

مطالعه همگامی در شبکه‌های عصبی مهاری

محسن مهرانی - استاد راهنما: دکتر سامان مقیمی عراقی

فهرست مطالب

۵	۱ سخن نخست
۵	۱.۱ مقدمه
۷	۲ تلاش برای توصیف
۷	۱.۰.۲ حل معادله‌ی شبکه‌ی ساده
۱۹	۲.۰.۲ بازی از نو(سامانه‌ی تک‌جریان)

فصل ۱

سخن نخست

مطالعه فعالیت شبکه‌های عصبی برای تحقیق و بررسی کارکردهای مغز اهمیت زیادی دارد. همه بر این باوریم که مغز محمل اندیشه و تفکر است. ما کنجکاو هستیم که چگونه همکاری بین نورون‌های آن باعث می‌شود تا حافظه، کشف و پردازش صورت گیرد. هر کدام از نورون‌های مغز می‌تواند در حالت فعال [روشن] یا غیرفعال [خاموش] قرار گیرد. هم اکنون شواهدی وجود دارد که کارکردهایی طلایی یاد شده مغز در زمان‌هایی رخ می‌دهند که الگوی خاموش و روشن شدن نورون‌های آن باهم «هم‌گامی» دارند. هم‌گامی به این معناست که جمعیت بزرگی از نورون‌ها هم باهم خاموش و روشن می‌شوند و یک الگوی تکرار شونده‌ای را دنبال می‌کنند. تو گویی که باهم هم‌آهنگ یا هم‌گام شده‌اند.

بی‌تردید دستیابی به تمام جزئیات مغز برای ما میسر نیست و به آن به عنوان یک «جعبه‌ی سیاه» نگاه می‌کنیم که مدت‌هاست به دنبال ارائه مدلی هستیم که رابطه‌ی بین ورودی‌ها و خروجی‌های ثبت شده را بازتولید کند. کاری که در این پژوهش انجام خواهیم داد تلاشی است برای پیشنهاد دادن یک مدل برای این جعبه‌ی سیاه که رفتار نسبتاً مشابهی را میان ورودی و خروجی‌های این جعبه سیاه و یا مغز ایجاد می‌کند.

۱.۱ مقدمه

مدل‌های زیادی برای شبکه‌های عصبی ارائه شده است که توانایی تولید رفتار هم‌گام شدن نورون‌ها را در آن‌ها می‌توانیم جستجو کنیم. یکی از این مدل‌ها که در تمام فصول شبیه‌سازی از آغاز تا کنون از آن بهره برده شده است؛ مدل انباشت و شلیک است [۱]. در این جستار ابتدا با مدل انباشت و شلیک شروع می‌کنیم و سپس مدلی توسعه یافته که آن را «چرخنده» صدا خواهیم کرد؛ می‌پردازیم. متن اصلی این جستار شامل معرفی این مدل‌ها و پویایی آن‌ها در زمان و نتایج ضبط شده از نشانگرهایی است که برای آشکارسازی هم‌گامی تعبیه شده‌اند.

فرصتی برای مدل‌های دیگر نوروئی

در بخش قبل به بررسی ویژگی‌های مدل انباشت-شلیک پراختیم. اگر چه این مدل بسیار ساده توانست رفتارهای آشنایی را برای ما بازتولید کند اما شامل محدودیت‌هایی است. این محدودیت‌ها باعث می‌شود تا ما به سراغ مدل‌های نوروئی دیگری مانند نوروئ‌های چرخنده برویم. این مدل نسبت به مدل قبلی شامل ویژگی‌های مثبتی است. یکی از ویژگی‌های خوب آن این است که پس از بازنشانی فاز نوروئ تیزه زده، فاز آن به زاویه‌ای برده می‌شود که دارای خواص مثلثاتی مشابهی است. به این معنا که دیگر شاهد گسستگی در اندازه‌ی جملاتی که تحول نوروئ را توصیف می‌کنند؛ نیستیم.

فصل ۲

تلاش برای توصیف

از آنجا که شبیه‌سازی این سامانه شامل تعریف فرایندهای متفاوتی بود؛ بدیهی است که نوشتن معادله‌ی تحلیلی برای توصیف کامل آن آسان نباشد. اما در این بخش تلاش می‌کنیم که با کنار هم قرار دادن معادلات اصلی چارچوب مسئله‌ی خود را مشخص کنیم. هر نورون که از حالت $\theta = \pi$ عبور می‌کند [تیزه می‌زند] باعث می‌شود تا سهمی از جریان با کیفیت $p(t) := \alpha^\gamma t \cdot \exp(-\alpha t)$ به جریان درونی کل سامانه $E(t)$ اضافه شود.

$$E(t) = \frac{1}{N} \int_0^\infty \int J_a(\pi, t - d - u) da \cdot \alpha^\gamma u e^{-\alpha u} du \quad (۱.۲)$$

اما جریان برای هر نورون با ورودی a به طریق زیر است:

$$J_a(\theta, t) = n_a(\theta, t) \cdot \dot{\theta}_a \quad (۲.۲)$$

این رفتار به خوبی نشان می‌دهد جریان فقط در ناحیه‌ی $\theta \leq \pi$ وجود دارد. زیرا ورود نورون به ناحیه‌ی مثبت‌تر را ممنوع کرده‌ایم. بی‌تردید برای فهمیدن چگونگی تغییر جریان در ناحیه‌های میانی باید از معادله‌ی پخش استفاده کنیم.

$$\frac{\partial n_a}{\partial t} = -\frac{\partial J_a}{\partial \theta} \quad (۳.۲)$$

$$= -\frac{\partial n_a}{\partial \theta} \cdot \dot{\theta}_a \quad (۴.۲)$$

۱.۰.۲ حل معادله‌ی شبکه‌ی ساده

اجازه بدهید تا اولین تلاش خود را از ساده‌ترین نوع شبکه‌ها شروع کنیم. شبکه‌ای که به جز جریان داخلی و جریان تصادفی اولیه ورودی دیگری ندارد. پس خواهیم داشت:

$$\begin{cases} E(t) = \frac{1}{N} \int_0^\infty \int n_a(\pi, t - d - u) \cdot [a - gE(t - d - u)] da \cdot \alpha^\gamma u e^{-\alpha u} du \\ \frac{\partial n_a}{\partial t} = -\frac{\partial n_a}{\partial \theta} \cdot (a - gE(t)) \end{cases} \quad (۵.۲)$$

چند پیشنهاد می‌شود برای ادامه‌ی راه‌حل داشت. (درون یک جعبه قرار گیرد با این عنوان که پیشنهادات من چه بود و استاد چه گفت.)

