

# مطالعه همگامی در شبکه‌های عصبی مهاری

محسن مهرانى - استاد راهنما: دکتر سامان مقیمی عراقی



# فهرست مطالب

۵	۱ سخن نخست
۵	۱.۱ مقدمه
۷	۲ شبکه انباشت و شلیک
۷	۱.۰.۲ آهنگ تیزه زدن
۸	۲.۰.۲ نشانگر تشخیص فاز هم گامی
۸	۳.۰.۲ مسائل پیشروی پیاده سازی شبیه سازی
۹	۴.۰.۲ نتایج
۱۲	۵.۰.۲ پهن کردن قالی صفحه‌ی فاز
۱۳	۳ تلاش برای توصیف
۱۳	۱.۰.۳ حل معادله‌ی شبکه‌ی ساده
۲۵	۲.۰.۳ بازی از نو(سامانه‌ی تک جریانی)



# فصل ۱

## سخن نخست

مطالعه فعالیت شبکه‌های عصبی برای تحقیق و بررسی کارکردهای مغز اهمیت زیادی دارد. همه بر این باوریم که مغز محمل اندیشه و تفکر است. ما کنجکاو هستیم که چگونه همکاری بین نورون‌های آن باعث می‌شود تا حافظه، کشف و پردازش صورت گیرد. هر کدام از نورون‌های مغز می‌تواند در حالت فعال [روشن] یا غیرفعال [خاموش] قرار گیرد. هم اکنون شواهدی وجود دارد که کارکردهایی طلایی یاد شده مغز در زمان‌هایی رخ می‌دهند که الگوی خاموش و روشن شدن نورون‌های آن باهم «هم‌گامی» دارند. هم‌گامی به این معناست که جمعیت بزرگی از نورون‌ها هم باهم خاموش و روشن می‌شوند و یک الگوی تکرار شونده‌ای را دنبال می‌کنند. تو گویی که باهم هم‌آهنگ یا هم‌گام شده‌اند.

بی‌تردید دستیابی به تمام جزئیات مغز برای ما میسر نیست و به آن به عنوان یک «جعبه‌ی سیاه» نگاه می‌کنیم که مدت‌هاست به دنبال ارائه مدلی هستیم که رابطه‌ی بین ورودی‌ها و خروجی‌های ثبت شده را بازتولید کند. کاری که در این پژوهش انجام خواهیم داد تلاشی است برای پیشنهاد دادن یک مدل برای این جعبه‌ی سیاه که رفتار نسبتاً مشابهی را میان ورودی و خروجی‌های این جعبه سیاه و یا مغز ایجاد می‌کند.

### ۱.۱ مقدمه

مدل‌های زیادی برای شبکه‌های عصبی ارائه شده است که توانایی تولید رفتار هم‌گام شدن نورون‌ها را در آن‌ها می‌توانیم جستجو کنیم. یکی از این مدل‌ها که در تمام فصول شبیه‌سازی از آغاز تا کنون از آن بهره برده شده است؛ مدل انباشت و شلیک است [۱]. در این جستار ابتدا با مدل انباشت و شلیک شروع می‌کنیم و سپس مدلی توسعه یافته که آن را «چرخنده» صدا خواهیم کرد؛ می‌پردازیم. متن اصلی این جستار شامل معرفی این مدل‌ها و پویایی آن‌ها در زمان و نتایج ضبط شده از نشانگرهایی است که برای آشکارسازی هم‌گامی تعبیه شده‌اند.



## فصل ۲

### شبکه انباشت و شلیک

در این نوشتار [۱] نویسندگان تلاش می‌کنند تا هم‌گامی را برای شبکه‌ی نورون‌های مهاري رصد کنند. این نورون‌ها به گونه‌ای باهم مرتبط هستند که تیزه زدن هر نورون منجر به مهار پتانسیل دیگر نورون‌ها می‌شود. تک‌تک نورون‌های این شبکه از تحول انباشت و شلیک تبعیت می‌کند. معادله تحول اختلاف پتانسیل هر کدام از نورون‌ها با محیط بیرونش از رابطه زیر داده می‌شود:

$$\dot{v}_i = a_i - v_i - \frac{g}{N} \sum_{n|t_n < t} S_{i,l(n)} \delta(t - t_n - t_d) \quad (۱.۲)$$

-  $g$ : ضریب اتصال هر جفت نورون. از آن‌جا که همه‌ی نورون‌ها در این مطالعه مهاري هستند؛ باید این کمیت مثبت انتخاب شود تا تاثیر جمله‌ی پایانی در نهایت منفی باشد.

-  $S$ : ماتریس همسایگی. این کمیت نشان می‌دهد که آیا دو نورون به هم متصل و تاثیرگذار هستند یا خیر.

-  $t_d$ : زمان تاخیر میان زدن تیزه هر نورون و تاثیر آن روی نورون‌های دیگر.

-  $a_i$ : یک پتانسیل تحریکی و خارجی. در این مطالعه این مقدار برای هر نورون به صورت تصادفی انتخاب می‌شود و تا پایان شبیه‌سازی ثابت باقی می‌ماند.

-  $N$ : تعداد نورون‌های در شبکه

#### ۱.۰.۲ آهنگ تیزه زدن

پیش از آن که به شبیه‌سازی یک شبکه از نورون‌ها بپردازیم؛ خوب است تا یک نورون تنها را مطالعه کنیم. یک نورون تنها که پویایی از جنس مدل انباشت و شلیک دارد؛ دوره تناوب تیزه‌زدن آن از رابطه‌ی زیر قابل

محاسبه است .

$$v_i = I - v_i \rightarrow \frac{dv_i}{I - v_i} = dt \quad (۲.۲)$$

$$\rightarrow T = \ln\left(\frac{I}{I - 1}\right) \quad (۳.۲)$$

این رابطه نشان می‌دهد که بسامد تیزه‌زدن یک نورون با افزایش مجموع جریان‌های ورودی آن به صورت لگاریتمی افزایش می‌یابد.

## ۲.۰.۲ نشانگر تشخیص فاز هم‌گامی

برای آن که متوجه شویم که شبکه در حالت هم‌گامی یا ناهم‌گامی است نیاز است تا آشکارسازی را تعبیه کنیم که باتوجه به رفتار سامانه، هم‌گامی یا ناهم‌گامی را با عقب‌ری خود نشان دهد. برای این منظور ابتدا مفهوم میدان ( $E$ ) را تعریف می‌کنیم که بیانگر شدت فعالیت نورون‌های شبکه است. انحراف از معیار این کمیت در طول زمان، پارامتر مناسبی است که به کمک آن هم‌گامی را تشخیص دهیم.

$$\ddot{E} + \gamma \alpha \dot{E} + \alpha^2 E = \frac{\alpha^2}{N} \sum_{n|t_n < t} \delta(t - t_n - t_d) \quad (۴.۲)$$

$$\sigma^2 = \langle E^2 \rangle_t - \langle E \rangle_t^2 \quad (۵.۲)$$

\* دقت کنیم که شدت میدان با تعداد تیزه‌زدن‌ها رفتاری ملایم دارد. به عنوان مثال اگر تیزه‌ها متوقف شوند؛ شدت میدان پس از لحظاتی چند [متناسب با  $\alpha$ ] صفر می‌شود.

در طول زمان میدان  $E$  و  $\sigma$  را رصد می‌کنیم. برای دریافت شهودی عملکرد مناسب این پارامتر نظم، فرض کنید که شبکه در حالتی است که جمعیت بزرگی از آن در حال خاموش و روشن شدن هم‌گام است. پس مشاهده خواهیم کرد که میدان که شدت فعالیت نورون‌ها را نشان می‌دهد در حال ضربان رفت و برگشتی است. این افت‌وخیز با تقویت هم‌گامی دامنه‌ی بزرگتر پیدا می‌کند به طوری که انحراف آن از میانگین پهنای قابل توجهی کسب می‌کند. از این رو انحراف معیار میدان، کمیت مناسبی است که میزان هم‌گامی را گزارش کند.

## ۳.۰.۲ مسائل پیشروی پیاده‌سازی شبیه‌سازی

### تابع بی‌کران دلتا

یکی از مشکلات شبیه‌سازی معادلات دیفرانسیلی حضور تابع دلتای دیراک است. این تابع در نقطه صفر خود دارای مقداری بینهایت است. معرفی چنین تابعی به رایانه کاری دشوار است و همانندی محاسباتی



ندارد. حال برای برطرف کردن این مشکل چه باید کرد؟ نکته در این جا نهفته است که چون ما برای حل عددی معادله دیفرانسیلی خود از زمان پیوسته استفاده نمی‌کنیم و از گام‌هایی با طول مثبت  $\Delta t$  استفاده می‌کنیم این مشکل به صورت زیر مدیریت می‌شود.

$$v_i(t + \Delta t) = v_i(t) + \int_t^{t+\Delta t} \dot{v}_i dt \quad (۶.۲)$$

$$= v_i(t) + \int_t^{t+\Delta t} \left[ a_i - v_i - \frac{g}{N} \sum_{n|t_n < t} S_{i,l(n)} \delta(t - t_n - t_d) \right] dt \quad (۷.۲)$$

$$\approx v_i(t) + [a_i - v_i(t)] \Delta t - \frac{g}{N} \sum_{n|t_n < t} S_{i,l(n)} \int_t^{t+\Delta t} \delta(t - t_n - t_d) dt \quad (۸.۲)$$

$$\approx v_i(t) + [a_i - v_i(t)] \Delta t - \frac{g}{N} \sum_{n|t_n < t} S_{i,l(n)} H(t + \Delta t - t_n - t_d) \quad (۹.۲)$$

حالا تابع پله کاملاً برای ما آشنا و قابل مدلسازی است. دقت شود که تابع پله یاد شده فقط در محدوده  $t, t + \Delta t$  زندگی می‌کند و پس از آن اعتبار ندارد. معادله ۹.۲ می‌گوید که باید برای تحول پتانسیل نورو  $i$  بررسی کنیم که آیا نرونی در همسایگی آن تیزه زده است یا نه. اگر چنان باشد؛ یک واحد به جمع تیزه زدگان اضافه کنیم.

### ثبت تاریخ تیزه زدن‌ها

برای محاسبه تحول پتانسیل در رابطه ۹.۲ چنان که توضیح داده شد نیاز به دانستن تاریخ تیزه زدن‌ها داریم. اگر بخواهیم برای تمامی نوروها در هر گام زمانی تیزه‌زدن آن را به صورت مجزا ثبت کنیم؛ یک آرایه مربعی خواهیم داشت که شماره سطر آن می‌تواند معرف زمان باشد و ستون نماد شماره نورو - شکل شماره (۱۱.۲).

اما مشکلی که برای این شبیه سازی رخ خواهد داد. در صورت افزایش تعداد نوروها و زمان شبیه سازی با یک ابر آرایه روبرو خواهیم شد که امکان دارد در ذخیره سازی آن دچار مشکل شویم. به همین خاطر در شبیه سازی انجام شده تنها مجموع تیزه زدن‌ها را ذخیره کردیم تا یک آرایه یک ستونه داشته باشیم و در ذخیره سازی به مشکل نخوریم.

### ۴.۰.۲ نتایج

اندازه‌ی پارامترهایی که برای این شبیه‌سازی انتخاب کردیم؛ کاملاً از صورت مقاله یاد شده برداشته شده و به قرار زیر است.

$$\alpha = 20 s^{-1} *$$

\* جریان‌های تصادفی خارجی نورون‌ها از اعضای بازه  $(1/2, 2/8)$  انتخاب می‌شوند.

$$N = 10000 *$$

$$t_d = 0.1 s *$$

این شبیه سازی برای ۱۰۰۰ ثانیه اجرا شده است که در آن هر گام زمانی برابر ۰/۰۱ ثانیه گرفته شده است. کد شبیه سازی در پوشه مسئله همگامی برای مدل انباشت و شلیک قابل مشاهده است.

### انحراف از معیار میدان

مهم ترین شاخصه ما برای ردگیری همگامی، انحراف معیار میدان  $E$  است که با زیگما  $\sigma$  نمایش می دهیم. جهش به وجود آمده در شکل (۱.۲ ب) به این معنی است که سامانه از حالت ناهم گامی به هم گامی تغییر فاز داده است.

