1.3

۱۳

۱۳

۱۳

۱۴۰۱

اظهارنامه

(اصالت متن و محتوای پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد)

عنوان پایان‌نامه: مطالعه همگامی در شبکه‌های عصبی بهاری

نام استاد راهنما: سامان مقیمی عراقی   نام استاد راهنمای همکار: ....   نام استاد مشاور: ....

این‌جانب محسن تهرانی اردبیلی اظهار می‌دارم:

۱- متن و نتایج علمی ارائه شده در این پایان‌نامه اصیل بوده و منحصراً توسط این‌جانب و زیرنظر استادان (راهنما، همکار و مشاور) نام‌برده شده در بالا تهیه شده است.

۲- متن پایان‌نامه به این صورت در هیچ جای دیگری منتشر نشده است.

۳- متن و نتایج مندرج در این پایان‌نامه، حاصل تحقیقات این‌جانب به عنوان دانشجوی کارشناسی‌ارشد دانشگاه صنعتی شریف است.

۴- کلیه مطالبی که از منابع دیگر در این پایان‌نامه مورد استفاده قرار گرفته، با ذکر مرجع مشخص شده است.

نام دانشجو: محسن تهرانی اردبیلی

تاریخ ۱۴۰۱/۶/۱۳

امضا

نام استادان راهنما: ....

تاریخ

امضا

نام دانشجو: محسن تهرانی اردبیلی

تاریخ ۱۴۰۱/۶/۱۴

امضا

بسم الله الرحمن الرحیم

سامان مقیمی عراقی

۱۴۱۳۱۲۱۱۱۰۹۸۷۶۵۴۳۲۱

۱۳۱۳

۱۳۱۳

۱۳

۱

۲ [۱۳]

۳

---

[۱۳] ۱۳

۱

[2] e-mail

۱۱۱۹۷۲

[1] complex paradigm

4 August 1972, Volume 177, Number 4047 SCIENCE

More Is Different

Broken symmetry and the nature of the hierarchical structure of science.

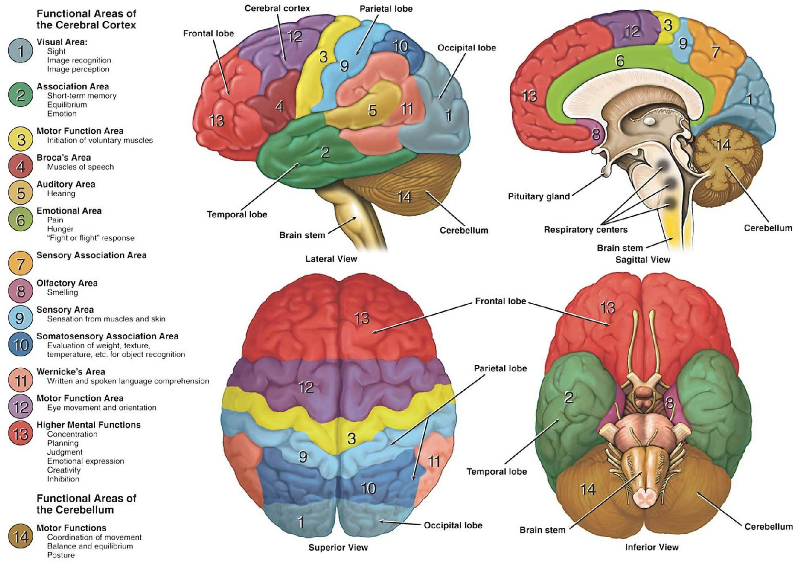
P. W. Anderson

The reductionist hypothesis may still be a topic for controversy among philosophers, but among the great majority of active scientists I think it is accepted planation of phenomena in terms of known fundamental laws. As always, distinctions of this kind are not unambiguous, but they are clear in most cases. Solid state physics, plasma physics, and perhaps less relevance they seem to have to the very real problems of the rest of science, much less to those of society.

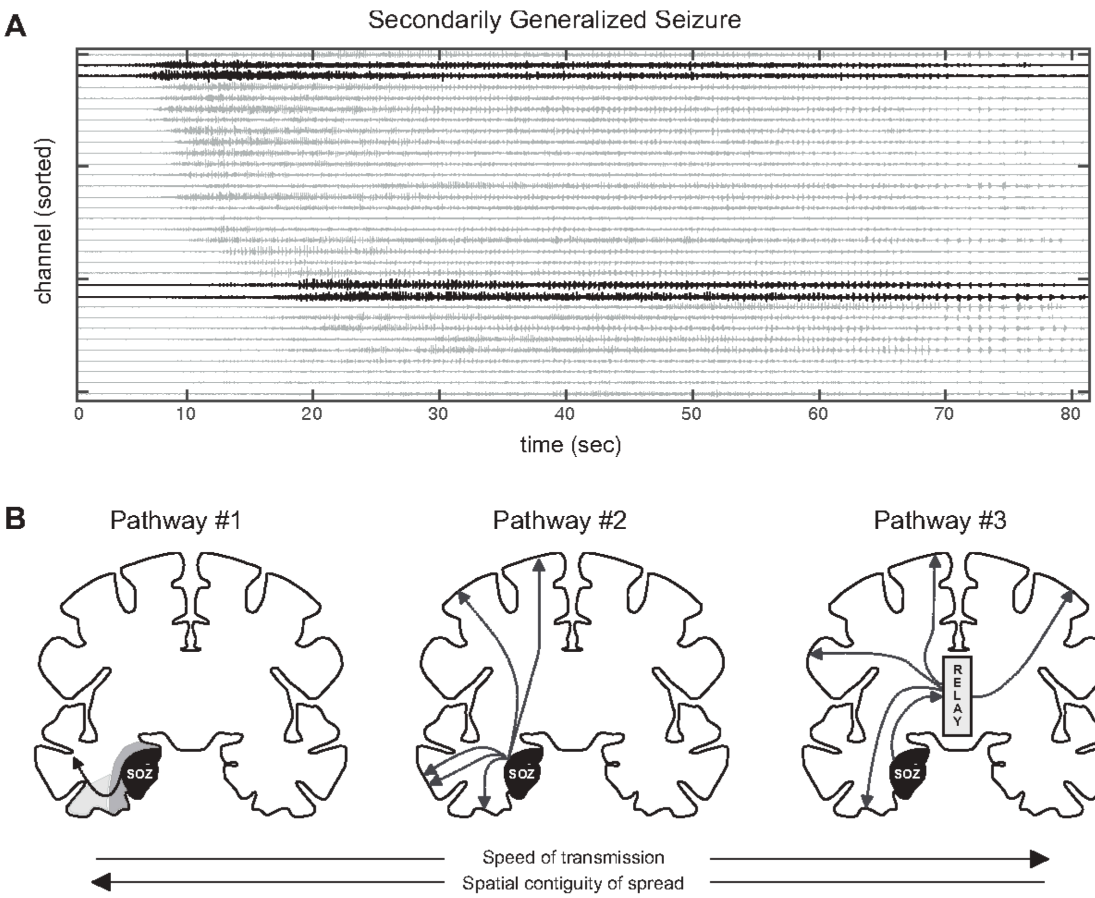
The constructionist hypothesis breaks down when confronted with the twin difficulties of scale and complexity. The behavior of large and complex aggregates of elementary particles, it turns out, is not to be understood in terms of a simple extrapolation of the properties of a few particles. Instead, at each level of complexity entirely new properties appear, and the understanding of the new behaviors requires research which I think is as fundamental in its nature as any other. That is, it seems to me that one may array the sciences roughly linearly in a hierarchy, according to the idea: The elementary entities of science X obey the laws of science Y.

۱۹۷۲۱۱

۱۲

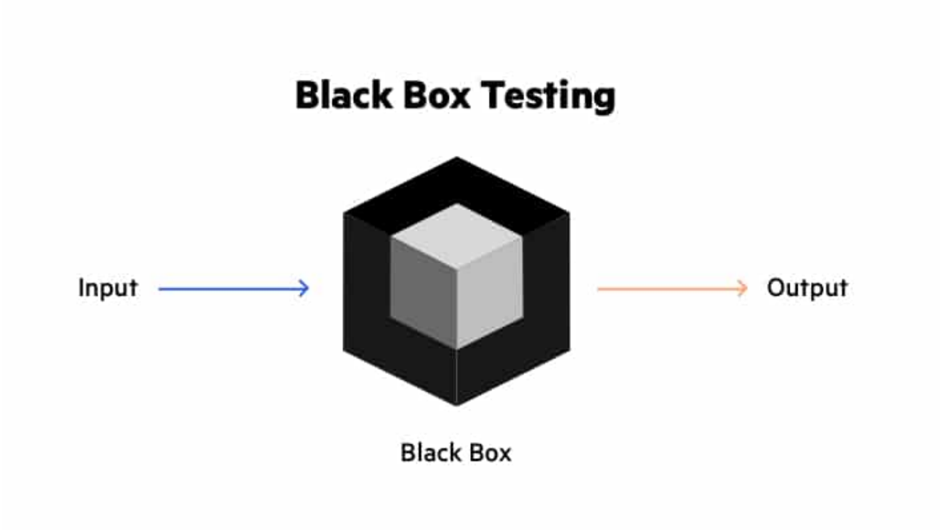


۱۵۱۲



Multiple pathways compatible with secondary seizure generalization are demonstrated. *A*: electrographic recording of a secondarily ge

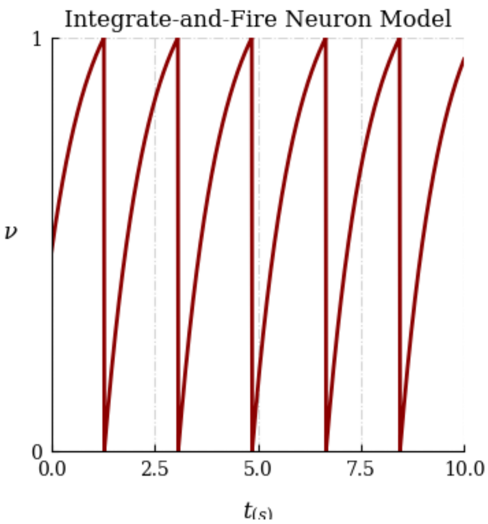
۸۰۱۰۱۶۱۳



۱۴

۱۴

[2] parietal lobe
[3] occipital lobe
[4] temporal lobe
[5] frontal lobe
[6] structured network



۱/۲۱۵

۱۸۱۷

$$\dot{v}_i = a_{exti} - v_i + \sum_j g_{ij} I_{ij}$$ ۱۱

۱۹ $ijijg_{ij}ijI_{ij}a_{exti}iv_i$

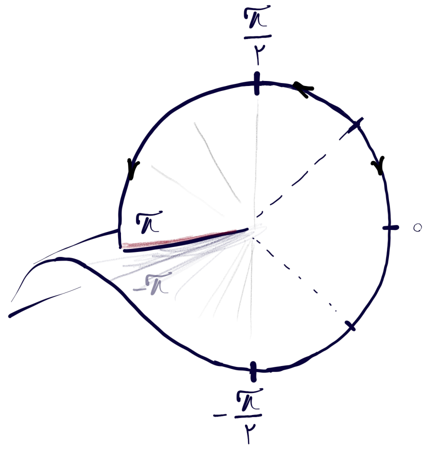
۱۵ $v_i = ۰ v_i = ۱$

$$\dot{\theta}_i = a_{exti} - cos(\theta_i) + \sum_j g_{ij} I_{ij}.$$ ۱۲

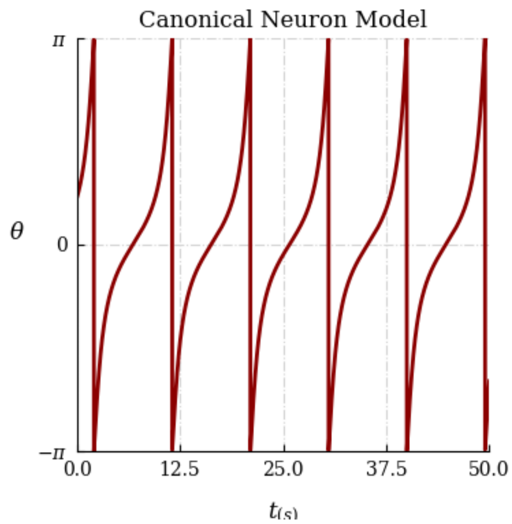
۱۶ $-\pi + \pi cos(\theta_i)\theta_i$

۱۷

[7] Integrate and Fire


$\frac{\pi}{2}$
π
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
0

۱۶


Canonical Neuron Model
π
θ
0
$-\pi$
0.0
12.5
25.0
37.5
50.0
$t_{(s)}$

۱۳/۵۱۷

۱۰۲۰

۱۰

۲۱

[8]phase transition

۱۰

۲۱

$$\dot{v}_i = a_i - v_i - \frac{g}{N} \sum_{n|t_n<t} S_{i,l}\delta(t - t_{n,l} - t_d)$$

g

S

t_d

$ilnt_{n,l}$

a_i

N

$$\dot{v}_i = I - v_i \rightarrow \frac{dv_i}{I - v_i} = dt \qquad ۲۲$$

$$\rightarrow T = ln\left(\frac{I}{I - ۱}\right). \qquad ۲۳$$

E

$$\ddot{E} + ۲\alpha\dot{E} + \alpha^۲ E = \frac{\alpha^۲}{N}\sum_{n|t_n<t}\delta(t - t_n - t_d) \qquad ۲۴$$