۱. از آنجا که میدان به گونه‌ای متناوب عمل می‌کند؛ یک پیشنهاد خوب می‌تواند آن باشد که بسط فوریه‌ی آن را بنویسیم.

$$E(t) = \sum c_i \cdot \cos(\omega_i t) \quad (۶.۲)$$

که اگر ثابت کنیم c_1 از بقیه ضرایب بزرگتر است؛ مساله‌ی ما حل می‌شود.

۲. دشواری مساله از در هم تنیدگی معادلات برآمده است. اگر به تقریب در معادله‌ی پخش میدان را یک نوبه در نظر بگیریم و پاسخ را در معادله‌ی اول قرار دهیم.

۳. انتگرال اول را به صورت بازگشتی در خودش جاگذاری کنیم.

۴. مسئله را در حالت آماری بررسی کنیم و حالت پایستار آن را پیدا کنیم و بررسییم در چه حالتی است که حالت پایستار داریم.

روش بازگشتی

نکته‌ای که برای ما حل معادلات را دشوار می‌کند تبعیت E از خودش است. بگذارید به شیوه‌ای که خود معادله درخواست دارد عمل کنیم. یعنی E را مجدداً در سمت راست معادله جاگذاری کنیم. برای راحت‌تر شدن محاسبات ابتدا دو متغیر کمکی زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{J}(\pi, t - d - u) \equiv \int n_a(\pi, t - d - u) a \cdot da \quad (۷.۲)$$

$$\mathcal{N}(\pi, t - d - u) \equiv \int n_a(\pi, t - d - u) \cdot da \quad (۸.۲)$$

$$\mathcal{P}(u) \equiv \alpha^\dagger u e^{-\alpha u} \quad (۹.۲)$$

عبارت $\mathcal{J}(\pi,)$ به معنای جمع جریان تصادفی نوروهای است که در زمان u در آستانه قرار دارند. همچنین عبارت $\mathcal{N}(\pi,)$ به معنای تعداد همین نوروهاست. حال با نمادهای بالا شروع به بازنویسی جملات پیشین می‌کنیم:

$$E(t) = \frac{1}{N} \int_0^\infty \mathcal{J}(\pi, t - d - u_1) \cdot \mathcal{P}(u_1) du_1 - \frac{g}{N} \int_0^\infty \mathcal{N}(\pi, t - d - u_1) \cdot \mathcal{P}(u_1) E(t - d - u_1) du_1 \quad (۱۰.۲)$$

حال جمله‌ی اول را نیز با عبارت دیگری خلاصه‌سازی می‌کنیم:

$$\mathcal{A}(t) \equiv \frac{1}{N} \int_0^\infty \mathcal{J}(\pi, t - d - u_1) \cdot \mathcal{P}(u_1) du_1 \quad (۱۱.۲)$$

در خصوص جمله‌ی دوم نیز مشابه عبارت مربوط به E را در آن جاگذاری می‌کنیم.

$$E(t - d - u_1) = \frac{1}{N} \int_0^\infty \mathcal{J}(\pi, t - 2d - u_1 - u_2) \cdot \mathcal{P}(u_2) du_2 \quad (12.2)$$

$$- \frac{g}{N} \int_0^\infty \mathcal{N}(\pi, t - 2d - u_1 - u_2) \cdot \mathcal{P}(u_2) E(t - 2d - u_1 - u_2) du_2 \quad (13.2)$$

این عبارت جمع تعداد همه‌ی تیزه‌هایی است که تا گام $t - d$ زده شده‌اند و در نتیجه جمله‌ای انباشتی است. پس خواهیم داشت:

$$E(t) = \mathcal{A}(t-d) - g \int_{\cdot}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-d-u_{\mathfrak{I}}) \cdot \mathcal{P}(u_{\mathfrak{I}}) E(t-d-u_{\mathfrak{I}}) du_{\mathfrak{I}} \quad (14.2)$$

$$= \mathcal{A}(t-d) - g \int_{\cdot}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-d-u_{\mathfrak{I}}) \cdot \mathcal{P}(u_{\mathfrak{I}}) \cdot [\mathcal{A}(t-\mathfrak{V}d-u_{\mathfrak{I}}) - g \int_{\cdot}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-d-u_{\mathfrak{I}}-u_{\mathfrak{V}}) \cdot \mathcal{P}(u_{\mathfrak{V}}) E(t-\mathfrak{V}d-u_{\mathfrak{I}}-u_{\mathfrak{V}}) du_{\mathfrak{V}}] du_{\mathfrak{I}} \quad (15.2)$$

$$= \mathcal{A}(t-d) - g \int_{\cdot}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-d-u_{\mathfrak{I}}) \cdot \mathcal{P}(u_{\mathfrak{I}}) \cdot \mathcal{A}(t-\mathfrak{V}d-u_{\mathfrak{I}}) du_{\mathfrak{I}} \quad (16.2)$$

$$+ g^{\mathfrak{V}} \int_{\cdot}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-d-u_{\mathfrak{I}}) \cdot \mathcal{P}(u_{\mathfrak{I}}) \int_{\cdot}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-\mathfrak{V}d-u_{\mathfrak{I}}-u_{\mathfrak{V}}) \cdot \mathcal{P}(u_{\mathfrak{V}}) E(t-\mathfrak{V}d-u_{\mathfrak{I}}-u_{\mathfrak{V}}) du_{\mathfrak{V}} du_{\mathfrak{I}} \quad (17.2)$$

