



دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده فیزیک

پایان نامه کارشناسی ارشد
سامانه های پیچیده

عنوان:

مطالعه همگامی در شبکه های عصبی مهاری

نگارش:

محسن مهرانی اردبیلی

استاد راهنما:

استاد سامان مقیمی عراقی

شهریور ۱۴۰۱

اللهُ أَكْبَرُ

فهرست مطالب

۱	شبکه‌ی نورون‌های چرخنده	۷
۱-۰-۱	آهنگ تیزه زدن	۸
۱-۰-۲	نشانگر توسعه یافته‌ی تشخیص همگامی	۸
۱-۰-۳	شبیه‌سازی	۹
۱-۰-۴	نتایج	۹
۱-۰-۵	پهن کردن قالی صفحه‌ی فاز	۱۲
۲	تلاش برای توصیف	۱۵
۲-۰-۱	حل معادله‌ی شبکه‌ی ساده	۱۶
۲-۰-۲	بازی از نو(سامانه‌ی تک‌جریان)	۲۸
۲-۰-۳	از شبکه‌ی ساده به پیچیده‌تر	۴۲
۳	نتیجه‌گیری	۴۹

فهرست شکل‌ها

۲-۱ تعداد تیزه بر حسب جریان تصادفی برای سامانه‌ای با ده هزار نورون و ضریب تاثیر	۱۳ $g = 50$
۱-۲ تطابق جریان پایای بدست آمده از حل عددی و تحلیلی	۲۴
۲-۲ تحول میدان سامانه‌ای تک‌جریان و با تیزه‌های پهن از اختلالی کوچک از حالت پایا (شکل اشتباه است)	۳۱
۳-۲ مشخصه‌ی نظم سامانه ده هزار نورونی تک‌جریان	۳۲
۴-۲ مقایسه‌ی نقطه‌ی گذرفاز محاسبه شده و داده‌های شبیه‌سازی	۴۳
۶-۲ تطبیق شبیه‌سازی عددی با رابطه‌ی تحلیلی ۲۰۳-۲	۴۶

فرصتی برای مدل‌های دیگر نورونی

در بخش قبل به بررسی ویژگی‌های مدل انباشت-شلیک پراختیم. اگر چه این مدل بسیار ساده توانست رفتارهای آشنایی را برای ما بازتولید کند اما شامل محدودیت‌هایی است. این محدودیت‌ها باعث می‌شود تا ما به سراغ مدل‌های نورونی دیگری مانند نورون‌های چرخنده برویم.

این مدل نسبت به مدل قبلی شامل ویژگی‌های مثبتی است. یکی از ویژگی‌های خوب آن این است که پس از بازنشانی فاز نورون تیزه زده، فاز آن به زاویه‌ای بردۀ می‌شود که دارای خواص مثبتاتی مشابهی است. به این معنا که دیگر شاهد گسستگی در اندازه‌ی جملاتی که تحول نورون را توصیف می‌کنند؛ نیستیم.

فصل ۱

شبکه‌ی نورون‌های چرخنده

در این مدل به جای آن که برای شبکه خود از مدل انباشت-شلیک استفاده کنیم از مدل چرخنده استفاده می‌کنیم. در این مدل نورون‌های ما مانند دونده‌هایی به دور میدان مثلثاتی می‌دوند. ما نقطه‌ی فاز π را به عنوان علامت برای این دونده‌ها قرار دادیم. هر زمان که دونده‌ای از علامت خود گذشت یک تیزه برای او در نظر می‌گیریم و بلافاصله او را به فاز π - باز می‌گردانیم.

برای توصیف فاز هر نورون از معادلات زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_i = I_i - \cos(\theta_i) - gE, & -5\pi/2 \leq \theta_i \leq \pi \\ \dot{E} = M - \alpha E \\ \dot{M} = -\alpha M + \frac{\alpha}{N} \sum_{n|t_n < t} \delta(t - t_n - t_d) \end{cases} \quad (1-1)$$

- θ_i : مشخص کننده فاز هر نورون. این فاز میان دو لبه در حال حیات است. کوچکترین کران بالای آن همان حالت آستانه در π است و بزرگترین کران پایین آن نگهدارنده‌ای است که از ریزش نورون‌ها جلوگیری می‌کند.
- E : میدانی است که شدت فعالیت شبکه را نشان می‌دهد.
- M : یک پارامتر فرعی که در حل معادله دیفرانسیل مرتبه دوم به دو معادله‌ی تحول مرتبه اول ما را یاری کرده است.

۱-۰-۱ آهنگ تیزه زدن

برای نورونی تنها که پویایی از جنس چرخنده دارد؛ دوره‌ی تناوب تیزه زدن آن بر حسب مجموع جریان ورودی رفتاری مطابق زیر دارد [۴]:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{I^2 - 1}} \quad (2-1)$$

این به این معناست که مدل چرخنده و انباستوشلیک اگرچه هر دو با افزایش جریان، بسامد تیزه زدن‌شان افزایش می‌یابد اما رفتار تغییر آن به دو گونه‌ی متفاوت صورت می‌پذیرد. این نکته‌ی مهمی است که در هنگام مقایسه‌ی دو مدل باید به خاطر داشته باشیم.

۲-۰-۱ نشانگر توسعه یافته‌ی تشخیص همگامی

برای تشخیص همگامی از یک پارامتر دیگری که در این مقاله [۴] توسط نویسنده‌گان ابداع شده است؛ بهره می‌بریم.

$$s = \left\langle \left[\frac{1}{N_a} \sum_{i_a} \sin(\theta_{i_a}) \right]^2 \right\rangle_t \quad (3-1)$$

میانگین‌گیری بالا روی ۱۰۰۰ گام آخر زمانی انجام می‌شود. این فاصله زمانی باید حتماً بزرگ‌تر از گام‌های زمانی تحول ریز مقیاس آن باشد. همچنین برای این متوسط‌گیری نورون‌هایی را مدنظر می‌گیریم که در منطقه‌ی فعال قرار گرفته‌اند. منطقه‌ی فعال، سمت چپ دایره مثلاً است.

۳-۰-۱ شبیه‌سازی

ثوابت مسئله را به گونه‌ی زیر انتخاب می‌کنیم.

$$\alpha = 20 s^{-1} *$$

* جریان‌های تصادفی خارجی نورون‌ها از اعضای بازه‌ی (۹/۵, ۱۳/۵) انتخاب می‌شوند. این بازه به گونه‌ای انتخاب شده است که نورون خاموشی در سامانه وجود نداشته باشد.

$$N = 10000 *$$

$$t_d = 0.1 s *$$

حال شبکه‌ی خود را به ازای قدرت اتصال‌های مختلف اجرا می‌کنیم تا مجدداً تحقیق کنیم که چگونه تغییر در قدرت اتصال و می‌تواند باعث شود تا تغییر فاز از ناهم‌گامی به هم‌گامی رخ دهد. برای مشاهده‌ی دفترچه شبیه‌سازی به آدرس [مسئله همگامی برای مدل چرخنده](#) مراجعه کنید.

۴-۰-۱ نتایج

مرتبه‌ی اجرای این الگوریتم خطی است و برای یک شبکه شامل ۱۰۰۰ نورون و برای ۱۰۰۰ گام شبیه‌سازی زمانی در حدود ۴ ثانیه به طول می‌انجامد.

در جستجوی تغییر فاز

پس از رصد کردن تغییرات رفتار سیستم بر حسب قدرت مهار نورون‌ها، تغییر فاز مانند مدل قبلی مشاهده شد اما مکان تغییر فاز تغییر کرد و حول $30 = g$ قرار گرفت. این تغییر فاز در دو شکل ۱-۱آ و ۱-۱ب قابل مشاهده است.

فاصله زمانی بین تیزه‌ها

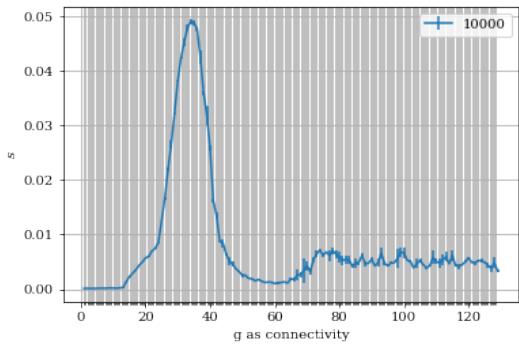
حال که دیدیم برخی نورون‌ها همواره خاموش می‌مانند و یا به عبارتی دوره‌ی تیزه زدن آن‌ها بینهایت است؛ خوب است که دوره‌ی تیزه زدن‌های نورون‌های دیگر را نیز بررسی کنیم. شکل ۱-۱ج این شکل نمایان‌گر آن است که توزیع دوره‌ها به توزیع بی‌توانی و رفتار بی‌مقیاس نزدیک است. همچنین توجه کنیم که با افزایش ضریب تاثیر رفتار توانی آن‌ها تغییر نمی‌کند. تنها تفاوت در چگونگی انتخاب جایگاه‌های روی خط است. هر چه ضریب تاثیر بزرگتر می‌شود نورون‌ها فاصله‌ی زمانی تیزه‌های بزرگتری را اتخاذ می‌کنند.

با این مشاهده، کنجدکاو می‌شویم تا نمای بحرانی را برای آن حساب کنیم. در شکل ۱-۱د با گذراندن یک خط بر داده‌های بدست آمده از شبکه‌ای با قدرت مهار $20 = g$ را می‌بینیم.

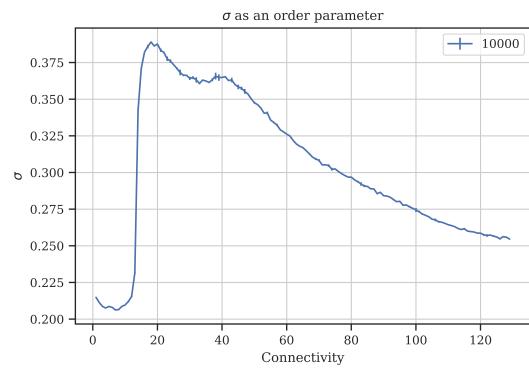
فعالیت شبکه

همان طور که دیدیم تعدادی از نورون‌ها در شبکه به حالت خاموش درمی‌آیند. قابل حدس است که اگر جمعیتی خاموش در شبکه داشته باشیم؛ احتمالاً آنها بی‌استنده‌ی هستند که جریان تصادفی اولیه آن‌ها از بقیه کمتر است. برای تحقیق این حدس لازم است تا تعداد تیزه‌های نورون‌های شبکه را بر حسب جریان تصادفی اولیه آنها مرتب کنیم. شکل ۱-۲ نشانگر سامانه‌ای از ده هزار نورون است که با قدرت $50 = g$ روی هم تاثیر می‌گذارند. لازم به ذکر است که این رفتار در فاز هم‌گام قابل مشاهده است. در فاز ناهم‌گام تمام نورون‌ها که از هم تاثیر کمتری می‌پذیرند؛ فعال هستند.

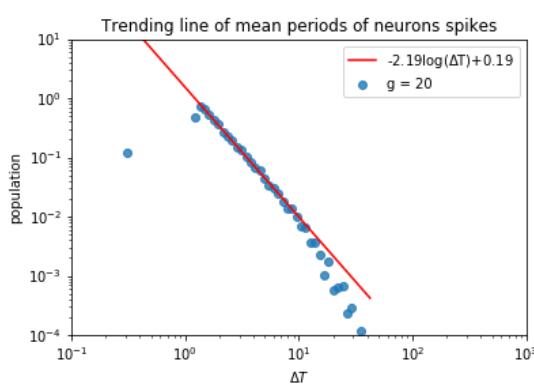
تعداد تیزه‌های کل شبکه رابطه‌ی مستقیمی با جریان خارجی جاری در شبکه دارد. می‌توانیم با محاسبات تحلیلی نیز به شکل بدست آمده از شبیه‌سازی عددی نزدیک شویم:



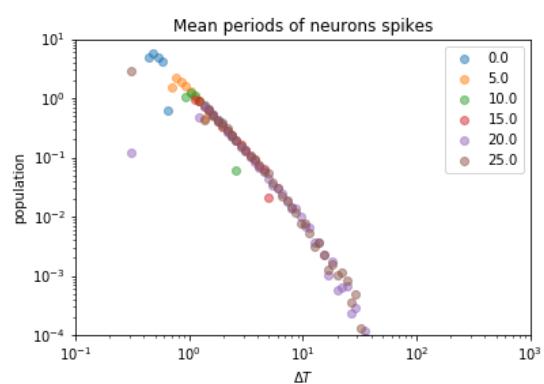
(ب) پارامتر نظم تعریف شده در رابطه ۳-۱ برای مدل



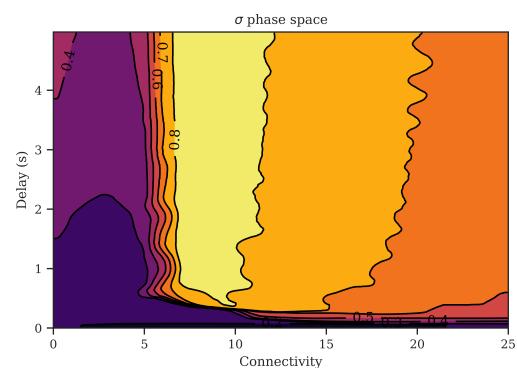
(آ) پهنهای جریان یک سامانه چرخنده با ده هزار نورون چرخنده



(د) محاسبهی نمای بحرانی



(ج) فاصلهی زمانی بین تیزه زدن‌ها



(ه) صفحهی فاز مربوط به سامانهی نورون‌های چرخنده:

پیوست ??

$$\begin{cases} I_{in} &= -g \int_{a_{min}}^{a_{max}} p(a) f(a + I_{in}) da \\ f(a) &= \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{2\pi} \end{cases} \quad (4-1)$$

در رابطه ۴-۱ ، $f(a)$ تابع فعالیت (تعداد تیزه بر ثانیه) تک نورون بر حسب جریان کل ورودی آن است. همچنین I_{in} تمام جریان خارجی جاری در شبکه است. حل این رابطه کمی دشوار است زیرا جریان کل را بر حسب خودش محاسبه کرده است. اما از آنجایی که در انتگرال ده تنها یک جابجایی ثابت رخداده است؛ صورت کلی پاسخ انتگرال تغییر نمی‌کند و به صورت زیر بدست خواهد آمد.