$$\sigma^۲ = \langle E^۲\rangle_t - \langle E\rangle_t^۲ \qquad ۲۵$$

α

σE

Δt

$$v_i(t + \Delta t) = v_i(t) + \int_t^{t+\Delta t} \dot{v}_i dt \quad ۲۶$$

$$= v_i(t) + \int_t^{t+\Delta t} \left[a_i - v_i - \frac{g}{N} \sum_{n|t_n<t} S_{i,l}\delta(t - t_{n,l} - t_d) \right] dt \quad ۲۷$$

$$\approx v_i(t) + [a_i - v_i(t)]\, \Delta t - \frac{g}{N} \sum_{n|t_n<t} S_{i,l} \int_t^{t+\Delta t} \delta(t - t_{n,l} - t_d) dt \quad ۲۸$$

$$\approx v_i(t) + [a_i - v_i(t)]\, \Delta t - \frac{g}{N} \sum_{n|t_n<t} S_{i,l} H(t + \Delta t - t_{n,l} - t_d). \quad ۲۹$$

i۲۹$t, t + \Delta t$

۲۱۲۹

$\alpha = ۲۰\ s^{-۱}$

$(۱/۲, ۲/۸)$

$N = ۱۰۰۰۰$

$t_d = ۰/۱\ s$

۰/۰۱۱۰۰۰

۲۱σE

۲۱

۱/۶۲۵

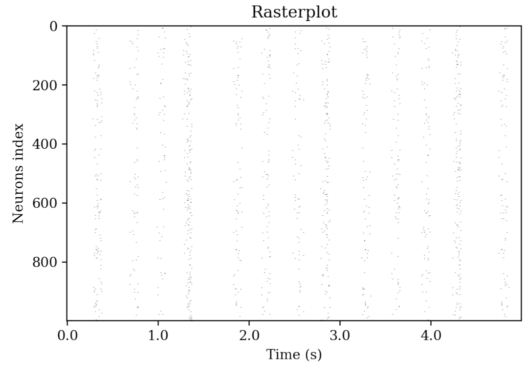
۲۱۲۱

۲۱

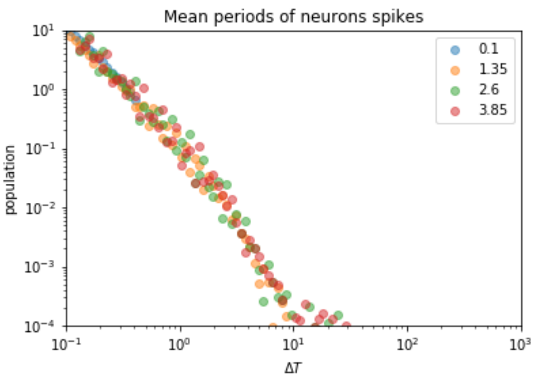
۲۱

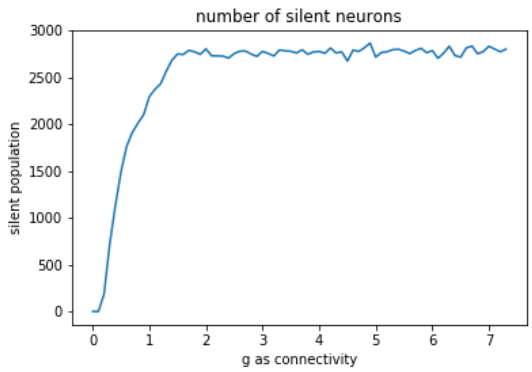
$t_d = ۰/۱ s$

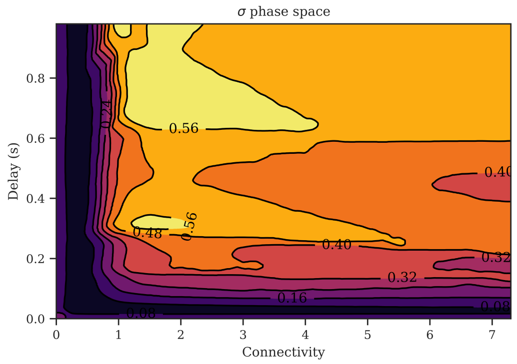

σ as an order parameter
10000
σ
Connectivity

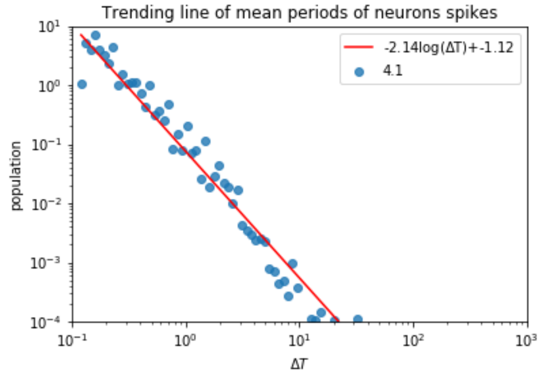

Rasterplot
Neurons index
Time (s)

$g = ۵$


Mean periods of neurons spikes
0.1
1.35
2.6
3.85
population
ΔT


number of silent neurons
silent population
g as connectivity


σ phase space
Delay (s)
Connectivity


Trending line of mean periods of neurons spikes
-2.14log(ΔT)+-1.12
4.1
population
ΔT

۲۱

۱

۲

۳

۲۱

۲

$-\pi\pi$

$$\begin{cases} \dot{\theta}_i = I_i - \cos\theta_i - gE, \theta_i \leqslant \pi \\ \dot{E} = M - \alpha E \\ \dot{M} = -\alpha M + \frac{\alpha^۲}{N} \sum_{n|t_n<t} \delta(t - t_n - t_d) \end{cases}$$ ۳۱

$\pi\theta_i$

E

M

۲

$$T = \frac{۲\pi}{\sqrt{I^{۲} - ۱}}, \quad (۳۲)$$

$$f = \frac{۱}{T} = \frac{\sqrt{I^{۲} - ۱}}{۲\pi}. \quad (۳۳)$$

۲۲

$$s = \langle \Big[\frac{۱}{N_a} \sum_{i_a} sin(\theta_{i_a}) \Big]^{۲} \rangle_t \quad (۳۴)$$

N_a ۱۰۰۰

۱۲

۱۲

$\alpha = ۲۰$

$(۹/۵, ۱۳/۵)$

$N = ۱۰^۴$

$t_d = ۰/۱$

g

۴۱۰۴۱۰۰۰

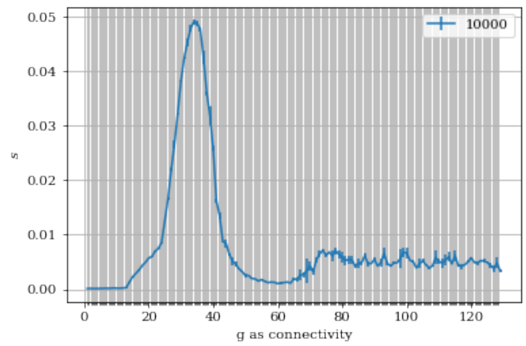
۳۱۳۱$g = ۳۰$

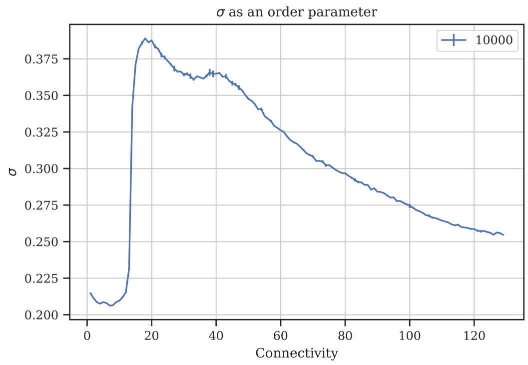
$(۸/۵, ۱۳/۵)(۰/۲, ۲, ۸)$

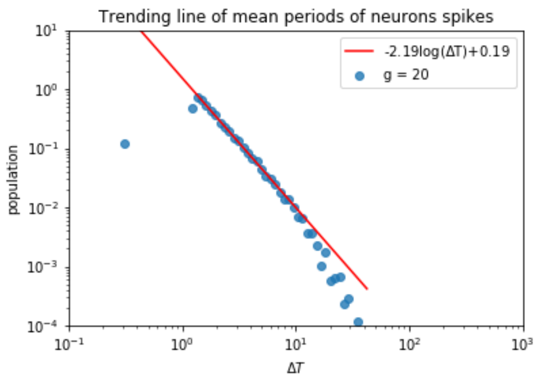
E

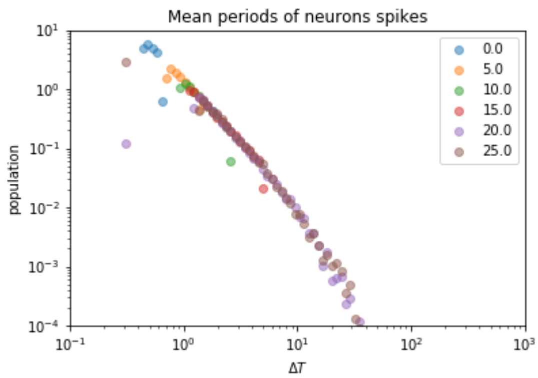
۳۱

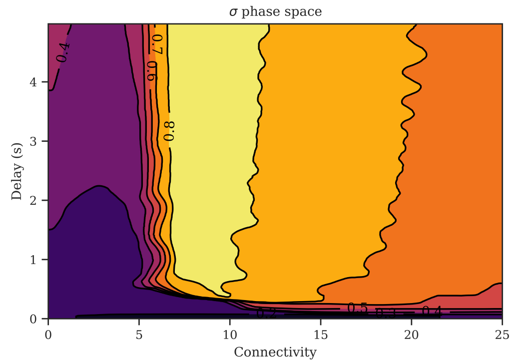
۳۱

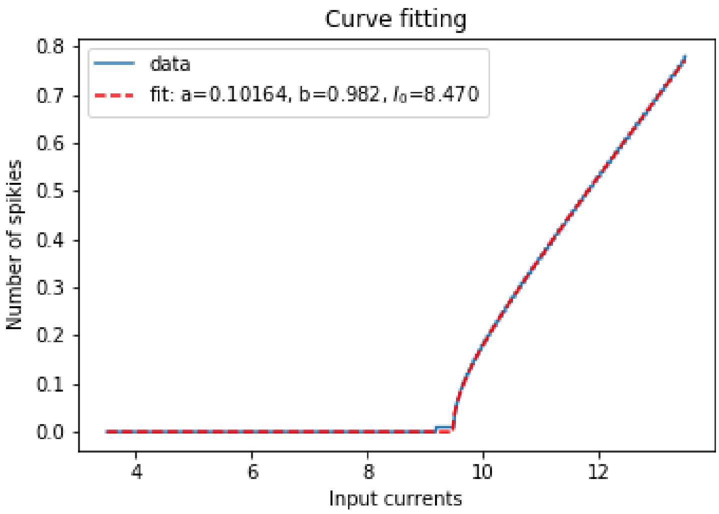

10000
s
g as connectivity


σ as an order parameter
10000
σ
Connectivity


Trending line of mean periods of neurons spikes
-2.19log(ΔT)+0.19
g = 20
population
ΔT


Mean periods of neurons spikes
0.0
5.0
10.0
15.0
20.0
25.0
population
ΔT


σ phase space
Delay (s)
Connectivity



$g = ۵۰۳۲$

۳۱$g = ۵۰۳۲$

$$\begin{cases} I_{in} &= -g \int_{a_{min}}^{a_{max}} p(a) f(a + I_{in}) da, \\ f(a) &= \frac{\sqrt{a^۲ - ۱}}{۲\pi}. \end{cases} \qquad ۳۵$$

$I_{in} f(a)$۳۵

$$I_{in} = \frac{-g}{۲}\left(- a\sqrt{-۱ + a^{۲}} + log(a + \sqrt{-۱ + a^{۲}}\right)\Big|_{a_{min}+I_{in}}^{a_{max}+I_{in}}. \quad (۳۶)$$

I_{in}

$I_۰$

$$f(I) = a\frac{\sqrt{[b(I - I_۰)]^{۲} - ۱}}{۲\pi}. \quad (۳۷)$$

۸/۴۷۳۲

$t_d = ۰/۱$

۳۱

$-\cos\theta$۲۱

$-\cos\theta$

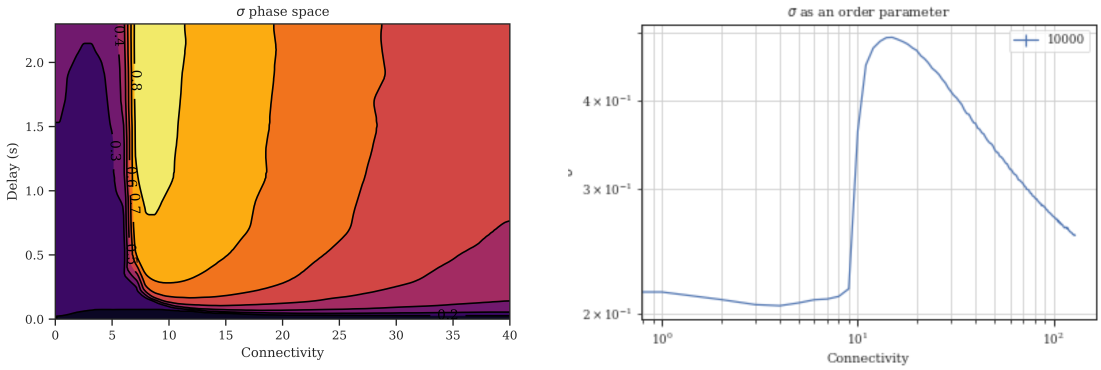
$$\begin{cases} \dot{\theta}_i = I_i - gE, \theta_i \leqslant \pi \\ \dot{E} = M - \alpha E \\ \dot{M} = -\alpha M + \frac{\alpha^۲}{N} \sum_{n|tn<t} \delta(t - t_n - t_d) \end{cases} \quad ۴۱$$

