac{۱}{۲\pi} \cdot \sum_{K_a^{(t)} \in Z} ۱ \tag{۴۲.۶}$$

$$= \frac{۱}{۲\pi} \cdot \sum_{m=۰}^{M} ۱ \tag{۴۳.۶}$$

$$= \frac{M+۱}{۲\pi} \tag{۴۴.۶}$$

حال اگر به محاسبه‌ی میدان ثابت خود برگردیم و تکه‌های پازل را کنار هم بگذاریم؛ خواهیم داشت:

$$E_۰ = \frac{۱}{g} \cdot \frac{\int n_a(\pi, t-d) \cdot a\, da}{\int n_a(\pi, t-d) da} \tag{۴۵.۶}$$

$$= \frac{۱}{g} \cdot \frac{\frac{M+۱}{۲\pi} \cdot (\frac{a_m + a_{max}}{۲})}{\frac{M+۱}{۲\pi}} \tag{۴۶.۶}$$

$$= \frac{۱}{g}(\frac{a_m + a_{max}}{۲}) \tag{۴۷.۶}$$

این میدان معادل است با جریان میانگین بین نورون‌هایی که آن‌ها را روشن خطاب کرده بودیم. این نتیجه صحیح نیست زیرا اگر میدان در میانه‌ی این جریان‌ها قرار گیرد؛ آنگاه نورون‌های با جریان پایین‌دست $a < \frac{۱}{g}(\frac{a_m + a_{max}}{۲})$ را خاموش خواهد کرد و اصلا روشن نخواهند ماند.

روش آماری

در این روش فرض می‌کنیم که برای هر جریان تصادفی اولیه، نورون‌های زیادی را به اختیار گرفته‌ایم. در حالت پایا ، در یک حالت خاص تغییری در چگالی جمعیت مشاهده نمی‌شود پس در معادله‌ی ۵.۶ خواهیم داشت:

$$\frac{\partial n_a}{\partial t} = ۰ \tag{۴۸.۶}$$

همچنین در حالت پایا که در واقع از نگاه ما حالت ناهم‌گام است؛ جریان بین نورون‌ها - که کمیتی بزرگ مقیاس است - در زمان تغییری نمی‌کند. پس به این ترتیب:

$$\begin{cases} \frac{\partial n_a}{\partial t} = -\frac{\partial J_a(t)}{\partial \theta} = ۰ \\ J_a(\theta, t) = n_a(\theta, t) \cdot [a - gE] \end{cases} \Rightarrow J_a(\theta, t) = J_a(t) \tag{۴۹.۶}$$

$$\Rightarrow n_a(\theta, t) = n_a \tag{۵۰.۶}$$

$$\tag{۵۱.۶}$$

پس توزیع جمعیت نورون‌ها مستقل از زمان و حالت آن‌ها خواهد شد. اگر توزیع را در ابتدا یکنواخت میان جریان‌های مختلف توزیع کرده باشیم؛ برای همه‌ی زمان‌ها و حالت‌ها داریم:

$$n = \frac{N}{۲\pi(a_{Max} - a_{min})} \tag{۵۲.۶}$$

برای جریان بین نورون‌ها هم خواهیم داشت:

$$E = \frac{۱}{N}\int_{-\infty}^{t-d}\int n \cdot \big[a - gE\big]da \cdot \alpha^{۲} u\, e^{-\alpha u} du \tag{۵۳.۶}$$

$$= \int \frac{n}{N} \cdot \big[a - gE\big]da \tag{۵۴.۶}$$

دقت کنیم که انتگرال رابطه‌ی ۵۴.۶ روی نورون‌هایی است که مستعد تیزه زدن هستند. [۲]

اولین جریانی که نورون را مستعد تیزه زدن می‌کند a_* نام‌گذاری می‌کنیم. وقتی جریان مهاری حاصل از تیزه زدن‌ها کوچک است؛ همه‌ی نورون‌ها فعال هستند و در نتیجه $a_* = a_{min}$ می‌شود. اما در حالتی که جریان مهاری زیاد می‌شود؛ این مقدار از کمترین جریان تصادفی اولیه سامانه بزرگتر می‌شود. محاسبات را ادامه می‌دهیم:

$$E = \int \frac{n}{N} \cdot \big[a - gE\big]da \tag{۵۵.۶}$$

$$= \frac{n}{N} \cdot \big[\frac{a_{Max}^{۲} - {a_*}^{۲}}{۲} - gE(a_{Max} - a_*)\big] \tag{۵۶.۶}$$

$$\Rightarrow E = n \cdot \big[\frac{a_{Max}^{۲} - {a_*}^{۲}}{۲}\big] / \big[N + gn(a_{Max} - a_*)\big] \tag{۵۷.۶}$$

شاید بنظر این یک معادله‌ی درجه یک ساده باشد که میدان را گزارش می‌کند اما در واقع خود a^* هم به میدان وابسته است و باید وابستگی آن را لحاظ کنیم. به تقریب: $a^* = gE$ با اضافه کردن این معادله و حل معمول یک معادله‌ی درجه‌ی دو برای میدان صراحتا خواهیم داشت:

$$E = \big(\frac{a_{Max}}{g} + \frac{N}{ng^{۲}}\big) \pm \big[\big(\frac{N}{ng^{۲}} + \frac{a_{Max}}{g}\big)^{۲} - \frac{{a_{Max}}^{۲}}{g^{۲}}\big]^{\frac{۱}{۲}} \tag{۵۸.۶}$$

نتیجه می‌دهد که a_* هم باید به صورت زیر باشد:

$$a_* = \big(a_{Max} + \frac{N}{ng}\big) \pm \big[\big(\frac{N}{ng} + a_{Max}\big)^{۲} - {a_{Max}}^{۲}\big]^{\frac{۱}{۲}} \tag{۵۹.۶}$$

$$= \big(a_{Max} + \frac{N}{ng}\big) \pm \big[\frac{N^{۲}}{n^{۲}g^{۲}} + \frac{۲a_{Max}N}{ng}\big]^{\frac{۱}{۲}} \tag{۶۰.۶}$$

---

[۲] $(a - gE) > ۰$

اجازه بدهید علامت مثبت را کنار بگذاریم زیرا مقدار a_* را خارج بازه‌ی جریان‌های سامانه گزارش می‌کند. پس هم برای میدان و هم جریان a_* خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a_* = \left(a_{Max} + \frac{N}{ng}\right) - \left[\frac{N^۲}{n^۲g^۲} + \frac{۲a_{Max}}{ng}\right]^{\frac{۱}{۲}} \\ E = \left(\frac{a_{Max}}{g} + \frac{N}{ng^۲}\right) - \left[\frac{N^۲}{n^۲g^۴} + \frac{۲Na_{Max}}{ng^۳}\right]^{\frac{۱}{۲}} \end{cases} \tag{۶۱.۶}$$

حال اگر نتایج بدست آمده را با داده‌های شبیه‌سازی تطبیق دهیم؛ خواهیم دید که تطابق خوبی با یک دیگر دارند.