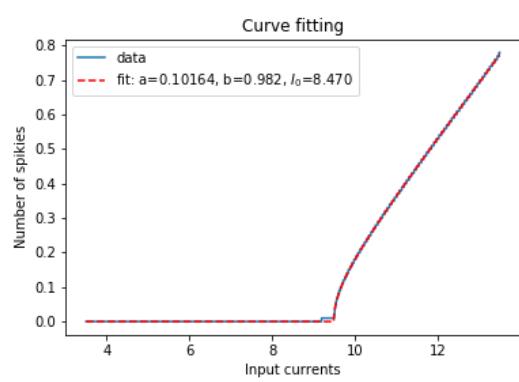
$$I_{in} = \frac{-g}{2} (-a\sqrt{-1 + a^2} + \log(a + \sqrt{-1 + a^2})) \Big|_{a_{min} + I_{in}}^{a_{max} + I_{in}} \quad (5-1)$$

۵-۰-۱ پهن کردن قالی صفحه‌ی فاز

در قسمت‌های پیشین تنها به مطالعه‌ی تاثیر ضریب اتصال در تغییر فاز پرداختیم و زمان تاخیر را تنها در $t_d = 0/1s$ خلاصه کردیم. حال اجازه دهید تا به تاخیر نیز اجازه‌ی تغییر دهیم. در ادامه‌ی این قسمت از نوشتارمان، به فرش کردن صفحه‌ی فاز خود خواهیم پرداخت. امید است که چهره‌ی تمام نمای سامانه بر صورت این قالی نقش بندد.

قالی انحراف از معیار میدان

در شکل ۱-۱ مشاهده می‌کنیم که شدت هم‌گامی در هر کدام از هنگرهای سامانه چقدر است. بنظر می‌رسد که با افزایش زمان تاخیر و ضریب تاثیر هم‌گامی قدرت پیدا می‌کند و هر دو در ظهور این رفتار شریک هستند.



شکل (۲-۱) تعداد تیزه بر حسب جریان تصادفی برای سامانه‌ای با ده هزار نورون و ضریب تاثیر

$$g = 50$$

فصل ۲

تلاش برای توصیف

از آنجا که شبیه‌سازی این سامانه شامل تعریف فرآیندهای متفاوتی بود؛ بدیهی است که نوشتن معادله‌ی تحلیلی برای توصیف کامل آن آسان نباشد. اما در این بخش تلاش می‌کنیم که با کنار هم قرار دادن معادلات اصلی چارچوب مسئله‌ی خود را مشخص کنیم.

هر نورون که از حالت $\pi = \theta$ عبور می‌کند [تیزه می‌زند] باعث می‌شود تا سهمی از جریان با کیفیت $E(t) := \alpha^2 t \cdot \exp(-\alpha t)$ به جریان درونی کل سامانه $p(t) := \alpha^2 t \cdot \exp(-\alpha t)$ اضافه شود.

$$E(t) = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} \int J_a(\pi, t - d - u) da \cdot \alpha^2 u e^{-\alpha u} du \quad (1-2)$$

اما جریان برای هر نورون با ورودی a به طریق زیر است:

$$J_a(\theta, t) = n_a(\theta, t) \cdot \dot{\theta}_a \quad (2-2)$$

این رفتار به خوبی نشان می‌دهد جریان فقط در ناحیه‌ی $\pi \leq \theta$ وجود دارد. زیرا ورود نورون به ناحیه‌ی مثبت‌تر را ممنوع کردہ‌ایم. بی‌تردید برای فهمیدن چگونگی تغییر جریان در ناحیه‌های میانی باید از معادله‌ی پخش استفاده کنیم.

$$\frac{\partial n_a}{\partial t} = -\frac{\partial J_a}{\partial \theta} \quad (3-2)$$

$$= -\frac{\partial n_a}{\partial \theta} \cdot \dot{\theta}_a \quad (4-2)$$

۱-۰-۲ حل معادله‌ی شبکه‌ی ساده

اجازه بدهید تا اولین تلاش خود را از ساده‌ترین نوع شبکه‌ها شروع کنیم. شبکه‌ای که به جز جریان داخلی و جریان تصادفی اولیه ورودی دیگری ندارد. پس خواهیم داشت:

$$\begin{cases} E(t) = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} \int n_a(\pi, t - d - u) \cdot [a - gE(t - d - u)] da \cdot \alpha^u u e^{-\alpha u} du \\ \frac{\partial n_a}{\partial t} = -\frac{\partial n_a}{\partial \theta} \cdot (a - gE(t)) \end{cases} \quad (5-2)$$

چند پیشنهاد می‌شود برای ادامه‌ی راه حل داشت. (درون یک جعبه قرار گیرد با این عنوان که پیشنهادات من چه بود و استاد چه گفت).

۱. از آنجا که میدان به گونه‌ای متناوب عمل می‌کند؛ یک پیشنهاد خوب می‌تواند آن باشد که بسط فوریه‌ی آن را بنویسیم.

$$E(t) = \sum c_i \cdot \cos(\omega_i t) \quad (6-2)$$

که اگر ثابت کنیم c_1 از بقیه ضرایب بزرگتر است؛ مساله‌ی ما حل می‌شود.

۲. دشواری مساله از در هم تنیدگی معادلات برآمده است. اگر به تقریب در معادله‌ی پخش میدان را یک نوفه درنظر بگیریم و پاسخ را در معادله‌ی اول قرار دهیم.

۳. انتگرال اول را به صورت بازگشتی در خودش جاگذاری کنیم.

۴. مسئله را در حالت آماری بررسی کنیم و حالت پایستار آن را پیدا کنیم و بپرسیم در چه حالتی است که حالت پایستار داریم.

روش بازگشتی

نکته‌ای که برای ما حل معادلات را دشوار می‌کند تبعیت E از خودش است. بگذارید به شیوه‌ای که خود معادله درخواست دارد عمل کنیم. یعنی E را مجددا در سمت راست معادله جاگذاری کنیم. برای راحت‌تر شدن محاسبات ابتدا دو متغیر کمکی زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{J}(\pi, t - d - u) \equiv \int n_a(\pi, t - d - u) a \cdot da \quad (7-2)$$

$$\mathcal{N}(\pi, t - d - u) \equiv \int n_a(\pi, t - d - u) \cdot da \quad (8-2)$$

$$\mathcal{P}(u) \equiv \alpha' u e^{-\alpha u} \quad (9-2)$$

عبارت $\mathcal{J}(\pi, t - d - u)$ به معنای جمع جریان تصادفی نورون‌هایی است که در زمان u در آستانه قرار دارند.
همچنین عبارت $\mathcal{N}(\pi, t - d - u)$ به معنای تعداد همین نورون‌هاست.
حال با نمادهای بالا شروع به بازنویسی جملات پیشین می‌کنیم:

$$E(t) = \frac{1}{N} \int_{-d}^{\infty} \mathcal{J}(\pi, t - d - u_1) \cdot \mathcal{P}(u_1) du_1 - \frac{g}{N} \int_{-d}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t - d - u_1) \cdot \mathcal{P}(u_1) E(t - d - u_1) du_1 \quad (10-2)$$

حال جمله‌ی اول را نیز با عبارت دیگری خلاصه‌سازی می‌کنیم:

$$\mathcal{A}(t) \equiv \frac{1}{N} \int_{-d}^{\infty} \mathcal{J}(\pi, t - d - u_1) \cdot \mathcal{P}(u_1) du_1 \quad (11-2)$$

در خصوص جمله‌ی دوم نیز مشابها عبارت مربوط به E را در آن جاگذاری می‌کنیم.

$$E(t - d - u_1) = \frac{1}{N} \int_{-d}^{\infty} \mathcal{J}(\pi, t - 2d - u_1 - u_2) \cdot \mathcal{P}(u_2) du_2 - \frac{g}{N} \int_{-d}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t - 2d - u_1 - u_2) \cdot \mathcal{P}(u_2) E(t - 2d - u_1 - u_2) du_2 \quad (12-2)$$

$$(13-2)$$

این عبارت جمع تعداد همه‌ی تیزه‌هایی است که تا گام $t - d$ زده شده‌اند و درنتیجه جمله‌ای انباشتی است. پس خواهیم داشت:

$$E(t) = \mathcal{A}(t-d) - g \int_{\cdot}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-d-u_{\downarrow}) \cdot \mathcal{P}(u_{\downarrow}) E(t-d-u_{\downarrow}) du_{\downarrow} \quad (14-2)$$

$$= \mathcal{A}(t-d) - g \int_{\cdot}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-d-u_{\downarrow}) \cdot \mathcal{P}(u_{\downarrow}) \cdot [\mathcal{A}(t-\gamma d-u_{\downarrow}) - g \int_{\cdot}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-d-u_{\downarrow}-u_{\uparrow}) \cdot \mathcal{P}(u_{\uparrow}) E(t-\gamma d-u_{\downarrow}-u_{\uparrow}) du_{\uparrow}] du_{\downarrow} \quad (15-2)$$

$$= \mathcal{A}(t-d) - g \int_{\cdot}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-d-u_{\downarrow}) \cdot \mathcal{P}(u_{\downarrow}) \cdot \mathcal{A}(t-\gamma d-u_{\downarrow}) du_{\downarrow} \quad (16-2)$$

$$+ g^{\gamma} \int_{\cdot}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-d-u_{\downarrow}) \cdot \mathcal{P}(u_{\downarrow}) \int_{\cdot}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-\gamma d-u_{\downarrow}-u_{\uparrow}) \cdot \mathcal{P}(u_{\uparrow}) E(t-\gamma d-u_{\downarrow}-u_{\uparrow}) du_{\uparrow} du_{\downarrow} \quad (17-2)$$

$$= \mathcal{A}(t-d) - g \int_{\cdot}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-d-u_{\downarrow}) \cdot \mathcal{P}(u_{\downarrow}) \cdot \mathcal{A}(t-\gamma d-u_{\downarrow}) du_{\downarrow} \quad (18-2)$$

$$+ g^{\gamma} \int_{\cdot}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-d-u_{\downarrow}) \cdot \mathcal{P}(u_{\downarrow}) \int_{\cdot}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-\gamma d-u_{\downarrow}-u_{\uparrow}) \cdot \mathcal{P}(u_{\uparrow}) \mathcal{A}(t-\gamma d-u_{\downarrow}-u_{\uparrow}) du_{\uparrow} du_{\downarrow} \quad (19-2)$$

$$- g^{\gamma} \int_{\cdot}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-d-u_{\downarrow}) \cdot \mathcal{P}(u_{\downarrow}) \int_{\cdot}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-\gamma d-u_{\downarrow}-u_{\uparrow}) \cdot \mathcal{P}(u_{\uparrow}) \int_{\cdot}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-\gamma d-u_{\downarrow}-u_{\uparrow}-u_{\uparrow}) \cdot \mathcal{P}(u_{\uparrow}) E(t-\gamma d-u_{\downarrow}-u_{\uparrow}-u_{\uparrow}) du_{\uparrow} du_{\uparrow} du_{\downarrow} \quad (20-2)$$

حال اگر عمر این سامانه کراندار باشد؛ تعداد جملات بالا محدود می‌شوند. پس اگر سامانه پیش از یک زمانی کاملا خاموش بوده باشد، $E = 0$ ؛ آنگاه می‌توان میدان کنونی را بر اساس جملات ضربی بین شدت جریان و تعداد نورون‌های تیزه زده پیدا کرد.