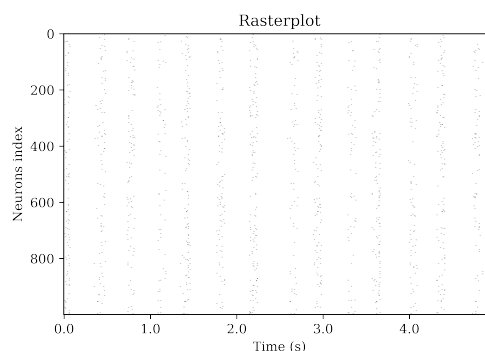
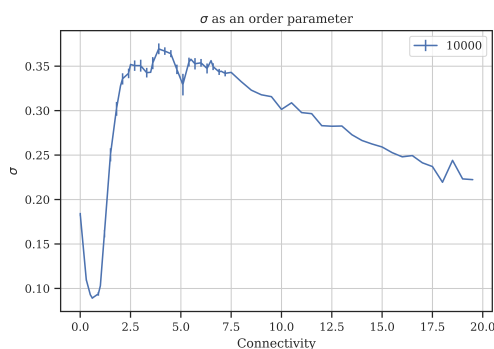
### نورون های خاموش

بی تردید میدان داخلی نورون ها کاملاً تابعی است از آمارتیزه های درون سامانه. نورون هایی که گاهی برای تیزه زدن به پیش می روند و گاه به علت حضور میدان داخلی مهار به عقب برمی گردند. خوب است بپرسیم که برآیند این رفت و برگشت برای هر نورون چگونه است. آیا این رفت و برگشت منجر به رسیدن به آستانه ی تیزه زدن می شود و یا نورون در برآیند اصلاً پیشروی نمی کند و هیچگاه به آستانه نمی رسد و خاموش می ماند. در شکل ۱.۲ ج شمار نورون هایی که هیچگاه در سامانه تیزه نمی زنند را آورده ایم و این که چگونه با افزایش ضریب تاثیر مهاری میدان این آمار رشد می کند.

این مشاهده نشان می دهد که در فاز هم گام، تقریباً ۲۵ درصد نورون ها خاموش هستند و نقشی در برقراری جریان داخلی ندارند. قابل حدس است که نورون هایی خاموش هستند که جریان های تصادفی خارجی پایین دست را داشته اند. به این معنی که اگر بازه ی جریان تصادفی را تنگ تر می گرفتیم [مثلاً از ۱/۶ شروع می کردیم؛ سامانه در فاز هم گام تفاوت رفتاری نمی داشت. همچنین جالب است که تغییر فاز مشاهده شده در تعداد نورون های خاموش - شکل ۱.۲ ج- در حالتی در همسایگی و متمایز از تغییر فاز شکل ۱.۲ ب نشان می دهد.

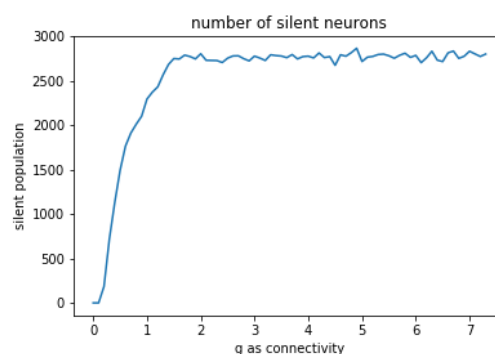
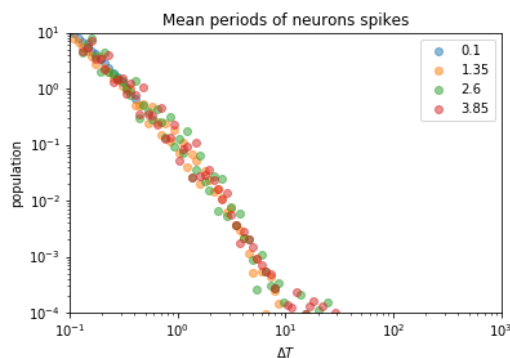
### توزیع تناوب زمانی تیزه ها

شبکه ی ما متشکل از نورون هایی است که مدام در حال تیزه زدن و فعال نگه داشتن شبکه هستند. برخی با بسامد بیشتری تیزه می زنند و برخی آهسته تر. اگر کنجکاو باشیم که جمعیت کل نورون های ما چگونه میان دسته های مختلف با تناوب های متفاوت توزیع شده است؛ لازم است تا توزیع فراوانی آن ها را یکجا رسم کنیم - شکل ۱.۲ د.



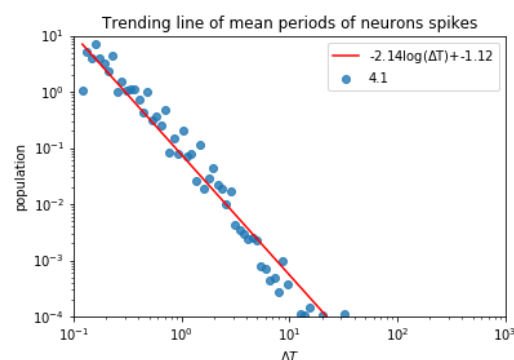
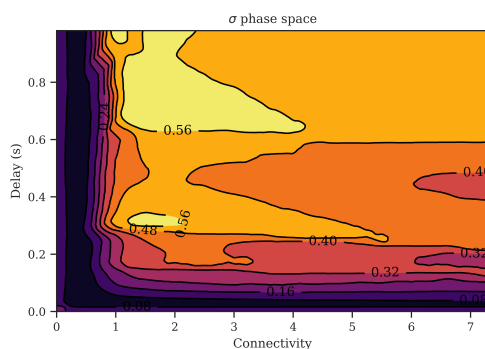
(آ) ثبت لحظه‌ای تیزه زدن هر نورون به صورت مجزا - در این نمودار ضریب تاثیر هر نورون روی همسایه‌هایش  $g = 5$  بوده است. چنان که انتظار می‌رفت شاهد هم‌گامی هستیم.

(ب) تغییر فاز از ناهم‌گامی به هم‌گامی برای ۱۰۰۰ نورون



(د) توزیع بسامدی شبکه‌های ۱۰۰۰ نورونی که هر کدام قدرت اتصال متفاوتی دارند.

(ج) آمار نورون‌های خاموش درون سامانه



(و) صفحه‌ی فاز مربوط به سامانه‌ی نورون‌های

(ه) محاسبه‌ی نمای توزیع توانی فاصله زمانی بین تیزه‌ها انباشت‌وشلیک: پیوست؟؟

همان طور که می بینید به ظاهر این توزیع رفتاری توانی دارد و اگر کنجکاو باشیم می توانیم شیب این نمودار تمام لگاریتمی آن را جهت محاسبه ی نمای توزیع بدست آوریم - شکل ۱.۲.۵.

## ۵.۰.۲ پهن کردن قالی صفحه ی فاز

در قسمت های پیشین تنها به مطالعه ی تاثیر ضریب اتصال در تغییر فاز پرداختیم و زمان تاخیر را تنها در  $t_d = 0.1s$  خلاصه کردیم. حال اجازه دهید تا به تاخیر نیز اجازه ی تغییر دهیم. در ادامه ی این قسمت از نوشتارمان، به فرش کردن صفحه ی فاز خود خواهیم پرداخت. امید است که چهره ی تمام نمای سامانه بر صورت این قالی نقش بندد.

### قالی انحراف از معیار میدان

در شکل ؟؟ مشاهده می کنیم که شدت هم گامی در هر کدام از هنگردهای سامانه چقدر است. بنظر می رسد که با افزایش زمان تاخیر و ضریب تاثیر همگامی قدرت پیدا می کند و هر دو در ظهور این رفتار شریک هستند. اگر چه تاخیر در جابجایی ضریب تاثیر بحرانی تغییری ایجاد نکرده است اما هم گامی را قدرت می بخشد.

## فرصتی برای مدل های دیگر نورونی

در بخش قبل به بررسی ویژگی های مدل انباشت-شلیک پرداختیم. اگر چه این مدل بسیار ساده توانست رفتارهای آشنایی را برای ما بازتولید کند اما شامل محدودیت هایی است. این محدودیت ها باعث می شود تا ما به سراغ مدل های نورونی دیگری مانند نورون های چرخنده برویم. این مدل نسبت به مدل قبلی شامل ویژگی های مثبتی است. یکی از ویژگی های خوب آن این است که پس از بازنشانی فاز نورون تیزه زده، فاز آن به زاویه ای برده می شود که دارای خواص مثلثاتی مشابهی است. به این معنا که دیگر شاهد گسستگی در اندازه ی جملاتی که تحول نورون را توصیف می کنند؛ نیستیم.

## فصل ۳

### تلاش برای توصیف

از آنجا که شبیه‌سازی این سامانه شامل تعریف فرایندهای متفاوتی بود؛ بدیهی است که نوشتن معادله‌ی تحلیلی برای توصیف کامل آن آسان نباشد. اما در این بخش تلاش می‌کنیم که با کنار هم قرار دادن معادلات اصلی چارچوب مسئله‌ی خود را مشخص کنیم. هر نورون که از حالت  $\theta = \pi$  عبور می‌کند [تیزه می‌زند] باعث می‌شود تا سهمی از جریان با کیفیت  $p(t) := \alpha^\gamma t \cdot \exp(-\alpha t)$  به جریان درونی کل سامانه  $E(t)$  اضافه شود.

$$E(t) = \frac{1}{N} \int_0^\infty \int J_a(\pi, t - d - u) da \cdot \alpha^\gamma u e^{-\alpha u} du \quad (۱.۳)$$

اما جریان برای هر نورون با ورودی  $a$  به طریق زیر است:

$$J_a(\theta, t) = n_a(\theta, t) \cdot \dot{\theta}_a \quad (۲.۳)$$

این رفتار به خوبی نشان می‌دهد جریان فقط در ناحیه‌ی  $\theta \leq \pi$  وجود دارد. زیرا ورود نورون به ناحیه‌ی مثبت‌تر را ممنوع کرده‌ایم. بی‌تردید برای فهمیدن چگونگی تغییر جریان در ناحیه‌های میانی باید از معادله‌ی پخش استفاده کنیم.

$$\frac{\partial n_a}{\partial t} = -\frac{\partial J_a}{\partial \theta} \quad (۳.۳)$$

$$= -\frac{\partial n_a}{\partial \theta} \cdot \dot{\theta}_a \quad (۴.۳)$$

#### ۱.۰.۳ حل معادله‌ی شبکه‌ی ساده

اجازه بدهید تا اولین تلاش خود را از ساده‌ترین نوع شبکه‌ها شروع کنیم. شبکه‌ای که به جز جریان داخلی و جریان تصادفی اولیه ورودی دیگری ندارد. پس خواهیم داشت:

$$\begin{cases} E(t) = \frac{1}{N} \int_0^\infty \int n_a(\pi, t - d - u) \cdot [a - gE(t - d - u)] da \cdot \alpha^\gamma u e^{-\alpha u} du \\ \frac{\partial n_a}{\partial t} = -\frac{\partial n_a}{\partial \theta} \cdot (a - gE(t)) \end{cases} \quad (۵.۳)$$

چند پیشنهاد می‌شود برای ادامه‌ی راه‌حل داشت. (درون یک جعبه قرار گیرد با این عنوان که پیشنهادات من چه بود و استاد چه گفت.)

۱. از آنجا که میدان به گونه‌ای متناوب عمل می‌کند؛ یک پیشنهاد خوب می‌تواند آن باشد که بسط فوریه‌ی آن را بنویسیم.

$$E(t) = \sum c_i \cdot \cos(\omega_i t) \quad (۶.۳)$$

که اگر ثابت کنیم  $c_1$  از بقیه ضرایب بزرگتر است؛ مساله‌ی ما حل می‌شود.

۲. دشواری مساله از در هم تنیدگی معادلات برآمده است. اگر به تقریب در معادله‌ی پخش میدان را یک نوبه در نظر بگیریم و پاسخ را در معادله‌ی اول قرار دهیم.

۳. انتگرال اول را به صورت بازگشتی در خودش جاگذاری کنیم.

۴. مسئله را در حالت آماری بررسی کنیم و حالت پایستار آن را پیدا کنیم و بررسییم در چه حالتی است که حالت پایستار داریم.