$$= \mathcal{A}(t-d) - g \int_{\cdot}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-d-u_{\mathfrak{I}}) \cdot \mathcal{P}(u_{\mathfrak{I}}) \cdot \mathcal{A}(t-\mathfrak{V}d-u_{\mathfrak{I}}) du_{\mathfrak{I}} \quad (18.2)$$

$$+ g^{\mathfrak{V}} \int_{\cdot}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-d-u_{\mathfrak{I}}) \cdot \mathcal{P}(u_{\mathfrak{I}}) \int_{\cdot}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-\mathfrak{V}d-u_{\mathfrak{I}}-u_{\mathfrak{V}}) \cdot \mathcal{P}(u_{\mathfrak{V}}) \mathcal{A}(t-\mathfrak{V}d-u_{\mathfrak{I}}-u_{\mathfrak{V}}) du_{\mathfrak{V}} du_{\mathfrak{I}} \quad (19.2)$$

$$- g^{\mathfrak{V}} \int_{\cdot}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-d-u_{\mathfrak{I}}) \cdot \mathcal{P}(u_{\mathfrak{I}}) \int_{\cdot}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-\mathfrak{V}d-u_{\mathfrak{I}}-u_{\mathfrak{V}}) \cdot \mathcal{P}(u_{\mathfrak{V}}) \int_{\cdot}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-\mathfrak{V}d-u_{\mathfrak{I}}-u_{\mathfrak{V}}-u_{\mathfrak{W}}) \cdot \mathcal{P}(u_{\mathfrak{W}}) E(t-\mathfrak{V}d-u_{\mathfrak{I}}-u_{\mathfrak{V}}-u_{\mathfrak{W}}) du_{\mathfrak{W}} du_{\mathfrak{V}} du_{\mathfrak{I}} \quad (20.2)$$

حال اگر عمر این سامانه کراندار باشد؛ تعداد جملات بالا محدود می‌شوند. پس اگر سامانه پیش از یک زمانی کاملاً خاموش بوده باشد $E = 0$ ؛ آنگاه می‌توان میدان کنونی را بر اساس جملات ضربی بین شدت جریان و تعداد نوره‌های تیزه زده پیدا کرد.

روش اختلال

به نمودار؟؟ دقت کنید. در زمانی که تعداد نوره‌ها بی‌نهایت باشد؛ در فاز ناهم‌گام انحراف معیار میدان صفر خواهد شد. این به این معنی است که جریان در زمان ثابت خواهد ماند. پس بگذارید با علم بر این موضوع یک جواب معادله‌ی ۵.۲ را در حالت حدی میدان ثابت E معرفی کنیم. با فرض ثابت بودن میدان، اندازه‌ی آن را محاسبه می‌کنیم. سپس مجدد به معادلات برمی‌گردیم و می‌پرسیم که در صورت جمع با یک جمله‌ی اختلالی کوچک این انحراف رشد خواهد کرد یا خیر. به عبارت دیگر آیا این جواب جاذب است.

$$\begin{cases} E. = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{t-d} \int n_a(\pi, u) \cdot [a - gE.] da \cdot \alpha^\gamma u e^{-\alpha u} du \\ \frac{\partial n_a}{\partial t} = -\frac{\partial n_a}{\partial \theta} \cdot (a - gE.) \end{cases} \quad (21.2)$$

یک راه خوب برای پیشبرد سطر اول معادلات آن است که از دو طرف آهنگ تغییرشان با زمان را بپرسیم. از آنجا که سمت چپ معادله ثابت است؛ سمت راست هم باید جوابی مشابه را حکایت کند.

$$\bullet = \frac{dE.}{dt} = \frac{\alpha^\gamma (t-d) e^{-\alpha(t-d)}}{N} \cdot [-gE. \cdot \int n_a(\pi, t-d) da + \int n_a(\pi, t-d) \cdot a da] \quad (22.2)$$

مشخص است که کدام جمله از جملات ضربی بالا صفر است. پس برای E خواهیم داشت:

$$E. = \frac{1}{g} \cdot \frac{\int n_a(\pi, t-d) \cdot a da}{\int n_a(\pi, t-d) da} \quad (23.2)$$

حال برای ادامه‌ی فرآیند نیاز داریم تا عبارت حاکم بر $n_a(\pi, t-d)$ را بدست آوریم. جواب پیشنهادی ما برای سطر دوم معادلات از جنس تابع دلتاست:

$$n_a(\theta, t) = \delta(\theta - \theta_a(t)) \quad (24.2)$$

$$= \delta(\theta + \theta. - (a - gE.)t + \gamma [K_a^{(t)}] \pi) \quad (25.2)$$

$$= \delta(\theta - (a - gE.)t + \gamma [K_a^{(t)}] \pi + \theta.) \quad (26.2)$$

$$\Rightarrow n_a(\pi, t) = \delta((\gamma [K_a^{(t)}] + 1)\pi - (a - gE.)t + \theta.) \quad (27.2)$$

$$(28.2)$$

که در این معادلات $K_a^{(t)}$ کسری است که تعداد دور هر نوره را از آغاز تا کنون روایت می‌کند و ما مجبور به عقب کشیدن $\gamma \pi$ فاز کامل پس از تیزه زدن آن به تعداد $[K_a^{(t)}]$ شده‌ایم. ^۱ قابل محاسبه است که عبارت

^۱ دقت کنیم که معادله‌ی ذکر شده برای نوره‌هایی درست است که $(a - gE.) > 0$

کامل آن به صورت زیر است.

$$K_a^{(t)} = \frac{(a - gE.)t + \pi + \theta.}{2\pi} \quad (29.2)$$

برای محاسبه‌ی انتگرال‌هایی که شامل این دلتای دیراک هستند؛ لازم است تا صفرهای آرگومان آن را محاسبه کنیم.