روش اختلال

به نمودار ۱-۱ دقت کنید. در زمانی که تعداد نورون‌ها بی‌نهایت باشد؛ در فاز ناهم‌گام انحراف معیار میدان صفر خواهد شد. این به این معنی است که جریان در زمان ثابت خواهد ماند. پس بگذارید با علم بر این موضوع یک جواب معادله ۵-۲ را در حالت حدی میدان ثابت E ، معرفی کنیم. با فرض ثابت بودن میدان، اندازه‌ی آن را محاسبه می‌کنیم. سپس مجدد به معادلات برمی‌گردیم و می‌پرسیم که در صورت جمع با یک جمله‌ی اختلالی کوچک این انحراف رشد خواهد کرد یا خیر. به عبارت دیگر آیا این جواب جاذب است.

$$\begin{cases} E_{\cdot} = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{t-d} \int n_a(\pi, u) \cdot [a - gE_{\cdot}] da \cdot \alpha^{\gamma} u e^{-\alpha u} du \\ \frac{\partial n_a}{\partial t} = -\frac{\partial n_a}{\partial \theta} \cdot (a - gE_{\cdot}) \end{cases} \quad (21-2)$$

یک راه خوب برای پیشبرد سطر اول معادلات آن است که از دو طرف آهنگ تغییرشان با زمان را بپرسیم. از آنجا که سمت چپ معادله ثابت است؛ سمت راست هم باید جوابی مشابه را حکایت کند.

$$\cdot = \frac{dE_{\cdot}}{dt} = \frac{\alpha^{\gamma}(t-d)e^{-\alpha(t-d)}}{N} \cdot [-gE_{\cdot} \cdot \int n_a(\pi, t-d) da + \int n_a(\pi, t-d) \cdot a da] \quad (22-2)$$

مشخص است که کدام جمله از جملات ضربی بالا صفر است. پس برای E خواهیم داشت:

$$E_{\cdot} = \frac{1}{g} \cdot \frac{\int n_a(\pi, t-d) \cdot a da}{\int n_a(\pi, t-d) da} \quad (23-2)$$

حال برای ادامه‌ی فرآیند نیاز داریم تا عبارت حاکم بر $n_a(\pi, t-d)$ را بدست آوریم. جواب پیشنهادی

ما برای سطر دوم معادلات از جنس تابع دلتاست:

$$n_a(\theta, t) = \delta(\theta - \theta_a(t)) \quad (24-2)$$

$$= \delta(\theta + \theta_0 - (a - gE_0)t + 2 \lfloor K_a^{(t)} \rfloor \pi) \quad (25-2)$$

$$= \delta(\theta - (a - gE_0)t + 2 \lfloor K_a^{(t)} \rfloor \pi + \theta_0) \quad (26-2)$$

$$\Rightarrow n_a(\pi, t) = \delta((2 \lfloor K_a^{(t)} \rfloor + 1)\pi - (a - gE_0)t + \theta_0) \quad (27-2)$$

$$(28-2)$$

که در این معادلات $K_a^{(t)}$ کسری است که تعداد دور هر نورون را از آغاز تا کنون روایت می‌کند و ما مجبور به عقب کشیدن 2π فاز کامل پس از تیزه زدن آن به تعداد $\lfloor K_a^{(t)} \rfloor$ شده‌ایم.^۱ قابل محاسبه است که عبارت کامل آن به صورت زیر است.

$$K_a^{(t)} = \frac{(a - gE_0)t + \pi + \theta_0}{2\pi} \quad (29-2)$$

برای محاسبه انتگرال‌هایی که شامل این دلتای دیراک هستند؛ لازم است تا صفرهای آرگومان آن را محاسبه کنیم.

$$(2 \left\lfloor \frac{(a - gE_0)t + \pi + \theta_0}{2\pi} \right\rfloor + 1)\pi - (a - gE_0)t + \theta_0 = 0 \quad (30-2)$$

$$2\pi \times \left(\left\lfloor \frac{(a - gE_0)t + \pi + \theta_0}{2\pi} \right\rfloor - \frac{(a - gE_0)t + \pi + \theta_0}{2\pi} \right) = 0 \quad (31-2)$$

$$2\pi \times \left(\lfloor K_a^{(t)} \rfloor - K_a^{(t)} \right) = 0 \quad (32-2)$$

این رابطه کاملاً یک تابع تناوبی را توصیف می‌کند. یک تابع مقطع که در مکانی که آرگومان آن صحیح می‌شود؛ مقدار صفر به خود می‌گیرد. پس روشن است که موقع داشته باشیم. تعداد صفرهای این معادله به اندازه‌ی تعداد تناوبی است که در هر زمان در بازه‌ی جریان‌های داده شده دارد.

$$\Delta K_a^{(t)} = 1 \quad (33-2)$$

$$\Delta K_a^{(t)} = \frac{t}{2\pi} \Delta a \quad (34-2)$$

$$\Delta a = \frac{2\pi}{t} \quad (35-2)$$

^۱ دقت کنیم که معادله‌ی ذکر شده برای نورون‌هایی درست است که $(a - gE_0) > 0$

این دوره‌ی تناوب با افزایش زمان کوچکتر می‌شود. اگر تعداد نورون‌ها را به صورتی ترمودینامیکی بزرگ بگیریم؛ آنگاه به ازای هر دوره‌ی تناوب یک نورون حتماً هست که روی محور آستانه قرار گرفته است. حال که دوره‌ی تناوب Δa را بدست آوردیم؛ می‌دانیم که ریشه‌های رابطه‌ی ۳۲-۲ چه زمانی رخ می‌دهند. فرض کنیم که اولین صفر در جریانی مثل a_m رخ می‌دهد. توجه کنید حتماً اندازه‌ی این جریان به گونه‌ای است که نورون را به صورت فعال نگه دارد. پس باید حتماً $(a_m - gE_*) > 0$ باشد. حال می‌توانیم انتگرال‌های مورد نظر خود را این چنین بسط دهیم.

$$\int n_a(\pi, t-d) a da = \int \delta\left(2\pi(\lfloor K_a^{(t)} \rfloor - K_a^{(t)})\right) a da \quad (36-2)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{K_a^{(t)} \in Z} a_i \quad (37-2)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{m=1}^M a_m + m \cdot \Delta a \quad (38-2)$$

$$= \frac{M+1}{2\pi} \cdot \left(\frac{a_m + a_{max}}{2}\right) \quad (39-2)$$

$$(40-2)$$

واز طرفی:

$$\int n_a(\pi, t-d) da = \int \delta\left(2\pi(\lfloor K_a^{(t)} \rfloor - K_a^{(t)})\right) da \quad (41-2)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{K_a^{(t)} \in Z} 1 \quad (42-2)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{m=1}^M 1 \quad (43-2)$$

$$= \frac{M+1}{2\pi} \quad (44-2)$$

حال اگر به محاسبه‌ی میدان ثابت خود برگردیم و تکه‌های پازل را کنار هم بگذاریم؛ خواهیم داشت:

$$E_* = \frac{1}{g} \cdot \frac{\int n_a(\pi, t-d) \cdot a da}{\int n_a(\pi, t-d) da} \quad (45-2)$$

$$= \frac{1}{g} \cdot \frac{\frac{M+1}{2\pi} \cdot \left(\frac{a_m + a_{max}}{2}\right)}{\frac{M+1}{2\pi}} \quad (46-2)$$

$$= \frac{1}{g} \left(\frac{a_m + a_{max}}{2}\right) \quad (47-2)$$

این میدان معادل است با جریان میانگین بین نورونهایی که آنها را روشن خطاب کرده بودیم. این نتیجه صحیح نیست زیرا اگر میدان در میانه‌ی این جریان‌ها قرار گیرد؛ آنگاه نورونهای با جریان پایین دست $\frac{1}{g}(\frac{a_m+a_{max}}{2}) < a$ را خاموش خواهد کرد و اصلاً روشن نخواهند ماند.

روش آماری

در این روش فرض می‌کنیم که برای هر جریان تصادفی اولیه، نورونهای زیادی را به اختیار گرفته‌ایم. در حالت پایا، در یک حالت خاص تغییری در چگالی جمعیت مشاهده نمی‌شود پس در معادله‌ی ۵-۲ خواهیم داشت:

$$\frac{\partial n_a}{\partial t} = 0 \quad (48-2)$$

همچنین در حالت پایا که در واقع از نگاه ما حالت ناهمگام است؛ جریان بین نورون‌ها - که کمیتی بزرگ مقیاس است - در زمان تغییری نمی‌کند. پس به این ترتیب:

$$\begin{cases} \frac{\partial n_a}{\partial t} = -\frac{\partial J_a(t)}{\partial \theta} = 0 \\ J_a(\theta, t) = n_a(\theta, t) \cdot [a - gE] \end{cases} \Rightarrow J_a(\theta, t) = J_a(t) \quad (49-2)$$

$$\Rightarrow n_a(\theta, t) = n_a \quad (50-2)$$

$$(51-2)$$

پس توزیع جمعیت نورون‌ها مستقل از زمان و حالت آنها خواهد شد. اگر توزیع را در ابتدا یکنواخت میان جریان‌های مختلف توزیع کرده باشیم؛ برای همه‌ی زمان‌ها و حالت‌ها داریم:

$$n = \frac{N}{2\pi(a_{Max} - a_{min})} \quad (52-2)$$

برای جریان بین نورون‌ها هم خواهیم داشت:

$$E = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{t-d} \int n \cdot [a - gE] da \cdot \alpha u e^{-\alpha u} du \quad (53-2)$$

$$= \int \frac{n}{N} \cdot [a - gE] da \quad (54-2)$$

دقت کنیم که انتگرال رابطه‌ی ۵۴-۲ روی نورون‌هایی است که مستعد تیزه زدن هستند.^۱

اولین جریانی که نورون را مستعد تیزه زدن می‌کند a_* نام‌گذاری می‌کنیم. وقتی جریان مهاری حاصل از تیزه زدن‌ها کوچک است؛ همه‌ی نورون‌ها فعال هستند و در نتیجه $a_* = a_{min}$ می‌شود. اما در حالتی که جریان مهاری زیاد می‌شود؛ این مقدار از کمترین جریان تصادفی اولیه سامانه بزرگتر می‌شود. محاسبات را ادامه می‌دهیم:

$$E = \int \frac{n}{N} \cdot [a - gE] da \quad (55-2)$$

$$= \frac{n}{N} \cdot \left[\frac{a_{Max}^* - a_*^*}{2} - gE(a_{Max} - a_*) \right] \quad (56-2)$$

$$\Rightarrow E = n \cdot \left[\frac{a_{Max}^* - a_*^*}{2} \right] / [N + gn(a_{Max} - a_*)] \quad (57-2)$$

شاید بنظر این یک معادله‌ی درجه یک ساده باشد که میدان را گزارش می‌کند اما در واقع خود a^* هم به میدان وابسته است و باید وابستگی آن را لحاظ کنیم. به تقریب: $a^* = gE$ با اضافه کردن این معادله و حل معمول یک معادله‌ی درجه‌ی دو برای میدان صراحتاً خواهیم داشت:

$$E = \left(\frac{a_{Max}}{g} + \frac{N}{ng^{\frac{1}{2}}} \right) \pm \left[\left(\frac{N}{ng^{\frac{1}{2}}} + \frac{a_{Max}}{g} \right)^2 - \frac{a_{Max}^2}{g^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (58-2)$$

نتیجه می‌دهد که a_* هم باید به صورت زیر باشد:

$$a_* = \left(a_{Max} + \frac{N}{ng} \right) \pm \left[\left(\frac{N}{ng} + a_{Max} \right)^2 - a_{Max}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (59-2)$$

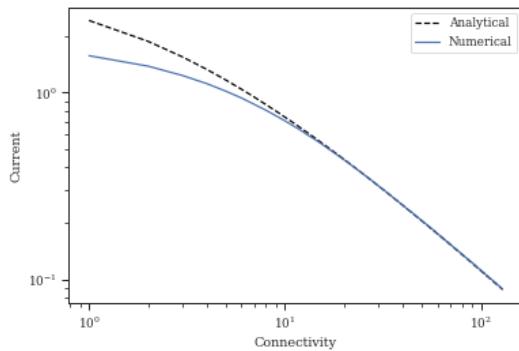
$$= \left(a_{Max} + \frac{N}{ng} \right) \pm \left[\frac{N^2}{n^2 g^2} + \frac{2a_{Max} N}{ng} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (60-2)$$

اجازه بدھید علامت مثبت را کنار بگذاریم زیرا مقدار a_* را خارج بازه‌ی جریان‌های سامانه گزارش می‌کند. پس هم برای میدان و هم جریان a_* خواهیم داشت:

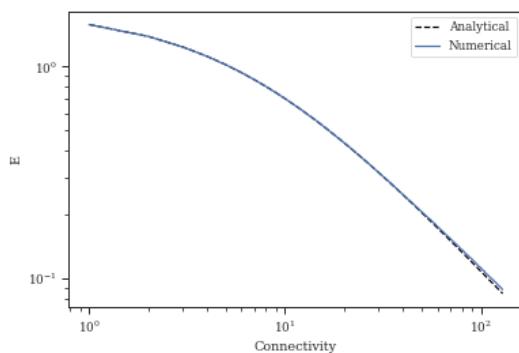
$$\begin{cases} a_* = \left(a_{Max} + \frac{N}{ng} \right) - \left[\frac{N^2}{n^2 g^2} + \frac{2a_{Max} N}{ng} \right]^{\frac{1}{2}} \\ E = \left(\frac{a_{Max}}{g} + \frac{N}{ng^{\frac{1}{2}}} \right) - \left[\frac{N^2}{n^2 g^2} + \frac{2Na_{Max}}{ng^{\frac{1}{2}}} \right]^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (61-2)$$

حال اگر نتایج بدست آمده را با داده‌های شبیه‌سازی تطبیق دهیم؛ خواهیم دید که تطابق خوبی با یک دیگر دارند.

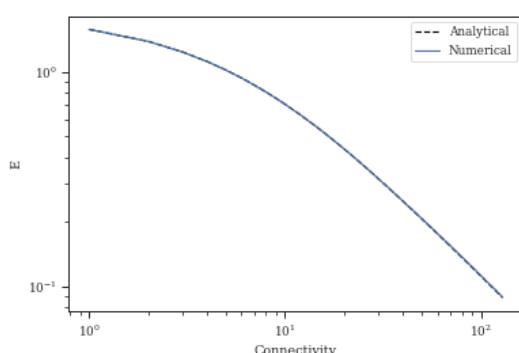
$$(a - gE) > 0 \quad 2$$



(آ) نسخه‌ای که کمینه‌ی جریان را از حل محاسبات درنظر می‌گیرد



(ب) نسخه‌ای که همه‌ی نورون‌ها را فعال تصور می‌کند.