### روش بازگشتی

نکته‌ای که برای ما حل معادلات را دشوار می‌کند تبعیت  $E$  از خودش است. بگذارید به شیوه‌ای که خود معادله درخواست دارد عمل کنیم. یعنی  $E$  را مجدداً در سمت راست معادله جاگذاری کنیم. برای راحت‌تر شدن محاسبات ابتدا دو متغیر کمکی زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{J}(\pi, t - d - u) \equiv \int n_a(\pi, t - d - u) a \cdot da \quad (۷.۳)$$

$$\mathcal{N}(\pi, t - d - u) \equiv \int n_a(\pi, t - d - u) \cdot da \quad (۸.۳)$$

$$\mathcal{P}(u) \equiv \alpha^2 u e^{-\alpha u} \quad (۹.۳)$$

عبارت  $\mathcal{J}(\pi, )$  به معنای جمع جریان تصادفی نوروهای است که در زمان  $u$  در آستانه قرار دارند. همچنین عبارت  $\mathcal{N}(\pi, )$  به معنای تعداد همین نوروهاست. حال با نمادهای بالا شروع به بازنویسی جملات پیشین می‌کنیم:

$$E(t) = \frac{1}{N} \int_0^\infty \mathcal{J}(\pi, t - d - u_1) \cdot \mathcal{P}(u_1) du_1 - \frac{g}{N} \int_0^\infty \mathcal{N}(\pi, t - d - u_1) \cdot \mathcal{P}(u_1) E(t - d - u_1) du_1 \quad (۱۰.۳)$$

حال جمله‌ی اول را نیز با عبارت دیگری خلاصه‌سازی می‌کنیم:

$$\mathcal{A}(t) \equiv \frac{1}{N} \int_0^\infty \mathcal{J}(\pi, t - d - u_1) \cdot \mathcal{P}(u_1) du_1 \quad (۱۱.۳)$$

در خصوص جمله‌ی دوم نیز مشابه عبارت مربوط به  $E$  را در آن جاگذاری می‌کنیم.

$$E(t - d - u_1) = \frac{1}{N} \int_0^\infty \mathcal{J}(\pi, t - 2d - u_1 - u_2) \cdot \mathcal{P}(u_2) du_2 \quad (12.3)$$

$$- \frac{g}{N} \int_0^\infty \mathcal{N}(\pi, t - 2d - u_1 - u_2) \cdot \mathcal{P}(u_2) E(t - 2d - u_1 - u_2) du_2 \quad (13.3)$$

این عبارت جمع تعداد همه‌ی تیزه‌هایی است که تا گام  $t - d$  زده شده‌اند و در نتیجه جمله‌ای انباشتی است. پس خواهیم داشت:

$$E(t) = \mathcal{A}(t-d) - g \int_{\cdot}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-d-u_{\mathfrak{I}}) \cdot \mathcal{P}(u_{\mathfrak{I}}) E(t-d-u_{\mathfrak{I}}) du_{\mathfrak{I}} \quad (14.3)$$

$$= \mathcal{A}(t-d) - g \int_{\cdot}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-d-u_{\mathfrak{I}}) \cdot \mathcal{P}(u_{\mathfrak{I}}) \cdot [\mathcal{A}(t-\mathfrak{V}d-u_{\mathfrak{I}}) - g \int_{\cdot}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-d-u_{\mathfrak{I}}-u_{\mathfrak{V}}) \cdot \mathcal{P}(u_{\mathfrak{V}}) E(t-\mathfrak{V}d-u_{\mathfrak{I}}-u_{\mathfrak{V}}) du_{\mathfrak{V}}] du_{\mathfrak{I}} \quad (15.3)$$

$$= \mathcal{A}(t-d) - g \int_{\cdot}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-d-u_{\mathfrak{I}}) \cdot \mathcal{P}(u_{\mathfrak{I}}) \cdot \mathcal{A}(t-\mathfrak{V}d-u_{\mathfrak{I}}) du_{\mathfrak{I}} \quad (16.3)$$

$$+ g^{\mathfrak{V}} \int_{\cdot}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-d-u_{\mathfrak{I}}) \cdot \mathcal{P}(u_{\mathfrak{I}}) \int_{\cdot}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-\mathfrak{V}d-u_{\mathfrak{I}}-u_{\mathfrak{V}}) \cdot \mathcal{P}(u_{\mathfrak{V}}) E(t-\mathfrak{V}d-u_{\mathfrak{I}}-u_{\mathfrak{V}}) du_{\mathfrak{V}} du_{\mathfrak{I}} \quad (17.3)$$

$$= \mathcal{A}(t-d) - g \int_{\cdot}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-d-u_{\mathfrak{I}}) \cdot \mathcal{P}(u_{\mathfrak{I}}) \cdot \mathcal{A}(t-\mathfrak{V}d-u_{\mathfrak{I}}) du_{\mathfrak{I}} \quad (18.3)$$

$$+ g^{\mathfrak{V}} \int_{\cdot}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-d-u_{\mathfrak{I}}) \cdot \mathcal{P}(u_{\mathfrak{I}}) \int_{\cdot}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-\mathfrak{V}d-u_{\mathfrak{I}}-u_{\mathfrak{V}}) \cdot \mathcal{P}(u_{\mathfrak{V}}) \mathcal{A}(t-\mathfrak{V}d-u_{\mathfrak{I}}-u_{\mathfrak{V}}) du_{\mathfrak{V}} du_{\mathfrak{I}} \quad (19.3)$$

$$- g^{\mathfrak{V}} \int_{\cdot}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-d-u_{\mathfrak{I}}) \cdot \mathcal{P}(u_{\mathfrak{I}}) \int_{\cdot}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-\mathfrak{V}d-u_{\mathfrak{I}}-u_{\mathfrak{V}}) \cdot \mathcal{P}(u_{\mathfrak{V}}) \int_{\cdot}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-\mathfrak{V}d-u_{\mathfrak{I}}-u_{\mathfrak{V}}-u_{\mathfrak{W}}) \cdot \mathcal{P}(u_{\mathfrak{W}}) E(t-\mathfrak{V}d-u_{\mathfrak{I}}-u_{\mathfrak{V}}-u_{\mathfrak{W}}) du_{\mathfrak{W}} du_{\mathfrak{V}} du_{\mathfrak{I}} \quad (20.3)$$



حال اگر عمر این سامانه کراندار باشد؛ تعداد جملات بالا محدود می‌شوند. پس اگر سامانه پیش از یک زمانی کاملاً خاموش بوده باشد  $E = 0$ ؛ آنگاه می‌توان میدان کنونی را بر اساس جملات ضربی بین شدت جریان و تعداد نوروهای تیزه زده پیدا کرد.

### روش اختلال

به نمودار؟؟ دقت کنید. در زمانی که تعداد نوروها بی‌نهایت باشد؛ در فاز ناهم‌گام انحراف معیار میدان صفر خواهد شد. این به این معنی است که جریان در زمان ثابت خواهد ماند. پس بگذارید با علم بر این موضوع یک جواب معادله ۵.۳ را در حالت حدی میدان ثابت  $E$  معرفی کنیم. با فرض ثابت بودن میدان، اندازه‌ی آن را محاسبه می‌کنیم. سپس مجدد به معادلات برمی‌گردیم و می‌پرسیم که در صورت جمع با یک جمله‌ی اختلالی کوچک این انحراف رشد خواهد کرد یا خیر. به عبارت دیگر آیا این جواب جاذب است.

$$\begin{cases} E. = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{t-d} \int n_a(\pi, u) \cdot [a - gE.] da \cdot \alpha^\gamma u e^{-\alpha u} du \\ \frac{\partial n_a}{\partial t} = -\frac{\partial n_a}{\partial \theta} \cdot (a - gE.) \end{cases} \quad (21.3)$$

یک راه خوب برای پیشبرد سطر اول معادلات آن است که از دو طرف آهنگ تغییرشان با زمان را بپرسیم. از آنجا که سمت چپ معادله ثابت است؛ سمت راست هم باید جوابی مشابه را حکایت کند.

$$\bullet = \frac{dE.}{dt} = \frac{\alpha^\gamma (t-d) e^{-\alpha(t-d)}}{N} \cdot [-gE. \cdot \int n_a(\pi, t-d) da + \int n_a(\pi, t-d) \cdot a da] \quad (22.3)$$

مشخص است که کدام جمله از جملات ضربی بالا صفر است. پس برای  $E$  خواهیم داشت:

$$E. = \frac{1}{g} \cdot \frac{\int n_a(\pi, t-d) \cdot a da}{\int n_a(\pi, t-d) da} \quad (23.3)$$

حال برای ادامه‌ی فرآیند نیاز داریم تا عبارت حاکم بر  $n_a(\pi, t-d)$  را بدست آوریم. جواب پیشنهادی ما برای سطر دوم معادلات از جنس تابع دلتاست:

$$n_a(\theta, t) = \delta(\theta - \theta_a(t)) \quad (24.3)$$

$$= \delta(\theta + \theta. - (a - gE.)t + \gamma [K_a^{(t)}] \pi) \quad (25.3)$$

$$= \delta(\theta - (a - gE.)t + \gamma [K_a^{(t)}] \pi + \theta.) \quad (26.3)$$

$$\Rightarrow n_a(\pi, t) = \delta((\gamma [K_a^{(t)}] + 1)\pi - (a - gE.)t + \theta.) \quad (27.3)$$

$$(28.3)$$

که در این معادلات  $K_a^{(t)}$  کسری است که تعداد دور هر نورو را از آغاز تا کنون روایت می‌کند و ما مجبور به عقب کشیدن  $\gamma \pi$  فاز کامل پس از تیزه زدن آن به تعداد  $[K_a^{(t)}]$  شده‌ایم. <sup>۱</sup> قابل محاسبه است که عبارت

<sup>۱</sup> دقت کنیم که معادله‌ی ذکر شده برای نوروهایی درست است که  $(a - gE.) > 0$

کامل آن به صورت زیر است.

$$K_a^{(t)} = \frac{(a - gE.)t + \pi + \theta.}{2\pi} \quad (29.3)$$

برای محاسبه‌ی انتگرال‌هایی که شامل این دلتای دیراک هستند؛ لازم است تا صفرهای آرگومان آن را محاسبه کنیم.

$$\left( 2 \left\lfloor \frac{(a - gE.)t + \pi + \theta.}{2\pi} \right\rfloor + 1 \right) \pi - (a - gE.)t + \theta. = 0 \quad (30.3)$$

$$2\pi \times \left( \left\lfloor \frac{(a - gE.)t + \pi + \theta.}{2\pi} \right\rfloor - \frac{(a - gE.)t + \pi + \theta.}{2\pi} \right) = 0 \quad (31.3)$$

$$2\pi \times \left( \left\lfloor K_a^{(t)} \right\rfloor - K_a^{(t)} \right) = 0 \quad (32.3)$$

این رابطه کاملاً یک تابع تناوبی را توصیف می‌کند. یک تابع مقطع که در مکانی که آرگومان آن صحیح می‌شود؛ مقدار صفر به خود می‌گیرد. پس روشن است که توقع داشته باشیم. تعداد صفرهای این معادله به اندازه‌ی تعداد تناوبی است که در هر زمان در بازه‌ی جریان‌های داده شده دارد.

$$\Delta K_a^{(t)} = 1 \quad (33.3)$$

$$\Delta K_a^{(t)} = \frac{t}{2\pi} \Delta a \quad (34.3)$$

$$\Delta a = \frac{2\pi}{t} \quad (35.3)$$

این دوره‌ی تناوب با افزایش زمان کوچکتر می‌شود. اگر تعداد نوره‌ها را به صورتی ترمودینامیکی بزرگ بگیریم؛ آنگاه به ازای هر دوره‌ی تناوب یک نوره حتما هست که روی محور آستانه قرار گرفته است.

حال که دوره‌ی تناوب  $\Delta a$  را بدست آوردیم؛ می‌دانیم که ریشه‌های رابطه‌ی ۳۲.۳ چه زمانی رخ می‌دهند. فرض کنیم که اولین صفر در جریانی مثل  $a_m$  رخ می‌دهد. توجه کنید حتماً اندازه‌ی این جریان به گونه‌ای است که نوره‌ها را به صورت فعال نگه دارد. پس باید حتماً  $(a_m - gE.) > 0$  باشد. حال می‌توانیم انتگرال‌های مورد نظر خود را این چنین بسط دهیم.

$$\int n_a(\pi, t - d) a da = \int \delta \left( 2\pi \left( \left\lfloor K_a^{(t)} \right\rfloor - K_a^{(t)} \right) \right) a da \quad (36.3)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{K_a^{(t)} \in Z} a_i \quad (37.3)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{m=0}^M a_m + m \cdot \Delta a \quad (38.3)$$

$$= \frac{M+1}{2\pi} \cdot \left( \frac{a_m + a_{max}}{2} \right) \quad (39.3)$$

$$(40.3)$$

و از طرفی:

$$\int n_a(\pi, t - d) da = \int \delta \left( \sqrt{\pi} (\lfloor K_a^{(t)} \rfloor - K_a^{(t)}) \right) a da \quad (41.3)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sum_{K_a^{(t)} \in Z} 1 \quad (42.3)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sum_{m=0}^M 1 \quad (43.3)$$

$$= \frac{M+1}{\sqrt{\pi}} \quad (44.3)$$

حال اگر به محاسبه‌ی میدان ثابت خود برگردیم و تکه‌های پازل را کنار هم بگذاریم؛ خواهیم داشت:

$$E = \frac{1}{g} \cdot \frac{\int n_a(\pi, t - d) \cdot a da}{\int n_a(\pi, t - d) da} \quad (45.3)$$

$$= \frac{1}{g} \cdot \frac{\frac{M+1}{\sqrt{\pi}} \cdot \left( \frac{a_m + a_{max}}{2} \right)}{\frac{M+1}{\sqrt{\pi}}} \quad (46.3)$$

$$= \frac{1}{g} \left( \frac{a_m + a_{max}}{2} \right) \quad (47.3)$$

این میدان معادل است با جریان میانگین بین نورون‌هایی که آن‌ها را روشن خطاب کرده بودیم. این نتیجه صحیح نیست زیرا اگر میدان در میانه‌ی این جریان‌ها قرار گیرد؛ آنگاه نورون‌های با جریان پایین‌دست  $a < \frac{1}{g} \left( \frac{a_m + a_{max}}{2} \right)$  را خاموش خواهد کرد و اصلاً روشن نخواهند ماند.