در ضریب تاثیرهای بسیار بزرگ داریم:

$$E \cong \frac{a_{Max}}{g} + \frac{N}{ng^۲} - \left(\frac{۲Na_{Max}}{ng^۳}\right)^{\frac{۱}{۲}}\left[۱ + \frac{N}{۲nga_{Max}}\right]^{\frac{۱}{۲}} \tag{۶۲.۶}$$

$$= \frac{a_{Max}}{g} + \frac{N}{ng^۲} - \left(\frac{۲Na_{Max}}{ng^۳}\right)^{\frac{۱}{۲}}\left[۱ + \frac{N}{۴nga_{Max}}\right] \tag{۶۳.۶}$$

$$= \frac{a_{Max}}{g} - \left(\frac{۲Na_{Max}}{ng^۳}\right)^{\frac{۱}{۲}} + \frac{N}{ng^۲} - \left(\frac{N}{۲n}\right)^{\frac{۳}{۲}} \cdot \frac{۱}{a_{Max}^{\frac{۱}{۲}} g^{\frac{۵}{۲}}} \tag{۶۴.۶}$$

حل اختلالی میدان

همان طور که مشخص است؛ حل دقیق میدان بسیار کار دشواری است اما می‌توان از طریق ترفندهای اختلالی به جواب آن نزدیک شد. یکی از روش‌های معمول حل زنجیری و تودرتوی دستگاه معادلات است. به این ترتیب که ابتدا از معادله پاسخ حالت پایا (مرتبه‌ی صفرم) را در معادله‌ی پخش جاگذاری می‌کنیم تا توزیع آماری وابسته به زمان نورون‌ها بدست آید. سپس مجددا از توزیع بدست آمده؛ میدان مرتبه‌ی اول را که وابسته به زمان است؛ محاسبه می‌کنیم.

از آنجا که توزیع سامانه رفتاری دوره‌ای به طول ۲π دارد؛ می‌توانیم آن را به صورت زیر بسط دهیم:

$$\rho(\theta, a, t) = \rho_۰ + \sum_k A_k(t) e^{ik\theta}, \quad k \in \mathcal{Z} \tag{۶۵.۶}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \sum \dot{A}_k e^{ik\theta} \tag{۶۶.۶}$$

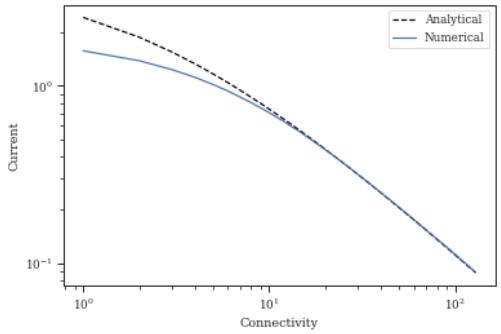
$$\frac{\partial \rho}{\partial \theta} = \sum A_k \cdot ik \cdot e^{ik\theta} \tag{۶۷.۶}$$

$$\tag{۶۸.۶}$$

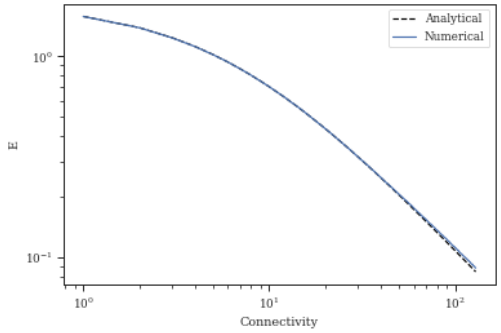
حال آن را در معادله‌ی پخش قرار می‌دهیم تا بتوانیم معادله‌ی حاکم بر ضرایب را محاسبه کنیم.

$$\sum \dot{A}_k e^{ik\theta} = -\sum A_k \cdot ik(a - gE(t)) \cdot e^{ik\theta} \tag{۶۹.۶}$$

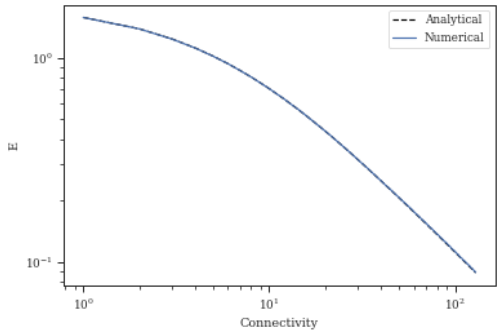
$$\Rightarrow \dot{A}_k = -A_k \cdot ik(a - gE(t)) \tag{۷۰.۶}$$



(آ) نسخه‌ای که کمینه‌ی جریان را از حل محاسبات درنظر می‌گیرد



(ب) نسخه‌ای که همه‌ی نورون‌ها را فعال تصور می‌کند.



(ج) نسخه ساخته شده از اتصال دوتای دیگر

شکل (۱.۶) تطابق جریان پایای بدست آمده از حل عددی و تحلیلی

در تقریب مرتبه‌ی اول برای توزیع داریم:

$$\dot{A}_k = -A_k \cdot ik(a - gE_۰) \tag{۷۱.۶}$$

$$\Rightarrow A_k(t) = A_k(۰)e^{-ik(a-gE_۰)t} \tag{۷۲.۶}$$

$$\Rightarrow \rho(\theta, a, t) = \rho_۰ + \sum_k A_k(۰)e^{ik\theta - ik(a-gE_۰)t} \tag{۷۳.۶}$$

پس برای نورون‌های روی آستانه خواهیم داشت:

$$\rho(\pi, a, t) = \rho_۰ + \sum_k A_k(۰)e^{ik\pi - ik(a-gE_۰)t} \tag{۷۴.۶}$$

حال از نتیجه‌ی بدست آمده استفاده می‌کنیم و همان طور که اشاره شد به محاسبه‌ی مرتبه‌ی بعدی میدان می‌رویم:

$$E(t) = \int\int_۰^\infty \rho(\pi, a, t-d-v) \cdot \dot{\theta} \cdot \alpha^۲ v e^{-\alpha v} dv da \tag{۷۵.۶}$$

$$= E_۰ \tag{۷۶.۶}$$

$$+ \int\int_۰^\infty \sum_k A_k(۰)e^{ik\pi - ik(a-gE_۰)(t-d-v)} \cdot (a - gE_۰)\alpha^۲ v e^{-\alpha v} dv da \tag{۷۷.۶}$$

$$= E_۰ + \sum_k \int\int_۰^\infty A_k(۰)e^{ik\pi - ik(a-gE_۰)(t-d-v)} \cdot (a - gE_۰)\alpha^۲ v e^{-\alpha v} dv da \tag{۷۸.۶}$$

اجازه بدهید سهم مدهای متفاوت از میدان را به صورت جداگانه محاسبه کنیم و سپس مجددا در کنار یکدیگر قرار دهیم.

$$E_{k,a}(t) = -\alpha^۲ A_k(۰)(a - gE_۰)e^{ik\pi} \int_۰^\infty v e^{-[\alpha - ik(a-gE_۰)]v - ik(a-gE_۰)(t-d)} dv \tag{۷۹.۶}$$