(ج) نسخه ساخته شده از اتصال دوتای دیگر

شکل (۱-۲) تطابق جریان پایای بدست آمده از حل عددی و تحلیلی

در ضریب تاثیرهای بسیار بزرگ داریم:

$$E \cong \frac{a_{Max}}{g} + \frac{N}{ng^{\frac{1}{2}}} - \left(\frac{\sqrt{N}a_{Max}}{ng^{\frac{3}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{N}{\sqrt{N}ga_{Max}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (62-2)$$

$$= \frac{a_{Max}}{g} + \frac{N}{ng^{\frac{1}{2}}} - \left(\frac{\sqrt{N}a_{Max}}{ng^{\frac{3}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{N}{\sqrt{N}ga_{Max}} \right] \quad (63-2)$$

$$= \frac{a_{Max}}{g} - \left(\frac{\sqrt{N}a_{Max}}{ng^{\frac{3}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{N}{ng^{\frac{1}{2}}} - \left(\frac{N}{\sqrt{N}n} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{a_{Max}^{\frac{1}{2}} g^{\frac{5}{2}}} \quad (64-2)$$

حل اختلالی میدان

همان طور که مشخص است؛ حل دقیق میدان بسیار کار دشواری است اما می‌توان از طریق ترفندهای اختلالی به جواب آن نزدیک شد. یکی از روش‌های معمول حل زنجیری و تودرتوی دستگاه معادلات است.

به این ترتیب که ابتدا از معادله پاسخ حالت پایا (مرتبه‌ی صفرم) را در معادله‌ی پخش جاگذاری می‌کنیم تا توزیع آماری وابسته به زمان نورون‌ها بدست آید. سپس مجدداً از توزیع بدست آمده؛ میدان مرتبه‌ی اول را که وابسته به زمان است؛ محاسبه می‌کنیم.

از آنجا که توزیع سامانه رفتاری دوره‌ای به طول 2π دارد؛ می‌توانیم آن را به صورت زیر بسط دهیم:

$$\rho(\theta, a, t) = \rho_0 + \sum_k A_k(t) e^{ik\theta}, \quad k \in \mathcal{Z} \quad (65-2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \sum_k \dot{A}_k e^{ik\theta} \quad (66-2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \theta} = \sum_k A_k \cdot ik \cdot e^{ik\theta} \quad (67-2)$$

$$(68-2)$$

حال آن را در معادله‌ی پخش قرار می‌دهیم تا بتوانیم معادله‌ی حاکم بر ضرایب را محاسبه کنیم.

$$\sum_k \dot{A}_k e^{ik\theta} = - \sum_k A_k \cdot ik(a - gE(t)) \cdot e^{ik\theta} \quad (69-2)$$

$$\Rightarrow \dot{A}_k = -A_k \cdot ik(a - gE(t)) \quad (70-2)$$

در تقریب مرتبه‌ی اول برای توزیع داریم:

$$\dot{A}_k = -A_k \cdot ik(a - gE.) \quad (71-2)$$

$$\Rightarrow A_k(t) = A_k(\cdot) e^{-ik(a-gE.)t} \quad (72-2)$$

$$\Rightarrow \rho(\theta, a, t) = \rho_{\cdot} + \sum_k A_k(\cdot) e^{ik\theta - ik(a-gE.)t} \quad (73-2)$$

پس برای نورون‌های روی آستانه خواهیم داشت:

$$\rho(\pi, a, t) = \rho_{\cdot} + \sum_k A_k(\cdot) e^{ik\pi - ik(a-gE.)t} \quad (74-2)$$

حال از نتیجه‌ی بدست آمده استفاده می‌کنیم و همان طور که اشاره شد به محاسبه‌ی مرتبه‌ی بعدی میدان می‌رویم:

$$E(t) = \int \int_{\cdot}^{\infty} \rho(\pi, a, t-d-v) \cdot \dot{\theta} \cdot \alpha^v v e^{-\alpha v} dv da \quad (75-2)$$

$$= E_{\cdot} + \int \int_{\cdot}^{\infty} \sum_k A_k(\cdot) e^{ik\pi - ik(a-gE.)(t-d-v)} \cdot (a-gE.) \alpha^v v e^{-\alpha v} dv da \quad (76-2)$$

$$= E_{\cdot} + \sum_k \int \int_{\cdot}^{\infty} A_k(\cdot) e^{ik\pi - ik(a-gE.)(t-d-v)} \cdot (a-gE.) \alpha^v v e^{-\alpha v} dv da \quad (77-2)$$

اجازه بدهید سهم مدهای متفاوت از میدان را به صورت جداگانه محاسبه کنیم و سپس مجددا در کنار یکدیگر قرار دهیم.

$$E_{k,a}(t) = -\alpha^v A_k(\cdot) (a-gE.) e^{ik\pi} \int_{\cdot}^{\infty} v e^{-[\alpha - ik(a-gE.)]v - ik(a-gE.)(t-d)} dv \quad (78-2)$$

با با تغییر متغیر $\beta \equiv \alpha - ik(a-gE.)$ محاسبات را ادامه می‌دهیم:

$$= \alpha^v A_k(\cdot) (a-gE.) e^{ik\pi} e^{-ik(a-gE.)(t-d)} \cdot \int_{\cdot}^{\infty} v e^{-\beta v} dv \quad (79-2)$$

$$= \alpha^v A_k(\cdot) (a-gE.) e^{ik\pi} e^{-ik(a-gE.)(t-d)} \cdot \frac{1}{\beta^v} \quad (80-2)$$

$$= A_k(\cdot) (a-gE.) e^{ik[\pi - (a-gE.)(t-d)]} \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha - ik(a-gE.)} \right)^v \quad (81-2)$$

حال قدم به قدم به محاسبات پیشین خود برمی‌گردیم. ابتدا می‌پرسیم میدان همه‌ی نورون‌های با مد یکسان چه جریانی را تولید می‌کنند.

$$E_k(t) = \int E_{k,a} da \quad (83-2)$$

$$= \int A_k(\cdot)(a - gE_\cdot)e^{ik[\pi - (a - gE_\cdot)(t-d)]} \left(\frac{\alpha}{\alpha - ik(a - gE_\cdot)} \right)^{\gamma} da \quad (84-2)$$

با تغییر متغیر $h \equiv a - gE_\cdot$ تلاش می‌کنیم انتگرال را ادامه دهیم.

$$E_k(t) = A_k(\cdot)e^{ik\pi} \int_{\cdot}^{a_M - gE_\cdot} h e^{-ikh(t-d)} \left(\frac{1}{1 - ikh/\alpha} \right)^{\gamma} dh \quad (85-2)$$

نرم‌افزارهای محاسباتی همچون ابزار ولفرم به ما امکان می‌دهد تا پاسخ آن را به صورت زیر بیان کنیم:

$$E_k(t) = -A_k(\cdot) \frac{\alpha^{\gamma}}{k^{\gamma}} e^{ik\pi} \left[\frac{e^{-i(\xi(h) + k(t-d)h)}}{\sqrt{1 + h^{\gamma} k^{\gamma} / \alpha^{\gamma}}} \right] \quad (86-2)$$

$$+ e^{-\alpha(t-d)} (\alpha(t-d) + 1) Ei[(\alpha - ikh)(t-d)] \Bigg] \Bigg|_{\cdot}^{a_M - gE_\cdot}. \quad (87-2)$$

به صورتی که $Ei[z] = \frac{1+ikh/\alpha}{\sqrt{1+h^{\gamma} k^{\gamma} / \alpha^{\gamma}}} - \int_{-z}^{+\infty} e^{-t} / t dt$ همان تابع انتگرال نمایی است که به صورت $e^{-i\xi(h)}$ نوشته می‌شود.

$$E_k(t) = -A_k(\cdot) \frac{\alpha^{\gamma}}{k^{\gamma}} e^{ik\pi} \left[\frac{e^{-i(\xi(a_M - gE_\cdot) + k(t-d)(a_M - gE_\cdot))}}{\sqrt{1 + (a_M - gE_\cdot)^{\gamma} k^{\gamma} / \alpha^{\gamma}}} \right] \quad (88-2)$$

$$+ e^{-\alpha(t-d)} (\alpha(t-d) + 1) Ei[(\alpha - ik(a_M - gE_\cdot))(t-d)] \quad (89-2)$$

$$- e^{-ik(t-d)(a_M - gE_\cdot)} \quad (90-2)$$

$$- e^{-\alpha(t-d)} (\alpha(t-d) + 1) Ei[\alpha(t-d)] \Bigg] \quad (91-2)$$

$$= -A_k(\cdot) \frac{\alpha^{\gamma}}{k^{\gamma}} e^{ik\pi} \left[e^{-ik(t-d)(a_M - gE_\cdot)} \left(\frac{e^{-i(\xi(a_M - gE_\cdot))}}{\sqrt{1 + (a_M - gE_\cdot)^{\gamma} k^{\gamma} / \alpha^{\gamma}}} + 1 \right) \right] \quad (92-2)$$

$$+ e^{-\alpha(t-d)} (\alpha(t-d) + 1) \left(Ei[(\alpha - ik(a_M - gE_\cdot))(t-d)] - Ei[\alpha(t-d)] \right) \Bigg] \quad (93-2)$$

پس یک جمله‌ی نوسانی دارد و جمله‌ای که شامل تکینگی است.

خبر خوب یا بد این است که این راه هم دارای ایراد است. زیرا در محاسبه‌ی مرتبه‌ی اول میدان اشتباهی

رخداده است - رابطه‌ی ۷۵-۲. در این رابطه باید ضرب مرتبه‌ی صفرم چگالی در مرتبه‌ی اول میدان جا مانده است. یعنی باید می‌نوشتم:

$$E(t) = \int \int_{\cdot}^{\infty} (\rho_{\cdot} + \rho_{\backslash}) (a - g(E_{\cdot} + E_{\backslash})) \cdot \alpha^{\gamma} v e^{-\alpha v} dv da \quad (94-2)$$

$$= \int \int_{\cdot}^{\infty} [\rho_{\cdot} (a - gE_{\cdot}) + \rho_{\backslash} (a - gE_{\cdot})] \cdot \alpha^{\gamma} v e^{-\alpha v} dv da \quad (95-2)$$

$$+ \int \int_{\cdot}^{\infty} -gE_{\backslash} \rho_{\backslash} \cdot \alpha^{\gamma} v e^{-\alpha v} dv da \quad (96-2)$$

$$+ \int \int_{\cdot}^{\infty} -gE_{\backslash} \rho_{\cdot} \cdot \alpha^{\gamma} v e^{-\alpha v} dv da \quad (97-2)$$

$$(98-2)$$

در واقع جمله‌ی آخر رابطه‌ی بالا جامانده بود و باعث می‌شود بخشی از جواب در پشت آن پنهان بماند. البته با در نظر گرفتن آن جمله پیچیدگی اصلی مسئله دوباره به صفحه‌ی بازی بر می‌گردد.

۲-۰-۲ بازی از نو(سامانه‌ی تک جریان)

بنظر نمی‌آید که معادلات ما از این طریق حل شوند. باید یک طریق دیگر در پیش گیریم.

استاد : محسن ! بیا مسئله را باز هم ساده تر کنیم . به جای آن که یک پهنه ای جریان بگیریم ؛ فقط و فقط یک جریان را در سامانه قرار دهیم . آنگاه ببینیم باز هم هم گامی خواهیم دید ؟

پیشنهاد بعدی این که تیزه ها را باریک و بدون پهنا در نظر بگیر ($\alpha \rightarrow \infty$) امیدوارم در این حالت مسئله حل شود .

محسن : مسئله شاید کمی عوض شود . زیرا جریان مهاری برآمده از نورون هایی با جریان بالا روی پتانسیل نورون های پایین تر هم تاثیر می گذارد .

استاد : می دانم . اما از همین سامانه تک جریانی باید در بیاید . وقتی یکی را حل کنیم بقیه را می توانیم از کنار هم قرار دادن این زیر سامانه محاسبه کنیم .

محسن : خیلی هم خوب ! چشم انجام می شود .

استاد : فردا می توانی بیایی و حضوری باهم جلسه داشته باشیم ؟

محسن : بله حتما خدمت خواهم رسید .

(اتاق انجمن علمی ، سه شنبه عصر ۳۰ فروردین)

خروجی این مکالمات و چند جلسه پشت سر هم در ادامه ای این بخش خواهد آمد .