$$\left(2 \left\lfloor \frac{(a - gE.)t + \pi + \theta.}{2\pi} \right\rfloor + 1 \right) \pi - (a - gE.)t + \theta. = 0 \quad (30.2)$$

$$2\pi \times \left(\left\lfloor \frac{(a - gE.)t + \pi + \theta.}{2\pi} \right\rfloor - \frac{(a - gE.)t + \pi + \theta.}{2\pi} \right) = 0 \quad (31.2)$$

$$2\pi \times \left(\left\lfloor K_a^{(t)} \right\rfloor - K_a^{(t)} \right) = 0 \quad (32.2)$$

این رابطه کاملاً یک تابع تناوبی را توصیف می‌کند. یک تابع مقطع که در مکانی که آرگومان آن صحیح می‌شود؛ مقدار صفر به خود می‌گیرد. پس روشن است که توقع داشته باشیم. تعداد صفرهای این معادله به اندازه‌ی تعداد تناوبی است که در هر زمان در بازه‌ی جریان‌های داده شده دارد.

$$\Delta K_a^{(t)} = 1 \quad (33.2)$$

$$\Delta K_a^{(t)} = \frac{t}{2\pi} \Delta a \quad (34.2)$$

$$\Delta a = \frac{2\pi}{t} \quad (35.2)$$

این دوره‌ی تناوب با افزایش زمان کوچکتر می‌شود. اگر تعداد نوره‌ها را به صورتی ترمودینامیکی بزرگ بگیریم؛ آنگاه به ازای هر دوره‌ی تناوب یک نوره حتما هست که روی محور آستانه قرار گرفته است. حال که دوره‌ی تناوب Δa را بدست آوردیم؛ می‌دانیم که ریشه‌های رابطه‌ی ۳۲.۲ چه زمانی رخ می‌دهند. فرض کنیم که اولین صفر در جریانی مثل a_m رخ می‌دهد. توجه کنید حتماً اندازه‌ی این جریان به گونه‌ای است که نوره‌ها را به صورت فعال نگه دارد. پس باید حتماً $(a_m - gE.) > 0$ باشد. حال می‌توانیم انتگرال‌های مورد نظر خود را این چنین بسط دهیم.

$$\int n_a(\pi, t - d) a da = \int \delta \left(2\pi \left(\left\lfloor K_a^{(t)} \right\rfloor - K_a^{(t)} \right) \right) a da \quad (36.2)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{K_a^{(t)} \in Z} a_i \quad (37.2)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{m=0}^M a_m + m \cdot \Delta a \quad (38.2)$$

$$= \frac{M+1}{2\pi} \cdot \left(\frac{a_m + a_{max}}{2} \right) \quad (39.2)$$

$$(40.2)$$

و از طرفی:

$$\int n_a(\pi, t - d) da = \int \delta \left(2\pi(\lfloor K_a^{(t)} \rfloor - K_a^{(t)}) \right) a da \quad (41.2)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{K_a^{(t)} \in Z} 1 \quad (42.2)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{m=0}^M 1 \quad (43.2)$$

$$= \frac{M+1}{2\pi} \quad (44.2)$$

حال اگر به محاسبه‌ی میدان ثابت خود برگردیم و تکه‌های پازل را کنار هم بگذاریم؛ خواهیم داشت:

$$E = \frac{1}{g} \cdot \frac{\int n_a(\pi, t - d) \cdot a da}{\int n_a(\pi, t - d) da} \quad (45.2)$$

$$= \frac{1}{g} \cdot \frac{\frac{M+1}{2\pi} \cdot \left(\frac{a_m + a_{max}}{2} \right)}{\frac{M+1}{2\pi}} \quad (46.2)$$

$$= \frac{1}{g} \left(\frac{a_m + a_{max}}{2} \right) \quad (47.2)$$

این میدان معادل است با جریان میانگین بین نورون‌هایی که آن‌ها را روشن خطاب کرده بودیم. این نتیجه صحیح نیست زیرا اگر میدان در میانه‌ی این جریان‌ها قرار گیرد؛ آنگاه نورون‌های با جریان پایین‌دست $a < \frac{1}{g} \left(\frac{a_m + a_{max}}{2} \right)$ را خاموش خواهد کرد و اصلاً روشن نخواهند ماند.

روش آماری

در این روش فرض می‌کنیم که برای هر جریان تصادفی اولیه، نورون‌های زیادی را به اختیار گرفته‌ایم. در حالت پایا، در یک حالت خاص تغییری در چگالی جمعیت مشاهده نمی‌شود پس در معادله‌ی ۵.۲ خواهیم داشت:

$$\frac{\partial n_a}{\partial t} = 0 \quad (48.2)$$

همچنین در حالت پایا که در واقع از نگاه ما حالت ناهم‌گام است؛ جریان بین نورون‌ها - که کمیتی بزرگ مقیاس است - در زمان تغییری نمی‌کند. پس به این ترتیب:

$$\begin{cases} \frac{\partial n_a}{\partial t} = -\frac{\partial J_a(t)}{\partial \theta} = 0 \\ J_a(\theta, t) = n_a(\theta, t) \cdot [a - gE] \end{cases} \Rightarrow J_a(\theta, t) = J_a(t) \quad (49.2)$$

$$\Rightarrow n_a(\theta, t) = n_a \quad (50.2)$$

$$(51.2)$$

پس توزیع جمعیت نورون‌ها مستقل از زمان و حالت آن‌ها خواهد شد. اگر توزیع را در ابتدا یکنواخت میان جریان‌های مختلف توزیع کرده باشیم؛ برای همه‌ی زمان‌ها و حالت‌ها داریم:

$$n = \frac{N}{2\pi(a_{Max} - a_{min})} \quad (52.2)$$

برای جریان بین نورون‌ها هم خواهیم داشت:

$$E = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{t-d} \int n \cdot [a - gE] da \cdot \alpha^2 u e^{-\alpha u} du \quad (53.2)$$