با با تغییر متغیر $\beta \equiv \alpha - ik(a - gE_۰)$ محاسبات را ادامه می‌دهیم:

$$= \alpha^۲ A_k(۰)(a - gE_۰)e^{ik\pi} e^{-ik(a-gE_۰)(t-d)} \cdot \int_۰^\infty v e^{-\beta v} dv \tag{۸۰.۶}$$

$$= \alpha^۲ A_k(۰)(a - gE_۰)e^{ik\pi} e^{-ik(a-gE_۰)(t-d)} \cdot \frac{۱}{\beta^۲} \tag{۸۱.۶}$$

$$= A_k(۰)(a - gE_۰)e^{ik[\pi - (a-gE_۰)(t-d)]} \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha - ik(a - gE_۰)}\right)^۲ \tag{۸۲.۶}$$

حال قدم به قدم به محاسبات پیشین خود برمی‌گردیم. ابتدا می‌پرسیم میدان همه‌ی نورون‌های با مد یکسان چه جریانی را تولید می‌کنند.

$$E_k(t) = \int E_{k,a} da \tag{۸۳.۶}$$

$$= \int A_k(۰)(a - gE_۰)e^{ik[\pi - (a-gE_۰)(t-d)]} \left(\frac{\alpha}{\alpha - ik(a - gE_۰)}\right)^۲ da \tag{۸۴.۶}$$

با تغییر متغیر $h \equiv a - gE_۰$ تلاش می‌کنیم انتگرال را ادامه دهیم.

$$E_k(t) = A_k(۰)e^{ik\pi}\int_۰^{a_M - gE_۰} he^{-ikh(t-d)}(\frac{۱}{۱ - ikh/\alpha})^۲ dh \tag{۸۵.۶}$$

نرم‌افزارهای محاسباتی همچون ابزار ولفرم به ما امکان می‌دهد تا پاسخ آن را به صورت زیر بیان کنیم:

$$E_k(t) = -A_k(۰)\frac{\alpha^۲}{k^۲}e^{ik\pi}\left[\frac{e^{-i(\xi_{(h)}+k(t-d)h)}}{\sqrt{۱ + h^۲k^۲/\alpha^۲}}\right. \tag{۸۶.۶}$$

$$\left. + e^{-\alpha(t-d)}(\alpha(t-d)+۱)Ei[(\alpha - ikh)(t-d)]\right]\Bigg|_۰^{a_M - gE_۰} \tag{۸۷.۶}$$

به صورتی که $e^{-i\xi_{(h)}} = \frac{۱+ikh/\alpha}{\sqrt{۱+h^۲k^۲/\alpha^۲}}$ است و Ei همان تابع انتگرال نمایی است که به صورت $Ei[z] = -\int_{-z}^{+\infty} e^{-t}/t dt$ نوشته می‌شود.

$$E_k(t) = -A_k(۰)\frac{\alpha^۲}{k^۲}e^{ik\pi}\left[\frac{e^{-i(\xi_{(a_M - gE_۰)}+k(t-d)(a_M - gE_۰))}}{\sqrt{۱ + (a_M - gE_۰)^۲k^۲/\alpha^۲}}\right. \tag{۸۸.۶}$$

$$+ e^{-\alpha(t-d)}(\alpha(t-d)+۱)Ei[(\alpha - ik(a_M - gE_۰))(t-d)] \tag{۸۹.۶}$$

$$- e^{-ik(t-d)(a_M - gE_۰)} \tag{۹۰.۶}$$

$$\left. - e^{-\alpha(t-d)}(\alpha(t-d)+۱)Ei[\alpha(t-d)]\right] \tag{۹۱.۶}$$

$$= -A_k(۰)\frac{\alpha^۲}{k^۲}e^{ik\pi}\left[e^{-ik(t-d)(a_M - gE_۰)}\left(\frac{e^{-i(\xi_{(a_M - gE_۰)})}}{\sqrt{۱ + (a_M - gE_۰)^۲k^۲/\alpha^۲}} + ۱\right)\right. \tag{۹۲.۶}$$

$$\left. + e^{-\alpha(t-d)}(\alpha(t-d)+۱)\Big(Ei[(\alpha - ik(a_M - gE_۰))(t-d)] - Ei[\alpha(t-d)]\Big)\right] \tag{۹۳.۶}$$

پس یک جمله‌ی نوسانی دارد و جمله‌ای که شامل تکینگی است.
خبر خوب یا بد این است که این راه هم دارای ایراد است. زیرا در محاسبه‌ی مرتبه‌ی اول میدان اشتباهی رخداده است - رابطه‌ی ۷۵.۶. در این رابطه باید ضرب مرتبه‌ی صفرم چگالی در مرتبه‌ی اول میدان جا

مانده است. یعنی باید می‌نوشتیم:

$$E(t) = \int\int_{۰}^{\infty} (\rho_۰ + \rho_۱)(a - g(E_۰ + E_۱)) \cdot \alpha^۲ v e^{-\alpha v} dv da \tag{۹۴.۶}$$

$$= \int\int_{۰}^{\infty} [\rho_۰(a - gE_۰) + \rho_۱(a - gE_۰)] \cdot \alpha^۲ v e^{-\alpha v} dv da \tag{۹۵.۶}$$

$$+ \int\int_{۰}^{\infty} -gE_۱\rho_۱ \cdot \alpha^۲ v e^{-\alpha v} dv da \tag{۹۶.۶}$$

$$+ \int\int_{۰}^{\infty} -gE_۱\rho_۰ \cdot \alpha^۲ v e^{-\alpha v} dv da \tag{۹۷.۶}$$

$$\tag{۹۸.۶}$$

در واقع جمله‌ی آخر رابطه‌ی بالا جامانده بود و باعث می‌شود بخشی از جواب در پشت آن پنهان بماند. البته با در نظر گرفتن آن جمله پیچیدگی اصلی مسئله دوباره به صفحه‌ی بازی برمی‌گردد.

۲.۰.۶ بازی از نو(سامانه‌ی تک‌جریان)

بنظر نمی‌آید که معادلات ما از این طریق حل شوند. بیاید یک طریق دیگر در پیش گیریم.

دیدار

استاد: محسن! بیا مسئله را باز هم ساده‌تر کنیم. به جای آن که یک پهنای جریان بگیریم؛ فقط و فقط یک جریان را در سامانه قرار دهیم. آنگاه ببینیم باز هم هم‌گامی خواهیم دید؟
پیشنهاد بعدی این که تیزه‌ها را باریک و بدون پهنا درنظر بگیر ($\alpha \to \infty$) امیدوارم در این حالت مسئله حل شود.

محسن: مسئله شاید کمی عوض شود. زیرا جریان مهاری برآمده از نورون‌هایی با جریان بالا روی پتانسیل نورون‌های پایین‌تر هم تاثیر می‌گذارد.

استاد: می‌دانم. اما از همین سامانه تک‌جریانی باید دربیاید. وقتی یکی را حل کنیم بقیه را می‌توانیم از کنار هم قرار دادن این زیرسامانه محاسبه کنیم.

محسن: خیلی هم خوب! چشم انجام می‌شود.

استاد: فردا می‌توانی بیایی و حضوری باهم جلسه داشته باشیم؟

محسن: بله حتما خدمت خواهم رسید.

(اتاق انجمن علمی، سه‌شنبه عصر ۳۰ فروردین)

خروجی این مکالمات و چند جلسه پشت سرهم در ادامه‌ی این بخش خواهد آمد.