باید مجدد رابطه $5-2$ که جریان را در سامانه گزارش می داد برای سامانه جدید بازنویسی کنیم . با این تفاوت که α را به بینهایت سوق داده ایم و تیزه ها کاملا باریک هستند .

$$E(t) = \frac{n(\pi, t-d)}{N} \cdot [a - gE(t-d)] \quad (99-2)$$

حالت پایا

برای این سامانه میدان حالت پایا به صورت زیر قابل توصیف است :

$$E_{\cdot} = \frac{n}{N} \cdot [a - gE_{\cdot}] = \frac{1}{2\pi} [a - gE_{\cdot}] \quad (100-2)$$

$$\Rightarrow E_{\cdot} = \frac{a}{2\pi + g} \quad (101-2)$$

اختلال از حالت پایا

حال فرض کنیم که جریان به اندازه‌ای کوچک از حالت پایای خود منحرف شود. $E = E_0 + \epsilon$ علاوه‌مندیم که سامانه در زمان‌های بعدی چگونه رفتار خواهد کرد. آیا این اختلال به طریقی هضم خواهد شد و یا بزرگ‌تر می‌شود و هماره سامانه را از حالت پایا دور خواهد کرد؟

$$E(t+d) = \frac{1}{2\pi} [a - gE(t)] \quad (102-2)$$

$$= \frac{1}{2\pi} [a - g(E_0 + \epsilon)] \quad (103-2)$$

$$= \frac{1}{2\pi} [a - gE_0] - \frac{g\epsilon}{2\pi} \quad (104-2)$$

$$= E_0 - \frac{g\epsilon}{2\pi} \quad (105-2)$$

با ادامه‌ی همین روند می‌توانیم به این نتیجه برسیم که در گام‌های بعدی سامانه چگونه رفتار خواهد کرد (شکل ۲-۲):

$$E(t+nd) = \frac{1}{2\pi} [a - gE(t + (n-1)d)] \quad (106-2)$$

$$= \frac{a}{2\pi} \left[1 - \frac{g}{2\pi} + \left(\frac{g}{2\pi}\right)^1 + \dots + \left(\frac{g}{2\pi}\right)^{n-1} \right] + \left(\frac{g}{2\pi}\right)^n (E_0 + \epsilon) \quad (107-2)$$

$$= \frac{a}{2\pi} \frac{1 - \left(\frac{-g}{2\pi}\right)^n}{1 - \left(\frac{-g}{2\pi}\right)} + \left(\frac{-g}{2\pi}\right)^n (E_0 + \epsilon) \quad (108-2)$$

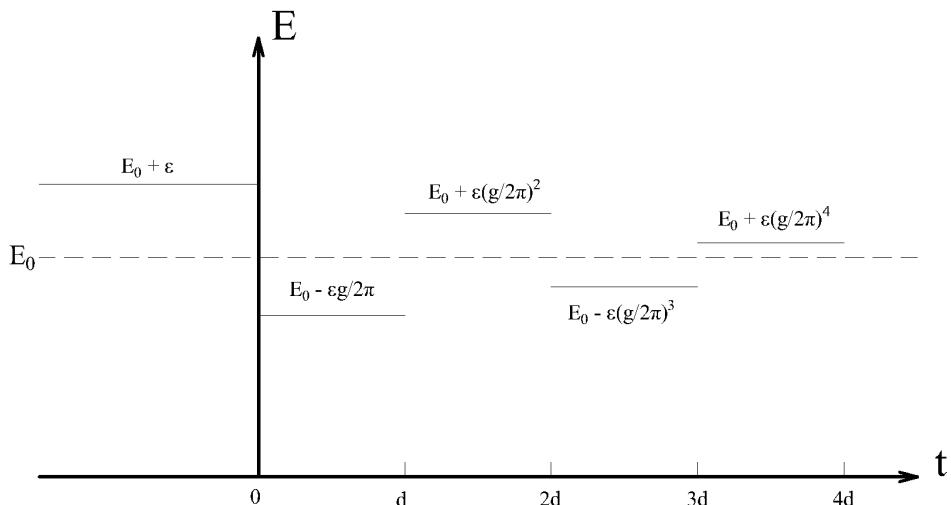
$$= \frac{a}{2\pi + g} - \frac{a}{2\pi} \cdot \frac{\left(\frac{-g}{2\pi}\right)^n}{1 - \left(\frac{-g}{2\pi}\right)} + \left(\frac{-g}{2\pi}\right)^n (E_0 + \epsilon) \quad (109-2)$$

$$= \frac{a}{2\pi + g} - \frac{a}{2\pi + g} \cdot \left(\frac{-g}{2\pi}\right)^n + \left(\frac{-g}{2\pi}\right)^n (E_0 + \epsilon) \quad (110-2)$$

$$= E_0 + \left(\frac{-g}{2\pi}\right)^n \cdot \epsilon \quad (111-2)$$

$$= E_0 + \left(\frac{-g}{2\pi}\right)^{\lfloor t/d \rfloor + 1} \cdot \epsilon \quad (112-2)$$

پر واضح است که اگر ضریب تاثیر از مقدار 2π کمتر باشد؛ این مجموع همگراست و اختلال در سامانه هضم خواهد شد. در صورتی اگر بیشتر باشد؛ و اگرآ خواهد بود. این مقدار بنظر همان گذرفازی است که مدت‌هاست به دنبال آن می‌گردیم. پس موفق شدیم که برای سامانه‌ی تک‌جریان نقطه‌ی گذرفاز را محاسبه کنیم. کمتر باشد؛ این مجموع همگراست و اختلال در سامانه هضم خواهد شد. در صوتی



شکل (۲-۲) تحول میدان سامانه‌ای تک‌جريان و با تیزه‌های پهن از اخنالی کوچک از حالت پایا (شکل اشتباه است)

اگر بیشتر باشد؛ و اگرا خواهد بود.

اگر چه می‌توانستیم مسئله را از طریق دیگری نیز درپیش بگیریم. از معادله‌ی ۱۰۵-۲ اختلاف جدیدی را که با میدان پایا پیدا شده است را به عنوان ϵ' تعریف کنیم و سپس میدان بعدی را از ضرب مجدد عامل $-g/2\pi$ بدست آوریم. به این ترتیب به طریق ساده‌تر خواهیم داشت:

$$E(t+nd) = E_0 + \left(\frac{-g}{2\pi}\right)^n \cdot \epsilon' \quad (113-2)$$

شبیه‌سازی سامانه‌ی تک‌جريان

حدس می‌زنیم که برای سامانه‌ی یاد شده در قسمت قبل گذر فاز در $2\pi = g$ رخ دهد. پس شبیه‌سازی را با دیگر تنظیمات زیر راه‌اندازی می‌کنیم:

$$\alpha = 100 s^{-1} *$$

* جریان خارجی متصل به همهٔ نورون‌ها یکسان و برابر ۵.۹ است.

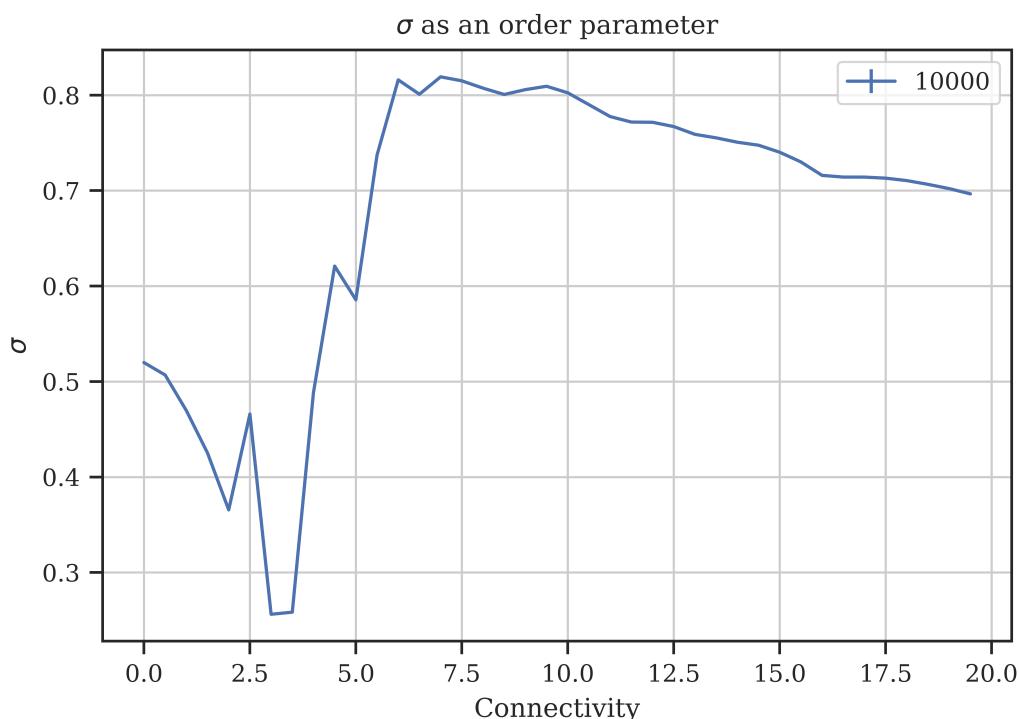
$$N = 10000 *$$

$$t_d = 0.1 s *$$

* کل زمان شبیه‌سازی ۱۰۰ ثانیه در نظر گرفته شده

* هر گام زمانی برابر ۰.۰۱ ثانیه است.

به این ترتیب نتیجهٔ شبیه‌سازی به شکل زیر درآمد: متسفانه این شکستی برای امید به محقق شدن



شکل (۳-۲) مشخصهٔ نظم سامانه ده هزار نورونی تک‌جریان

توصیف تحلیلی این سامانه است. زیرا نقطهٔ گذر فاز کاملاً دور از همسایگی عدد ۶ و در همسایگی نزدیکی حول ۵.۳ پیدا شده است. سوالی که ما در این بخش با آن تنها خواهیم ماند این است که راه حل پیشین ما از چه جزئیاتی چشم پوشی کرده است؟!

دیدار

محسن : استاد! شکل به این صورت درآمد.

استاد : خوب اشکال ندارد! باید بررسی کنیم بینیم مشکل از کجاست.
(لحظاتی پیش از شروع جلسه‌ی برش مقاله‌خوانی روز چهارشنبه ۷ اردیبهشت)

صندوق پیام‌ها

محسن : اورکا!

سلام استاد! فکر کنم فهمیدم مشکل چیه.
اگر خاطرتون باشه ما باید ضرب سرعت در چگالی روی آستانه را به عنوان محرکه‌ی
میدان E در نظر می‌گرفتیم. چون سامانه کمی با حالت پایا فرق داشت؛ چگالی
را یکنواخت و ثابت در نظر می‌گرفتیم به طوری که در همسایگی این حالت هم
همچنان چگالی ثابت است.

اما این تقریب صحیح نیست! به محض این که علامت سرعت منفی می‌شود
($V < 0$) چگالی روی مرز به صورت پله‌ای تغییر می‌کند و صفر می‌شود. این به
این معنی است که اگر برای محاسبه‌ی میدان اکنون در به تاریخ‌چه‌ی سامانه رجوع
می‌کنیم؛ باید در نظر داشته باشیم که سهم این رخداد صفر است.
ما سهام‌های رخدادهایی که در آن‌ها ($V < 0$) است را زیاد شمرده‌ایم و باید حذف
شوند.

این نکته به نظر بخشی از مشکل ماست هنوز روی بقیه استدلال دارم کار می‌کنم،
ارادتمند شما

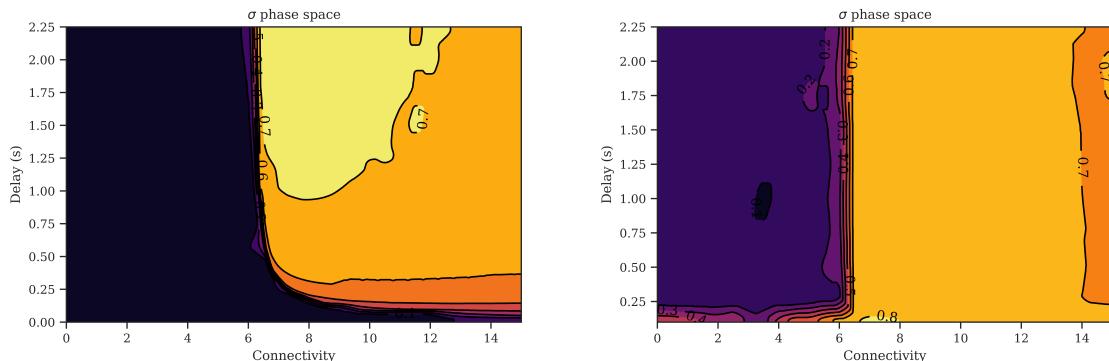
محسن

استاد : سلام
اگر شرایط اولیه رو این طوری بدیم که مکان همه تصادفی و تاریخ‌چه هم این طور
که تا قبل $t = 0$ سرعت‌ها همه مثل هم و یه کم متفاوت با سرعت تعادل، اون وقت
(شنبه ۱۰ اردیبهشت) چی؟

صحبتی که با استاد مطرح کردم؛ صحیح بود اما نه کاملاً صحیح! حدس استاد این است که اگر

محور آستانه حول نقطه‌ی گذرفاز خالی شده است به دلیل نامیزان بودن شرایط اولیه است. من حدس خودم و ایشان را مورد بررسی قرار دادم و به این نتیجه رسیدم که گذرفاز در نقطه‌ای رخ می‌دهد که صرفا نورون‌ها کند می‌شوند و برنمی‌گردند؛ یعنی سرعتشان همچنان مثبت است و اندازه‌ی آن کمتر می‌شود اما منفی نمی‌شود. پس حدس من صحیح نبود.

پس کنجکاو می‌شویم که نمایش تمام عیاری از صفحه‌ی فاز داشته باشم و بتوانیم شمایل آنچه را که در سامانه رخ داده؛ به تصویر بکشیم.



(آ) صفحه‌ی فاز نورون تک جریان با پهنه‌ی تیزه‌ی $\alpha = \alpha$ (ب) صفحه‌ی فاز نورون تک جریان با پهنه‌ی تیزه‌ی $\alpha = 100$

۲۰

۱۰۰

چنان که در شکل ۴۹ می‌بینیم در حالتی که تیزه‌ها تقریباً باریک هستند ($\alpha = 100$) تغییر فاز همان است که پیش‌بینی کردیم؛ یعنی در نزدیکی نقطه‌ی $g = 2\pi$ رخ می‌دهد و به ازای تمام زمان‌های تاخیر ممکن، همین مقدار می‌ماند اما در تیزه‌های پهن این گذرفاز رفتاری دیگر دارد. زمان‌هایی که تاخیر بسیار بزرگتر از زمان ویژه‌ی تاثیر تیزه‌هاست ($d > \alpha^{-1}$) گذرفاز در همان نقطه رخ می‌دهد.