$$= \int \frac{n}{N} \cdot [a - gE] da \quad (54.2)$$

دقت کنیم که انتگرال رابطه‌ی ۵۴.۲ روی نورون‌هایی است که مستعد تیزه زدن هستند. ^۲ اولین جریانی که نورون را مستعد تیزه زدن می‌کند a_* نام‌گذاری می‌کنیم. وقتی جریان مهاری حاصل از تیزه زدن‌ها کوچک است؛ همه‌ی نورون‌ها فعال هستند و در نتیجه $a_* = a_{min}$ می‌شود. اما در حالتی که جریان مهاری زیاد می‌شود؛ این مقدار از کمترین جریان تصادفی اولیه سامانه بزرگتر می‌شود. محاسبات را ادامه می‌دهیم:

$$E = \int \frac{n}{N} \cdot [a - gE] da \quad (55.2)$$

$$= \frac{n}{N} \cdot \left[\frac{a_{Max}^2 - a_*^2}{2} - gE(a_{Max} - a_*) \right] \quad (56.2)$$

$$\Rightarrow E = n \cdot \left[\frac{a_{Max}^2 - a_*^2}{2} \right] / [N + gn(a_{Max} - a_*)] \quad (57.2)$$

شاید بنظر این یک معادله‌ی درجه یک ساده باشد که میدان را گزارش می‌کند اما در واقع خود a^* هم به میدان وابسته است و باید وابستگی آن را لحاظ کنیم. به تقریب: $a^* = gE$ با اضافه کردن این معادله و حل معمول یک معادله‌ی درجه‌ی دو برای میدان صراحتاً خواهیم داشت:

$$E = \left(\frac{a_{Max}}{g} + \frac{N}{ng^2} \right) \pm \left[\left(\frac{N}{ng^2} + \frac{a_{Max}}{g} \right)^2 - \frac{a_{Max}^2}{g^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (58.2)$$

نتیجه می‌دهد که a_* هم باید به صورت زیر باشد:

$$a_* = \left(a_{Max} + \frac{N}{ng} \right) \pm \left[\left(\frac{N}{ng} + a_{Max} \right)^2 - a_{Max}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (59.2)$$

$$= \left(a_{Max} + \frac{N}{ng} \right) \pm \left[\frac{N^2}{n^2 g^2} + \frac{2a_{Max}N}{ng} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (60.2)$$

$$(a - gE) > 0^2$$

اجازه بدهید علامت مثبت را کنار بگذاریم زیرا مقدار a_* را خارج بازه جریان‌های سامانه گزارش می‌کند. پس هم برای میدان و هم جریان a_* خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a_* = \left(a_{Max} + \frac{N}{ng} \right) - \left[\frac{N^2}{n^2 g^2} + \frac{2a_{Max}}{ng} \right]^{\frac{1}{2}} \\ E = \left(\frac{a_{Max}}{g} + \frac{N}{ng^2} \right) - \left[\frac{N^2}{n^2 g^2} + \frac{2Na_{Max}}{ng^2} \right]^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (61.2)$$

حال اگر نتایج بدست آمده را با داده‌های شبیه‌سازی تطبیق دهیم؛ خواهیم دید که تطابق خوبی با یک دیگر دارند.
در ضریب تاثیرهای بسیار بزرگ داریم:

$$E \cong \frac{a_{Max}}{g} + \frac{N}{ng^2} - \left(\frac{2Na_{Max}}{ng^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{N}{2nga_{Max}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (62.2)$$

$$= \frac{a_{Max}}{g} + \frac{N}{ng^2} - \left(\frac{2Na_{Max}}{ng^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{N}{2nga_{Max}} \right] \quad (63.2)$$

$$= \frac{a_{Max}}{g} - \left(\frac{2Na_{Max}}{ng^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{N}{ng^2} - \left(\frac{N}{2n} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{a_{Max}^{\frac{1}{2}} g^{\frac{5}{2}}} \quad (64.2)$$

حل اختلالی میدان

همان طور که مشخص است؛ حل دقیق میدان بسیار کار دشواری است اما می‌توان از طریق ترفندهای اختلالی به جواب آن نزدیک شد. یکی از روش‌های معمول حل زنجیری و تودرتوی دستگاه معادلات است. به این ترتیب که ابتدا از معادله پاسخ حالت پایا (مرتبه‌ی صفرم) را در معادله‌ی پخش جاگذاری می‌کنیم تا توزیع آماری وابسته به زمان نوروها بدست آید. سپس مجدداً از توزیع بدست آمده؛ میدان مرتبه‌ی اول را که وابسته به زمان است؛ محاسبه می‌کنیم.
از آنجا که توزیع سامانه رفتاری دوره‌ای به طول 2π دارد؛ می‌توانیم آن را به صورت زیر بسط دهیم:

$$\rho(\theta, a, t) = \rho_0 + \sum_k A_k(t) e^{ik\theta}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (65.2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \sum \dot{A}_k e^{ik\theta} \quad (66.2)$$

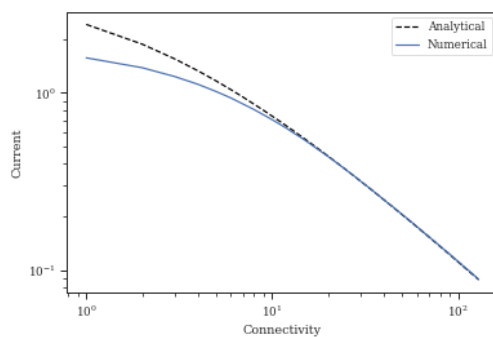
$$\frac{\partial \rho}{\partial \theta} = \sum A_k \cdot ik \cdot e^{ik\theta} \quad (67.2)$$

$$(68.2)$$

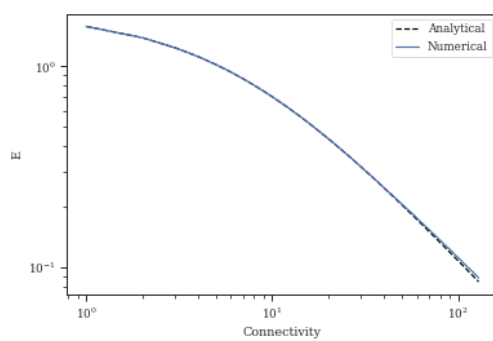
حال آن را در معادله‌ی پخش قرار می‌دهیم تا بتوانیم معادله‌ی حاکم بر ضرایب را محاسبه کنیم.