$\pi\theta_i$

E

M

$\pi\pi$



$\alpha = ۲۰$

$(۹/۵, ۱۳/۵)$

$N = ۱۰^{۴}$

$t_d = ۰/۱$

۴۱

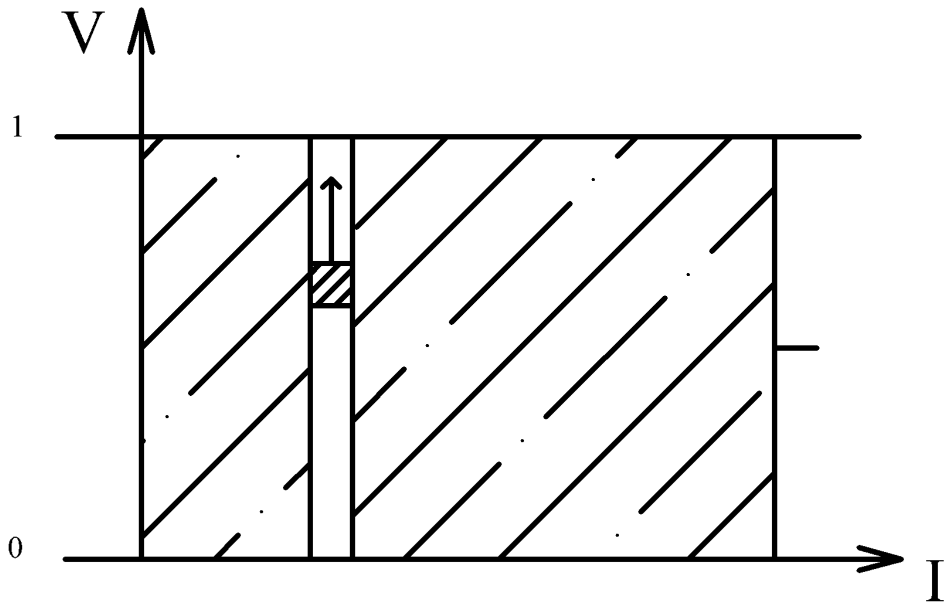
۱

۲

۳

۴

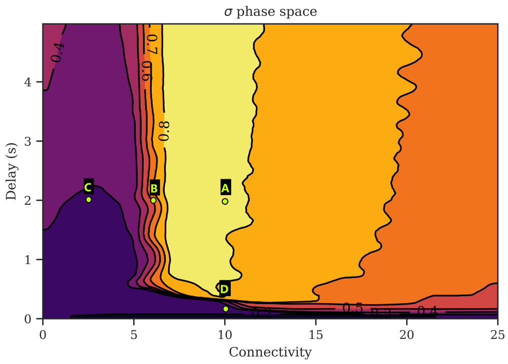
۵۱

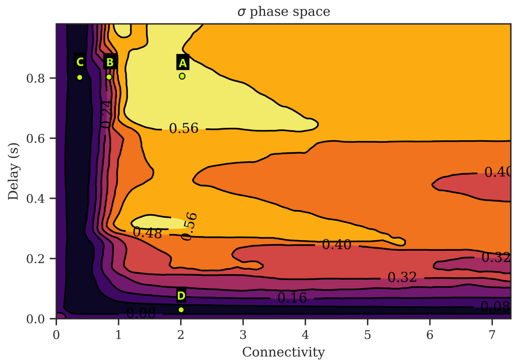


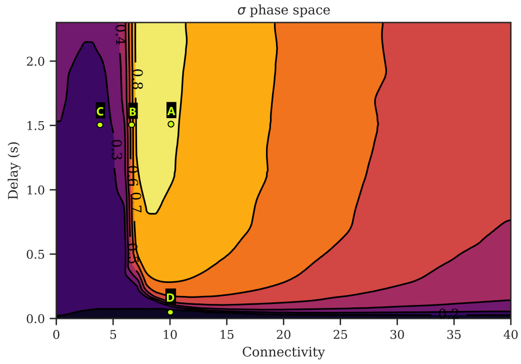
۵۱

۲۵۱

۴۵۲


σ phase space
Delay (s)
Connectivity
A
B
C
D


σ phase space
Delay (s)
Connectivity
A
B
C
D


σ phase space
Delay (s)
Connectivity
A
B
C
D

۵۲

$$\dot{v_a} = a - v_a - gE, \tag{۵۱}$$

$$\Delta \dot{v_a} = \Delta a - \Delta v_a, \tag{۵۲}$$

$$\frac{\Delta \dot{v_a}}{\Delta a} = ۱ - \frac{\Delta v_a}{\Delta a} \tag{۵۳}$$

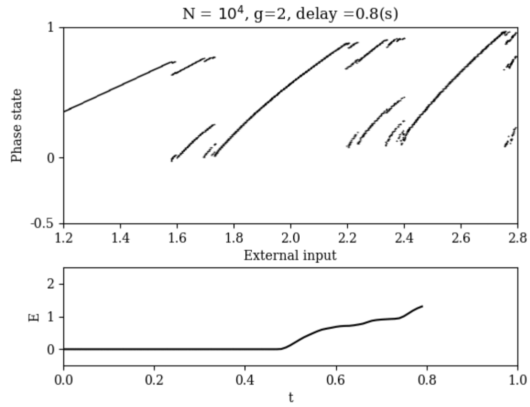
$$\frac{\Delta v_a}{\Delta a} = ۱ + C_{۰} e^{-t} \tag{۵۴}$$

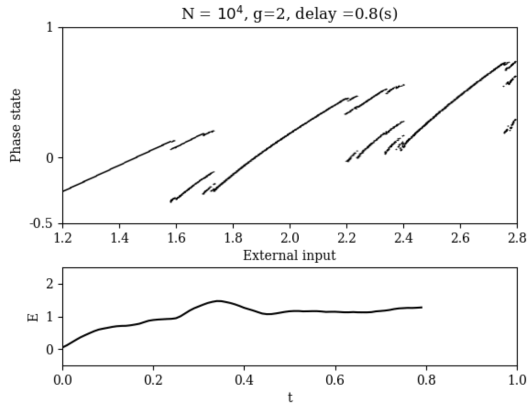
$$\frac{\Delta v_a}{\Delta a} \to ۱. \tag{۵۵}$$

$$\Delta \dot{v_a} = \Delta a - \Delta v_a \tag{۵۶}$$

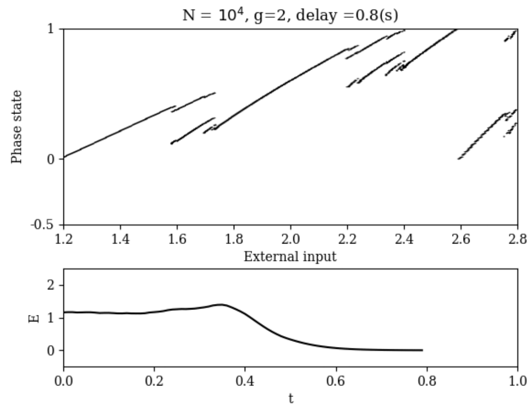
$$= \Delta a\big(۱ - \frac{\Delta v_a}{\Delta a}\big) \to ۰. \tag{۵۷}$$

$\Delta \dot{v_a} \to ۰ \Delta v_a \nrightarrow ۰$

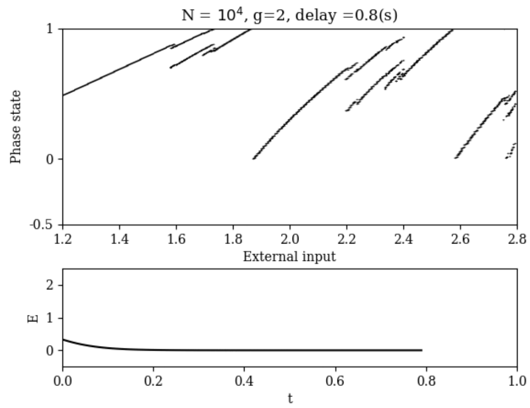




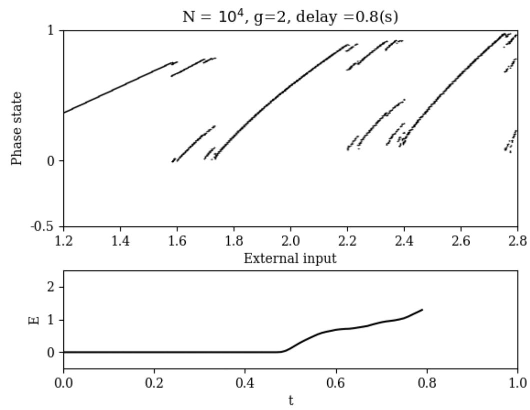
۰/۵



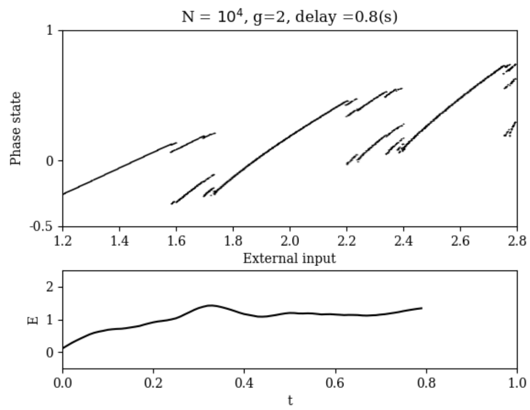
۱



۱/۵



۲



۲/۵

۲۰۰۵۳

۶۵۴

$$\dot{\theta}_a = a - \cos\theta_a - gE, \quad ۵۸$$

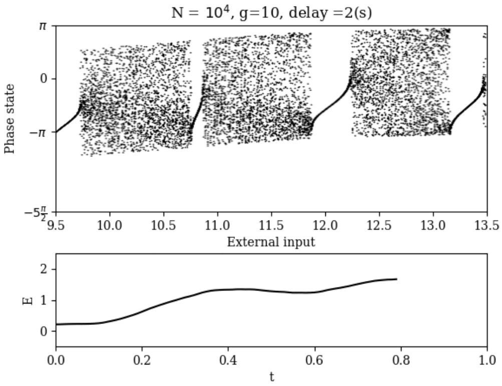
$$\Delta\dot{\theta}_a = \Delta a - \Delta\cos\theta_a, \quad ۵۹$$

$$\frac{\Delta\dot{v}_a}{\Delta a} = ۱ - \sin\theta_a \frac{\Delta\theta_a}{\Delta a}, \quad ۵۱۰$$

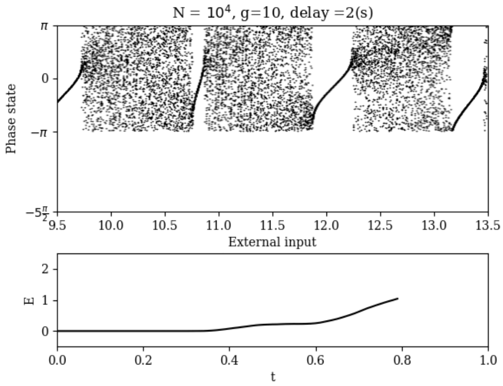
$$\frac{\Delta\dot{v}_a}{\Delta a} = ۰ : ۱ - \sin\theta_a \frac{\Delta\theta_a}{\Delta a} = ۰ \quad ۵۱۱$$

$$\Delta\theta = -\frac{\Delta a}{\sin\theta} \quad ۵۱۲$$

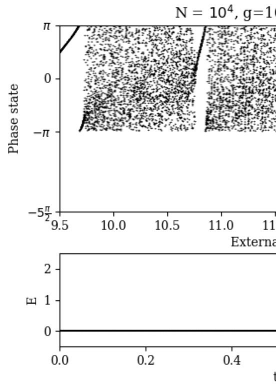
$$= -cosec\theta_a \Delta a. \quad ۵۱۳$$