پس بهتر است این طور جمع بندی کنیم که راه حل ۱۰۷-۲ برای حالتی درست است که زمان ویژه تیزه‌ها در مقایسه با زمان تاخیر نسبتاً کم باشد. $d >> \alpha$

حال که مسئله در حالت بسیار ساده حل شد؛ کم کم گام‌هایی رو به سمت پیچیده شدن برمی‌داریم. اولین گام آن است که کمیت α را به مجدداً به محاسبات خود بازگردانیم تا رابطه‌ی متناظر با ۴۹ برای آن بدست آوریم. حدس می‌زنیم که تغییر میدان دیگر مانند شکل ۲-۲ تیز نباشد و لبه‌هایی نرم‌تر به خود

گیرند.

$$E = E_* + \epsilon \quad (t < \cdot) \quad (114-2)$$

$$E(t) = \frac{a}{\sqrt{\pi}} - \frac{g}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty ds_1 \left(\frac{a}{\sqrt{\pi}} - \frac{g}{\sqrt{\pi}} \int ds_2 E(t - \sqrt{d} - s_1 - s_2) \alpha^s s_2 e^{-\alpha s_2} \right) \alpha^s s_1 e^{-\alpha s_1} \quad (115-2)$$

$$= \frac{a}{\sqrt{\pi}} \left[1 - \frac{g}{\sqrt{\pi}} + \left(\frac{g}{\sqrt{\pi}} \right)^2 + \dots + \left(\frac{-g}{\sqrt{\pi}} \right)^{n-1} \right] \quad (116-2)$$

$$+ \left(\frac{-g}{\sqrt{\pi}} \right)^n \int_0^\infty \int \dots \int E(t - nd - s_1 - s_2 - \dots - s_n) \alpha^{sn} s_1 s_2 \dots s_n e^{-\alpha(s_1+s_2+\dots+s_n)} ds_1 ds_2 \dots ds_n \quad (117-2)$$

$$= \mathcal{K}_{a,g}(t) \quad (118-2)$$

$$+ \left(\frac{-g}{\sqrt{\pi}} \right)^n \int_0^\infty \int \dots \int E(t - nd - s_1 - s_2 - \dots - s_n) \alpha^{sn} s_1 s_2 \dots s_n e^{-\alpha(s_1+s_2+\dots+s_n)} ds_1 ds_2 \dots ds_n \quad (119-2)$$

که در این رابطه $\mathcal{K}_{a,g}(t)$ همان پاسخ معادله در حالتی است که تیزه‌ها کاملاً باریک هستند. این روند تو در تو تا زمانی ادامه می‌یابد که انتگرال ده ما به زمانی که ما آن را به صورت دستی مقید کرده‌ایم نرسد. زیرا از آن گام به بعد رابطه‌ی میدان از دینامیک گام پیشین خود بدست نمی‌آید. آخرین گام این رابطه در زمانی است که بخشی از آن در حالت مقید قرار دارد و بخشی از آن در حالت پویا. پس برای آن که این ملاحظه را اعمال کنیم؛ تغییر متغیر $s_i \equiv r$ را می‌دهیم تا ورودی تابع میدان را رصد کند. سپس روی مقادیر مختلف r انتگرال‌ها را جمع می‌زنیم.

$$\int_0^\infty \int \dots \int E(t - nd - s_1 - s_2 - \dots - s_n) \alpha^{sn} s_1 s_2 \dots s_n e^{-\alpha(s_1+s_2+\dots+s_n)} ds_1 ds_2 \dots ds_n \quad (120-2)$$

$$= \int_0^\infty \int \dots \int E(t - nd - r) \alpha^{sn} e^{-\alpha(r)} s_1 s_2 \dots s_n ds_1 ds_2 \dots ds_n \delta(r - \sum s_i) dr \quad (121-2)$$

معادل تابع دلتای دیراک برای ادامه‌ی انتگرال گیری مناسب‌تر است.

$$= \int_0^\infty \int \dots \int E(t - nd - r) \alpha^{sn} e^{-\alpha(r)} s_1 s_2 \dots s_n ds_1 ds_2 \dots ds_n \frac{e^{ip(r-\sum s_i)}}{\sqrt{\pi}} dr dp \quad (122-2)$$

$$= \int_0^\infty \int \dots \int E(t - nd - r) \alpha^{sn} e^{-\alpha(r)} s_1 s_2 \dots s_n ds_1 ds_2 \dots ds_n e^{-ip\sum s_i} \frac{e^{ipr}}{\sqrt{\pi}} dr dp \quad (123-2)$$

$$= \int_0^\infty \int E(t - nd - r) \alpha^{sn} e^{-\alpha(r)} \frac{e^{ipr}}{\sqrt{\pi}} \left[\int_r^\infty s e^{-ips} ds \right]^n dr dp \quad (124-2)$$

عبارت p در جمله‌ی نهایی باید حتما باید قسمت موهومی منفی داشته باشد تا انتگرال ما قابل تعریف باشد.

$$= \int_{\cdot}^{\infty} \int E(t - nd - r) \alpha^{\gamma n} e^{-\alpha r} \frac{e^{ipr}}{2\pi} (-p^{-\gamma})^n dp dr \quad (125-2)$$

به کمک حساب مانده‌ها می‌دانیم که حاصل قسمت p انتگرال برابر مشتق $1 - 2n$ از انتگرال ده آن است.

$$= (-1)^n \int_{\cdot}^{\infty} E(t - nd - r) \alpha^{\gamma n} e^{-\alpha r} \frac{2\pi}{2\pi(2n-1)!} i \cdot \frac{\partial^{2n-1} e^{ipr}}{\partial p^{2n-1}} |_{p=0} dr \quad (126-2)$$

$$= \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} \int_{\cdot}^{\infty} E(t - nd - r) \alpha^{\gamma n} e^{-\alpha r} i \cdot (ir)^{2n-1} dr \quad (127-2)$$

$$= \frac{1}{(2n-1)!} \int_{\cdot}^{\infty} E(t - nd - r) \alpha^{\gamma n} e^{-\alpha r} r^{2n-1} dr \quad (128-2)$$

$$(129-2)$$

همان‌طور که پیشتر گفته بودیم؛ تنها قسمتی از بازه‌ی انتگرال گیری ما مربوط به قسمت پویایی است و باید حساب آن را از قسمت قیدی جدا کنیم. این قسمت در بازه‌ی $r < t - nd < 0$ وجود دارد.

$$= \frac{1}{(2n-1)!} \int_{t-nd}^{\infty} E(t - nd - r) \alpha^{\gamma n} e^{-\alpha r} r^{2n-1} dr + \frac{1}{(2n-1)!} \int_{\cdot}^{t-nd} E(t - nd - r) \alpha^{\gamma n} e^{-\alpha r} r^{2n-1} dr \quad (130-2)$$

میدان را در زمان‌های مقید می‌دانیم. از روی آن می‌توانیم میدان در گام اول را نیز محاسبه کنیم.

$$= \frac{1}{(2n-1)!} \int_{t-nd}^{\infty} (E_{\cdot} + \epsilon) \alpha^{\gamma n} e^{-\alpha r} r^{2n-1} dr + \frac{1}{(2n-1)!} \int_{\cdot}^{t-nd} (E_{\cdot} - g\epsilon/2\pi) \alpha^{\gamma n} e^{-\alpha r} r^{2n-1} dr \quad (131-2)$$

$$= \frac{1}{(2n-1)!} (E_{\cdot} + \epsilon) \int_{\cdot}^{\infty} \alpha^{\gamma n} e^{-\alpha r} r^{2n-1} dr + \frac{1}{(2n-1)!} (-\epsilon - g\epsilon/2\pi) \int_{\cdot}^{t-nd} \alpha^{\gamma n} e^{-\alpha r} r^{2n-1} dr \quad (132-2)$$

اگر بازه‌ی انتگرال اول از صفر شروع می‌شد؛ آنگاه می‌توانستیم آن را تبدیل به تابع گاما کنیم. اگرچه صورت کنونی آن به این شکل نبیست اما می‌توانیم با اضافه کردن ادامه‌ی بازه به انتگرال و کم کردن آن از انتگرال دیگر، خواسته‌ی خود را برآورده کنیم.

$$= \frac{1}{(2n-1)!} (E_{\cdot} + \epsilon)(2n-1)! + \frac{1}{(2n-1)!} (-\epsilon - g\epsilon/2\pi) \int_{\cdot}^{t-nd} \alpha^{\gamma n} e^{-\alpha r} r^{2n-1} dr \quad (133-2)$$

$$= (E_{\cdot} + \epsilon) + \frac{1}{(2n-1)!} (-\epsilon - g\epsilon/2\pi) \gamma(2n, \alpha(t - nd)) \quad (134-2)$$

حال که جمله‌ی درخواستی خود را محاسبه کردیم؛ آن را در کنار جملات قبلی قرار می‌دهیم تا در نهایت برای میدان داشته باشیم:

$$E(t) = \mathcal{K}_{a,g}(t) \quad (135-2)$$

$$+ \left(\frac{-g}{\sqrt{\pi}}\right)^n (E_+ + \epsilon) \quad (136-2)$$

$$+ \left(\frac{-g}{\sqrt{\pi}}\right)^n \frac{1}{(2n-1)!} (-\epsilon - g\epsilon/\sqrt{\pi}) \gamma(2n, \alpha(t-nd)) \quad (137-2)$$

$$= \mathcal{K}_{a,g}(t) \quad (138-2)$$

$$+ \left(\frac{-g}{\sqrt{\pi}}\right)^n (E_+ + \epsilon) \quad (139-2)$$

$$+ \left(\frac{-g}{\sqrt{\pi}}\right)^n (-\epsilon - g\epsilon/\sqrt{\pi}) \frac{\gamma(2n, \alpha(t-nd))}{(2n-1)!} \quad (140-2)$$

$$= \mathcal{K}_{a,g}(t) \quad (141-2)$$

$$+ \left(\frac{-g}{\sqrt{\pi}}\right)^{\lfloor t/d \rfloor + 1} (E_+ + \epsilon) \quad (142-2)$$

$$+ \left(\frac{-g}{\sqrt{\pi}}\right)^{\lfloor t/d \rfloor + 1} (-\epsilon - g\epsilon/\sqrt{\pi}) \frac{\gamma(2 \lfloor t/d \rfloor, \alpha d(t/d - \lfloor t/d \rfloor))}{(2n-1)!} \quad (143-2)$$

$$= E_+ + \left(\frac{-g}{\sqrt{\pi}}\right)^{\lfloor t/d \rfloor + 1} \cdot \epsilon \quad (144-2)$$

$$+ \left(\frac{-g}{\sqrt{\pi}}\right)^{\lfloor t/d \rfloor + 1} (-\epsilon - g\epsilon/\sqrt{\pi}) \frac{\gamma(2 \lfloor t/d \rfloor, \alpha d(t/d - \lfloor t/d \rfloor))}{(2n-1)!} \quad (145-2)$$

$$(146-2)$$

نتیجه‌ی بدست آمده شامل نکات قابل توجهی است و تا حدودی با شواهد بدست آمده از شبیه‌سازی سازگاری دارد.

۱. در گام‌های مضرب d تابع گام‌ای ناقص ما به صورت $\gamma(2n, 0) = 0$ درمی‌آید. این باعث می‌شود که فارغ از باریک یا تیزه بودن تیزه‌های ما میدن در این لحظات مطابق عبارت زیر باشد:

$$= \frac{a}{\sqrt{\pi}} \left[1 - \frac{g}{\sqrt{\pi}} + \left(\frac{g}{\sqrt{\pi}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{-g}{\sqrt{\pi}}\right)^{\lfloor t/d \rfloor - 1} \right] + \left(\frac{g}{\sqrt{\pi}}\right)^{\lfloor t/d \rfloor} (E_+ + \epsilon) \quad (147-2)$$

۲. این عبارت با معادلاتی که برای تیزه‌های باریک بدست آورده‌یم سازگاری دارد. زیرا اگر کمیت α را به بینهایت میل دهیم؛ بیشینه‌ی تابع گام‌ای ناقص ما به صورت $\gamma(2n, \infty) = (\infty, 1) = 1$ درمی‌آید. در این حالت میدان نهایی عبارتی شبیه توصیف کننده‌ی سامانه‌ی تیزه‌های باریک می‌دهد.

$$= \frac{a}{\sqrt{\pi}} \left[1 - \frac{g}{\sqrt{\pi}} + \left(\frac{g}{\sqrt{\pi}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{-g}{\sqrt{\pi}}\right)^{\lfloor t/d \rfloor - 1} \right] + \left(\frac{g}{\sqrt{\pi}}\right)^{\lfloor t/d \rfloor} (E_+ - g\epsilon/\sqrt{\pi}) \quad (148-2)$$

خيالش (مشکل) از کفم نمی‌رود.

متاسفانه مشکل همچنان پابرجاست. پس از تلاش‌های بسیار و زیورو رو کردن راه حل مشکلات زیادی از میان آن بیرون کشیده شد. هر چند در ابتدا بنظر می‌آمد خودسازگار و جامع باشد. مسئله‌ی مهم آن است که ما بی‌مهابا هر دم میدان را درون خود جاگذاری می‌کنیم. گذشته از این که این کار به ازای تمامی زمان‌های شبیه‌سازی صحیح نیست. همواره وقتی میدان در زمان‌های منفی سیر می‌کند؛ باید حالت مقید را جاگذاری کنیم. این اتفاق در هر مرحله از بازنویسی انتگرال بر حسب گام‌های قبلی رخ می‌دهد. پس قاعده‌تا هر مرحله باید انتگرال خود را به درستی تفکیک کنیم و فقط برای زمان‌های مثبت خود میدان را بر حسب خود بازنویسی کنیم.