### روش آماری

در این روش فرض می‌کنیم که برای هر جریان تصادفی اولیه، نورون‌های زیادی را به اختیار گرفته‌ایم. در حالت پایا، در یک حالت خاص تغییری در چگالی جمعیت مشاهده نمی‌شود پس در معادله‌ی ۵.۳ خواهیم داشت:

$$\frac{\partial n_a}{\partial t} = 0 \quad (48.3)$$

همچنین در حالت پایا که در واقع از نگاه ما حالت ناهم‌گام است؛ جریان بین نورون‌ها - که کمیتی بزرگ مقیاس است - در زمان تغییری نمی‌کند. پس به این ترتیب:

$$\begin{cases} \frac{\partial n_a}{\partial t} = -\frac{\partial J_a(t)}{\partial \theta} = 0 \\ J_a(\theta, t) = n_a(\theta, t) \cdot [a - gE] \end{cases} \Rightarrow J_a(\theta, t) = J_a(t) \quad (49.3)$$

$$\Rightarrow n_a(\theta, t) = n_a \quad (50.3)$$

$$(51.3)$$

پس توزیع جمعیت نورون‌ها مستقل از زمان و حالت آن‌ها خواهد شد. اگر توزیع را در ابتدا یکنواخت میان جریان‌های مختلف توزیع کرده باشیم؛ برای همه‌ی زمان‌ها و حالت‌ها داریم:

$$n = \frac{N}{2\pi(a_{Max} - a_{min})} \quad (52.3)$$

برای جریان بین نورون‌ها هم خواهیم داشت:

$$E = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{t-d} \int n \cdot [a - gE] da \cdot \alpha^2 u e^{-\alpha u} du \quad (53.3)$$

$$= \int \frac{n}{N} \cdot [a - gE] da \quad (54.3)$$

دقت کنیم که انتگرال رابطه‌ی ۵۴.۳ روی نورون‌هایی است که مستعد تیزه زدن هستند.<sup>۲</sup> اولین جریانی که نورون را مستعد تیزه زدن می‌کند  $a_*$  نام‌گذاری می‌کنیم. وقتی جریان مهاری حاصل از تیزه زدن‌ها کوچک است؛ همه‌ی نورون‌ها فعال هستند و در نتیجه  $a_* = a_{min}$  می‌شود. اما در حالتی که جریان مهاری زیاد می‌شود؛ این مقدار از کمترین جریان تصادفی اولیه سامانه بزرگتر می‌شود. محاسبات را ادامه می‌دهیم:

$$E = \int \frac{n}{N} \cdot [a - gE] da \quad (55.3)$$

$$= \frac{n}{N} \cdot \left[ \frac{a_{Max}^2 - a_*^2}{2} - gE(a_{Max} - a_*) \right] \quad (56.3)$$

$$\Rightarrow E = n \cdot \left[ \frac{a_{Max}^2 - a_*^2}{2} \right] / [N + gn(a_{Max} - a_*)] \quad (57.3)$$

شاید بنظر این یک معادله‌ی درجه یک ساده باشد که میدان را گزارش می‌کند اما در واقع خود  $a^*$  هم به میدان وابسته است و باید وابستگی آن را لحاظ کنیم. به تقریب:  $a^* = gE$  با اضافه کردن این معادله و حل معمول یک معادله‌ی درجه‌ی دو برای میدان صراحتاً خواهیم داشت:

$$E = \left( \frac{a_{Max}}{g} + \frac{N}{ng^2} \right) \pm \left[ \left( \frac{N}{ng^2} + \frac{a_{Max}}{g} \right)^2 - \frac{a_{Max}^2}{g^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (58.3)$$

نتیجه می‌دهد که  $a_*$  هم باید به صورت زیر باشد:

$$a_* = \left( a_{Max} + \frac{N}{ng} \right) \pm \left[ \left( \frac{N}{ng} + a_{Max} \right)^2 - a_{Max}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (59.3)$$

$$= \left( a_{Max} + \frac{N}{ng} \right) \pm \left[ \frac{N^2}{n^2 g^2} + \frac{2a_{Max}N}{ng} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (60.3)$$

---


$$(a - gE) > 0^2$$

اجازه بدهید علامت مثبت را کنار بگذاریم زیرا مقدار  $a_*$  را خارج بازه‌ی جریان‌های سامانه گزارش می‌کند. پس هم برای میدان و هم جریان  $a_*$  خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a_* = \left( a_{Max} + \frac{N}{ng} \right) - \left[ \frac{N^2}{n^2 g^2} + \frac{2a_{Max}}{ng} \right]^{\frac{1}{2}} \\ E = \left( \frac{a_{Max}}{g} + \frac{N}{ng^2} \right) - \left[ \frac{N^2}{n^2 g^2} + \frac{2Na_{Max}}{ng^2} \right]^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (۶۱.۳)$$

حال اگر نتایج بدست آمده را با داده‌های شبیه‌سازی تطبیق دهیم؛ خواهیم دید که تطابق خوبی با یک دیگر دارند.  
در ضریب تاثیرهای بسیار بزرگ داریم:

$$E \cong \frac{a_{Max}}{g} + \frac{N}{ng^2} - \left( \frac{2Na_{Max}}{ng^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ 1 + \frac{N}{2nga_{Max}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (۶۲.۳)$$

$$= \frac{a_{Max}}{g} + \frac{N}{ng^2} - \left( \frac{2Na_{Max}}{ng^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ 1 + \frac{N}{2nga_{Max}} \right] \quad (۶۳.۳)$$

$$= \frac{a_{Max}}{g} - \left( \frac{2Na_{Max}}{ng^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{N}{ng^2} - \left( \frac{N}{2n} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{a_{Max}^{\frac{1}{2}} g^{\frac{5}{2}}} \quad (۶۴.۳)$$

#### حل اختلالی میدان

همان طور که مشخص است؛ حل دقیق میدان بسیار کار دشواری است اما می‌توان از طریق ترفندهای اختلالی به جواب آن نزدیک شد. یکی از روش‌های معمول حل زنجیری و تودرتوی دستگاه معادلات است. به این ترتیب که ابتدا از معادله پاسخ حالت پایا (مرتبه‌ی صفرم) را در معادله‌ی پخش جاگذاری می‌کنیم تا توزیع آماری وابسته به زمان نوروها بدست آید. سپس مجدداً از توزیع بدست آمده؛ میدان مرتبه‌ی اول را که وابسته به زمان است؛ محاسبه می‌کنیم.

از آنجا که توزیع سامانه رفتاری دوره‌ای به طول  $2\pi$  دارد؛ می‌توانیم آن را به صورت زیر بسط دهیم:

$$\rho(\theta, a, t) = \rho_0 + \sum_k A_k(t) e^{ik\theta}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (۶۵.۳)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \sum \dot{A}_k e^{ik\theta} \quad (۶۶.۳)$$

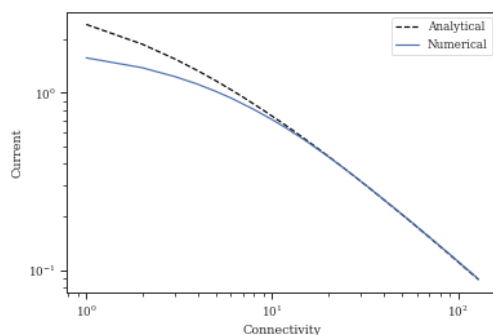
$$\frac{\partial \rho}{\partial \theta} = \sum A_k \cdot ik \cdot e^{ik\theta} \quad (۶۷.۳)$$

$$(۶۸.۳)$$

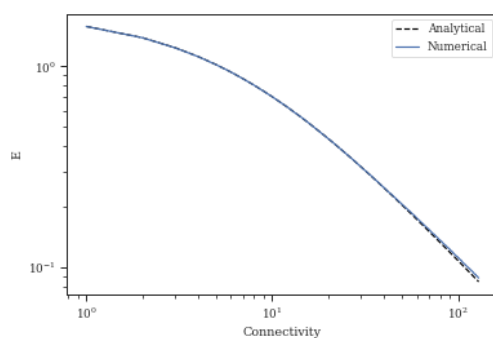
حال آن را در معادله‌ی پخش قرار می‌دهیم تا بتوانیم معادله‌ی حاکم بر ضرایب را محاسبه کنیم.

$$\sum \dot{A}_k e^{ik\theta} = - \sum A_k \cdot ik(a - gE(t)) \cdot e^{ik\theta} \quad (۶۹.۳)$$

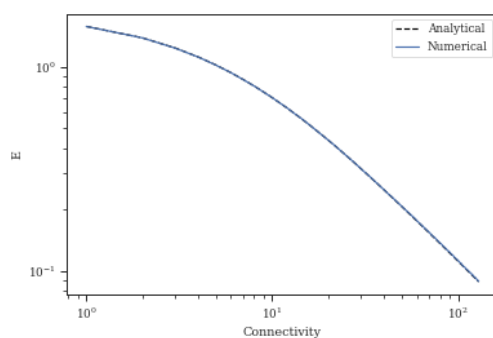
$$\Rightarrow \dot{A}_k = -A_k \cdot ik(a - gE(t)) \quad (۷۰.۳)$$



(آ) نسخه‌ای که کمینه‌ی جریان را از حل محاسبات در نظر می‌گیرد



(ب) نسخه‌ای که همه‌ی نورون‌ها را فعال تصور می‌کند.



(ج) نسخه ساخته شده از اتصال دوتای دیگر

شکل (۱.۳) تطابق جریان پایای بدست آمده از حل عددی و تحلیلی

در تقریب مرتبه‌ی اول برای توزیع داریم:

$$\dot{A}_k = -A_k \cdot ik(a - gE.) \quad (۷۱.۳)$$

$$\Rightarrow A_k(t) = A_k(\cdot) e^{-ik(a-gE.)t} \quad (۷۲.۳)$$

$$\Rightarrow \rho(\theta, a, t) = \rho. + \sum_k A_k(\cdot) e^{ik\theta - ik(a-gE.)t} \quad (۷۳.۳)$$

پس برای نوروهای روی آستانه خواهیم داشت:

$$\rho(\pi, a, t) = \rho. + \sum_k A_k(\cdot) e^{ik\pi - ik(a-gE.)t} \quad (۷۴.۳)$$

حال از نتیجه‌ی بدست آمده استفاده می‌کنیم و همان طور که اشاره شد به محاسبه‌ی مرتبه‌ی بعدی میدان می‌رویم:

$$E(t) = \int \int_0^\infty \rho(\pi, a, t - d - v) \cdot \dot{\theta} \cdot \alpha^\gamma v e^{-\alpha v} dv da \quad (۷۵.۳)$$

$$= E. \quad (۷۶.۳)$$

$$+ \int \int_0^\infty \sum_k A_k(\cdot) e^{ik\pi - ik(a-gE.)t} \cdot (a - gE.) \alpha^\gamma v e^{-\alpha v} dv da \quad (۷۷.۳)$$

$$= E. + \sum_k \int \int_0^\infty A_k(\cdot) e^{ik\pi - ik(a-gE.)t} \cdot (a - gE.) \alpha^\gamma v e^{-\alpha v} dv da \quad (۷۸.۳)$$

اجازه بدهید سهم مدهای متفاوت از میدان را به صورت جداگانه محاسبه کنیم و سپس مجدداً در کنار یکدیگر قرار دهیم.

$$E_{k,a}(t) = -\alpha^\gamma A_k(\cdot) (a - gE.) e^{ik\pi} \int_0^\infty v e^{-[\alpha - ik(a-gE.)]v - ik(a-gE.)t} dv \quad (۷۹.۳)$$