$$\sum \dot{A}_k e^{ik\theta} = - \sum A_k \cdot ik(a - gE(t)) \cdot e^{ik\theta} \quad (69.2)$$

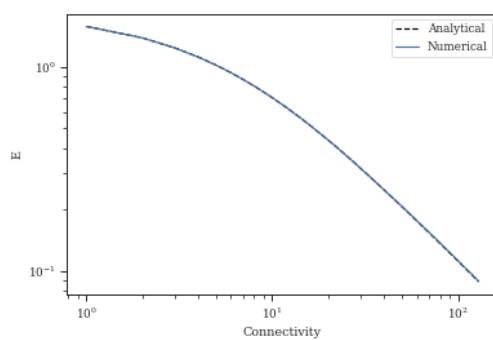
$$\Rightarrow \dot{A}_k = -A_k \cdot ik(a - gE(t)) \quad (70.2)$$



(آ) نسخه‌ای که کمینه‌ی جریان را از حل محاسبات در نظر می‌گیرد



(ب) نسخه‌ای که همه‌ی نورون‌ها را فعال تصور می‌کند.



(ج) نسخه ساخته شده از اتصال دوتای دیگر

شکل (۱.۲) تطابق جریان پایای بدست آمده از حل عددی و تحلیلی

در تقریب مرتبه‌ی اول برای توزیع داریم:

$$\dot{A}_k = -A_k \cdot ik(a - gE.) \quad (۷۱.۲)$$

$$\Rightarrow A_k(t) = A_k(\cdot) e^{-ik(a-gE.)t} \quad (۷۲.۲)$$

$$\Rightarrow \rho(\theta, a, t) = \rho. + \sum_k A_k(\cdot) e^{ik\theta - ik(a-gE.)t} \quad (۷۳.۲)$$

پس برای نوروهای روی آستانه خواهیم داشت:

$$\rho(\pi, a, t) = \rho. + \sum_k A_k(\cdot) e^{ik\pi - ik(a-gE.)t} \quad (۷۴.۲)$$

حال از نتیجه‌ی بدست آمده استفاده می‌کنیم و همان طور که اشاره شد به محاسبه‌ی مرتبه‌ی بعدی میدان می‌رویم:

$$E(t) = \int \int_0^\infty \rho(\pi, a, t - d - v) \cdot \dot{\theta} \cdot \alpha^\gamma v e^{-\alpha v} dv da \quad (۷۵.۲)$$

$$= E. \quad (۷۶.۲)$$

$$+ \int \int_0^\infty \sum_k A_k(\cdot) e^{ik\pi - ik(a-gE.)t} \cdot (a - gE.) \alpha^\gamma v e^{-\alpha v} dv da \quad (۷۷.۲)$$

$$= E. + \sum_k \int \int_0^\infty A_k(\cdot) e^{ik\pi - ik(a-gE.)t} \cdot (a - gE.) \alpha^\gamma v e^{-\alpha v} dv da \quad (۷۸.۲)$$

اجازه بدهید سهم مدهای متفاوت از میدان را به صورت جداگانه محاسبه کنیم و سپس مجدداً در کنار یکدیگر قرار دهیم.

$$E_{k,a}(t) = -\alpha^\gamma A_k(\cdot) (a - gE.) e^{ik\pi} \int_0^\infty v e^{-[\alpha - ik(a-gE.)]v - ik(a-gE.)t} dv \quad (۷۹.۲)$$

با تغییر متغیر $\beta \equiv \alpha - ik(a - gE.)$ محاسبات را ادامه می‌دهیم:

$$= \alpha^\gamma A_k(\cdot) (a - gE.) e^{ik\pi} e^{-ik(a-gE.)t} \cdot \int_0^\infty v e^{-\beta v} dv \quad (۸۰.۲)$$

$$= \alpha^\gamma A_k(\cdot) (a - gE.) e^{ik\pi} e^{-ik(a-gE.)t} \cdot \frac{1}{\beta^2} \quad (۸۱.۲)$$

$$= A_k(\cdot) (a - gE.) e^{ik[\pi - (a-gE.)t]} \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha - ik(a - gE.)} \right)^2 \quad (۸۲.۲)$$

حال قدم به قدم به محاسبات پیشین خود برمی‌گردیم. ابتدا می‌پرسیم میدان همه‌ی نوروهای با مد یکسان چه جریانی را تولید می‌کنند.

$$E_k(t) = \int E_{k,a} da \quad (۸۳.۲)$$

$$= \int A_k(\cdot) (a - gE.) e^{ik[\pi - (a-gE.)t]} \left(\frac{\alpha}{\alpha - ik(a - gE.)} \right)^2 da \quad (۸۴.۲)$$

با تغییر متغیر $h \equiv a - gE$ تلاش می‌کنیم انتگرال را ادامه دهیم.

$$E_k(t) = A_k(\cdot) e^{ik\pi} \int_0^{a_M - gE} h e^{-ikh(t-d)} \left(\frac{1}{1 - ikh/\alpha} \right)^\gamma dh \quad (۸۵.۲)$$

نرم‌افزارهای محاسباتی همچون ابزار ولفرم به ما امکان می‌دهد تا پاسخ آن را به صورت زیر بیان کنیم:

$$E_k(t) = -A_k(\cdot) \frac{\alpha^\gamma}{k^\gamma} e^{ik\pi} \left[\frac{e^{-i(\xi(h) + k(t-d)h)}}{\sqrt{1 + h^\gamma k^\gamma / \alpha^\gamma}} \right. \quad (۸۶.۲)$$

$$\left. + e^{-\alpha(t-d)} (\alpha(t-d) + 1) Ei[(\alpha - ikh)(t-d)] \right] \Bigg|_0^{a_M - gE}. \quad (۸۷.۲)$$