بیاید مجدد رابطه‌ی ۵.۶ که جریان را در سامانه گزارش می‌داد برای سامانه‌ی جدید بازنویسی کنیم. با

این تفاوت که α را به بینهایت سوق داده‌ایم و تیزه‌ها کاملا باریک هستند.

$$E(t) = \frac{n(\pi, t-d)}{N} \cdot \big[a - gE(t-d)\big] \tag{۹۹.۶}$$

حالت‌پایا

برای این سامانه میدان حالت پایا به صورت زیر قابل توصیف است:

$$E_۰ = \frac{n}{N} \cdot \big[a - gE_۰\big] = \frac{۱}{۲\pi}\big[a - gE_۰\big] \tag{۱۰۰.۶}$$

$$\Rightarrow E_۰ = \frac{a}{۲\pi + g} \tag{۱۰۱.۶}$$

اختلال از حالت پایا

حال فرض کنیم که جریان به اندازه‌ای کوچک از حالت پایای خود منحرف شود. $E = E_۰ + \epsilon$ علاقه‌مندیم که سامانه در زمان‌های بعدی چگونه رفتار خواهد کرد. آیا این اختلال به طریقی هضم خواهد شد و یا بزرگ‌تر می‌شود و هماره سامانه را از حالت پایا دور خواهد کرد؟

$$E(t+d) = \frac{۱}{۲\pi}\big[a - gE(t)\big] \tag{۱۰۲.۶}$$

$$= \frac{۱}{۲\pi}\big[a - g(E_۰ + \epsilon)\big] \tag{۱۰۳.۶}$$

$$= \frac{۱}{۲\pi}\big[a - gE_۰\big] - \frac{g\epsilon}{۲\pi} \tag{۱۰۴.۶}$$

$$= E_۰ - \frac{g\epsilon}{۲\pi} \tag{۱۰۵.۶}$$

با ادامه‌ی همین روند می‌توانیم به این نتیجه برسیم که در گام‌های بعدی سامانه چگونه رفتار خواهد کرد(شکل ۲.۶):

$$E(t+nd) = \frac{۱}{۲\pi}\big[a - gE(t+(n-۱)d)\big] \tag{۱۰۶.۶}$$

$$= \frac{a}{۲\pi}\big[۱ - \frac{g}{۲\pi} + (\frac{g}{۲\pi})^{۲} + ... + (\frac{-g}{۲\pi})^{n-۱}\big] + (\frac{-g}{۲\pi})^{n}(E_{۰} + \epsilon) \tag{۱۰۷.۶}$$

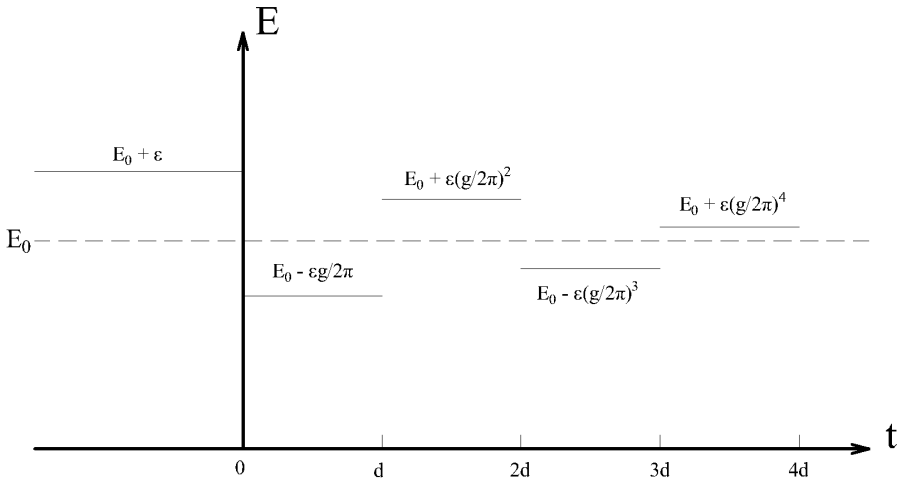
$$= \frac{a}{۲\pi}\frac{۱ - (\frac{-g}{۲\pi})^{n}}{۱ - (\frac{-g}{۲\pi})} + (\frac{-g}{۲\pi})^{n}(E_{۰} + \epsilon) \tag{۱۰۸.۶}$$

$$= \frac{a}{۲\pi + g} - \frac{a}{۲\pi}\cdot\frac{(\frac{-g}{۲\pi})^{n}}{۱ - (\frac{-g}{۲\pi})} + (\frac{-g}{۲\pi})^{n}(E_{۰} + \epsilon) \tag{۱۰۹.۶}$$

$$= \frac{a}{۲\pi + g} - \frac{a}{۲\pi + g}\cdot(\frac{-g}{۲\pi})^{n} + (\frac{-g}{۲\pi})^{n}(E_{۰} + \epsilon) \tag{۱۱۰.۶}$$

$$= E_{۰} + (\frac{-g}{۲\pi})^{n}\cdot\epsilon \tag{۱۱۱.۶}$$

$$= E_{۰} + (\frac{-g}{۲\pi})^{\lfloor t/d\rfloor + ۱}\cdot\epsilon \tag{۱۱۲.۶}$$



شکل (۲.۶) تحول میدان سامانه‌ای تک‌جریان و با تیزه‌های پهن از اختلالی کوچک از حالت پایا (شکل اشتباه است)

پرواضح است که که اگر ضریب تاثیر از مقدار ۲π کمتر باشد؛ این مجموع همگراست و اختلال در

سامانه هضم خواهد شد. در صورتی اگر بیشتر باشد؛ واگرا خواهد بود. این مقدار بنظر همان گذرفازی است که مدت‌هاست به دنبال آن می‌گردیم. پس موفق شدیم که برای سامانه‌ی تک‌جریان نقطه‌ی گذرفاز را محاسبه کنیم. کمتر باشد؛ این مجموع همگراست و اختلال در سامانه هضم خواهد شد. در صوتی اگر بیشتر باشد؛ واگرا خواهد بود.
اگر چه می‌توانستیم مسئله را از طریق دیگری نیز درپیش بگیریم. از معادله‌ی ۱۰۵.۶ اختلاف جدیدی را که با میدان پایا پیدا شده است را به عنوان ϵ' تعریف کنیم و سپس میدان بعدی را از ضرب مجدد عامل $-g/۲\pi$ بدست آوریم. به این ترتیب به طریق ساده‌تر خواهیم داشت:

$$E(t+nd) = E_{\cdot} + (\frac{-g}{۲\pi})^n \cdot \epsilon \qquad (۱۱۳.۶)$$

شبیه‌سازی سامانه‌ی تک‌جریان

حدس می‌زنیم که برای سامانه‌ی یاد شده در قسمت قبل گذر فاز در $g = ۲\pi$ رخ دهد. پس شبیه‌سازی را بار دیگر با تنظیمات زیر راه‌اندازی می‌کنیم:

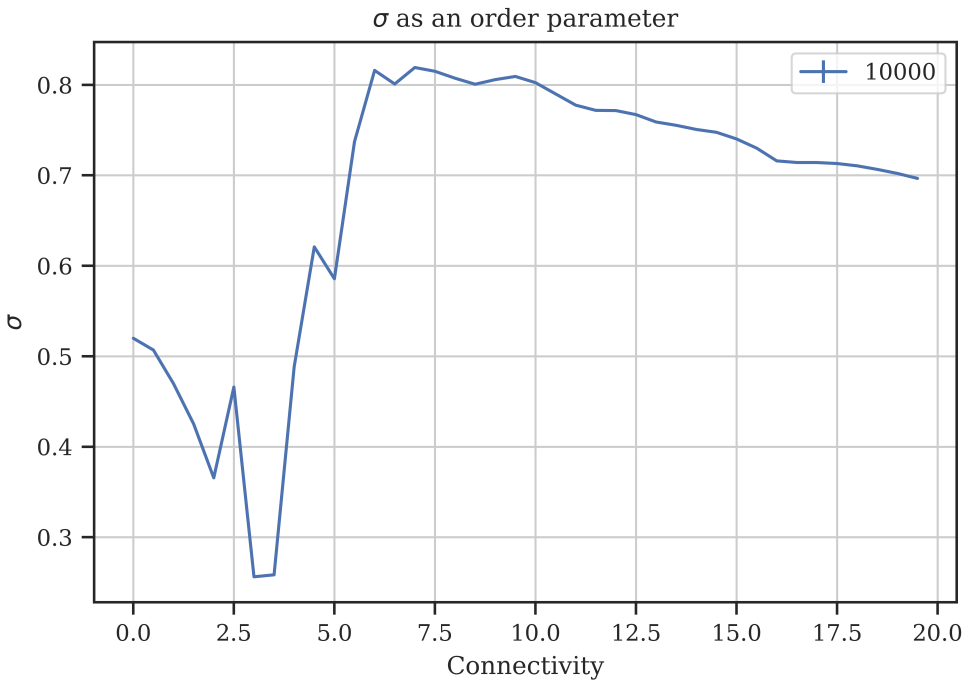
* $\alpha = ۱۰۰\ s^{-۱}$
* جریان خارجی متصل به همه‌ی نورون‌ها یکسان و برابر ۵.۹ است.
* $N = ۱۰۰۰۰$
* $t_d = ۰/۱\ s$
* کل زمان شبیه‌سازی ۱۰۰ ثانیه در نظرگرفته شده
* هر گام زمانی برابر ۰/۰۱ ثانیه است.

به این ترتیب نتیجه‌ی شبیه‌سازی به شکل زیر در آمد: متاسفانه این شکستی برای امید به محقق شدن توصیف تحلیلی این سامانه است. زیرا نقطه‌ی گذر فاز کاملا دور از همسایگی عدد ۶ و در همسایگی نزدیکی حول ۵.۳ پیدا شده است. سوالی که ما در این بخش با آن تنها خواهیم ماند این است که راه‌حل پیشین ما از چه جزئیاتی چشم پوشی کرده است؟!

دیدار

محسن: استاد! شکل به این صورت درآمد.

استاد: خوب اشکال ندارد! باید بررسی کنیم ببینیم مشکل از کجاست.
(لحظاتی پیش از شروع جلسه‌ی برخط مقاله‌خوانی روز چهارشنبه ۷ اردیبهشت)



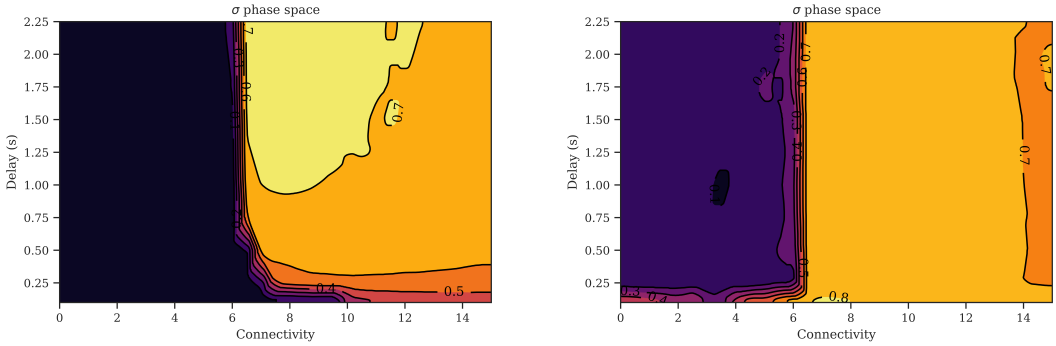
شکل (۳.۶) مشخصه‌ی نظم سامانه ده هزار نورونی تک‌جریان

صندوق پیام‌ها

محسن: اورکا!
سلام استاد! فکر کنم فهمیدم مشکل چیه.
اگر خاطرتون باشه ما باید ضرب سرعت در چگالی روی آستانه را به عنوان محرکه‌ی میدان E در نظر می‌گرفتیم. چون سامانه کمی با حالت پایا فرق داشت؛ چگالی را یکنواخت و ثابت در نظر می‌گرفتیم به طوری که در همسایگی این حالت هم همچنان چگالی ثابت است.
اما این تقریب صحیح نیست! به محض این که علامت سرعت منفی می‌شود (V<۰) چگالی روی مرز به صورت پله‌ای تغییر می‌کند و صفر می‌شود. این به این معنی است که اگر برای محاسبه‌ی میدان اکنون در به تاریخچه‌ی سامانه رجوع می‌کنیم؛ باید در نظر داشته باشیم که سهم این رخداد صفر است.
ما سهام‌های رخدادهایی که در آن‌ها (V<۰) است را زیاد شمرده‌ایم و باید حذف شوند.
این نکته به نظر بخشی از مشکل ماست هنوز روی بقیه استدلال دارم کار می‌کنم،
ارادتمند شما
محسن

استاد: سلام
اگر شرایط اولیه رو این طوری بدیم که مکان همه تصادفی و تاریخچه هم این طور که تا قبل t=۰ سرعت‌ها همه مثل هم و یه کم متفاوت با سرعت تعادل، اون وقت چی؟ (شنبه ۱۰ اردیبهشت)

صحبتی که با استاد مطرح کردم؛ صحیح بود اما نه کاملا صحیح! حدس استاد این است که اگر محور آستانه حول نقطه‌ی گذرفاز خالی شده است به دلیل نامیزان بودن شرایط اولیه است. من حدس خودم و ایشان را مورد بررسی قرار دادم و به این نتیجه رسیدم که گذرفاز در نقطه‌ای رخ می‌دهد که صرفا نورون‌ها کند می‌شوند و برنمی‌گردند؛ یعنی سرعتشان همچنان مثبت است و اندازه‌ی آن کمتر می‌شود اما منفی نمی‌شود. پس حدس من صحیح نبود.
پس کنجکاو می‌شویم که نمایش تمام عیاری از صفحه‌ی فاز داشته باشم و بتوانیم شمایل آنچه را که در سامانه رخ داده؛ به تصویر بکشیم.



(آ) صفحه‌ی فاز نورون تک جریان با پهنای تیزه‌ی $\alpha = ۱۰۰$ (ب) صفحه‌ی فاز نورون تک جریان با پهنای تیزه‌ی $\alpha = ۲۰$

چنان که در شکل ؟؟ می‌بینیم در حالتی که تیزه‌ها تقریبا باریک هستند ($\alpha = ۱۰۰$) تغییر فاز همان است که پیش‌بینی کردیم؛ یعنی در نزدیکی نقطه‌ی $g = ۲\pi$ رخ می‌دهد و به ازای تمام زمان‌های تاخیر ممکن، همین مقدار می‌ماند اما در تیزه‌های پهن این گذرفاز رفتاری دیگر دارد. زمان‌هایی که تاخیر بسیار بزرگتر از زمان ویژه‌ی تاثیر تیزه‌هاست ($d > \alpha^{-۱}$) گذرفاز در همان نقطه رخ می‌دهد.