با تغییر متغیر  $\beta \equiv \alpha - ik(a - gE.)$  محاسبات را ادامه می‌دهیم:

$$= \alpha^\gamma A_k(\cdot) (a - gE.) e^{ik\pi} e^{-ik(a-gE.)t} \cdot \int_0^\infty v e^{-\beta v} dv \quad (۸۰.۳)$$

$$= \alpha^\gamma A_k(\cdot) (a - gE.) e^{ik\pi} e^{-ik(a-gE.)t} \cdot \frac{1}{\beta^2} \quad (۸۱.۳)$$

$$= A_k(\cdot) (a - gE.) e^{ik[\pi - (a-gE.)t]} \cdot \left( \frac{\alpha}{\alpha - ik(a - gE.)} \right)^2 \quad (۸۲.۳)$$

حال قدم به قدم به محاسبات پیشین خود برمی‌گردیم. ابتدا می‌پرسیم میدان همه‌ی نوروهای با مد یکسان چه جریانی را تولید می‌کنند.

$$E_k(t) = \int E_{k,a} da \quad (۸۳.۳)$$

$$= \int A_k(\cdot) (a - gE.) e^{ik[\pi - (a-gE.)t]} \left( \frac{\alpha}{\alpha - ik(a - gE.)} \right)^2 da \quad (۸۴.۳)$$

با تغییر متغیر  $h \equiv a - gE$  تلاش می‌کنیم انتگرال را ادامه دهیم.

$$E_k(t) = A_k(\cdot) e^{ik\pi} \int_0^{a_M - gE} h e^{-ikh(t-d)} \left( \frac{1}{1 - ikh/\alpha} \right)^2 dh \quad (۸۵.۳)$$

نرم‌افزارهای محاسباتی همچون ابزار ولفرم به ما امکان می‌دهد تا پاسخ آن را به صورت زیر بیان کنیم:

$$E_k(t) = -A_k(\cdot) \frac{\alpha^2}{k^2} e^{ik\pi} \left[ \frac{e^{-i(\xi(h) + k(t-d)h)}}{\sqrt{1 + h^2 k^2 / \alpha^2}} \right. \quad (۸۶.۳)$$

$$\left. + e^{-\alpha(t-d)} (\alpha(t-d) + 1) Ei[(\alpha - ikh)(t-d)] \right] \Bigg|_0^{a_M - gE}. \quad (۸۷.۳)$$

به صورتی که  $e^{-i\xi(h)} = \frac{1 + ikh/\alpha}{\sqrt{1 + h^2 k^2 / \alpha^2}}$  است و  $Ei$  همان تابع انتگرال نمایی است که به صورت  $Ei[z] = \int_{-z}^{+\infty} e^{-t}/t dt$  نوشته می‌شود.

$$E_k(t) = -A_k(\cdot) \frac{\alpha^2}{k^2} e^{ik\pi} \left[ \frac{e^{-i(\xi(a_M - gE) + k(t-d)(a_M - gE))}}{\sqrt{1 + (a_M - gE)^2 k^2 / \alpha^2}} \right. \quad (۸۸.۳)$$

$$+ e^{-\alpha(t-d)} (\alpha(t-d) + 1) Ei[(\alpha - ik(a_M - gE))(t-d)] \quad (۸۹.۳)$$

$$- e^{-ik(t-d)(a_M - gE)} \quad (۹۰.۳)$$

$$\left. - e^{-\alpha(t-d)} (\alpha(t-d) + 1) Ei[\alpha(t-d)] \right] \quad (۹۱.۳)$$

$$= -A_k(\cdot) \frac{\alpha^2}{k^2} e^{ik\pi} \left[ e^{-ik(t-d)(a_M - gE)} \left( \frac{e^{-i(\xi(a_M - gE))}}{\sqrt{1 + (a_M - gE)^2 k^2 / \alpha^2}} + 1 \right) \right. \quad (۹۲.۳)$$

$$\left. + e^{-\alpha(t-d)} (\alpha(t-d) + 1) \left( Ei[(\alpha - ik(a_M - gE))(t-d)] - Ei[\alpha(t-d)] \right) \right] \quad (۹۳.۳)$$

پس یک جمله‌ی نوسانی دارد و جمله‌ای که شامل تکینگی است. خبر خوب یا بد این است که این راه هم دارای ایراد است. زیرا در محاسبه‌ی مرتبه‌ی اول میدان اشتباهی رخ داده است - رابطه‌ی ۷۵.۳. در این رابطه باید ضرب مرتبه‌ی صفرم چگالی در مرتبه‌ی اول میدان جا



مانده است. یعنی باید می نوشتیم:

$$E(t) = \int \int_0^\infty (\rho_0 + \rho_1)(a - g(E_0 + E_1)) \cdot \alpha^\nu v e^{-\alpha v} dv da \quad (94.3)$$

$$= \int \int_0^\infty [\rho_0(a - gE_0) + \rho_1(a - gE_1)] \cdot \alpha^\nu v e^{-\alpha v} dv da \quad (95.3)$$

$$+ \int \int_0^\infty -gE_1\rho_0 \cdot \alpha^\nu v e^{-\alpha v} dv da \quad (96.3)$$

$$+ \int \int_0^\infty -gE_1\rho_1 \cdot \alpha^\nu v e^{-\alpha v} dv da \quad (97.3)$$

$$(98.3)$$

در واقع جمله‌ی آخر رابطه‌ی بالا جامانده بود و باعث می‌شود بخشی از جواب در پشت آن پنهان بماند. البته با در نظر گرفتن آن جمله پیچیدگی اصلی مسئله دوباره به صفحه‌ی بازی برمی‌گردد.

### ۲.۰.۳ بازی از نو (سامانه‌ی تک جریانی)

بنظر نمی‌آید که معادلات ما از این طریق حل شوند. بیاید یک طریق دیگر در پیش گیریم.

#### دیدار

استاد: محسن! بیا مسئله را باز هم ساده‌تر کنیم. به جای آن که یک پهنای جریان بگیریم؛ فقط و فقط یک جریان را در سامانه قرار دهیم. آنگاه ببینیم باز هم هم‌گامی خواهیم دید؟

پیشنهاد بعدی این که تیزه‌ها را باریک و بدون پهنای در نظر بگیر ( $\alpha \rightarrow \infty$ ) امیدوارم در این حالت مسئله حل شود.

محسن: مسئله شاید کمی عوض شود. زیرا جریان مهارتی برآمده از نورهایی با جریان بالا روی پتانسیل نورهایی پایین‌تر هم تاثیر می‌گذارد.

استاد: می‌دانم. اما از همین سامانه تک‌جریانی باید دریابید. وقتی یکی را حل کنیم بقیه را می‌توانیم از کنار هم قرار دادن این زیرسامانه محاسبه کنیم.

محسن: خیلی هم خوب! چشم انجام می‌شود.

استاد: فردا می‌توانی بیایی و حضوری باهم جلسه داشته باشیم؟

محسن: بله حتما خدمت خواهم رسید.

(اتاق انجمن علمی، سه‌شنبه عصر ۳۰ فروردین)

خروجی این مکالمات و چند جلسه پشت سرهم در ادامه‌ی این بخش خواهد آمد.

بیاید مجدد رابطه‌ی ۵.۳ که جریان را در سامانه گزارش می‌داد برای سامانه‌ی جدید بازنویسی کنیم. با

این تفاوت که  $\alpha$  را به بینهایت سوق داده‌ایم و تیزه‌ها کاملاً باریک هستند.

$$E(t) = \frac{n(\pi, t-d)}{N} \cdot [a - gE(t-d)] \quad (۹۹.۳)$$

### حالت پایا

برای این سامانه میدان حالت پایا به صورت زیر قابل توصیف است:

$$E_* = \frac{n}{N} \cdot [a - gE_*] = \frac{1}{2\pi} [a - gE_*] \quad (۱۰۰.۳)$$

$$\Rightarrow E_* = \frac{a}{2\pi + g} \quad (۱۰۱.۳)$$

### اختلال از حالت پایا

حال فرض کنیم که جریان به اندازه‌ای کوچک از حالت پایای خود منحرف شود.  $E = E_* + \epsilon$  علاقه‌مندیم که سامانه در زمان‌های بعدی چگونه رفتار خواهد کرد. آیا این اختلال به طریقی هضم خواهد شد و یا بزرگ‌تر می‌شود و همواره سامانه را از حالت پایا دور خواهد کرد؟

$$E(t+d) = \frac{1}{2\pi} [a - gE(t)] \quad (۱۰۲.۳)$$

$$= \frac{1}{2\pi} [a - g(E_* + \epsilon)] \quad (۱۰۳.۳)$$

$$= \frac{1}{2\pi} [a - gE_*] - \frac{g\epsilon}{2\pi} \quad (۱۰۴.۳)$$

$$= E_* - \frac{g\epsilon}{2\pi} \quad (۱۰۵.۳)$$

با ادامه‌ی همین روند می‌توانیم به این نتیجه برسیم که در گام‌های بعدی سامانه چگونه رفتار خواهد کرد (شکل ۲.۳):

$$E(t + nd) = \frac{1}{2\pi} [a - gE(t + (n-1)d)] \quad (۱۰۶.۳)$$

$$= \frac{a}{2\pi} \left[ 1 - \frac{g}{2\pi} + \left(\frac{g}{2\pi}\right)^2 + \dots + \left(\frac{-g}{2\pi}\right)^{n-1} \right] + \left(\frac{-g}{2\pi}\right)^n (E_0 + \epsilon) \quad (۱۰۷.۳)$$

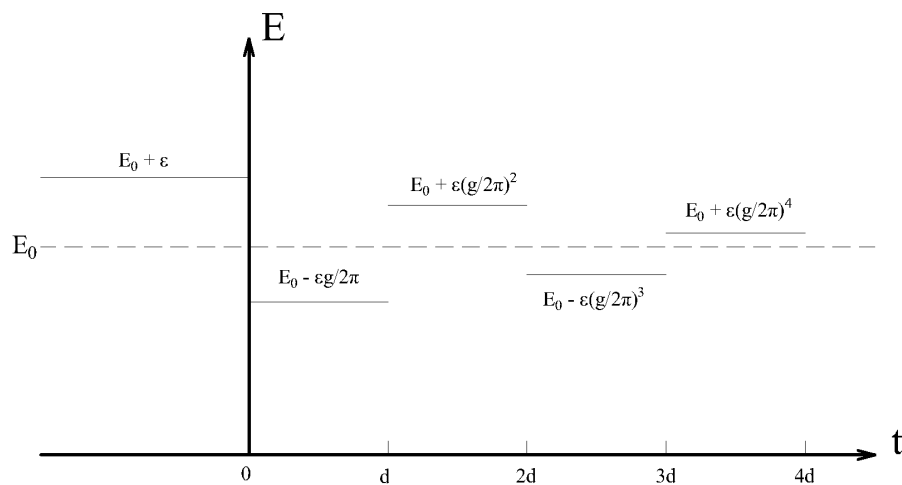
$$= \frac{a}{2\pi} \frac{1 - \left(\frac{-g}{2\pi}\right)^n}{1 - \left(\frac{-g}{2\pi}\right)} + \left(\frac{-g}{2\pi}\right)^n (E_0 + \epsilon) \quad (۱۰۸.۳)$$

$$= \frac{a}{2\pi + g} - \frac{a}{2\pi} \cdot \frac{\left(\frac{-g}{2\pi}\right)^n}{1 - \left(\frac{-g}{2\pi}\right)} + \left(\frac{-g}{2\pi}\right)^n (E_0 + \epsilon) \quad (۱۰۹.۳)$$

$$= \frac{a}{2\pi + g} - \frac{a}{2\pi + g} \cdot \left(\frac{-g}{2\pi}\right)^n + \left(\frac{-g}{2\pi}\right)^n (E_0 + \epsilon) \quad (۱۱۰.۳)$$

$$= E_0 + \left(\frac{-g}{2\pi}\right)^n \cdot \epsilon \quad (۱۱۱.۳)$$

$$= E_0 + \left(\frac{-g}{2\pi}\right)^{\lfloor t/d \rfloor + 1} \cdot \epsilon \quad (۱۱۲.۳)$$



شکل (۲.۳) تحول میدان سامانه‌ای تک‌جریان و با تیزه‌های پهن از اخنلالی کوچک از حالت پایا (شکل اشتباه است)

پرواضح است که اگر ضریب تاثیر از مقدار  $2\pi$  کمتر باشد؛ این مجموع همگراست و اختلال در

سامانه هضم خواهد شد. در صورتی اگر بیشتر باشد؛ واگرا خواهد بود. این مقدار بنظر همان گذر فازی است که مدت هاست به دنبال آن می گردیم. پس موفق شدیم که برای سامانه‌ی تک جریانی نقطه‌ی گذر فاز را محاسبه کنیم. کمتر باشد؛ این مجموع همگراست و اختلال در سامانه هضم خواهد شد. در صورتی اگر بیشتر باشد؛ واگرا خواهد بود.