این بار بگذارید که به جای عبارت $a/2\pi$ و $\rho_\pi g = g/2\pi$ بگذاریم: \hat{g}, \hat{a}

$$E = E_* + \epsilon \quad (t < \cdot) \quad (149-2)$$

$$E(t) = \hat{a} - \hat{g} \int_t^\infty ds \, E(t-d-s) \alpha^s s e^{-\alpha s} \quad (150-2)$$

$$= \hat{a} - \hat{g} \int_{t-d}^\infty ds \, E(t-d-s) \alpha^s s e^{-\alpha s} \quad (151-2)$$

$$- \hat{g} \int_t^{t-d} ds \, E(t-d-s) \alpha^s s e^{-\alpha s} \quad (152-2)$$

$$= \hat{a} - \hat{g} \int_{t-d}^\infty ds \, (E_* + \epsilon) \alpha^s s e^{-\alpha s} \quad (153-2)$$

$$- \hat{g} \int_t^{t-d} ds \, \left(\hat{a} - \hat{g} \int_t^\infty ds \, E(t-\gamma d-s) \alpha^s s e^{-\alpha s} \right) \alpha^s s e^{-\alpha s} \quad (154-2)$$

$$= \hat{a} - \hat{g} \int_{t-d}^\infty ds \, (E_* + \epsilon) \alpha^s s e^{-\alpha s} \quad (155-2)$$

$$- \hat{g} \hat{a} \int_t^{t-d} ds \, \alpha^s s e^{-\alpha s} \quad (156-2)$$

$$- \hat{g} \int_t^{t-d} \int_t^\infty ds \, ds \, E(t-\gamma d-s) \alpha^s s e^{-\alpha s} \alpha^s s e^{-\alpha s} \quad (157-2)$$

$$= \hat{a} - \hat{g} \int_{t-d}^\infty ds \, (E_* + \epsilon) \alpha^s s e^{-\alpha s} \quad (158-2)$$

$$- \hat{g} \hat{a} \int_t^{t-d} ds \, \alpha^s s e^{-\alpha s} \quad (159-2)$$

$$+ (-\hat{g})^\gamma \int_t^{t-d} \int_{t-\gamma d-s}^\infty ds \, ds \, E(t-\gamma d-s) \alpha^s s e^{-\alpha s} \alpha^s s e^{-\alpha s} \quad (160-2)$$

$$(160-2)$$

$$+ (-\hat{g})^\gamma \int_t^{t-d} \int_t^{t-\gamma d-s} ds \, ds \, E(t-\gamma d-s) \alpha^s s e^{-\alpha s} \alpha^s s e^{-\alpha s} \quad (161-2)$$

$$(161-2)$$

$$= \hat{a} - \hat{g} \int_{t-d}^\infty ds \, (E_* + \epsilon) \alpha^s s e^{-\alpha s} \quad (162-2)$$

$$- \hat{g} \hat{a} \int_t^{t-d} ds \, \alpha^s s e^{-\alpha s} \quad (163-2)$$

$$+ (-\hat{g})^\gamma \int_t^{t-d} \int_{t-\gamma d-s}^\infty ds \, ds \, (E_* + \epsilon) \alpha^s s e^{-\alpha s} \alpha^s s e^{-\alpha s} \quad (164-2)$$

$$+ (-\hat{g})^\gamma \int_t^{t-d} \int_t^{t-\gamma d-s} ds \, ds \, E(t-\gamma d-s) \alpha^s s e^{-\alpha s} \alpha^s s e^{-\alpha s} \quad (165-2)$$

$$(165-2)$$

با ادامه‌ی این روند زنجیروار می‌توانیم حدس بزنیم که خانواده‌ای از جمع جملات متفاوت خواهیم داشت که به صورت زیر قابل نوشتند:

$$E(t) = \hat{a} + \hat{a} \sum_{i=1}^{n-1} (-\hat{g})^i \int_{\cdot}^{t-d} \int_{\cdot}^{t-\gamma d-s_1} \int_{\cdot}^{t-\gamma d-s_1-s_2} \dots \int_{\cdot}^{t-id-s_1-\dots-s_{i-1}} \Pi_j^i \alpha^s s_j e^{-\alpha s_j} ds_j \quad (166-2)$$

$$+ (E_{\cdot} + \epsilon) \sum_{i=1}^n (-\hat{g})^i \int_{\cdot}^{t-d} \int_{\cdot}^{t-\gamma d-s_1} \int_{\cdot}^{t-\gamma d-s_1-s_2} \dots \int_{t-id-s_1-\dots-s_{i-1}}^{\infty} \Pi_j^i \alpha^s s_j e^{-\alpha s_j} ds_j \quad (167-2)$$

$$+ (E_{\cdot} - \epsilon \hat{g})(-\hat{g})^n \int_{\cdot}^{t-d} \int_{\cdot}^{t-\gamma d-s_1} \int_{\cdot}^{t-\gamma d-s_1-s_2} \dots \int_{\cdot}^{t-nd-s_1-\dots-s_{n-1}} \Pi_j^n \alpha^s s_j e^{-\alpha s_j} ds_j \quad (168-2)$$

$$= \hat{a} \sum_{i=1}^{n-1} (-\hat{g})^i \int_{\cdot}^{t-d} \int_{\cdot}^{t-\gamma d-s_1} \int_{\cdot}^{t-\gamma d-s_1-s_2} \dots \int_{\cdot}^{t-id-s_1-\dots-s_{i-1}} \Pi_j^i \alpha^s s_j e^{-\alpha s_j} ds_j \quad (169-2)$$

$$(E_{\cdot} + \epsilon) \sum_{i=1}^n (-\hat{g})^i \int_{\cdot}^{t-d} \int_{\cdot}^{t-\gamma d-s_1} \int_{\cdot}^{t-\gamma d-s_1-s_2} \dots \int_{\cdot}^{t-id-s_1-\dots-s_{i-1}} (1 - \int_{\cdot}^{t-id-s_1-\dots-s_{i-1}} \Pi_j^i \alpha^s s_j e^{-\alpha s_j} ds_j) \quad (170-2)$$

$$+ (E_{\cdot} - \epsilon \hat{g})(-\hat{g})^n \int_{\cdot}^{t-d} \int_{\cdot}^{t-\gamma d-s_1} \int_{\cdot}^{t-\gamma d-s_1-s_2} \dots \int_{\cdot}^{t-nd-s_1-\dots-s_{n-1}} \Pi_j^n \alpha^s s_j e^{-\alpha s_j} ds_j \quad (171-2)$$

$$= \hat{a} \sum_{i=1}^{n-1} (-\hat{g})^i I_i \quad (172-2)$$

$$+ (E_{\cdot} + \epsilon) \sum_{i=1}^n (-\hat{g})^i [I_{i-1} - I_i] \quad (173-2)$$

$$+ (E_{\cdot} - \epsilon \hat{g})(-\hat{g})^n I_n \quad (174-2)$$

$$= E_{\cdot} - \epsilon g + \sum_{i=1}^n -(-g)^i \cdot \epsilon (1 + g) I_i \quad (175-2)$$

که در آن عبارت I_n برابر است با:

$$I_n = \int_0^{t-d} \int_0^{t-(d-s_1)} \int_0^{t-(d-s_1-s_2)} \dots \int_0^{t-(nd-s_1-\dots-s_{n-1})} \Pi_j^n \alpha_j s_j e^{-\alpha s_j} ds_j \quad (176-2)$$

نقطه‌ی گذرفاز پیشنهادی

این محاسبات باید بتوانند نقطه‌ی گذرفاز را پیش‌بینی کنند. برای این منظور اجازه دهید تا بررسی کنیم که روند فراز و فرود میدان به چه صورت تغییر می‌کند و هر مرحله اندازه‌ی جمله‌ای که به سری اضافه می‌شود چیست. پس تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{G}_n := \tilde{E}_n - \tilde{E}_{n-1} \quad (177-2)$$

پس بررسی می‌کنیم:

$$T_{n+1} = \frac{|\tilde{G}_{n+1}|}{|\tilde{G}_n|} = \left| -\hat{g} \cdot \frac{I_{n+1}}{I_n} \right| \quad (178-2)$$

حال همه چیز به نسبت بدست آمده در رابطه‌ی ۱۷۸-۲ دارد. اگر این نسبت بزرگتر از یک باشد؛ آنگاه همگامی اتفاق می‌افتد و اگر کوچکتر از یک بشود ناهمگامی داریم.

پیش از ادامه شایان ذکر است که در مرحله‌ای که تیزه‌ها بسیار باریک هستند؛ همه‌ی عبارات I_n برابر یک هستند و نسبت تصاعد بدست آمده در رابطه‌ی ۱۷۸-۲ همان‌طور خواهد شد که در قسمت‌های پیشین محاسبه کردیم. پس این نتیجه‌ی ما با نتایج قبلی همخوانی بسیار خوبی دارد.

حال ادامه می‌دهیم و می‌پرسیم که رفتار عبارت‌های I_n به چگونه است و آیا قادر هستند که نقطه‌ی گذرفاز را جابجا کنند یا خیر. همان‌طور که در رابطه‌ی ۱۷۶-۲ دیدیم؛ محاسبه‌ی این انتگرال‌ها بسیار

دشوار است اما می‌توانیم به محاسبه‌ی چند جمله‌ی اول g_{T_n} بسته کنیم.

$$1 = \hat{g} \cdot \frac{I_1}{I_*} = \hat{g}\gamma(2, \alpha d) \quad (179-2)$$

$$\Rightarrow \hat{g}_{T_1} = \frac{1}{\gamma(2, \alpha d)} \quad (180-2)$$

$$1 = \hat{g} \cdot \frac{I_2}{I_1} = \hat{g} \cdot \frac{\int_0^d \gamma(2, 2\alpha(d-s)) \alpha^2 s e^{-\alpha s} ds}{\gamma(2, \alpha d)} \quad (181-2)$$

$$= \hat{g} \cdot \frac{1 - e^{-\alpha d} ((\alpha d)^2 + 3(\alpha d)^1 + 6(\alpha d) + 6)/6}{\gamma(2, \alpha d)} \quad (182-2)$$

$$\Rightarrow \hat{g}_{T_2} = \frac{\gamma(2, \alpha d)}{1 - e^{-\alpha d} ((\alpha d)^2 + 3(\alpha d)^1 + 6(\alpha d) + 6)/6} \quad (183-2)$$

هم‌خوانی با هم‌گامی

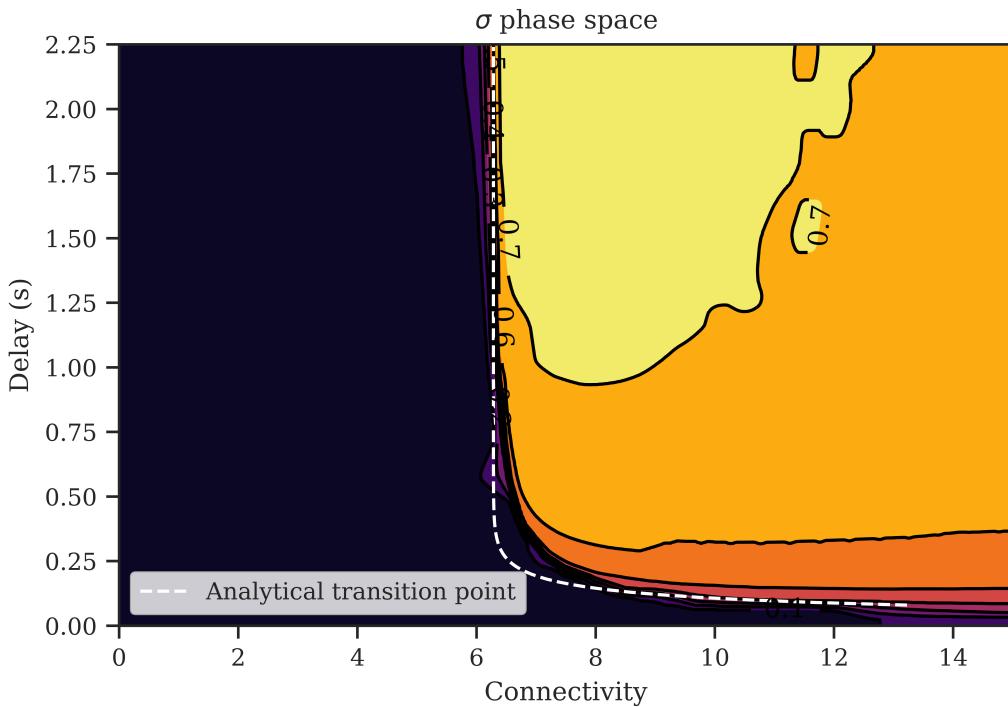
حال که موفق شدیم تا حدسی در مورد نقطه‌ی گذرفاز بزنیم نوبت آن است که نتایج خود را با شبیه‌سازی مقایسه کنیم. در شکل این تطابق موفقیت بزرگی است که توانستیم پس از تلاش‌های فراوان به آن دست پیدا کنیم.

۳-۰-۲ از شبکه‌ی ساده به پیچیده‌تر

حال که موفق شدیم تا نقطه‌ی گذرفاز شبکه‌ی ساده را محاسبه کنیم؛ خوب است که به مدل‌های قبلی نیز برگردیم و جملاتی که کنار گذاشته بودیم را مجدد به پویایی سامانه برگردانیم.