پس بهتر است این طور جمع بندی کنیم که راه حل ۱۰۷.۶ برای حالتی درست است که زمان ویژه تیزه‌ها در مقایسه با زمان تاخیر نسبتا کم باشد. $d >> \alpha$

حال که مسئله در حالت بسیار ساده حل شد؛ کم‌کم گام‌هایی رو به سمت پیچیده شدن برمی‌داریم. اولین گام آن است که کمیت α را به مجددا به محاسبات خود بازگردانیم تا رابطه‌ی متناظر با ؟؟ برای آن

بدست آوریم. حدس می‌زنیم که تغییر میدان دیگر مانند شکل ۲.۶ تیز نباشد و لبه‌هایی نرم‌تر به خود گیرند.

$$E = E_0 + \epsilon \qquad (t < 0) \tag{۱۱۴.۶}$$

$$E(t) = \frac{a}{2\pi} - \frac{g}{2\pi}\int_0^\infty ds_1\Big(\frac{a}{2\pi} - \frac{g}{2\pi}\int ds_2 E(t-2d-s_1-s_2)\alpha^2 s_2 e^{-\alpha s_2}\Big)\alpha^2 s_1 e^{-\alpha s_1} \tag{۱۱۵.۶}$$

$$= \frac{a}{2\pi}\big[1 - \frac{g}{2\pi} + (\frac{g}{2\pi})^2 + ... + (\frac{-g}{2\pi})^{n-1}\big] \tag{۱۱۶.۶}$$

$$+ (\frac{-g}{2\pi})^n \int_0^\infty \int ... \int E(t-nd-s_1-s_2-...-s_n)\alpha^{2n} s_1 s_2 ... s_n e^{-\alpha(s_1+s_2+...+s_n)} ds_1 ds_2 ... ds_n \tag{۱۱۷.۶}$$

$$= \mathcal{K}_{a,g}(t) \tag{۱۱۸.۶}$$

$$+ (\frac{-g}{2\pi})^n \int_0^\infty \int ... \int E(t-nd-s_1-s_2-...-s_n)\alpha^{2n} s_1 s_2 ... s_n e^{-\alpha(s_1+s_2+...+s_n)} ds_1 ds_2 ... ds_n \tag{۱۱۹.۶}$$

که در این رابطه $\mathcal{K}_{a,g}(t)$ همان پاسخ معادله در حالتی است که تیزه‌ها کاملا باریک هستند.
این روند تو در تو تا زمانی ادامه می‌یابد که انتگرال‌ده ما به زمانی که ما آن را به صورت دستی مقید کرده‌ایم نرسد. زیرا از آن گام به بعد رابطه‌ی میدان از دینامیک گام پیشین خود بدست نمی‌آید.
آخرین گام این رابطه در زمانی است که بخشی از آن در حالت مقید قرار دارد و بخشی از آن در حالت پویا. پس برای آن که این ملاحظه را اعمال کنیم؛ تغییر متغیر $r \equiv \sum s_i$ را می‌دهیم تا ورودی تابع میدان را رصد کند. سپس روی مقادیر مختلف r انتگرال‌ها را جمع می‌زنیم.

$$\int_0^\infty \int ... \int E(t-nd-s_1-s_2-...-s_n)\alpha^{2n} s_1 s_2 ... s_n e^{-\alpha(s_1+s_2+...+s_n)} ds_1 ds_2 ... ds_n \tag{۱۲۰.۶}$$

$$= \int_0^\infty \int ... \int E(t-nd-r)\alpha^{2n} e^{-\alpha(r)} s_1 s_2 ... s_n ds_1 ds_2 ... ds_n \delta(r - \sum s_i) dr \tag{۱۲۱.۶}$$

معادل تابع دلتای دیراک برای ادامه‌ی انتگرال‌گیری مناسب‌تر است.

$$= \int_0^\infty \int ... \int E(t-nd-r)\alpha^{2n} e^{-\alpha(r)} s_1 s_2 ... s_n ds_1 ds_2 ... ds_n \frac{e^{ip(r-\sum s_i)}}{2\pi} dr dp \tag{۱۲۲.۶}$$

$$= \int_0^\infty \int ... \int E(t-nd-r)\alpha^{2n} e^{-\alpha(r)} s_1 s_2 ... s_n ds_1 ds_2 ... ds_n e^{-ip\sum s_i} \frac{e^{ipr}}{2\pi} dr dp \tag{۱۲۳.۶}$$

$$= \int_0^\infty \int E(t-nd-r)\alpha^{2n} e^{-\alpha(r)} \frac{e^{ipr}}{2\pi} [\int_0^\infty s e^{-ips} ds]^n dr dp \tag{۱۲۴.۶}$$

عبارت p در جمله‌ی نهایی باید حتما باید قسمت موهومی منفی داشته باشد تا انتگرال ما قابل تعریف باشد.

$$= \int_{۰}^{\infty} \int E(t-nd-r)\alpha^{۲n}e^{-\alpha r}\frac{e^{ipr}}{۲\pi}(-p^{-۲})^n dpdr \tag{۱۲۵.۶}$$

به کمک حساب‌مانده‌ها می‌دانیم که حاصل قسمت p انتگرال برابر مشتق $۲n-۱$ام از انتگرال‌ده آن است.

$$= (-۱)^n \int_{۰}^{\infty} E(t-nd-r)\alpha^{۲n}e^{-\alpha r}\frac{۲\pi}{۲\pi(۲n-۱)!}i \cdot \frac{\partial^{۲n-۱}e^{ipr}}{\partial p^{۲n-۱}}\ |_{p=۰}\ dr \tag{۱۲۶.۶}$$

$$= \frac{(-۱)^n}{(۲n-۱)!}\int_{۰}^{\infty} E(t-nd-r)\alpha^{۲n}e^{-\alpha r}i \cdot (ir)^{۲n-۱}dr \tag{۱۲۷.۶}$$

$$= \frac{۱}{(۲n-۱)!}\int_{۰}^{\infty} E(t-nd-r)\alpha^{۲n}e^{-\alpha r}r^{۲n-۱}dr \tag{۱۲۸.۶}$$

$$\tag{۱۲۹.۶}$$

همان‌طور که پیشتر گفته بودیم؛ تنها قسمتی از بازه‌ی انتگرال‌گیری ما مربوط به قسمت پویایی است و باید حساب آن را از قسمت قیدی جدا کنیم. این قسمت در بازه‌ی $۰ < r < t-nd$ وجود دارد.

$$= \frac{۱}{(۲n-۱)!}\int_{t-nd}^{\infty} E(t-nd-r)\alpha^{۲n}e^{-\alpha r}r^{۲n-۱}dr + \frac{۱}{(۲n-۱)!}\int_{۰}^{t-nd} E(t-nd-r)\alpha^{۲n}e^{-\alpha r}r^{۲n-۱}dr \tag{۱۳۰.۶}$$