اگر چه می توانستیم مسئله را از طریق دیگری نیز درپیش بگیریم. از معادله‌ی ۱۰۵.۳ اختلاف جدیدی را که با میدان پایا پیدا شده است را به عنوان  $\epsilon'$  تعریف کنیم و سپس میدان بعدی را از ضرب مجدد عامل  $g/2\pi$  بدست آوریم. به این ترتیب به طریق ساده تر خواهیم داشت:

$$E(t + nd) = E. + \left(\frac{-g}{2\pi}\right)^n \cdot \epsilon \quad (113.3)$$

### شبیه سازی سامانه‌ی تک جریانی

حس می زنیم که برای سامانه‌ی یاد شده در قسمت قبل گذر فاز در  $g = 2\pi$  رخ دهد. پس شبیه سازی را بار دیگر با تنظیمات زیر راه اندازی می کنیم:

$$\alpha = 100 \text{ s}^{-1} *$$

\* جریان خارجی متصل به همه‌ی نورونها یکسان و برابر ۵.۹ است.

$$N = 10000 *$$

$$t_d = 0.1 \text{ s} *$$

\* کل زمان شبیه سازی ۱۰۰ ثانیه در نظر گرفته شده

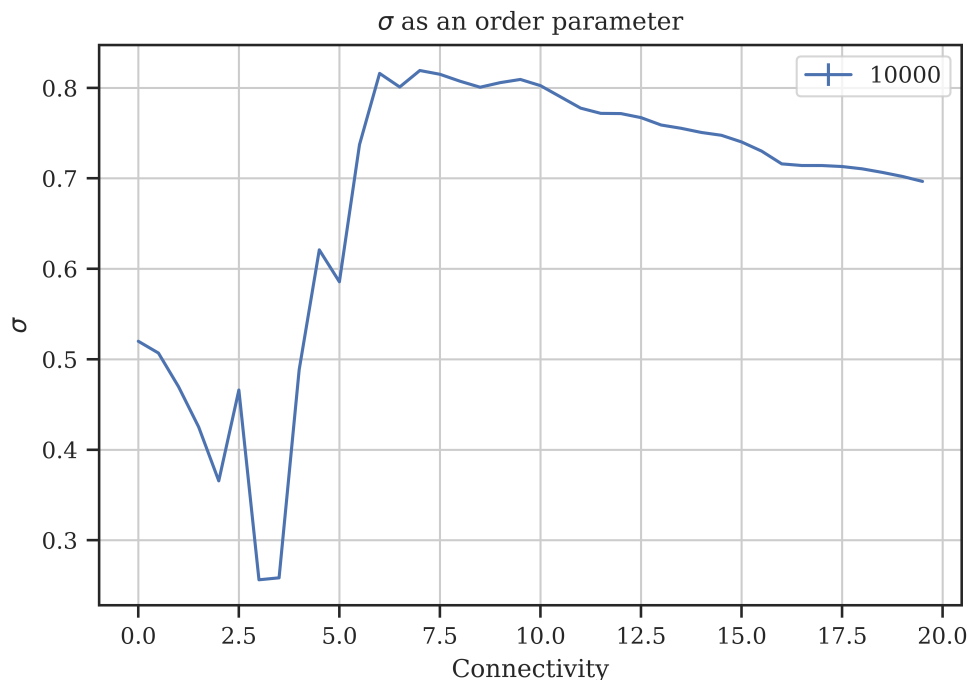
\* هر گام زمانی برابر ۰/۰۱ ثانیه است.

به این ترتیب نتیجه‌ی شبیه سازی به شکل زیر در آمد: متأسفانه این شکستی برای امید به محقق شدن توصیف تحلیلی این سامانه است. زیرا نقطه‌ی گذر فاز کاملاً دور از همسایگی عدد ۶ و در همسایگی نزدیکی حول ۵.۳ پیدا شده است. سوالی که ما در این بخش با آن تنها خواهیم ماند این است که راه حل پیشین ما از چه جزئیاتی چشم پوشی کرده است؟!

### دیدار

محسن: استاد! شکل به این صورت درآمد.

استاد: خوب اشکال ندارد! باید بررسی کنیم ببینیم مشکل از کجاست.  
(لحظاتی پیش از شروع جلسه‌ی برخط مقاله خوانی روز چهارشنبه ۷ اردیبهشت)



شکل (۳.۳) مشخصه‌ی نظم سامانه ده هزار نوروئی تک‌جریان

#### صندوق پیام‌ها

محسن: اورکا!

سلام استاد! فکر کنم فهمیدم مشکل چیه.

اگر خاطرتون باشه ما باید ضرب سرعت در چگالی روی آستانه را به عنوان محرکه‌ی میدان E در نظر می‌گرفتیم. چون سامانه کمی با حالت پایا فرق داشت؛ چگالی را یکنواخت و ثابت در نظر می‌گرفتیم به طوری که در همسایگی این حالت هم همچنان چگالی ثابت است.

اما این تقریب صحیح نیست! به محض این که علامت سرعت منفی می‌شود ( $V < 0$ ) چگالی روی مرز به صورت پله‌ای تغییر می‌کند و صفر می‌شود. این به این معنی است که اگر برای محاسبه‌ی میدان اکنون در به تاریخچه‌ی سامانه رجوع می‌کنیم؛ باید در نظر داشته باشیم که سهم این رخداد صفر است.

ما سهام‌های رخدادهایی که در آن‌ها ( $V < 0$ ) است را زیاد شمرده‌ایم و باید حذف شوند.

این نکته به نظر بخشی از مشکل ماست هنوز روی بقیه استدلال دارم کار می‌کنم،

ارادتمند شما

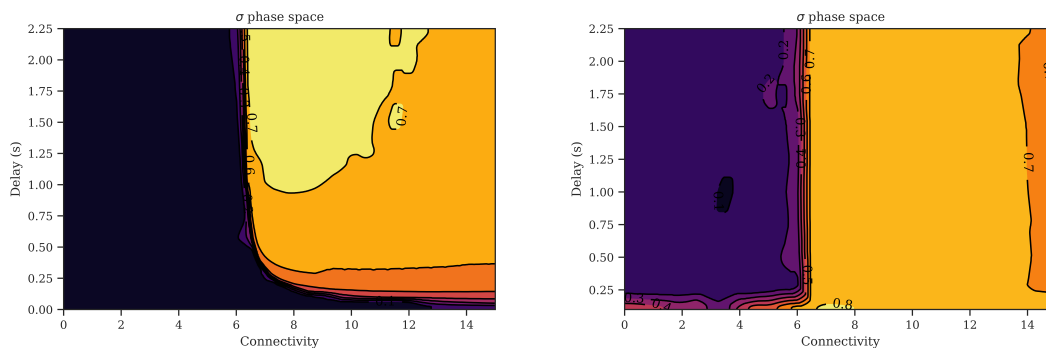
محسن

استاد: سلام

اگر شرایط اولیه رو این طوری بدیم که مکان همه تصادفی و تاریخچه هم این طور که تا قبل  $t=0$  سرعت‌ها همه مثل هم و یه کم متفاوت با سرعت تعادل، اون وقت چی؟  
(شنبه ۱۰ اردیبهشت)

صحبتی که با استاد مطرح کردم؛ صحیح بود اما نه کاملاً صحیح! حدس استاد این است که اگر محور آستانه حول نقطه‌ای گذر فاز خالی شده است به دلیل نامیزان بودن شرایط اولیه است. من حدس خودم و ایشان را مورد بررسی قرار دادم و به این نتیجه رسیدم که گذر فاز در نقطه‌ای رخ می‌دهد که صرفاً نوروها کند می‌شوند و برنمی‌گردند؛ یعنی سرعتشان همچنان مثبت است و اندازه‌ی آن کمتر می‌شود اما منفی نمی‌شود. پس حدس من صحیح نبود.

پس کنجکاو می‌شویم که نمایش تمام عیاری از صفحه‌ی فاز داشته باشیم و بتوانیم شمایل آنچه را که در سامانه رخ داده؛ به تصویر بکشیم.



(آ) صفحه‌ی فاز نورو تک جریان با پهنای تیزه‌ی  $\alpha = 100$  (ب) صفحه‌ی فاز نورو تک جریان با پهنای تیزه‌ی  $\alpha = 20$

چنان که در شکل ?? می‌بینیم در حالتی که تیزه‌ها تقریباً باریک هستند ( $\alpha = 100$ ) تغییر فاز همان است که پیش‌بینی کردیم؛ یعنی در نزدیکی نقطه‌ی  $g = 2\pi$  رخ می‌دهد و به ازای تمام زمان‌های تاخیر ممکن، همین مقدار می‌ماند اما در تیزه‌های پهن این گذر فاز رفتاری دیگر دارد. زمان‌هایی که تاخیر بسیار بزرگتر از زمان ویژه‌ی تاثیر تیزه‌هاست ( $d > \alpha^{-1}$ ) گذر فاز در همان نقطه رخ می‌دهد.

پس بهتر است این طور جمع بندی کنیم که راه حل ۱۰۷.۳ برای حالتی درست است که زمان ویژه تیزه‌ها در مقایسه با زمان تاخیر نسبتاً کم باشد.  $d \gg \alpha$

حال که مسئله در حالت بسیار ساده حل شد؛ کم کم گام‌هایی رو به سمت پیچیده شدن برمی‌داریم. اولین گام آن است که کمیت  $\alpha$  را به مجدداً به محاسبات خود بازگردانیم تا رابطه‌ی متناظر با ?? برای آن

بدست آوریم. حدس می‌زنیم که تغییر میدان دیگر مانند شکل ۲.۳ تیز نباشد و لبه‌هایی نرم‌تر به خود گیرند.

$$E = E_* + \epsilon \quad (t < *) \quad (114.3)$$

$$E(t) = \frac{a}{2\pi} - \frac{g}{2\pi} \int_0^\infty ds_1 \left( \frac{a}{2\pi} - \frac{g}{2\pi} \int ds_2 E(t - 2d - s_1 - s_2) \alpha^{s_2} e^{-\alpha s_2} \right) \alpha^{s_1} e^{-\alpha s_1} \quad (115.3)$$

$$= \frac{a}{2\pi} \left[ 1 - \frac{g}{2\pi} + \left( \frac{g}{2\pi} \right)^2 + \dots + \left( \frac{-g}{2\pi} \right)^{n-1} \right] \quad (116.3)$$

$$+ \left( \frac{-g}{2\pi} \right)^n \int_0^\infty \int \dots \int E(t - nd - s_1 - s_2 - \dots - s_n) \alpha^{s_n} s_1 s_2 \dots s_n e^{-\alpha(s_1 + s_2 + \dots + s_n)} ds_1 ds_2 \dots ds_n \quad (117.3)$$

$$= \mathcal{K}_{a,g}(t) \quad (118.3)$$

$$+ \left( \frac{-g}{2\pi} \right)^n \int_0^\infty \int \dots \int E(t - nd - s_1 - s_2 - \dots - s_n) \alpha^{s_n} s_1 s_2 \dots s_n e^{-\alpha(s_1 + s_2 + \dots + s_n)} ds_1 ds_2 \dots ds_n \quad (119.3)$$

که در این رابطه  $\mathcal{K}_{a,g}(t)$  همان پاسخ معادله در حالتی است که تیزه‌ها کاملاً باریک هستند. این روند تو در تو تا زمانی ادامه می‌یابد که انتگرال ده ما به زمانی که ما آن را به صورت دستی مقید کرده‌ایم نرسد. زیرا از آن گام به بعد رابطه‌ی میدان از دینامیک گام پیشین خود بدست نمی‌آید. آخرین گام این رابطه در زمانی است که بخشی از آن در حالت مقید قرار دارد و بخشی از آن در حالت پویا. پس برای آن که این ملاحظه را اعمال کنیم؛ تغییر متغیر  $r \equiv \sum s_i$  را می‌دهیم تا ورودی تابع میدان را رصد کند. سپس روی مقادیر مختلف  $r$  انتگرال‌ها را جمع می‌زنیم.

$$\int_0^\infty \int \dots \int E(t - nd - s_1 - s_2 - \dots - s_n) \alpha^{s_n} s_1 s_2 \dots s_n e^{-\alpha(s_1 + s_2 + \dots + s_n)} ds_1 ds_2 \dots ds_n \quad (120.3)$$

$$= \int_0^\infty \int \dots \int E(t - nd - r) \alpha^{s_n} e^{-\alpha(r)} s_1 s_2 \dots s_n ds_1 ds_2 \dots ds_n \delta(r - \sum s_i) dr \quad (121.3)$$