به صورتی که $e^{-i\xi(h)} = \frac{1 + ikh/\alpha}{\sqrt{1 + h^\gamma k^\gamma / \alpha^\gamma}}$ است و Ei همان تابع انتگرال نمایی است که به صورت $Ei[z] = \int_{-z}^{+\infty} e^{-t}/t dt$ نوشته می‌شود.

$$E_k(t) = -A_k(\cdot) \frac{\alpha^\gamma}{k^\gamma} e^{ik\pi} \left[\frac{e^{-i(\xi(a_M - gE) + k(t-d)(a_M - gE))}}{\sqrt{1 + (a_M - gE)^\gamma k^\gamma / \alpha^\gamma}} \right. \quad (۸۸.۲)$$

$$+ e^{-\alpha(t-d)} (\alpha(t-d) + 1) Ei[(\alpha - ik(a_M - gE))(t-d)] \quad (۸۹.۲)$$

$$- e^{-ik(t-d)(a_M - gE)} \quad (۹۰.۲)$$

$$\left. - e^{-\alpha(t-d)} (\alpha(t-d) + 1) Ei[\alpha(t-d)] \right] \quad (۹۱.۲)$$

$$= -A_k(\cdot) \frac{\alpha^\gamma}{k^\gamma} e^{ik\pi} \left[e^{-ik(t-d)(a_M - gE)} \left(\frac{e^{-i(\xi(a_M - gE))}}{\sqrt{1 + (a_M - gE)^\gamma k^\gamma / \alpha^\gamma}} + 1 \right) \right. \quad (۹۲.۲)$$

$$\left. + e^{-\alpha(t-d)} (\alpha(t-d) + 1) \left(Ei[(\alpha - ik(a_M - gE))(t-d)] - Ei[\alpha(t-d)] \right) \right] \quad (۹۳.۲)$$

پس یک جمله‌ی نوسانی دارد و جمله‌ای که شامل تکینگی است. خبر خوب یا بد این است که این راه هم دارای ایراد است. زیرا در محاسبه‌ی مرتبه‌ی اول میدان اشتباهی رخ داده است - رابطه‌ی ۷۵.۲. در این رابطه باید ضرب مرتبه‌ی صفرم چگالی در مرتبه‌ی اول میدان جا

مانده است. یعنی باید می نوشتیم:

$$E(t) = \int \int_0^\infty (\rho_0 + \rho_1)(a - g(E_0 + E_1)) \cdot \alpha^\gamma v e^{-\alpha v} dv da \quad (94.2)$$

$$= \int \int_0^\infty [\rho_0(a - gE_0) + \rho_1(a - gE_1)] \cdot \alpha^\gamma v e^{-\alpha v} dv da \quad (95.2)$$

$$+ \int \int_0^\infty -gE_1\rho_0 \cdot \alpha^\gamma v e^{-\alpha v} dv da \quad (96.2)$$

$$+ \int \int_0^\infty -gE_1\rho_1 \cdot \alpha^\gamma v e^{-\alpha v} dv da \quad (97.2)$$

$$(98.2)$$

در واقع جمله‌ی آخر رابطه‌ی بالا جامانده بود و باعث می‌شود بخشی از جواب در پشت آن پنهان بماند. البته با در نظر گرفتن آن جمله پیچیدگی اصلی مسئله دوباره به صفحه‌ی بازی برمی‌گردد.

۲.۰.۲ بازی از نو (سامانه‌ی تک جریانی)

بنظر نمی‌آید که معادلات ما از این طریق حل شوند. بیاید یک طریق دیگر در پیش گیریم.

دیدار

استاد: محسن! بیا مسئله را باز هم ساده‌تر کنیم. به جای آن که یک پهنای جریان بگیریم؛ فقط و فقط یک جریان را در سامانه قرار دهیم. آنگاه ببینیم باز هم هم‌گامی خواهیم دید؟

پیشنهاد بعدی این که تیزه‌ها را باریک و بدون پهنای در نظر بگیر ($\alpha \rightarrow \infty$) امیدوارم در این حالت مسئله حل شود.

محسن: مسئله شاید کمی عوض شود. زیرا جریان مهارتی برآمده از نورهایی با جریان بالا روی پتانسیل نوره‌های پایین‌تر هم تاثیر می‌گذارد.

استاد: می‌دانم. اما از همین سامانه تک‌جریانی باید دریابید. وقتی یکی را حل کنیم بقیه را می‌توانیم از کنار هم قرار دادن این زیرسامانه محاسبه کنیم.

محسن: خیلی هم خوب! چشم انجام می‌شود.

استاد: فردا می‌توانی بیایی و حضوری باهم جلسه داشته باشیم؟

محسن: بله حتما خدمت خواهم رسید.

(اتاق انجمن علمی، سه‌شنبه عصر ۳۰ فروردین)

خروجی این مکالمات و چند جلسه پشت سرهم در ادامه‌ی این بخش خواهد آمد.