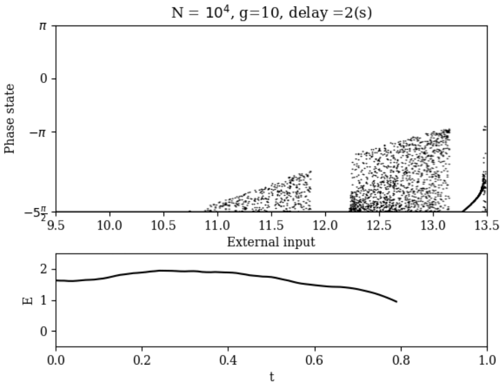


۱

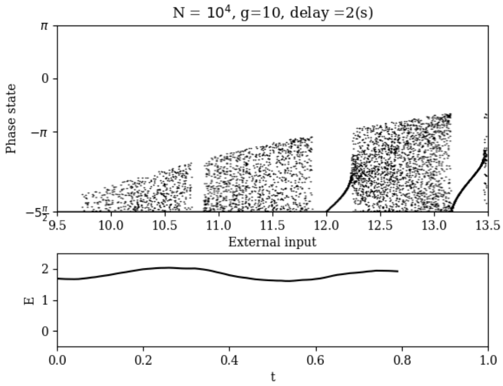


۰/۵

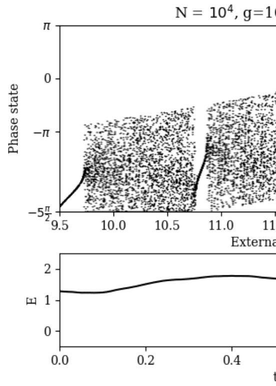




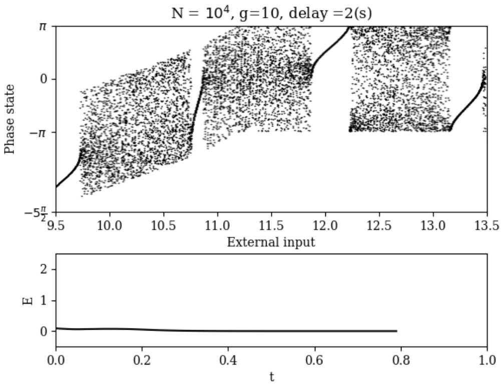
۲/۵



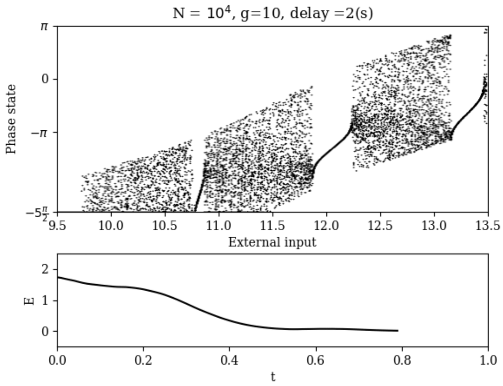
۲



۱/



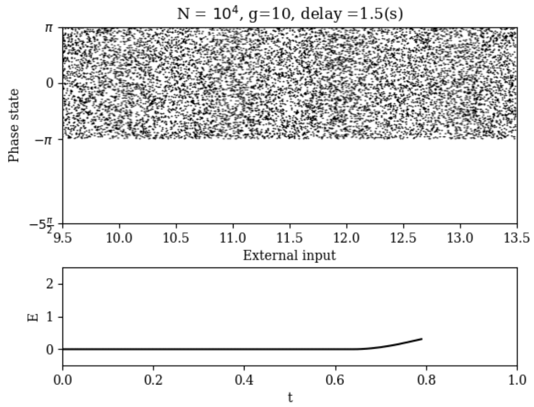
۳/۵

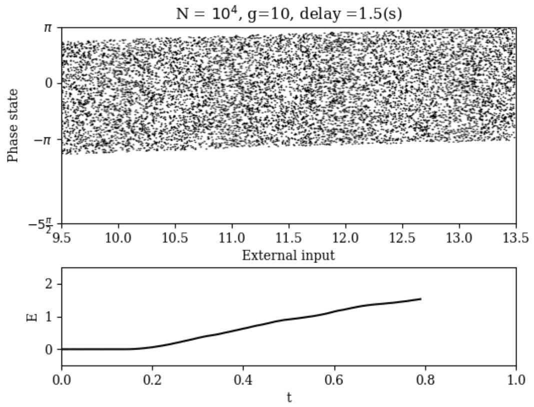


۳

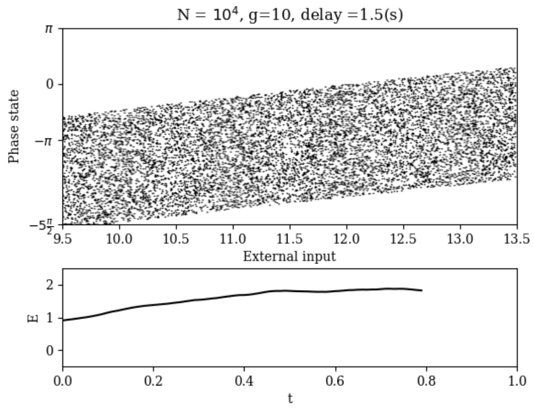
۲۰۰۵۴

۶۵۵

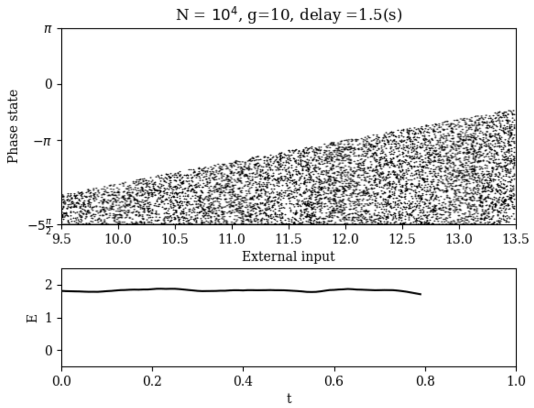




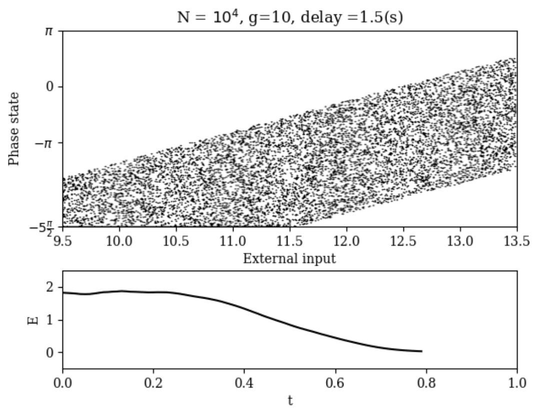
۰/۵



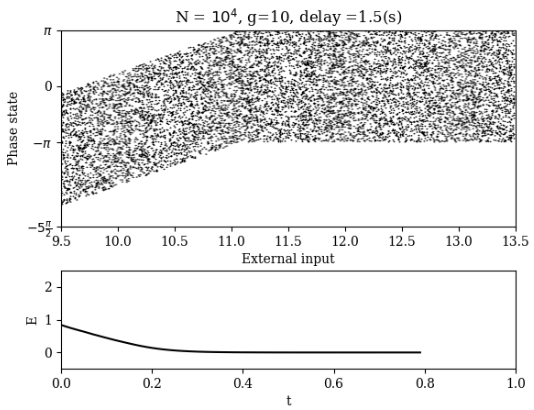
۱



۱/۵



۲



۲/۵

۲۰۰۵۵

$E(t)p(t) := \alpha^{۲} t \cdot exp(-\alpha t)\theta = \pi$

$$E(t) = \frac{۱}{N}\int_{٠}^{\infty}\int J_a(\pi, t-d-u)da \cdot \alpha^{۲} u\, e^{-\alpha u} du. \qquad ۶۱$$

a

$$J_a(\theta, t) = n_a(\theta, t)\,\dot{\theta}_a. \qquad ۶۲$$

$\theta \leqslant \pi$

$$\frac{\partial n_a}{\partial t} = -\frac{\partial J_a}{\partial \theta} \qquad ۶۳$$

$$= -\frac{\partial n_a}{\partial \theta}\,\dot{\theta}_a. \qquad ۶۴$$

$$\begin{cases} E(t) = \frac{1}{N}\int_0^\infty \int n_a(\pi, t-d-u)\cdot\big[a - gE(t-d-u)\big]da\cdot \alpha^2 u\, e^{-\alpha u}du, \\ \frac{\partial n_a}{\partial t} = -\frac{\partial n_a}{\partial \theta}\cdot (a - gE(t)). \end{cases}$$ ۶۵

n_a

۱

۲

$$E(t) = \sum c_i \cdot \cos\omega_i t.$$ ۶۶

c_i

۳

EE

$$\mathcal{J}(\pi, t-d-u) \equiv \int n_a(\pi, t-d-u) a\cdot da,$$ ۶۷

$$\mathcal{N}(\pi, t-d-u) \equiv \int n_a(\pi, t-d-u)\cdot da,$$ ۶۸

$$\mathcal{P}(u) \equiv \alpha^2 u\, e^{-\alpha u}.$$ ۶۹

$\mathcal{N}(\pi,u)\mathcal{J}(\pi,u)$

$$E(t) = \frac{۱}{N}\int_{۰}^{\infty} \mathcal{J}(\pi, t-d-u_{۱}) \cdot \mathcal{P}(u_{۱}) du_{۱} \quad ۶۱۰$$
$$- \frac{g}{N}\int_{۰}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-d-u_{۱}) \cdot \mathcal{P}(u_{۱}) E(t-d-u_{۱}) du_{۱}. \quad ۶۱۱$$

$$\mathcal{A}(t) \equiv \frac{۱}{N}\int_{۰}^{\infty} \mathcal{J}(\pi, t-d-u_{۱}) \cdot \mathcal{P}(u_{۱}) du_{۱}. \quad ۶۱۲$$

$$E(t-d-u_{۱}) = \frac{۱}{N}\int_{۰}^{\infty} \mathcal{J}(\pi, t-۲d-u_{۱}-u_{۲}) \cdot \mathcal{P}(u_{۲}) du_{۲} \quad ۶۱۳$$
$$- \frac{g}{N}\int_{۰}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-۲d-u_{۱}-u_{۲}) \cdot \mathcal{P}(u_{۲}) E(t-۲d-u_{۱}-u_{۲}) du_{۲}.$$
$$۶۱۴$$

$$E(t) = \mathcal{A}(t-d) - g\int_0^\infty \mathcal{N}(\pi, t-d-u_1)\cdot\mathcal{P}(u_1)E(t-d-u_1)du_1 \tag{۶۱۵}$$

$$= \mathcal{A}(t-d) - g\int_0^\infty \mathcal{N}(\pi, t-d-u_1)\cdot\mathcal{P}(u_1)\cdot\big[\mathcal{A}(t-2d-u_1) - g\int_0^\infty \mathcal{N}(\pi, t-d-u_1-u_2)\cdot\mathcal{P}(u_2)E(t-2d-u_1-u_2)du_2\big]du_1 \tag{۶۱۶}$$

$$= \mathcal{A}(t-d) - g\int_0^\infty \mathcal{N}(\pi, t-d-u_1)\cdot\mathcal{P}(u_1)\cdot\mathcal{A}(t-2d-u_1)du_1 \tag{۶۱۷}$$

$$+ g^2\int_0^\infty \mathcal{N}(\pi, t-d-u_1)\cdot\mathcal{P}(u_1)\int_0^\infty \mathcal{N}(\pi, t-2d-u_1-u_2)\cdot\mathcal{P}(u_2)E(t-2d-u_1-u_2)du_2du_1 \tag{۶۱۸}$$

$$= \mathcal{A}(t-d) - g\int_0^\infty \mathcal{N}(\pi, t-d-u_1)\cdot\mathcal{P}(u_1)\cdot\mathcal{A}(t-2d-u_1)du_1 \tag{۶۱۹}$$

$$+ g^2\int_0^\infty \mathcal{N}(\pi, t-d-u_1)\cdot\mathcal{P}(u_1)\int_0^\infty \mathcal{N}(\pi, t-2d-u_1-u_2)\cdot\mathcal{P}(u_2)\mathcal{A}(t-3d-u_1-u_2)du_2du_1 \tag{۶۲۰}$$

$$- g^3\int_0^\infty \mathcal{N}(\pi, t-d-u_1)\cdot\mathcal{P}(u_1)\int_0^\infty \mathcal{N}(\pi, t-2d-u_1-u_2)\cdot\mathcal{P}(u_2)\int_0^\infty \mathcal{N}(\pi, t-3d-u_1-u_2-u_3)\cdot\mathcal{P}(u_3)E(t-3d-u_1-u_2-u_3)du_3du_2du_1. \tag{۶۲۱}$$

$E = ۰$

$E_۰$ ۶۵۳۱

$$\begin{cases} E_۰ = \frac{۱}{N}\int_{-\infty}^{t-d}\int n_a(\pi,u)\cdot\left[a-gE_۰\right]da\cdot\alpha^۲ u\, e^{-\alpha u}du, \\ \frac{\partial n_a}{\partial t} = -\frac{\partial n_a}{\partial\theta}\cdot(a-gE_۰). \end{cases} \quad ۶۲۲$$

$$۰ = \frac{dE_۰}{dt} = \frac{\alpha^۲(t-d)e^{-\alpha(t-d)}}{N}\cdot[-gE_۰\cdot\int n_a(\pi,t-d)da + \int n_a(\pi,t-d)\cdot a\, da]. \quad ۶۲۳$$