معادل تابع دلتای دیراک برای ادامه‌ی انتگرال‌گیری مناسب‌تر است.

$$= \int_0^\infty \int \dots \int E(t - nd - r) \alpha^{s_n} e^{-\alpha(r)} s_1 s_2 \dots s_n ds_1 ds_2 \dots ds_n \frac{e^{ip(r - \sum s_i)}}{2\pi} dr dp \quad (122.3)$$

$$= \int_0^\infty \int \dots \int E(t - nd - r) \alpha^{s_n} e^{-\alpha(r)} s_1 s_2 \dots s_n ds_1 ds_2 \dots ds_n e^{-ip \sum s_i} \frac{e^{ipr}}{2\pi} dr dp \quad (123.3)$$

$$= \int_0^\infty \int E(t - nd - r) \alpha^{s_n} e^{-\alpha(r)} \frac{e^{ipr}}{2\pi} \left[ \int_0^\infty s e^{-ips} ds \right]^n dr dp \quad (124.3)$$

عبارت  $p$  در جمله‌ی نهایی باید حتماً باید قسمت موهومی منفی داشته باشد تا انتگرال ما قابل تعریف باشد.

$$= \int_{-}^{\infty} \int E(t - nd - r) \alpha^{\gamma n} e^{-\alpha r} \frac{e^{ipr}}{\gamma \pi} (-p^{-\gamma})^n dp dr \quad (125.3)$$

به کمک حساب مانده‌ها می‌دانیم که حاصل قسمت  $p$  انتگرال برابر مشتق  $1 - \gamma n$  ام از انتگرال ده آن است.

$$= (-1)^n \int_{-}^{\infty} E(t - nd - r) \alpha^{\gamma n} e^{-\alpha r} \frac{\gamma \pi}{\gamma \pi (\gamma n - 1)!} i \cdot \frac{\partial^{\gamma n - 1} e^{ipr}}{\partial p^{\gamma n - 1}} \Big|_{p=0} dr \quad (126.3)$$

$$= \frac{(-1)^n}{(\gamma n - 1)!} \int_{-}^{\infty} E(t - nd - r) \alpha^{\gamma n} e^{-\alpha r} i \cdot (ir)^{\gamma n - 1} dr \quad (127.3)$$

$$= \frac{1}{(\gamma n - 1)!} \int_{-}^{\infty} E(t - nd - r) \alpha^{\gamma n} e^{-\alpha r} r^{\gamma n - 1} dr \quad (128.3)$$

$$(129.3)$$

همان‌طور که پیشتر گفته بودیم؛ تنها قسمتی از بازه‌ی انتگرال‌گیری ما مربوط به قسمت پویایی است و باید حساب آن را از قسمت قیدی جدا کنیم. این قسمت در بازه‌ی  $0 < r < t - nd$  وجود دارد.

$$= \frac{1}{(\gamma n - 1)!} \int_{t-nd}^{\infty} E(t - nd - r) \alpha^{\gamma n} e^{-\alpha r} r^{\gamma n - 1} dr + \frac{1}{(\gamma n - 1)!} \int_{-}^{t-nd} E(t - nd - r) \alpha^{\gamma n} e^{-\alpha r} r^{\gamma n - 1} dr \quad (130.3)$$

میدان را در زمان‌های مقید می‌دانیم. از روی آن می‌توانیم میدان در گام اول را نیز محاسبه کنیم.

$$= \frac{1}{(\gamma n - 1)!} \int_{t-nd}^{\infty} (E_{+} + \epsilon) \alpha^{\gamma n} e^{-\alpha r} r^{\gamma n - 1} dr + \frac{1}{(\gamma n - 1)!} \int_{-}^{t-nd} (E_{-} - g\epsilon/\gamma \pi) \alpha^{\gamma n} e^{-\alpha r} r^{\gamma n - 1} dr \quad (131.3)$$

$$= \frac{1}{(\gamma n - 1)!} (E_{+} + \epsilon) \int_{-}^{\infty} \alpha^{\gamma n} e^{-\alpha r} r^{\gamma n - 1} dr + \frac{1}{(\gamma n - 1)!} (-\epsilon - g\epsilon/\gamma \pi) \int_{-}^{t-nd} \alpha^{\gamma n} e^{-\alpha r} r^{\gamma n - 1} dr \quad (132.3)$$

اگر بازه‌ی انتگرال اول از صفر شروع می‌شد؛ آنگاه می‌توانستیم آن را تبدیل به تابع گاما کنیم. اگر چه صورت کنونی آن به این شکل نیست اما می‌توانیم با اضافه کردن ادامه‌ی بازه به انتگرال و کم کردن آن از انتگرال دیگر، خواسته‌ی خود را برآورده کنیم.

$$= \frac{1}{(\gamma n - 1)!} (E_{+} + \epsilon) (\gamma n - 1)! + \frac{1}{(\gamma n - 1)!} (-\epsilon - g\epsilon/\gamma \pi) \int_{-}^{t-nd} \alpha^{\gamma n} e^{-\alpha r} r^{\gamma n - 1} dr \quad (133.3)$$

$$= (E_{+} + \epsilon) + \frac{1}{(\gamma n - 1)!} (-\epsilon - g\epsilon/\gamma \pi) \gamma(\gamma n, \alpha(t - nd)) \quad (134.3)$$



حال که جمله‌ی درخواستی خود را محاسبه کردیم؛ آن را در کنار جملات قبلی قرار می‌دهیم تا در نهایت برای میدان داشته باشیم:

$$E(t) = \mathcal{K}_{a,g}(t) \quad (۱۳۵.۳)$$

$$+ \left(\frac{-g}{\sqrt{\pi}}\right)^n (E. + \epsilon) \quad (۱۳۶.۳)$$

$$+ \left(\frac{-g}{\sqrt{\pi}}\right)^n \frac{1}{(2n-1)!} (-\epsilon - g\epsilon/\sqrt{\pi}) \gamma(2n, \alpha(t-nd)) \quad (۱۳۷.۳)$$

$$= \mathcal{K}_{a,g}(t) \quad (۱۳۸.۳)$$

$$+ \left(\frac{-g}{\sqrt{\pi}}\right)^n (E. + \epsilon) \quad (۱۳۹.۳)$$

$$+ \left(\frac{-g}{\sqrt{\pi}}\right)^n (-\epsilon - g\epsilon/\sqrt{\pi}) \frac{\gamma(2n, \alpha(t-nd))}{(2n-1)!} \quad (۱۴۰.۳)$$

$$= \mathcal{K}_{a,g}(t) \quad (۱۴۱.۳)$$

$$+ \left(\frac{-g}{\sqrt{\pi}}\right)^{\lfloor t/d \rfloor + 1} (E. + \epsilon) \quad (۱۴۲.۳)$$

$$+ \left(\frac{-g}{\sqrt{\pi}}\right)^{\lfloor t/d \rfloor + 1} (-\epsilon - g\epsilon/\sqrt{\pi}) \frac{\gamma(2\lfloor t/d \rfloor, \alpha d(t/d - \lfloor t/d \rfloor))}{(2n-1)!} \quad (۱۴۳.۳)$$

$$= E. + \left(\frac{-g}{\sqrt{\pi}}\right)^{\lfloor t/d \rfloor + 1} \cdot \epsilon \quad (۱۴۴.۳)$$

$$+ \left(\frac{-g}{\sqrt{\pi}}\right)^{\lfloor t/d \rfloor + 1} (-\epsilon - g\epsilon/\sqrt{\pi}) \frac{\gamma(2\lfloor t/d \rfloor, \alpha d(t/d - \lfloor t/d \rfloor))}{(2n-1)!} \quad (۱۴۵.۳)$$

$$(۱۴۶.۳)$$

نتیجه‌ی بدست آمده شامل نکات قابل توجهی است و تا حدودی با شواهد بدست آمده از شبیه‌سازی سازگاری دارد.

۱. در گام‌های مضرب  $d$ ، تابع گامای ناقص ما به صورت  $\gamma(2n, \bullet) = \bullet$  درمی‌آید. این باعث می‌شود که فارغ از باریک یا تیزه بودن تیزه‌های ما میدان در این لحظات مطابق عبارت زیر باشد:

$$= \frac{a}{\sqrt{\pi}} \left[ 1 - \frac{g}{\sqrt{\pi}} + \left(\frac{g}{\sqrt{\pi}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{-g}{\sqrt{\pi}}\right)^{\lfloor t/d \rfloor - 1} \right] + \left(\frac{g}{\sqrt{\pi}}\right)^{\lfloor t/d \rfloor} (E. + \epsilon) \quad (۱۴۷.۳)$$

۲. این عبارت با معادلاتی که برای تیزه‌های باریک بدست آوردیم سازگاری دارد. زیرا اگر کمیت  $\alpha$  را به بینهایت میل دهیم؛ بیشینه‌ی تابع گامای ناقص ما به صورت  $\gamma(2n, \infty) = (2n-1)!$  درمی‌آید. در این حالت میدان نهایی عبارتی شبیه توصیف کننده‌ی سامانه‌ی تیزه‌های باریک می‌دهد.

$$= \frac{a}{\sqrt{\pi}} \left[ 1 - \frac{g}{\sqrt{\pi}} + \left(\frac{g}{\sqrt{\pi}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{-g}{\sqrt{\pi}}\right)^{\lfloor t/d \rfloor - 1} \right] + \left(\frac{g}{\sqrt{\pi}}\right)^{\lfloor t/d \rfloor} (E. - g\epsilon/\sqrt{\pi}) \quad (۱۴۸.۳)$$

خیالش (مشکل) از کفم نمی‌رود.

متأسفانه مشکل همچنان پابرجاست. پس از تلاش‌های بسیار و زیرورو کردن راه‌حل مشکلات زیادی از میان آن بیرون کشیده شد. هر چند در ابتدا بنظر می‌آمد خودسازگار و جامع باشد. مسئله‌ی مهم آن است که ما بی‌مهابا هر دم میدان را درون خود جاگذاری می‌کنیم. گذشته از این که این کار به ازای تمامی زمان‌های شبیه‌سازی صحیح نیست. همواره وقتی میدان در زمان‌های منفی سیر می‌کند؛ باید حالت مقید را جاگذاری کنیم. این اتفاق در هر مرحله از بازنویسی انتگرال بر حسب گام‌های قبلی رخ می‌دهد. پس قاعدتا هر مرحله باید انتگرال خود را به درستی تفکیک کنیم و فقط برای زمان‌های مثبت خود میدان را بر حسب خود بازنویسی کنیم.

این بار بگذارید که به جای عبارت  $a/2\pi$  و  $g/2\pi$  بگذاریم:  $\hat{g}, \hat{a}$

$$E = E. + \epsilon \quad (t < \cdot) \quad (149.3)$$

$$E(t) = \hat{a} - \hat{g} \int_{\cdot}^{\infty} ds_{\setminus} E(t - d - s_{\setminus}) \alpha^{\setminus} s_{\setminus} e^{-\alpha s_{\setminus}} \quad (150.3)$$

$$= \hat{a} - \hat{g} \int_{t-d}^{\infty} ds_{\setminus} E(t - d - s_{\setminus}) \alpha^{\setminus} s_{\setminus} e^{-\alpha s_{\setminus}} \quad (151.3)$$

$$- \hat{g} \int_{\cdot}^{t-d} ds_{\setminus} E(t - d - s_{\setminus}) \alpha^{\setminus} s_{\setminus} e^{-\alpha s_{\setminus}} \quad (152.3)$$

$$= \hat{a} - \hat{g} \int_{t-d}^{\infty} ds_{\setminus} (E. + \epsilon) \alpha^{\setminus} s_{\setminus} e^{-\alpha s_{\setminus}} \quad (153.3)$$

$$- \hat{g} \int_{\cdot}^{t-d} ds_{\setminus} (\hat{a} - \hat{g} \int_{\cdot}^{\infty} ds_{\setminus} E(t - \setminus d - s_{\setminus} - s_{\setminus}) \alpha^{\setminus} s_{\setminus} e^{-\alpha s_{\setminus}}) \alpha^{\setminus} s_{\setminus} e^{-\alpha s_{\setminus}} \quad (154.3)$$

$$= \hat{a} - \hat{g} \int_{t-d}^{\infty} ds_{\setminus} (E. + \epsilon) \alpha^{\setminus} s_{\setminus} e^{-\alpha s_{\setminus}} \quad (155.3)$$

$$- \hat{g} \hat{a} \int_{\cdot}^{t-d} ds_{\setminus} \alpha^{\setminus} s_{\setminus} e^{-\alpha s_{\setminus}} \quad (156.3)$$