بیاید مجدد رابطه‌ی ۵.۲ که جریان را در سامانه گزارش می‌داد برای سامانه‌ی جدید بازنویسی کنیم. با

این تفاوت که α را به بینهایت سوق داده‌ایم و تیزه‌ها کاملاً باریک هستند.

$$E(t) = \frac{n(\pi, t-d)}{N} \cdot [a - gE(t-d)] \quad (99.2)$$

حالت پایا

برای این سامانه میدان حالت پایا به صورت زیر قابل توصیف است:

$$E_* = \frac{n}{N} \cdot [a - gE_*] = \frac{1}{2\pi} [a - gE_*] \quad (100.2)$$

$$\Rightarrow E_* = \frac{a}{2\pi + g} \quad (101.2)$$

اختلال از حالت پایا

حال فرض کنیم که جریان به اندازه‌ای کوچک از حالت پایای خود منحرف شود. $E = E_* + \epsilon$ علاقه‌مندیم که سامانه در زمان‌های بعدی چگونه رفتار خواهد کرد. آیا این اختلال به طریقی هضم خواهد شد و یا بزرگ‌تر می‌شود و همواره سامانه را از حالت پایا دور خواهد کرد؟

$$E(t+d) = \frac{1}{2\pi} [a - gE(t)] \quad (102.2)$$

$$= \frac{1}{2\pi} [a - g(E_* + \epsilon)] \quad (103.2)$$

$$= \frac{1}{2\pi} [a - gE_*] - \frac{g\epsilon}{2\pi} \quad (104.2)$$

$$= E_* - \frac{g\epsilon}{2\pi} \quad (105.2)$$

با ادامه‌ی همین روند می‌توانیم به این نتیجه برسیم که در گام‌های بعدی سامانه چگونه رفتار خواهد کرد:

$$E(t+nd) = E_* + \epsilon \sum_n \left(\frac{-g}{2\pi}\right)^n \quad (106.2)$$

پرواضح است که اگر ضریب تاثیر از مقدار 2π کمتر باشد؛ این مجموع همگراست و اختلال در سامانه هضم خواهد شد. در صورتی اگر بیشتر باشد؛ واگرا خواهد بود. این مقدار بنظر همان گذر فازی است که مدت‌هاست به دنبال آن می‌گردیم. پس موفق شدیم که برای سامانه‌ی تک‌جریان نقطه‌ی گذر فاز را محاسبه کنیم. کمتر باشد؛ این مجموع همگراست و اختلال در سامانه هضم خواهد شد. در صورتی اگر بیشتر باشد؛ واگرا خواهد بود.

شبیه‌سازی سامانه‌ی تک‌جریان

حدس می‌زنیم که برای سامانه‌ی یاد شده در قسمت قبل گذر فاز در $g = 2\pi$ رخ دهد. پس شبیه‌سازی را بار دیگر با تنظیمات زیر راه‌اندازی می‌کنیم:

$$\alpha = 100 \text{ s}^{-1} *$$

* جریان خارجی متصل به تمامی نورون‌ها یکسان و برابر ۵.۹ است.

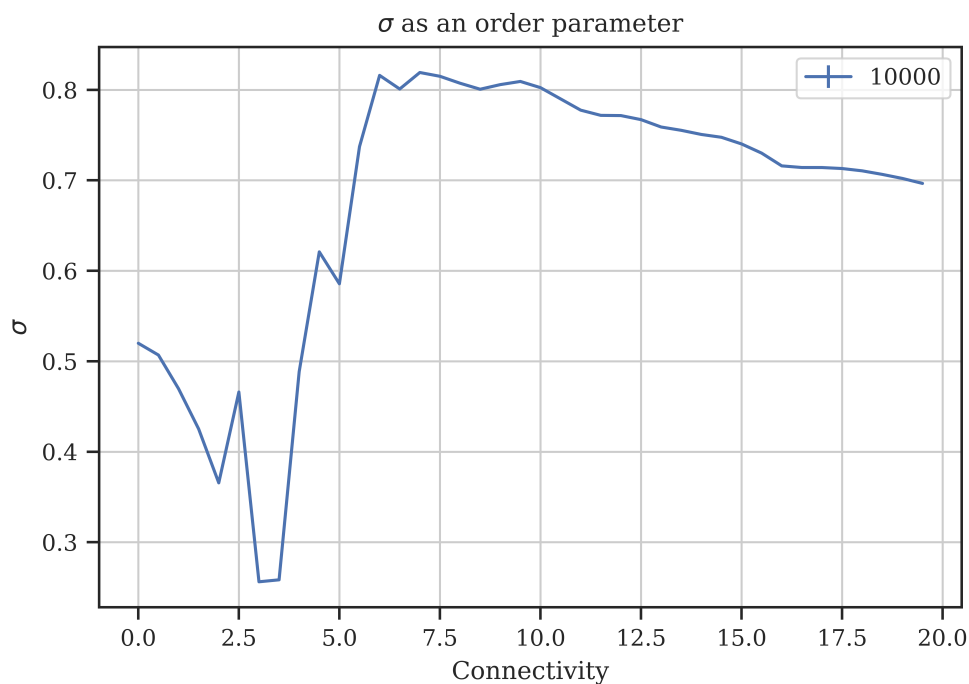
$$N = 10000 *$$

$$t_d = 0.1 \text{ s} *$$

* کل زمان شبیه‌سازی ۱۰۰ ثانیه در نظر گرفته شده

* هر گام زمانی برابر ۰.۱۰ ثانیه است.

به این ترتیب نتیجه‌ی شبیه‌سازی به شکل زیر در آمد: متأسفانه این شکستی برای امید به محقق شدن



شکل (۲.۲) مشخصه‌ی نظم سامانه ده هزار نورونی تک‌جریان

توصیف تحلیلی این سامانه است. زیرا نقطه‌ی گذر فاز کاملاً دور از همسایگی عدد ۶ و در همسایگی

نزدیکی حول ۵.۳ پیدا شده است. سوالی که ما در این بخش با آن تنها خواهیم ماند این است که راه حل پیشین ما از چه جزئیاتی چشم پوشی کرده است؟!

دیدار

محسن: استاد! شکل به این صورت درآمد.
استاد: خوب اشکال ندارد! باید بررسی کنیم ببینیم مشکل از کجاست.
(لحظاتی پیش از شروع جلسه‌ی برخط مقاله‌خوانی روز چهارشنبه ۷ اردیبهشت)

کتاب نامه

- [1] Luccioli, Stefano and Politi, Antonio. Irregular collective behavior of heterogeneous neural networks. *Phys. Rev. Lett.*, 105:158104, Oct 2010. [5](#)