میدان را در زمان‌های مقید می‌دانیم. از روی آن می‌توانیم میدان در گام اول را نیز محاسبه کنیم.

$$= \frac{۱}{(۲n-۱)!}\int_{t-nd}^{\infty} (E_۰+\epsilon)\alpha^{۲n}e^{-\alpha r}r^{۲n-۱}dr + \frac{۱}{(۲n-۱)!}\int_{۰}^{t-nd} (E_۰ - g\epsilon/۲\pi)\alpha^{۲n}e^{-\alpha r}r^{۲n-۱}dr \tag{۱۳۱.۶}$$

$$= \frac{۱}{(۲n-۱)!}(E_۰+\epsilon)\int_{۰}^{\infty} \alpha^{۲n}e^{-\alpha r}r^{۲n-۱}dr + \frac{۱}{(۲n-۱)!}(-\epsilon - g\epsilon/۲\pi)\int_{۰}^{t-nd} \alpha^{۲n}e^{-\alpha r}r^{۲n-۱}dr \tag{۱۳۲.۶}$$

اگر بازه‌ی انتگرال اول از صفر شروع می‌شد؛ آنگاه می‌توانستیم آن را تبدیل به تابع گاما کنیم. اگر چه صورت کنونی آن به این شکل نیست اما می‌توانیم با اضافه کردن ادامه‌ی بازه به انتگرال و کم کردن آن از انتگرال دیگر، خواسته‌ی خود را برآورده کنیم.

$$= \frac{۱}{(۲n-۱)!}(E_۰+\epsilon)(۲n-۱)! + \frac{۱}{(۲n-۱)!}(-\epsilon - g\epsilon/۲\pi)\int_{۰}^{t-nd} \alpha^{۲n}e^{-\alpha r}r^{۲n-۱}dr \tag{۱۳۳.۶}$$

$$= (E_۰+\epsilon) + \frac{۱}{(۲n-۱)!}(-\epsilon - g\epsilon/۲\pi)\gamma(۲n, \alpha(t-nd)) \tag{۱۳۴.۶}$$

حال که جمله‌ی درخواستی خود را محاسبه کردیم؛ آن را در کنار جملات قبلی قرار می‌دهیم تا در نهایت برای میدان داشته باشیم:

$$E(t) = \mathcal{K}_{a,g}(t) \tag{۱۳۵.۶}$$
$$+ (\frac{-g}{۲\pi})^n (E_۰ + \epsilon) \tag{۱۳۶.۶}$$
$$+ (\frac{-g}{۲\pi})^n \frac{۱}{(۲n-۱)!}(-\epsilon - g\epsilon/۲\pi)\gamma(۲n, \alpha(t-nd)) \tag{۱۳۷.۶}$$
$$= \mathcal{K}_{a,g}(t) \tag{۱۳۸.۶}$$
$$+ (\frac{-g}{۲\pi})^n (E_۰ + \epsilon) \tag{۱۳۹.۶}$$
$$+ (\frac{-g}{۲\pi})^n (-\epsilon - g\epsilon/۲\pi)\frac{\gamma(۲n, \alpha(t-nd))}{(۲n-۱)!} \tag{۱۴۰.۶}$$
$$= \mathcal{K}_{a,g}(t) \tag{۱۴۱.۶}$$
$$+ (\frac{-g}{۲\pi})^{\lfloor t/d \rfloor + ۱} (E_۰ + \epsilon) \tag{۱۴۲.۶}$$
$$+ (\frac{-g}{۲\pi})^{\lfloor t/d \rfloor + ۱} (-\epsilon - g\epsilon/۲\pi)\frac{\gamma(۲\lfloor t/d \rfloor, \alpha d(t/d - \lfloor t/d \rfloor))}{(۲n-۱)!} \tag{۱۴۳.۶}$$
$$= E_۰ + (\frac{-g}{۲\pi})^{\lfloor t/d \rfloor + ۱} \cdot \epsilon \tag{۱۴۴.۶}$$
$$+ (\frac{-g}{۲\pi})^{\lfloor t/d \rfloor + ۱} (-\epsilon - g\epsilon/۲\pi)\frac{\gamma(۲\lfloor t/d \rfloor, \alpha d(t/d - \lfloor t/d \rfloor))}{(۲n-۱)!} \tag{۱۴۵.۶}$$
$$\tag{۱۴۶.۶}$$

نتیجه‌ی بدست آمده شامل نکات قابل توجهی است و تا حدودی با شواهد بدست آمده از شبیه‌سازی سازگاری دارد.

۱. در گام‌های مضرب d، تابع گامای ناقص ما به صورت $\gamma(۲n, ۰) = ۰$ درمی‌آید. این باعث می‌شود که فارغ از باریک یا تیزه بودن تیزه‌های ما میدن در این لحظات مطابق عبارت زیر باشد:

$$= \frac{a}{۲\pi}\left[۱ - \frac{g}{۲\pi} + (\frac{g}{۲\pi})^۲ + ... + (\frac{-g}{۲\pi})^{\lfloor t/d \rfloor - ۱}\right] + (\frac{g}{۲\pi})^{\lfloor t/d \rfloor}(E_۰ + \epsilon) \tag{۱۴۷.۶}$$

۲. این عبارت با معادلاتی که برای تیزه‌های باریک بدست آوردیم سازگاری دارد. زیرا اگر کمیت α را به بینهایت میل دهیم؛ بیشینه‌ی تابع گامای ناقص ما به صورت $\gamma(۲n, \infty) = (۲n-۱)!$ درمی‌آید. در این حالت میدان نهایی عبارتی شبیه توصیف کننده‌ی سامانه‌ی تیزه‌های باریک می‌دهد.

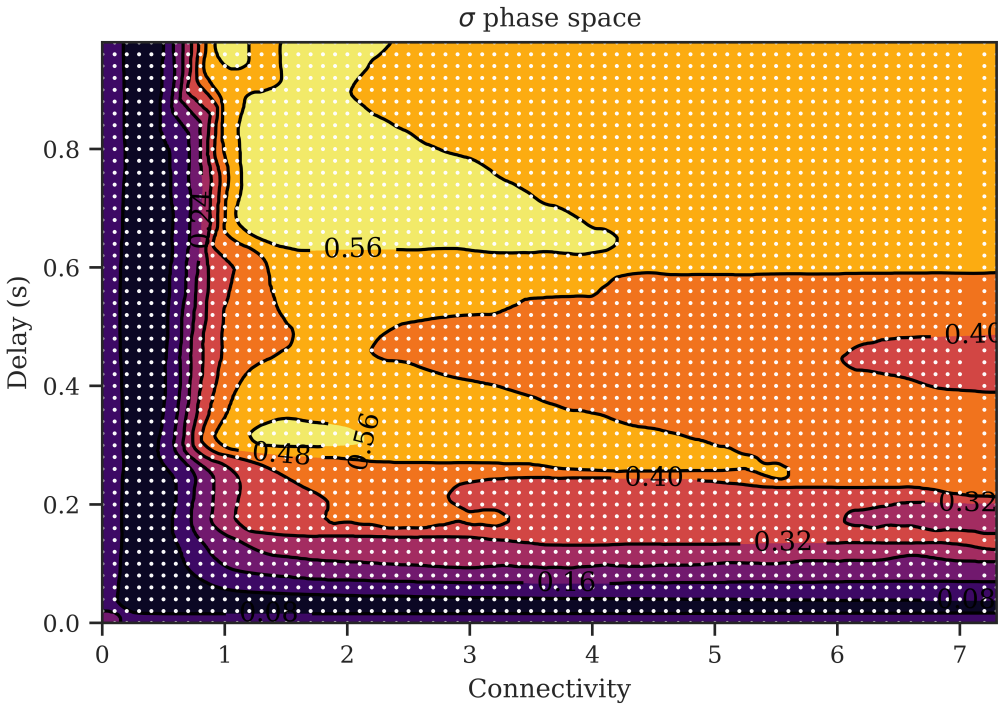
$$= \frac{a}{۲\pi}\left[۱ - \frac{g}{۲\pi} + (\frac{g}{۲\pi})^۲ + ... + (\frac{-g}{۲\pi})^{\lfloor t/d \rfloor - ۱}\right] + (\frac{g}{۲\pi})^{\lfloor t/d \rfloor}(E_۰ - g\epsilon/۲\pi) \tag{۱۴۸.۶}$$