$$- \hat{g} \int_{\cdot}^{t-d} \int_{\cdot}^{\infty} ds_{\setminus} ds_{\setminus} E(t - \setminus d - s_{\setminus} - s_{\setminus}) \alpha^{\setminus} s_{\setminus} e^{-\alpha s_{\setminus}} \alpha^{\setminus} s_{\setminus} e^{-\alpha s_{\setminus}} \quad (157.3)$$

$$= \hat{a} - \hat{g} \int_{t-d}^{\infty} ds_{\setminus} (E. + \epsilon) \alpha^{\setminus} s_{\setminus} e^{-\alpha s_{\setminus}} \quad (158.3)$$

$$- \hat{g} \hat{a} \int_{\cdot}^{t-d} ds_{\setminus} \alpha^{\setminus} s_{\setminus} e^{-\alpha s_{\setminus}} \quad (159.3)$$

$$+ (-\hat{g})^{\setminus} \int_{\cdot}^{t-d} \int_{t-\setminus d-s_{\setminus}}^{\infty} ds_{\setminus} ds_{\setminus} E(t - \setminus d - s_{\setminus} - s_{\setminus}) \alpha^{\setminus} s_{\setminus} e^{-\alpha s_{\setminus}} \alpha^{\setminus} s_{\setminus} e^{-\alpha s_{\setminus}} \quad (160.3)$$

$$+ (-\hat{g})^{\setminus} \int_{\cdot}^{t-d} \int_{\cdot}^{t-\setminus d-s_{\setminus}} ds_{\setminus} ds_{\setminus} E(t - \setminus d - s_{\setminus} - s_{\setminus}) \alpha^{\setminus} s_{\setminus} e^{-\alpha s_{\setminus}} \alpha^{\setminus} s_{\setminus} e^{-\alpha s_{\setminus}} \quad (161.3)$$

$$= \hat{a} - \hat{g} \int_{t-d}^{\infty} ds_{\setminus} (E. + \epsilon) \alpha^{\setminus} s_{\setminus} e^{-\alpha s_{\setminus}} \quad (162.3)$$

$$- \hat{g} \hat{a} \int_{\cdot}^{t-d} ds_{\setminus} \alpha^{\setminus} s_{\setminus} e^{-\alpha s_{\setminus}} \quad (163.3)$$

$$+ (-\hat{g})^{\setminus} \int_{\cdot}^{t-d} \int_{t-\setminus d-s_{\setminus}}^{\infty} ds_{\setminus} ds_{\setminus} (E. + \epsilon) \alpha^{\setminus} s_{\setminus} e^{-\alpha s_{\setminus}} \alpha^{\setminus} s_{\setminus} e^{-\alpha s_{\setminus}} \quad (164.3)$$

$$+ (-\hat{g})^{\setminus} \int_{\cdot}^{t-d} \int_{\cdot}^{t-\setminus d-s_{\setminus}} ds_{\setminus} ds_{\setminus} E(t - \setminus d - s_{\setminus} - s_{\setminus}) \alpha^{\setminus} s_{\setminus} e^{-\alpha s_{\setminus}} \alpha^{\setminus} s_{\setminus} e^{-\alpha s_{\setminus}} \quad (165.3)$$

با ادامه‌ی این روند زنجیروار می‌توانیم حدس بزنیم که خانواده‌ای از جمع جملات متفاوت خواهیم داشت که به صورت زیر قابل نوشتن هستند:

$$E(t) = \hat{a} + \hat{a} \sum_{i=1}^{n-1} (-\hat{g})^i \int_{\cdot}^{t-d} \int_{\cdot}^{t-2d-s_1} \int_{\cdot}^{t-3d-s_1-s_2} \dots \int_{\cdot}^{t-id-s_1-\dots-s_{i-1}} \Pi_j^i \alpha^j s_j e^{-\alpha s_j} ds_j \quad (166.3)$$

$$+ (E. + \epsilon) \sum_{i=1}^n (-\hat{g})^i \int_{\cdot}^{t-d} \int_{\cdot}^{t-2d-s_1} \int_{\cdot}^{t-3d-s_1-s_2} \dots \int_{t-id-s_1-\dots-s_{i-1}}^{\infty} \Pi_j^i \alpha^j s_j e^{-\alpha s_j} ds_j \quad (167.3)$$

$$+ (E. - \epsilon \hat{g})(-\hat{g})^n \int_{\cdot}^{t-d} \int_{\cdot}^{t-2d-s_1} \int_{\cdot}^{t-3d-s_1-s_2} \dots \int_{\cdot}^{t-nd-s_1-\dots-s_{n-1}} \Pi_j^n \alpha^j s_j e^{-\alpha s_j} ds_j \quad (168.3)$$

$$= \hat{a} \sum_{i=\cdot}^{n-1} (-\hat{g})^i \int_{\cdot}^{t-d} \int_{\cdot}^{t-2d-s_1} \int_{\cdot}^{t-3d-s_1-s_2} \dots \int_{\cdot}^{t-id-s_1-\dots-s_{i-1}} \Pi_j^i \alpha^j s_j e^{-\alpha s_j} ds_j \quad (169.3)$$

$$(E. + \epsilon) \sum_{i=1}^n (-\hat{g})^i \int_{\cdot}^{t-d} \int_{\cdot}^{t-2d-s_1} \int_{\cdot}^{t-3d-s_1-s_2} \dots \int_{\cdot}^{t-id-s_1-\dots-s_{i-1}} \left(1 - \int_{\cdot}^{t-id-s_1-\dots-s_{i-1}} \Pi_j^i \alpha^j s_j e^{-\alpha s_j} ds_j\right) \quad (170.3)$$

$$+ (E. - \epsilon \hat{g})(-\hat{g})^n \int_{\cdot}^{t-d} \int_{\cdot}^{t-2d-s_1} \int_{\cdot}^{t-3d-s_1-s_2} \dots \int_{\cdot}^{t-nd-s_1-\dots-s_{n-1}} \Pi_j^n \alpha^j s_j e^{-\alpha s_j} ds_j \quad (171.3)$$

$$= \hat{a} \sum_{i=\cdot}^{n-1} (-\hat{g})^i I_i \quad (172.3)$$

$$+ (E. + \epsilon) \sum_{i=1}^n (-\hat{g})^i [I_{i-1} - I_i] \quad (173.3)$$

$$+ (E. - \epsilon \hat{g})(-\hat{g})^n I_n \quad (174.3)$$

$$= E. - \epsilon g + \sum_{i=1}^n -(-g)^i \cdot \epsilon(1 + g) I_i \quad (175.3)$$

که در آن عبارت  $I_n$  برابر است با:

$$I_n = \int_0^{t-d} \int_0^{t-2d-s_1} \int_0^{t-2d-s_1-s_2} \dots \int_0^{t-nd-s_1-\dots-s_{n-1}} \prod_j^n \alpha^{\gamma} s_j e^{-\alpha s_j} ds_j \quad (176.3)$$

### نقطه‌ی گذر فاز پیشنهادی

این محاسبات باید بتوانند نقطه‌ی گذر فاز را پیش‌بینی کنند. برای این منظور اجازه دهید تا بررسی کنیم که روند فراز و فرود میدان به چه صورت تغییر می‌کند و هر مرحله اندازه‌ی جمله‌ای که به سری اضافه می‌شود چیست. پس تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{G}_n := \tilde{E}_n - \tilde{E}_{n-1} \quad (177.3)$$

پس بررسی می‌کنیم:

$$T_{n+1} = \frac{|\tilde{G}_{n+1}|}{|\tilde{G}_n|} = \left| -\hat{g} \cdot \frac{I_{n+1}}{I_n} \right| \quad (178.3)$$

حال همه چیز به نسبت بدست آمده در رابطه‌ی ۱۷۸.۳ دارد. اگر این نسبت بزرگتر از یک باشد؛ آنگاه همگامی اتفاق می‌افتد و اگر کوچکتر از یک بشود ناهمگامی داریم. پیش از ادامه شایان ذکر است که در مرحله‌ای که تیزه‌ها بسیار باریک هستند؛ همه‌ی عبارات  $I_n$  برابر یک هستند و نسبت تصاعد بدست آمده در رابطه‌ی ۱۷۸.۳ همان  $g$  خواهد شد که در قسمت‌های پیشین محاسبه کردیم. پس این نتیجه‌ی ما با نتایج قبلی همخوانی بسیار خوبی دارد.

حال ادامه می‌دهیم و می‌پرسیم که رفتار عبارت‌های  $I_n$  به چگونه است و آیا قادر هستند که نقطه‌ی گذر فاز را جابجا کنند یا خیر. همان‌طور که در رابطه‌ی ۱۷۶.۳ دیدیم؛ محاسبه‌ی این انتگرال‌ها بسیار دشوار است اما می‌توانیم به محاسبه‌ی چند جمله‌ی اول  $T_n$  بسنده کنیم.

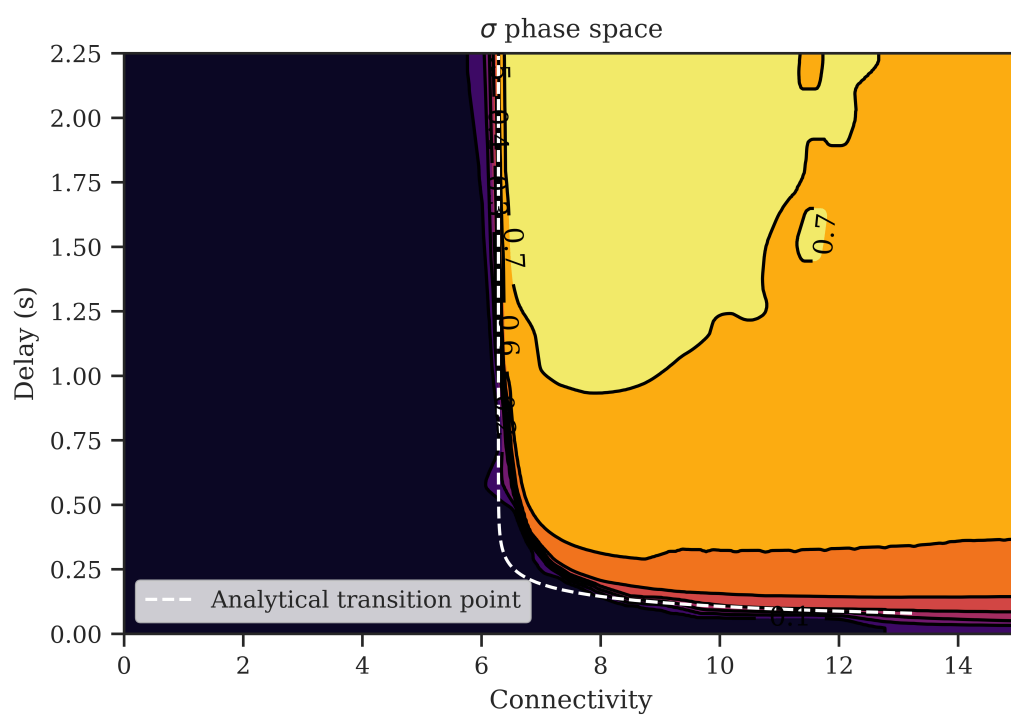
$$T_1 = \hat{g} \cdot \frac{I_1}{I_0} = \hat{g} \gamma(2, \alpha d) \quad (179.3)$$

$$T_2 = \hat{g} \cdot \frac{I_2}{I_1} = \hat{g} \cdot \frac{\int_0^d \gamma(2, 2\alpha(d-s_1)) \alpha^2 s_1 e^{-\alpha s_1} ds_1}{\gamma(2, \alpha d)} \quad (180.3)$$

$$= \hat{g} \cdot \frac{1 - e^{-\alpha d}((\alpha d)^3 + 3(\alpha d)^2 + 6(\alpha d) + 6)/6}{\gamma(2, \alpha d)} \quad (181.3)$$

### همخوانی با هم‌گامی

موفق شدیم تا میدان را به تقریب محاسبه کنیم و این موفقیت بزرگی است که پس از چندین بار تلاش بدست آمد. اگر چه لازم است تا کیفیت این تقریب را به کمک تطبیق با نمودار محاسباتی بررسی کنیم.



شکل (۵.۳) مقایسه‌ی نقطه‌ی گذر فاز محاسبه شده و داده‌های شبیه‌سازی

## کتاب نامه

- [1] Luccioli, Stefano and Politi, Antonio. Irregular collective behavior of heterogeneous neural networks. *Phys. Rev. Lett.*, 105:158104, Oct 2010. [5](#), [7](#)