$E_۰$

$$E_۰ = \frac{۱}{g}\cdot\frac{\int n_a(\pi,t-d)\cdot a\, da}{\int n_a(\pi,t-d)da}. \quad ۶۲۴$$

$\theta_۰ n_a(\pi,t-d)$

$$n_a(\theta,t) = \delta(\theta-\theta_a(t)) \quad ۶۲۵$$
$$= \delta(\theta+\theta_۰-(a-gE_۰)t+۲\left\lfloor K_a^{(t)}\right\rfloor\pi) \quad ۶۲۶$$
$$= \delta(\theta-(a-gE_۰)t+۲\left\lfloor K_a^{(t)}\right\rfloor\pi+\theta_۰) \quad ۶۲۷$$
$$\Rightarrow n_a(\pi,t) = \delta((۲\left\lfloor K_a^{(t)}\right\rfloor+۱)\pi-(a-gE_۰)t+\theta_۰) \quad ۶۲۸$$

۶۲۹

$\left\lfloor K_a^{(t)}\right\rfloor$ $۲\pi K_a^{(t)}$

$$K_a^{(t)} = \frac{(a-gE_۰)t+\pi+\theta_۰}{۲\pi}. \quad ۶۳۰$$

$(a-gE_۰) > ۰$

$$\left(۲\left\lfloor\frac{(a-gE_{۰})t+\pi+\theta_{۰}}{۲\pi}\right\rfloor+۱\right)\pi-(a-gE_{۰})t+\theta_{۰}=۰,$$

$$۲\pi\times\left(\left\lfloor\frac{(a-gE_{۰})t+\pi+\theta_{۰}}{۲\pi}\right\rfloor-\frac{(a-gE_{۰})t+\pi+\theta_{۰}}{۲\pi}\right)=۰,$$

$$۲\pi\times\left(\left\lfloor K_a^{(t)}\right\rfloor-K_a^{(t)}\right)=۰.$$

$$\Delta K_a^{(t)}=۱,$$

$$\Delta K_a^{(t)}=\frac{t}{۲\pi}\Delta a,$$

$$\Delta a=\frac{۲\pi}{t}.$$

$(a_m-gE_{۰})>۰\,a_m$ ۶۳۳ Δa

$$\int n_a(\pi,t-d)a\,da=\int\delta\left(۲\pi(\lfloor K_a^{(t)}\rfloor-K_a^{(t)})\right)a\,da$$

$$=\frac{۱}{۲\pi}\cdot\sum_{K_a^{(t)}\in Z}a_i$$

$$=\frac{۱}{۲\pi}\cdot\sum_{m=۰}^{M}a_m+m\cdot\Delta a$$

$$=\frac{M+۱}{۲\pi}\cdot(\frac{a_m+a_{max}}{۲}).$$

$$\int n_a(\pi,t-d)\,da=\int\delta\left(۲\pi(\lfloor K_a^{(t)}\rfloor-K_a^{(t)})\right)a\,da$$

$$=\frac{۱}{۲\pi}\cdot\sum_{K_a^{(t)}\in Z}۱$$

$$=\frac{۱}{۲\pi}\cdot\sum_{m=۰}^{M}۱$$

$$=\frac{M+۱}{۲\pi}.$$

$$E_۰ = \frac{۱}{g} \cdot \frac{\int n_a(\pi, t-d) \cdot a\, da}{\int n_a(\pi, t-d) da}$$ ۶۴۶

$$= \frac{۱}{g} \cdot \frac{\frac{M+۱}{۲\pi} \cdot \left(\frac{a_m + a_{max}}{۲}\right)}{\frac{M+۱}{۲\pi}}$$ ۶۴۷

$$= \frac{۱}{g}\left(\frac{a_m + a_{max}}{۲}\right).$$ ۶۴۸

$a < \frac{۱}{g}\left(\frac{a_m + a_{max}}{۲}\right)$

۶۵

$$\frac{\partial n_a}{\partial t} = ۰.$$ ۶۴۹

$$\begin{cases} \frac{\partial n_a}{\partial t} = -\frac{\partial J_a(t)}{\partial \theta} = ۰ \\ J_a(\theta, t) = n_a(\theta, t) \cdot [a - gE] \end{cases} \Rightarrow J_a(\theta, t) = J_a(t)$$ ۶۵۰

$$\Rightarrow n_a(\theta, t) = n_a.$$ ۶۵۱

۶۵۲

$$n = \frac{N}{۲\pi(a_{Max} - a_{min})}.$$ ۶۵۳

$$E = \frac{۱}{N} \int_{-\infty}^{t-d} \int n \cdot \left[a - gE\right] da \cdot \alpha^۲ u\, e^{-\alpha u} du$$ ۶۵۴

$$= \int \frac{n}{N} \cdot \left[a - gE\right] da.$$ ۶۵۵

۶۵۵

$a_* = a_{min} a_*$

$$E = \int \frac{n}{N} \cdot \big[a - gE\big] da$$ ۶۵۶

$$= \frac{n}{N} \cdot \left[\frac{a_{Max}^{۲} - {a_*}^{۲}}{۲} - gE(a_{Max} - a_*)\right]$$ ۶۵۷

$$\Rightarrow E = n \cdot \left[\frac{a_{Max}^{۲} - {a_*}^{۲}}{۲}\right] / \big[N + gn(a_{Max} - a_*)\big].$$ ۶۵۸

$a^* = gEa^*$

$$E = \left(\frac{a_{Max}}{g} + \frac{N}{ng^{۲}}\right) \pm \left[\left(\frac{N}{ng^{۲}} + \frac{a_{Max}}{g}\right)^{۲} - \frac{{a_{Max}}^{۲}}{g^{۲}}\right]^{\frac{۱}{۲}}.$$ ۶۵۹

a_*

$$a_* = \left(a_{Max} + \frac{N}{ng}\right) \pm \left[\left(\frac{N}{ng} + a_{Max}\right)^{۲} - {a_{Max}}^{۲}\right]^{\frac{۱}{۲}}.$$ ۶۶۰

$$= \left(a_{Max} + \frac{N}{ng}\right) \pm \left[\frac{N^{۲}}{n^{۲}g^{۲}} + \frac{۲a_{Max}N}{ng}\right]^{\frac{۱}{۲}}.$$ ۶۶۱

$a_* a_*$

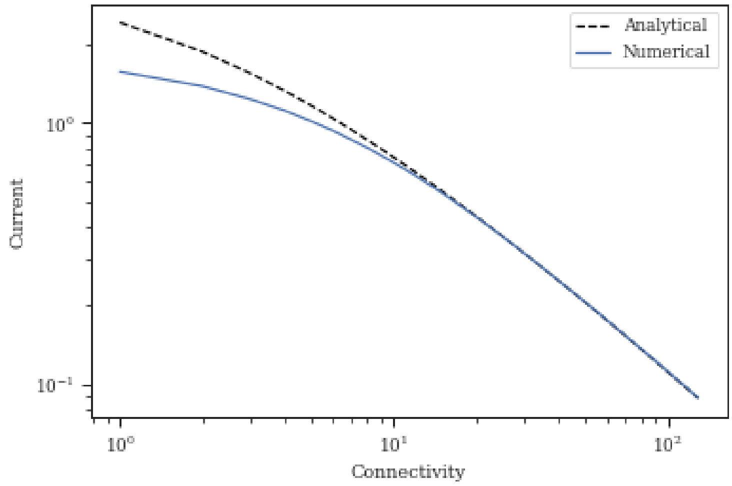
$$\begin{cases} a_* = \left(a_{Max} + \frac{N}{ng}\right) - \left[\frac{N^{۲}}{n^{۲}g^{۲}} + \frac{۲a_{Max}}{ng}\right]^{\frac{۱}{۲}}, \\ E = \left(\frac{a_{Max}}{g} + \frac{N}{ng^{۲}}\right) - \left[\frac{N^{۲}}{n^{۲}g^{۴}} + \frac{۲Na_{Max}}{ng^{۳}}\right]^{\frac{۱}{۲}}. \end{cases}$$ ۶۶۲

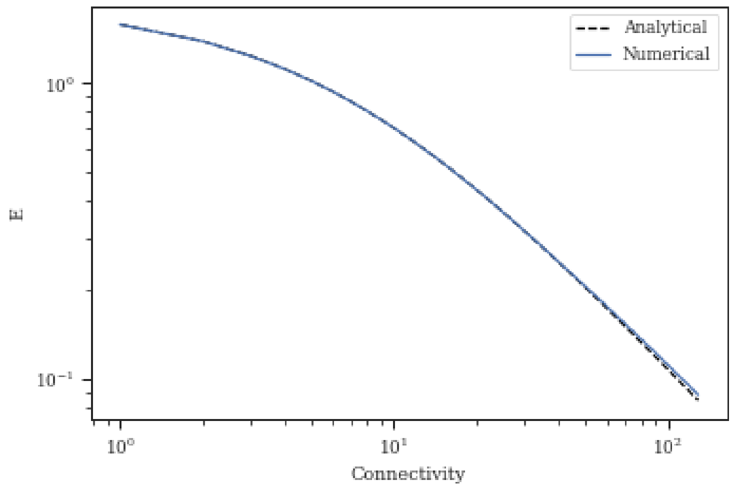
$$E \cong \frac{a_{Max}}{g} + \frac{N}{ng^{۲}} - \left(\frac{۲Na_{Max}}{ng^{۳}}\right)^{\frac{۱}{۲}} \left[۱ + \frac{N}{۲nga_{Max}}\right]^{\frac{۱}{۲}}$$ ۶۶۳

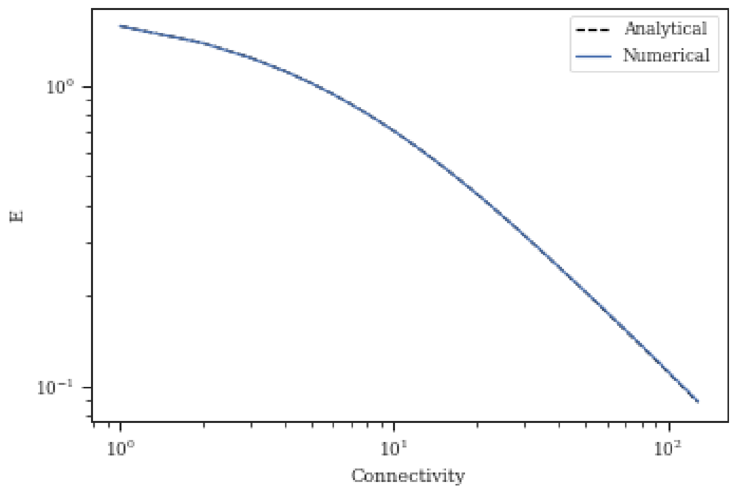
$$= \frac{a_{Max}}{g} + \frac{N}{ng^{۲}} - \left(\frac{۲Na_{Max}}{ng^{۳}}\right)^{\frac{۱}{۲}} \left[۱ + \frac{N}{۴nga_{Max}}\right]$$ ۶۶۴

$$= \frac{a_{Max}}{g} - \left(\frac{۲Na_{Max}}{ng^{۳}}\right)^{\frac{۱}{۲}} + \frac{N}{ng^{۲}} - \left(\frac{N}{۲n}\right)^{\frac{۳}{۲}} \cdot \frac{۱}{a_{Max}^{\frac{۱}{۲}} g^{\frac{۵}{۲}}}.$$ ۶۶۵