پیوست آ

نمونه‌گیری صفحه فاز

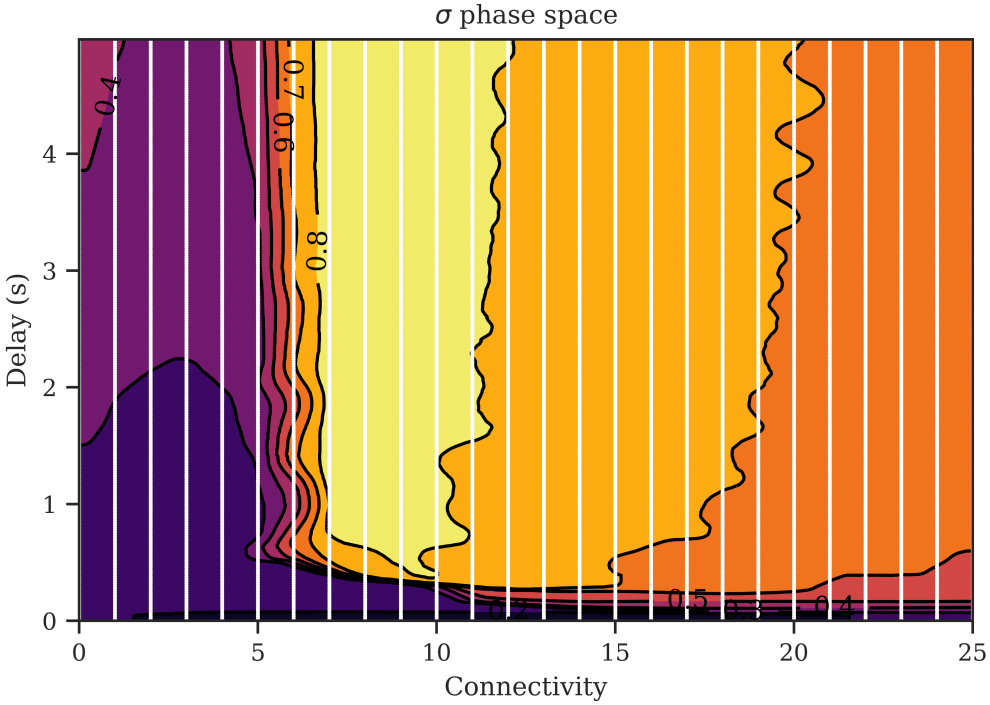
آ.۱ انباشت‌وشلیک

شکل ؟؟ نمایشگر صفحه‌ی فاز است که مقادیر متفاوتی را برای هر نقطه گزارش می‌کند. بدون شک داده‌گیری از تک‌تک نقاط فضا امکان پذیر نبود و برای ایجاد این شکل یک شبکه از نقاط به فاصله‌ی نزدیک از هم استفاده شد و رنگ نقاط میانی از نقطه‌ی همسایه‌ی نزدیک آن‌ها برداشته شد.



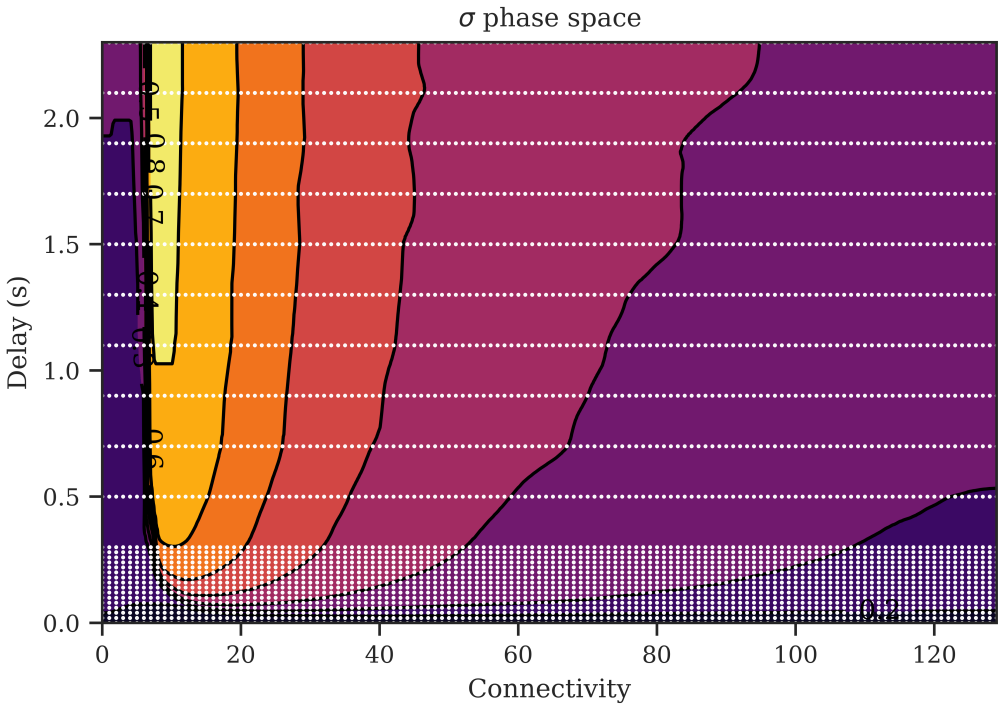
شکل (آ.۱) نقاطی از صفحه فاز که از آن‌ها داده‌گیری انجام شده است به رنگ سفید درآمده‌اند.

آ.۲ چرخنده



شکل (آ.۲) نقاطی از صفحه فاز که از آن‌ها داده‌گیری انجام شده است به رنگ سفید درآمده‌اند.

آ.۳ ساده



شکل (آ.۳) نقاطی از صفحه فاز که از آن‌ها داده‌گیری انجام شده است به رنگ سفید درآمده‌اند.

کتاب‌نامه

[1] Luccioli, Stefano and Politi, Antonio. Irregular collective behavior of heterogeneous neural networks. *Phys. Rev. Lett.*, 105:158104, Oct 2010. 5, 7

[2] Safaeesirat, Amin and Moghimi-Araghi, Saman. Critical behaviour at the onset of synchronization in a neuronal model, 2020. 15, 16