مدل قبلی را می‌خواهم!

در معادله‌ی تحول چرخنده از معادله داشتیم. حال اگر این معادله را جایگزین کنیم. خواهیم دید که تنها تفاوت آن با مدل ساده این است که یک مولفه‌ی جریان مهاری روی آستانه بیشتر دارد. به این معنی که



شکل (۵-۲) مقایسه‌ی نقطه‌ی گذرفاز محاسبه شده و داده‌های شبیه‌سازی

گویا در معادلات میدان E یک واحد به جریان داخلی بین نورون‌ها افزوده شده است.

$$\dot{\theta} = a - \cos(\theta) - gE(t) \quad (184-2)$$

$$\dot{\theta}_\pi = a - \cos(\pi) - gE(t) \quad (185-2)$$

$$= a + 1 - gE(t) \quad (186-2)$$

در سمت دیگر در مورد چگالی حضور نورون‌ها روی آستانه نیز باید بحث کنیم. در حالت پایا این مقدار برای تمامی مدل‌های ثابت است اما می‌تواند مقداری متفاوت داشته باشد. این تفاوت باعث می‌شود تا نقطه‌ی گذرفاز بسته به نوع مدل کمی جابجا شود.

پس شروع می‌کنیم تا چگالی حضور نورون‌ها روی آستانه را پیدا کنیم. از معادله‌ی ۳-۲ می‌توانیم

برای حالت پایا چگالی را این گونه باز نویسی کنیم:

$$\frac{\partial n_a}{\partial t} = -\frac{\partial J_a}{\partial \theta} \quad (187-2)$$

$$\dot{J}_a = -\frac{\partial J_a}{\partial \theta} \quad (188-2)$$

$$\Rightarrow J_a = J_{const} \quad (189-2)$$

$$\rho_\pi \dot{\theta} = J \quad (190-2)$$

$$\rho_\pi = \frac{J}{a - \cos\theta - gE.} \Big|_{\theta=\pi} \quad (191-2)$$

که در اینجا J جریان پایاست که در این حالت وابستگی به زمان و فاز ندارد. برای بدست آوردن مقدار دقیق آن تقاضا می‌کنیم تا جمع چگالی ما برابر یک شود:

$$1 = \int_{-\pi}^{\pi} \rho(\theta) d\theta \quad (192-2)$$

$$1 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{J}{a - \cos\theta - gE.} \quad (193-2)$$

$$1 = J \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{(a - gE.)^2 - 1}} \quad (194-2)$$

$$J = \frac{\sqrt{(a - gE.)^2 - 1}}{2\pi} \quad (195-2)$$

$$\Rightarrow \rho(\theta) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sqrt{(a - gE.)^2 - 1}}{a - \cos\theta - gE.} \quad (196-2)$$

$$\Rightarrow \rho(\pi) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sqrt{(a - gE.)^2 - 1}}{a + 1 - gE.} \quad (197-2)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{a - 1 - gE.}{a + 1 - gE.}} \quad (198-2)$$

از طرفی میدان در حالت پایا خواهد بود:

$$E. = \rho_\pi(a + 1 - gE.) \quad (199-2)$$

با در کنار هم قرار دادن معادلات میدان و چگالی می‌توانیم چگالی حضور نورون‌ها روی آستانه را به طریق زیر محاسبه کنیم.

$$\rho_\pi = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{-g + \sqrt{g^2 + 4\pi^2(a^2 - 1)}}{2\pi(a + 1)} \quad (200-2)$$

حال هر آنچه که برای نورون‌های ساده با چگالی یکنواخت $\frac{1}{2\pi}$ نوشته‌یم؛ با چگالی یاد شده در رابطه اخیر برای نورون‌های چرخنده می‌نویسیم. به این ترتیب خواهیم داشت:

$$1 = \rho_\pi g \gamma(2, \alpha d) \quad (201-2)$$

$$1 = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{-g + \sqrt{g^2 + 4\pi^2(a^2 - 1)}}{2\pi(a + 1)} \cdot g \cdot \gamma(2, \alpha d) \quad (202-2)$$

با حل معادله‌ی چندجمله‌ای فوق می‌توانیم نقطه‌ی گذرفاز را این چنین محاسبه کنیم:

$$g_{T_1} = 2\pi \sqrt{\frac{a+1}{\gamma^2(2, \alpha d)(a-1) - 2\gamma(2, \alpha d)}} \quad (203-2)$$

حال برای بررسی صحت این حدس، در دو حالت تیزه‌های باریک و پهن نتایج شبیه‌سازی را با رابطه‌ی بالا نطابق می‌دهیم:

جريان‌های وسیعتر

حل یاد شده در قسمت‌های قبل مربوط به سامانه‌ی تک‌جریان بود. حال می‌خواهیم سامانه را به حالتی برگردانیم که پوششی پهن از جریان‌های متفاوت داشت. پس اجازه بدھید تا معادلات را به فرم توزیعی از جریان‌های مختلف برگردانیم:

$$E(t) = \frac{1}{N} \int_{-d}^{\infty} \mathcal{J}(\pi, t - d - u_1) \cdot \mathcal{P}(u_1) du_1 \quad (204-2)$$

$$- \frac{g}{N} \int_{-d}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t - d - u_1) \cdot \mathcal{P}(u_1) E(t - d - u_1) du_1 \quad (205-2)$$

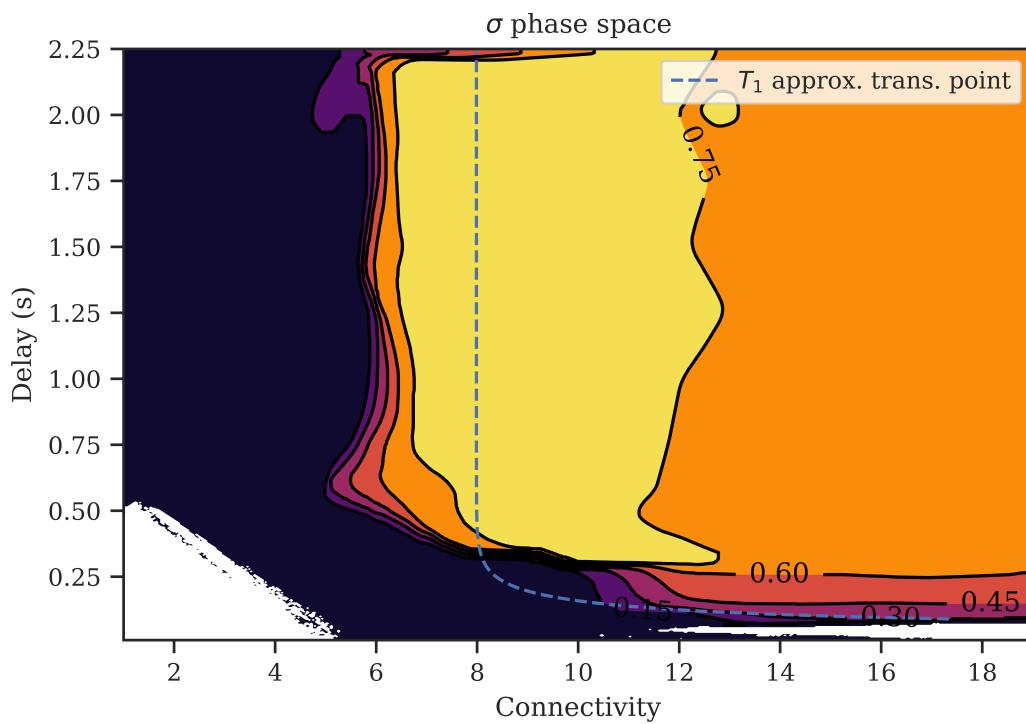
که در این عبارت نمادگذاری‌های زیر جانشین شده‌اند.

$$\mathcal{J}(\pi, t - d - u) \equiv \int n_a(\pi, t - d - u) a \cdot da \quad (206-2)$$

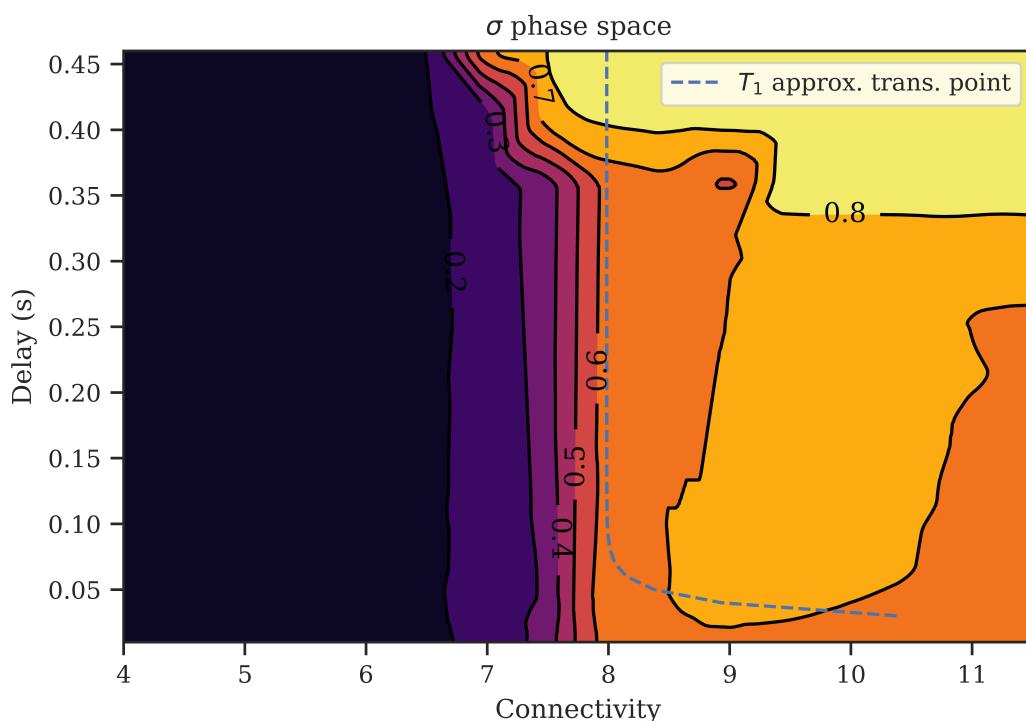
$$\mathcal{N}(\pi, t - d - u) \equiv \int n_a(\pi, t - d - u) \cdot da \quad (207-2)$$

$$\mathcal{P}(u) \equiv \alpha^u u e^{-\alpha u} \quad (208-2)$$

محاسبات اختلالی یاد شده در قسمت قبل مربوط به همسایگی حالت پایا بود. پس اگر اینجا هم



(ا) تیزه‌های پهن



(ب) تیزه‌های باریک

شکل (۶-۲) تطبیق شبیه‌سازی عددی با رابطه‌ی تحلیلی ۲۰۳-۲

معادلات را در حالت پایا پیش ببریم؛ خواهیم داشت:

$$E(t) = \frac{1}{N} \int_{\cdot}^{\infty} \mathcal{J}_* \cdot \mathcal{P}(u_1) du_1 \quad (209-2)$$

$$- \frac{g}{N} \int_{\cdot}^{\infty} \mathcal{N}_* \cdot \mathcal{P}(u_1) E(t - d - u_1) du_1 \quad (210-2)$$

$$E(t) = \hat{\mathcal{J}} - g \frac{\hat{\mathcal{N}}}{N} \int_{\cdot}^{\infty} \mathcal{P}(u_1) E(t - d - u_1) du_1 \quad (211-2)$$

$$E(t) = \hat{\mathcal{J}} - g \rho_{\pi} \int_{\cdot}^{\infty} \mathcal{P}(u_1) E(t - d - u_1) du_1 \quad (212-2)$$

همان‌طور که مشخص است جنس معادلات مشابه همان حالت تک‌جريان است با این تفاوت که یک جريان میانگین برای سامانه کار می‌کند و معادلات با همان پیش خواهند رفت.

فصل ۳

نتیجه‌گیری

همه‌ی نتایج و محاسبات ما حاکی از آن است که هم‌گامی ویژگی خاص مدل انباشت‌وشلیک و یا چرخنده نیست. این تغییر فاز در سامانه‌ای با معادلات تحول ساده نیز اتفاق می‌افتد. هر چند که نقطه‌ی گذرفاز در این سامانه‌ها با یک‌دیگر تطبیق ندارد اما کیفیت تغییر فاز هم‌چنان یکی است.

جدا از این در پویانمایی انجام شده در مورد این سامانه مشاهده شد که در هم‌گامی ایجاد شده نورون‌ها هم‌فاز نمی‌شوند بلکه فازهای آن‌ها پشت‌سرهم بهم جفت می‌شود. به این ترتیب که پس از هر کاهش میدان داخلی، E باریکه‌ی منظمی از نورون در صف رسیدن به آستانه قرار دارند تا تیزه‌زنندگان نوبت بعدی باشند.

مراجع

- [1] Brunel, Nicolas. Dynamics of sparsely connected networks of excitatory and inhibitory spiking neurons. *Journal of computational neuroscience*, 8(3):183–208, 2000.
- [2] Brunel, Nicolas and Van Rossum, Mark CW. Quantitative investigations of electrical nerve excitation treated as polarization. *Biological Cybernetics*, 97(5):341–349, 2007.
- [3] Luccioli, Stefano and Politi, Antonio. Irregular collective behavior of heterogeneous neural networks. *Phys. Rev. Lett.*, 105:158104, Oct 2010.
- [4] Safaeesirat, Amin and Moghimi-Araghi, Saman. Critical behaviour at the onset of synchronization in a neuronal model, 2020. [8](#)