[3] $(a - gE) > 0$


Analytical
Numerical
Current
10^0
10^{-1}
10^0
10^1
10^2
Connectivity


Analytical
Numerical
E
10^0
10^{-1}
10^0
10^1
10^2
Connectivity


Analytical
Numerical
E
10^0
10^{-1}
10^0
10^1
10^2
Connectivity

۲π

$$\rho(\theta,a,t)=\rho_{۰}+\sum_k A_k(t)e^{ik\theta}, k\in\mathcal{Z}. \tag{۶۶۶}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=\sum \dot{A}_k e^{ik\theta}, \tag{۶۶۷}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial\theta}=\sum A_k\cdot ik\cdot e^{ik\theta}. \tag{۶۶۸}$$

$$\sum \dot{A}_k e^{ik\theta}=-\sum A_k\cdot ik(a-gE(t))\cdot e^{ik\theta} \tag{۶۶۹}$$

$$\Rightarrow \dot{A}_k=-A_k\cdot ik(a-gE(t)). \tag{۶۷۰}$$

$$\dot{A}_k=-A_k\cdot ik(a-gE_{۰}) \tag{۶۷۱}$$

$$\Rightarrow A_k(t)=A_k(۰)e^{-ik(a-gE_{۰})t} \tag{۶۷۲}$$

$$\Rightarrow \rho(\theta,a,t)=\rho_{۰}+\sum_k A_k(۰)e^{ik\theta-ik(a-gE_{۰})t}. \tag{۶۷۳}$$

$$\rho(\pi,a,t)=\rho_{۰}+\sum_k A_k(۰)e^{ik\pi-ik(a-gE_{۰})t}. \tag{۶۷۴}$$

$$E(t)=\int\int_{۰}^{\infty}\rho(\pi,a,t-d-v)\cdot\dot{\theta}\cdot\alpha^{۲}ve^{-\alpha v}dvda \tag{۶۷۵}$$

$$=E_{۰} \tag{۶۷۶}$$

$$+\int\int_{۰}^{\infty}\sum_k A_k(۰)e^{ik\pi-ik(a-gE_{۰})(t-d-v)}\cdot(a-gE_{۰})\alpha^{۲}ve^{-\alpha v}dvda \tag{۶۷۷}$$

$$=E_{۰}+\sum_k\int\int_{۰}^{\infty}A_k(۰)e^{ik\pi-ik(a-gE_{۰})(t-d-v)}\cdot(a-gE_{۰})\alpha^{۲}ve^{-\alpha v}dvda. \tag{۶۷۸}$$

$$E_{k,a}(t) = -\alpha^{۲} A_k(۰)(a - gE_۰)e^{ik\pi} \int_۰^\infty v e^{-[\alpha - ik(a-gE_۰)]v - ik(a-gE_۰)(t-d)} dv. \qquad ۶۷۹$$

$$\beta \equiv \alpha - ik(a - gE_۰)$$

$$E_{k,a}(t) = \alpha^{۲} A_k(۰)(a - gE_۰)e^{ik\pi} e^{-ik(a-gE_۰)(t-d)} \cdot \int_۰^\infty v e^{-\beta v} dv. \qquad ۶۸۰$$

$$= \alpha^{۲} A_k(۰)(a - gE_۰)e^{ik\pi} e^{-ik(a-gE_۰)(t-d)} \cdot \frac{۱}{\beta^{۲}} \qquad ۶۸۱$$

$$= A_k(۰)(a - gE_۰)e^{ik[\pi - (a-gE_۰)(t-d)]} \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha - ik(a - gE_۰)}\right)^{۲}. \qquad ۶۸۲$$

$$E_k(t) = \int E_{k,a} da \qquad ۶۸۳$$

$$= \int A_k(۰)(a - gE_۰)e^{ik[\pi - (a-gE_۰)(t-d)]} (\frac{\alpha}{\alpha - ik(a - gE_۰)})^{۲} da. \qquad ۶۸۴$$

$$h \equiv a - gE_۰$$

$$E_k(t) = A_k(۰)e^{ik\pi} \int_۰^{a_M - gE_۰} h e^{-ikh(t-d)} \left(\frac{۱}{۱ - ikh/\alpha}\right)^{۲} dh. \qquad ۶۸۵$$

$$E_k(t) = -A_k(۰)\frac{\alpha^{۲}}{k^{۲}} e^{ik\pi} \left[\frac{e^{-i(\xi_{(h)} + k(t-d)h)}}{\sqrt{۱ + h^{۲}k^{۲}/\alpha^{۲}}} \right. \qquad ۶۸۶$$

$$\left. \left. + e^{-\alpha(t-d)}(\alpha(t-d) + ۱) Ei[(\alpha - ikh)(t-d)] \right] \right|_۰^{a_M - gE_۰}. \qquad ۶۸۷$$

$Ei[z] = -\int_{-z}^{+\infty} e^{-t}/tdtEie^{-i\xi_{(h)}} = \frac{1+ikh/\alpha}{\sqrt{1+h^2k^2/\alpha^2}}$

$$E_k(t) = -A_k(0)\frac{\alpha^2}{k^2}e^{ik\pi}\Bigg[\frac{e^{-i(\xi_{(a_M-gE_0)}+k(t-d)(a_M-gE_0))}}{\sqrt{1+(a_M-gE_0)^2k^2/\alpha^2}} \quad (688)$$

$$+e^{-\alpha(t-d)}(\alpha(t-d)+1)Ei[(\alpha-ik(a_M-gE_0))(t-d)] \quad (689)$$

$$-e^{-ik(t-d)(a_M-gE_0)} \quad (690)$$

$$-e^{-\alpha(t-d)}(\alpha(t-d)+1)Ei[\alpha(t-d)]\Bigg] \quad (691)$$

$$=-A_k(0)\frac{\alpha^2}{k^2}e^{ik\pi}\Bigg[e^{-ik(t-d)(a_M-gE_0)}\left(\frac{e^{-i(\xi_{(a_M-gE_0)})}}{\sqrt{1+(a_M-gE_0)^2k^2/\alpha^2}}+1\right) \quad (692)$$

$$+e^{-\alpha(t-d)}(\alpha(t-d)+1)\Big(Ei[(\alpha-ik(a_M-gE_0))(t-d)]-Ei[\alpha(t-d)]\Big)\Bigg]. \quad (693)$$

۶۷۵

$$E(t) = \int\int_0^\infty (\rho_0+\rho_1)(a-g(E_0+E_1))\cdot\alpha^2ve^{-\alpha v}dvda \quad (694)$$

$$= \int\int_0^\infty [\rho_0(a-gE_0)+\rho_1(a-gE_0)]\cdot\alpha^2ve^{-\alpha v}dvda \quad (695)$$

$$+\int\int_0^\infty -gE_1\rho_1\cdot\alpha^2ve^{-\alpha v}dvda \quad (696)$$

$$+\int\int_0^\infty -gE_1\rho_0\cdot\alpha^2ve^{-\alpha v}dvda. \quad (697)$$

۶۹۸

۳

α۶۵

$$E(t) = \frac{n(\pi,t-d)}{N}\cdot\big[a-gE(t-d)\big]. \quad (699)$$

$$E_\cdot = \frac{n}{N} \cdot \big[a - gE_\cdot\big] = \frac{۱}{۲\pi}\big[a - gE_\cdot\big]$$ ۶۱۰۰

$$\Rightarrow E_\cdot = \frac{a}{۲\pi + g}.$$ ۶۱۰۱

$E = E_\cdot + \epsilon$

$$E(t+d) = \frac{۱}{۲\pi}\big[a - gE(t)\big]$$ ۶۱۰۲

$$= \frac{۱}{۲\pi}\big[a - g(E_\cdot + \epsilon)\big]$$ ۶۱۰۳

$$= \frac{۱}{۲\pi}\big[a - gE_\cdot\big] - \frac{g\epsilon}{۲\pi}$$ ۶۱۰۴

$$= E_\cdot - \frac{g\epsilon}{۲\pi}.$$ ۶۱۰۵

۶۲

$$E(t+nd) = \frac{۱}{۲\pi}\big[a - gE(t+(n-۱)d)\big]$$ ۶۱۰۶

$$= \frac{a}{۲\pi}\left[۱ - \frac{g}{۲\pi} + (\frac{g}{۲\pi})^{۲} + ... + (\frac{-g}{۲\pi})^{n-۱}\right] + \left(\frac{-g}{۲\pi}\right)^n (E_\cdot + \epsilon)$$ ۶۱۰۷

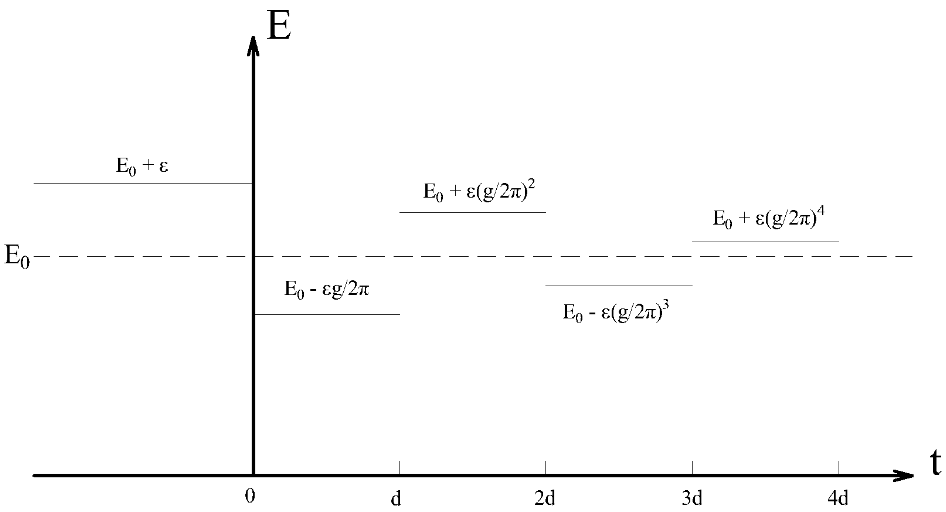
$$= \frac{a}{۲\pi}\frac{۱ - (\frac{-g}{۲\pi})^n}{۱ - (\frac{-g}{۲\pi})} + \left(\frac{-g}{۲\pi}\right)^n (E_\cdot + \epsilon)$$ ۶۱۰۸

$$= \frac{a}{۲\pi + g} - \frac{a}{۲\pi} \cdot \frac{(\frac{-g}{۲\pi})^n}{۱ - (\frac{-g}{۲\pi})} + (\frac{-g}{۲\pi})^n \Big(E_\cdot + \epsilon\Big)$$ ۶۱۰۹

$$= \frac{a}{۲\pi + g} - \frac{a}{۲\pi + g} \cdot (\frac{-g}{۲\pi})^n + \left(\frac{-g}{۲\pi}\right)^n (E_\cdot + \epsilon)$$ ۶۱۱۰

$$= E_\cdot + \left(\frac{-g}{۲\pi}\right)^n \cdot \epsilon$$ ۶۱۱۱

$$= E_\cdot + \left(\frac{-g}{۲\pi}\right)^{\lfloor t/d \rfloor + ۱} \cdot \epsilon.$$ ۶۱۱۲



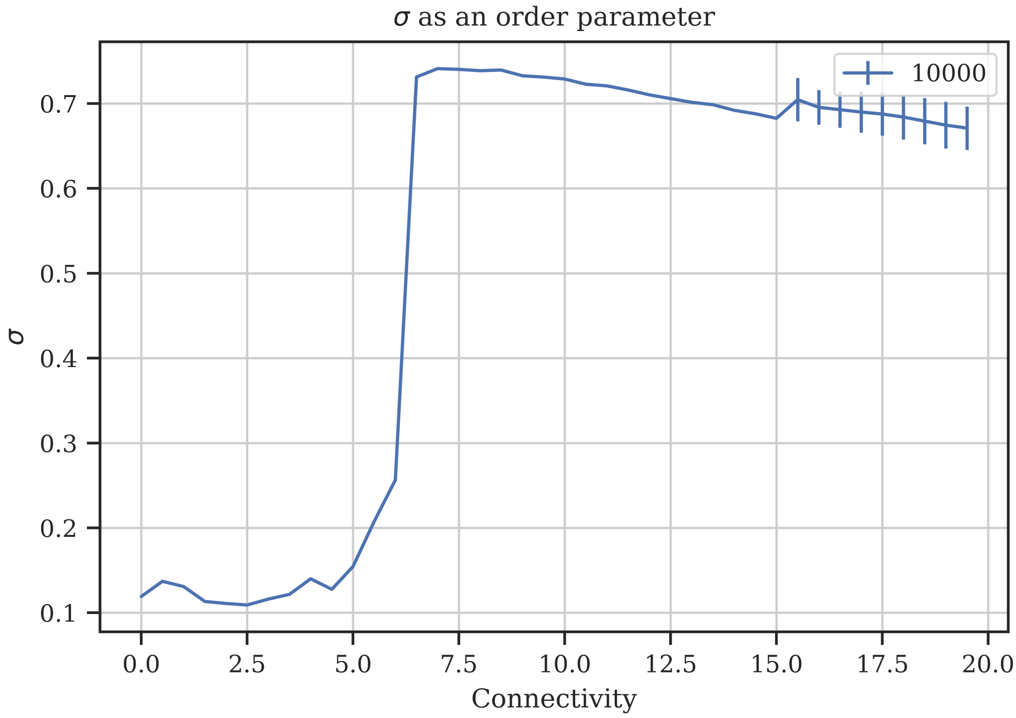
۶۲

۲π

$-g/۲\pi\epsilon'$۶۱۰۵

$$E(t+nd) = E. + \left(\frac{-g}{۲\pi}\right)^n \cdot \epsilon. \qquad ۶۱۱۳$$

$g = ۲\pi$



۶۳

$\alpha = ۱۰۰\ s^{-۱}$

۹/۵

$N = ۱۰۰۰۰$

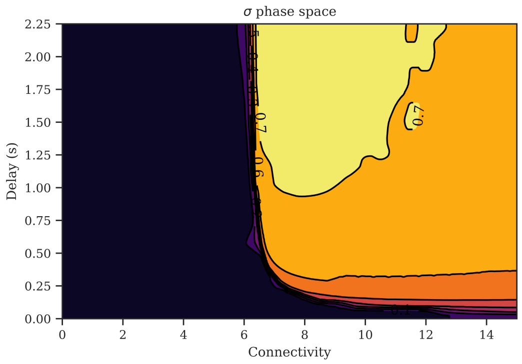
$t_d = ۰/۱\ s$

۱۰۰

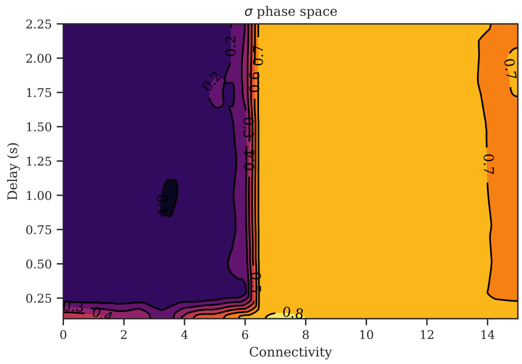
۰/۰۱

۶۶۳

$d > \alpha^{-۱} g = ۲\pi\alpha = ۱۰۰$۶۴



$\alpha = ۲۰$



$\alpha = ۱۰۰$

۶۴

$d \gg \alpha$ ۶۱۰۷

۴۶۲۶۱۱۲ α

$$E = E_۰ + \epsilon \qquad\qquad (t < ۰)$$ ۶۱۱۴

$$E(t) = \frac{a}{۲\pi} - \frac{g}{۲\pi}\int_۰^\infty ds_۱ \Big(\frac{a}{۲\pi} - \frac{g}{۲\pi}\int ds_۲ E(t - ۲d - s_۱ - s_۲)\alpha^۲ s_۲ e^{-\alpha s_۲}\Big)\alpha^۲ s_۱ e^{-\alpha s_۱}$$ ۶۱۱۵

$$= \frac{a}{۲\pi}\Big[۱ - \frac{g}{۲\pi} + (\frac{g}{۲\pi})^۲ + ... + (\frac{-g}{۲\pi})^{n-۱}\Big]$$ ۶۱۱۶

$$+ (\frac{-g}{۲\pi})^n \int_۰^\infty \int ... \int E(t - nd - s_۱ - s_۲ - ... - s_n)\alpha^{۲n} s_۱ s_۲ ... s_n e^{-\alpha(s_۱ + s_۲ + ... + s_n)} ds_۱ ds_۲ ... ds_n$$ ۶۱۱۷

$$= \mathcal{K}_{a,g}(t)$$ ۶۱۱۸

$$+ (\frac{-g}{۲\pi})^n \int_۰^\infty \int ... \int E(t - nd - s_۱ - s_۲ - ... - s_n)\alpha^{۲n} s_۱ s_۲ ... s_n e^{-\alpha(s_۱ + s_۲ + ... + s_n)} ds_۱ ds_۲ ... ds_n.$$ ۶۱۱۹

$\mathcal{K}_{a,g}(t)$

$rr \equiv \sum s_i$

$$\int_{۰}^{\infty}\int ...\int E(t-nd-s_۱-s_۲-...-s_n)\alpha^{۲n}s_۱s_۲...s_ne^{-\alpha(s_۱+s_۲+...+s_n)}ds_۱ds_۲...ds_n$$

۶۱۲۰

$$=\int_{۰}^{\infty}\int ...\int E(t-nd-r)\alpha^{۲n}e^{-\alpha(r)}s_۱s_۲...s_nds_۱ds_۲...ds_n\delta(r-\sum s_i)dr$$ ۶۱۲۱

$$=\int_{۰}^{\infty}\int ...\int E(t-nd-r)\alpha^{۲n}e^{-\alpha(r)}s_۱s_۲...s_nds_۱ds_۲...ds_n\frac{e^{ip(r-\sum s_i)}}{۲\pi}drdp$$ ۶۱۲۲

$$=\int_{۰}^{\infty}\int ...\int E(t-nd-r)\alpha^{۲n}e^{-\alpha(r)}s_۱s_۲...s_nds_۱ds_۲...ds_ne^{-ip\sum s_i}\frac{e^{ipr}}{۲\pi}drdp$$ ۶۱۲۳

$$=\int_{۰}^{\infty}\int E(t-nd-r)\alpha^{۲n}e^{-\alpha(r)}\frac{e^{ipr}}{۲\pi}[\int_{۰}^{\infty} se^{-ips}ds]^ndrdp$$ ۶۱۲۴

p

$$=\int_{۰}^{\infty}\int E(t-nd-r)\alpha^{۲n}e^{-\alpha r}\frac{e^{ipr}}{۲\pi}(-p^{-۲})^ndpdr.$$ ۶۱۲۵

$۲n-۱p$

$$=(-۱)^n\int_{۰}^{\infty}E(t-nd-r)\alpha^{۲n}e^{-\alpha r}\frac{۲\pi}{۲\pi(۲n-۱)!}i\cdot\frac{\partial^{۲n-۱}e^{ipr}}{\partial p^{۲n-۱}}|_{p=۰}\,dr$$ ۶۱۲۶

$$=\frac{(-۱)^n}{(۲n-۱)!}\int_{۰}^{\infty}E(t-nd-r)\alpha^{۲n}e^{-\alpha r}i\cdot(ir)^{۲n-۱}dr$$ ۶۱۲۷

$$=\frac{۱}{(۲n-۱)!}\int_{۰}^{\infty}E(t-nd-r)\alpha^{۲n}e^{-\alpha r}r^{۲n-۱}dr.$$ ۶۱۲۸

$۰<r<t-nd$

$$=\frac{۱}{(۲n-۱)!}\int_{t-nd}^{\infty}E(t-nd-r)\alpha^{۲n}e^{-\alpha r}r^{۲n-۱}dr+\frac{۱}{(۲n-۱)!}\int_{۰}^{t-nd}E(t-nd-r)\alpha^{۲n}e^{-\alpha r}r^{۲n-۱}dr.$$

۶۱۲۹

$$=\frac{۱}{(۲n-۱)!}\int_{t-nd}^{\infty}(E_۰+\epsilon)\alpha^{۲n}e^{-\alpha r}r^{۲n-۱}dr+\frac{۱}{(۲n-۱)!}\int_{۰}^{t-nd}(E_۰-g\epsilon/۲\pi)\alpha^{۲n}e^{-\alpha r}r^{۲n-۱}dr$$

۶۱۳۰

$$=\frac{۱}{(۲n-۱)!}(E_۰+\epsilon)\int_{۰}^{\infty}\alpha^{۲n}e^{-\alpha r}r^{۲n-۱}dr+\frac{۱}{(۲n-۱)!}(-\epsilon-g\epsilon/۲\pi)\int_{۰}^{t-nd}\alpha^{۲n}e^{-\alpha r}r^{۲n-۱}dr.$$

۶۱۳۱

$$= \frac{۱}{(۲n-۱)!}(E_{۰}+\epsilon)(۲n-۱)! + \frac{۱}{(۲n-۱)!}(-\epsilon - g\epsilon/۲\pi)\int_{۰}^{t-nd} \alpha^{۲n} e^{-\alpha r} r^{۲n-۱} dr$$

۶۱۳۲

$$= (E_{۰}+\epsilon) + \frac{۱}{(۲n-۱)!}(-\epsilon - g\epsilon/۲\pi)\gamma(۲n, \alpha(t-nd)). \quad ۶۱۳۳$$

$$\begin{aligned}
E(t) =& \mathcal{K}_{a,g}(t) && ۶۱۳۴\\
&+ \left(\frac{-g}{۲\pi}\right)^{n}(E_{۰}+\epsilon) && ۶۱۳۵\\
&+ \left(\frac{-g}{۲\pi}\right)^{n}\frac{۱}{(۲n-۱)!}(-\epsilon - g\epsilon/۲\pi)\gamma(۲n, \alpha(t-nd)) && ۶۱۳۶\\
=& \mathcal{K}_{a,g}(t) && ۶۱۳۷\\
&+ \left(\frac{-g}{۲\pi}\right)^{n}(E_{۰}+\epsilon) && ۶۱۳۸\\
&+ \left(\frac{-g}{۲\pi}\right)^{n}(-\epsilon - g\epsilon/۲\pi)\frac{\gamma(۲n, \alpha(t-nd))}{(۲n-۱)!} && ۶۱۳۹\\
=& \mathcal{K}_{a,g}(t) && ۶۱۴۰\\
&+ \left(\frac{-g}{۲\pi}\right)^{\lfloor t/d \rfloor+۱}(E_{۰}+\epsilon) && ۶۱۴۱\\
&+ \left(\frac{-g}{۲\pi}\right)^{\lfloor t/d \rfloor+۱}(-\epsilon - g\epsilon/۲\pi)\frac{\gamma(۲\lfloor t/d \rfloor, \alpha d(t/d-\lfloor t/d \rfloor))}{(۲n-۱)!} && ۶۱۴۲\\
=& E_{۰} + \left(\frac{-g}{۲\pi}\right)^{\lfloor t/d \rfloor+۱}\cdot\epsilon && ۶۱۴۳\\
&+ \left(\frac{-g}{۲\pi}\right)^{\lfloor t/d \rfloor+۱}(-\epsilon - g\epsilon/۲\pi)\frac{\gamma(۲\lfloor t/d \rfloor, \alpha d(t/d-\lfloor t/d \rfloor))}{(۲n-۱)!}. && ۶۱۴۴
\end{aligned}$$

۶۱۴۵

۱ $\gamma(۲n, ۰) = ۰$

$$= \frac{a}{۲\pi}\left[۱ - \frac{g}{۲\pi} + \left(\frac{g}{۲\pi}\right)^{۲} + ... + \left(\frac{-g}{۲\pi}\right)^{\lfloor t/d \rfloor-۱}\right] + \left(\frac{g}{۲\pi}\right)^{\lfloor t/d \rfloor}(E_{۰}+\epsilon). \quad ۶۱۴۶$$

۲ $\gamma(\text{۲}n,\infty) = (\text{۲}n-\text{۱})!\alpha$

$$= \frac{a}{\text{۲}\pi}\left[\text{۱} - \frac{g}{\text{۲}\pi} + \left(\frac{g}{\text{۲}\pi}\right)^{\text{۲}} + ... + \left(\frac{-g}{\text{۲}\pi}\right)^{\lfloor t/d\rfloor-\text{۱}}\right] + \left(\frac{g}{\text{۲}\pi}\right)^{\lfloor t/d\rfloor}(E_{\text{۰}} - g\epsilon/\text{۲}\pi). \quad \text{۶۱۴۷}$$

۳ ۵

$\hat{g}, \hat{a}\rho_\pi g = g/\text{۲}\pi\rho_\pi a = a/\text{۲}\pi$

$$E = E_0 + \epsilon \qquad (t < 0) \tag{۶۱۴۸}$$

$$E(t) = \hat{a} - \hat{g}\int_0^\infty ds_1 E(t-d-s_1)\alpha^2 s_1 e^{-\alpha s_1} \tag{۶۱۴۹}$$

$$= \hat{a} - \hat{g}\int_{t-d}^\infty ds_1 E(t-d-s_1)\alpha^2 s_1 e^{-\alpha s_1} \tag{۶۱۵۰}$$

$$- \hat{g}\int_0^{t-d} ds_1 E(t-d-s_1)\alpha^2 s_1 e^{-\alpha s_1} \tag{۶۱۵۱}$$

$$= \hat{a} - \hat{g}\int_{t-d}^\infty ds_1 (E_0+\epsilon)\alpha^2 s_1 e^{-\alpha s_1} \tag{۶۱۵۲}$$

$$- \hat{g}\int_0^{t-d} ds_1 \big(\hat{a} - \hat{g}\int_0^\infty ds_2 E(t-2d-s_1-s_2)\alpha^2 s_2 e^{-\alpha s_2}\big)\alpha^2 s_1 e^{-\alpha s_1} \tag{۶۱۵۳}$$

$$= \hat{a} - \hat{g}\int_{t-d}^\infty ds_1 (E_0+\epsilon)\alpha^2 s_1 e^{-\alpha s_1} \tag{۶۱۵۴}$$

$$- \hat{g}\hat{a}\int_0^{t-d} ds_1 \alpha^2 s_1 e^{-\alpha s_1} \tag{۶۱۵۵}$$

$$- \hat{g}\int_0^{t-d}\int_0^\infty ds_1 ds_2 E(t-2d-s_1-s_2)\alpha^2 s_2 e^{-\alpha s_2}\alpha^2 s_1 e^{-\alpha s_1} \tag{۶۱۵۶}$$

$$= \hat{a} - \hat{g}\int_{t-d}^\infty ds_1 (E_0+\epsilon)\alpha^2 s_1 e^{-\alpha s_1} \tag{۶۱۵۷}$$

$$- \hat{g}\hat{a}\int_0^{t-d} ds_1 \alpha^2 s_1 e^{-\alpha s_1} \tag{۶۱۵۸}$$

$$+ (-\hat{g})^2\int_0^{t-d}\int_{t-2d-s_1}^\infty ds_1 ds_2 E(t-2d-s_1-s_2)\alpha^2 s_2 e^{-\alpha s_2}\alpha^2 s_1 e^{-\alpha s_1} \tag{۶۱۵۹}$$

$$+ (-\hat{g})^2\int_0^{t-d}\int_0^{t-2d-s_1} ds_1 ds_2 E(t-2d-s_1-s_2)\alpha^2 s_2 e^{-\alpha s_2}\alpha^2 s_1 e^{-\alpha s_1} \tag{۶۱۶۰}$$

$$= \hat{a} - \hat{g}\int_{t-d}^\infty ds_1 (E_0+\epsilon)\alpha^2 s_1 e^{-\alpha s_1} \tag{۶۱۶۱}$$

$$- \hat{g}\hat{a}\int_0^{t-d} ds_1 \alpha^2 s_1 e^{-\alpha s_1} \tag{۶۱۶۲}$$

$$+ (-\hat{g})^2\int_0^{t-d}\int_{t-2d-s_1}^\infty ds_1 ds_2 (E_0+\epsilon)\alpha^2 s_2 e^{-\alpha s_2}\alpha^2 s_1 e^{-\alpha s_1} \tag{۶۱۶۳}$$

$$+ (-\hat{g})^2\int_0^{t-d}\int_0^{t-2d-s_1} ds_1 ds_2 E(t-2d-s_1-s_2)\alpha^2 s_2 e^{-\alpha s_2}\alpha^2 s_1 e^{-\alpha s_1}. \tag{۶۱۶۴}$$

$$E(t) = \hat{a} + \hat{a}\sum_{i=1}^{n-1}(-\hat{g})^i \int_0^{t-d}\int_0^{t-2d-s_1}\int_0^{t-3d-s_1-s_2}\dots\int_0^{t-id-s_1-\dots s_{i-1}} \Pi_j^i \alpha^2 s_j e^{-\alpha s_j} ds_j \quad ۶۱۶۵$$

$$+ (E_0 + \epsilon)\sum_{i=1}^{n}(-\hat{g})^i \int_0^{t-d}\int_0^{t-2d-s_1}\int_0^{t-3d-s_1-s_2}\dots\int_{t-id-s_1-\dots s_{i-1}}^{\infty} \Pi_j^i \alpha^2 s_j e^{-\alpha s_j} ds_j \quad ۶۱۶۶$$

$$+ (E_0 - \epsilon\hat{g})(-\hat{g})^n \int_0^{t-d}\int_0^{t-2d-s_1}\int_0^{t-3d-s_1-s_2}\dots\int_0^{t-nd-s_1-\dots s_{n-1}} \Pi_j^n \alpha^2 s_j e^{-\alpha s_j} ds_j \quad ۶۱۶۷$$

$$= \hat{a}\sum_{i=0}^{n-1}(-\hat{g})^i \int_0^{t-d}\int_0^{t-2d-s_1}\int_0^{t-3d-s_1-s_2}\dots\int_0^{t-id-s_1-\dots s_{i-1}} \Pi_j^i \alpha^2 s_j e^{-\alpha s_j} ds_j \quad ۶۱۶۸$$

$$+ (E_0 + \epsilon)\sum_{i=1}^{n}(-\hat{g})^i \int_0^{t-d}\int_0^{t-2d-s_1}\int_0^{t-3d-s_1-s_2}\dots\int_0^{t-id-s_1-\dots-s_{i-1}} (1 - \int_0^{t-id-s_1-\dots-s_{i-1}} \Pi_j^i \alpha^2 s_j e^{-\alpha s_j} ds_j) \quad ۶۱۶۹$$

$$+ (E_0 - \epsilon\hat{g})(-\hat{g})^n \int_0^{t-d}\int_0^{t-2d-s_1}\int_0^{t-3d-s_1-s_2}\dots\int_0^{t-nd-s_1-\dots s_{n-1}} \Pi_j^n \alpha^2 s_j e^{-\alpha s_j} ds_j \quad ۶۱۷۰$$

$$= \hat{a}\sum_{i=0}^{n-1}(-\hat{g})^i I_i \quad ۶۱۷۱$$

$$+ (E_0 + \epsilon)\sum_{i=1}^{n}(-\hat{g})^i [I_{i-1} - I_i] \quad ۶۱۷۲$$

$$+ (E_0 - \epsilon\hat{g})(-\hat{g})^n I_n \quad ۶۱۷۳$$

$$= E_0 - \epsilon g + \sum_{i=1}^{n} -(-g)^i \cdot \epsilon(1 + g) I_i. \quad ۶۱۷۴$$

I_n

$$I_n = \int_{۰}^{t-d}\int_{۰}^{t-۲d-s_۱}\int_{۰}^{t-۳d-s_۱-s_۲}...\int_{۰}^{t-nd-s_۱-...s_{n-۱}}\Pi_j^n \alpha^۲ s_j e^{-\alpha s_j} ds_j. \quad ۶۱۷۵$$

$$\tilde{G}_n := \tilde{E}_n - \tilde{E}_{n-۱}. \quad ۶۱۷۶$$

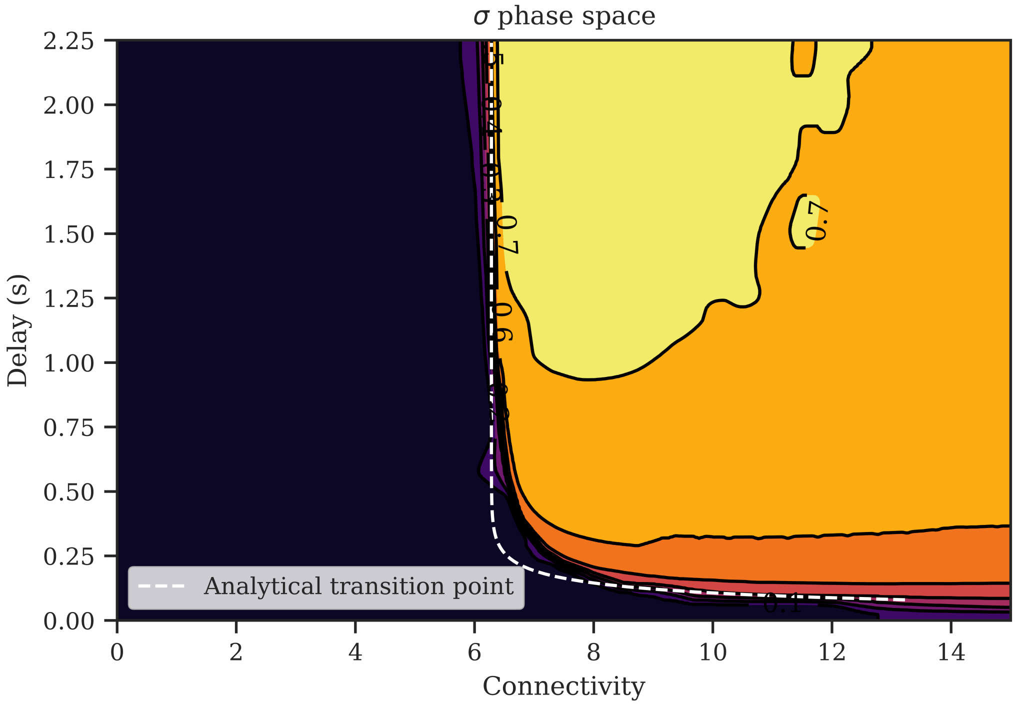
$$T_{n+۱} = \frac{|\tilde{G}_{n+۱}|}{|\tilde{G}_n|} = \left| -\hat{g}\cdot\frac{I_{n+۱}}{I_n}\right|. \quad ۶۱۷۷$$

۶۱۷۷

۶۱۷۷I_n

g_{T_n}۶۱۷۵I_n

$$
\begin{aligned}
۱ &= \hat{g}\cdot\frac{I_۱}{I_۰} = \hat{g}\gamma(۲,\alpha d) && ۶۱۷۸\\
\Rightarrow \hat{g}_{T_۱} &= \frac{۱}{\gamma(۲,\alpha d)} && ۶۱۷۹\\
\Rightarrow g_{T_۱} &= \frac{۲\pi}{\gamma(۲,\alpha d)} && ۶۱۸۰\\
۱ &= \hat{g}\cdot\frac{I_۲}{I_۱} = \hat{g}\cdot\frac{\int_۰^d \gamma(۲,۲\alpha(d-s_۱))\alpha^۲ s_۱ e^{-\alpha s_۱} ds_۱}{\gamma(۲,\alpha d)} && ۶۱۸۱\\
&= \hat{g}\cdot\frac{۱-e^{-\alpha d}((\alpha d)^۳+۳(\alpha d)^۲+۶(\alpha d)+۶)/۶}{\gamma(۲,\alpha d)} && ۶۱۸۲\\
\Rightarrow \hat{g}_{T_۲} &= \frac{\gamma(۲,\alpha d)}{۱-e^{-\alpha d}((\alpha d)^۳+۳(\alpha d)^۲+۶(\alpha d)+۶)/۶} && ۶۱۸۳\\
\Rightarrow g_{T_۲} &= \frac{۲\pi\gamma(۲,\alpha d)}{۱-e^{-\alpha d}((\alpha d)^۳+۳(\alpha d)^۲+۶(\alpha d)+۶)/۶}. && ۶۱۸۴
\end{aligned}
$$


σ phase space
Delay (s)
Connectivity
Analytical transition point
0.7
0.6
0.5
0.4
2.25
2.00
1.75
1.50
1.25
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
0
2
4
6
8
10
12
14

۶۵

۶۵

۶۱۷۴

$$\dot{\theta} = a - \cos\theta - gE(t)$$ ۶۱۸۵

$$\dot{\theta}_\pi = a - \cos\pi - gE(t)$$ ۶۱۸۶

$$= a + ۱ - gE(t).$$ ۶۱۸۷

۶۳

$$\frac{\partial n_a}{\partial t} = -\frac{\partial J_a}{\partial \theta}$$ ۶۱۸۸

$$۰ = -\frac{\partial J_a}{\partial \theta}$$ ۶۱۸۹

$$\Rightarrow J_a = J_{const}$$ ۶۱۹۰

$$\rho_\pi \dot{\theta} = J$$ ۶۱۹۱

$$\rho_\pi = \frac{J}{a - \cos\theta - gE_۰}\Big|_{\theta=\pi}.$$ ۶۱۹۲

$$۱ = \int_{-\pi}^{\pi} \rho(\theta) d\theta$$ ۶۱۹۳

$$۱ = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{J}{a - \cos\theta - gE_۰} d\theta$$ ۶۱۹۴

$$۱ = J \cdot \frac{۲\pi}{\sqrt{(a - gE_۰)^۲ - ۱}}$$ ۶۱۹۵

$$J = \frac{\sqrt{(a - gE_۰)^۲ - ۱}}{۲\pi}$$ ۶۱۹۶

$$\Rightarrow \rho(\theta) = \frac{۱}{۲\pi} \cdot \frac{\sqrt{(a - gE_۰)^۲ - ۱}}{a - \cos\theta - gE_۰},$$ ۶۱۹۷

$$\Rightarrow \rho(\pi) = \frac{۱}{۲\pi} \cdot \frac{\sqrt{(a - gE_۰)^۲ - ۱}}{a + ۱ - gE_۰}$$ ۶۱۹۸

$$= \frac{۱}{۲\pi} \cdot \sqrt{\frac{a - ۱ - gE_۰}{a + ۱ - gE_۰}}.$$ ۶۱۹۹

$$E_{۰} = \rho_\pi(a + ۱ - gE_{۰}). \qquad ۶۲۰۰$$

$$\rho_\pi = \frac{۱}{۲\pi} \cdot \frac{-g + \sqrt{g^{۲} + ۴\pi^{۲}(a^{۲} - ۱)}}{۲\pi(a + ۱)}. \qquad ۶۲۰۱$$

$\frac{۱}{۲\pi}$

$$۱ = \rho_\pi g\gamma(۲, \alpha d) \qquad ۶۲۰۲$$

$$۱ = \frac{۱}{۲\pi} \cdot \frac{-g + \sqrt{g^{۲} + ۴\pi^{۲}(a^{۲} - ۱)}}{۲\pi(a + ۱)} \cdot g \cdot \gamma(۲, \alpha d). \qquad ۶۲۰۳$$

$$g_{T_{۱}} = ۲\pi\sqrt{\frac{a + ۱}{\gamma^{۲}(۲, \alpha d)(a - ۱) - ۲\gamma(۲, \alpha d)}}. \qquad ۶۲۰۴$$

$$E(t) = \frac{۱}{N}\int_{۰}^{\infty} \mathcal{J}(\pi, t - d - u_{۱}) \cdot \mathcal{P}(u_{۱})du_{۱} \qquad ۶۲۰۵$$

$$- \frac{g}{N}\int_{۰}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t - d - u_{۱}) \cdot \mathcal{P}(u_{۱})E(t - d - u_{۱})du_{۱}. \qquad ۶۲۰۶$$

$$\mathcal{J}(\pi, t - d - u) \equiv \int n_a(\pi, t - d - u)a \cdot da, \qquad ۶۲۰۷$$

$$\mathcal{N}(\pi, t - d - u) \equiv \int n_a(\pi, t - d - u) \cdot da, \qquad ۶۲۰۸$$

$$\mathcal{P}(u) \equiv \alpha^{۲} u\, e^{-\alpha u}. \qquad ۶۲۰۹$$

$$E(t) = \frac{1}{N}\int_0^\infty \mathcal{J}_0 \cdot \mathcal{P}(u_1)du_1$$ ۶۲۱۰

$$- \frac{g}{N}\int_0^\infty \mathcal{N}_0 \cdot \mathcal{P}(u_1)E(t-d-u_1)du_1$$ ۶۲۱۱

$$E(t) = \hat{\mathcal{J}} - g\frac{\hat{\mathcal{N}}}{N}\int_0^\infty \mathcal{P}(u_1)E(t-d-u_1)du_1$$ ۶۲۱۲

$$E(t) = \hat{\mathcal{J}} - g\rho_\pi\int_0^\infty \mathcal{P}(u_1)E(t-d-u_1)du_1.$$ ۶۲۱۳

۲۳۲۱

E

$g^* = ۲\pi$

$$g^* = \frac{۲\pi}{\gamma(۲, \alpha d)}$$

$d\alpha$