دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده‌ی فیزیک

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد
سامانه‌های پیچیده

عنوان:

مطالعه همگامی در شبکه‌های عصبی مهاری

نگارش:

محسن مهرانی اردبیلی

استاد راهنما:

استاد سامان مقیمی عراقی

شهریور ۱۴۰۱

اظهارنامه

(اصالت متن و محتوای پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد)

عنوان پایان‌نامه: مطالعه همگامی در شبکه‌های عصبی مهاری

نام استاد راهنما: سامان نقبی عراقی نام استاد راهنمای همکار: ..... نام استاد مشاور: .....

این‌جانب محسن مهرانی اردبیلی اظهار می‌دارم:

۱- متن و نتایج علمی ارائه شده در این پایان‌نامه اصیل بوده و منحصراً توسط این‌جانب و زیرنظر استادان (راهنما، همکار و مشاور) نام‌برده شده در بالا تهیه شده است.

۲- متن پایان‌نامه به این صورت در هیچ جای دیگری منتشر نشده است.

۳- متن و نتایج مندرج در این پایان‌نامه، حاصل تحقیقات این‌جانب به عنوان دانشجوی کارشناسی‌ارشد دانشگاه صنعتی شریف است.

۴- کلیه مطالبی که از منابع دیگر در این پایان‌نامه مورد استفاده قرار گرفته، با ذکر مرجع مشخص شده است.

نام دانشجو: محسن مهرانی اردبیلی

تاریخ ۱۴۰۱/۶/۱۳

امضا

نتایج تحقیقات مندرج در این پایان‌نامه و دستاوردهای مادی و معنوی ناشی از آن (شامل فرمول‌ها، توابع کتابخانه‌ای، نرم‌افزارها، سخت‌افزارها و مواردی که قابلیت ثبت اختراع دارد) متعلق به دانشگاه صنعتی شریف است. هیچ شخصیت حقیقی یا حقوقی بدون کسب اجازه از دانشگاه صنعتی شریف حق فروش و ادعای مالکیت مادی یا معنوی بر آن یا ثبت اختراع از آن را ندارد. همچنین کلیه حقوق مربوط به چاپ، تکثیر، نسخه‌برداری، ترجمه، اقتباس و نظائر آن در محیط‌های مختلف اعم از الکترونیکی، مجازی یا فیزیکی برای دانشگاه صنعتی شریف محفوظ است. نقل مطالب با ذکر ماخذ بلامانع است.

نام استادان راهنما: ..... نام دانشجو: محسن مهرانی اردبیلی

تاریخ تاریخ

امضا امضا

۱۴۰۱/۶/۱۳

بسم الله الرحمن الرحیم

به نام خدا

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده‌ی فیزیک

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد

عنوان: مطالعه همگامی در شبکه‌های عصبی مهاری

نگارش: محسن مهرانی اردبیلی

کمیته‌ی ممتحنین

استاد راهنما: استاد سامان مقیمی امضاء:

عراقی

استاد مشاور: استاد مشاور امضاء:

استاد مدعو: استاد ممتحن امضاء:

تاریخ:

چکیده

پس از صده‌ها که انسان همیشه ناظر و دانای پدیده‌های در طبیعت بود؛ ظهور چارچوب جدیدی از مسائل با عنوان «علوم اعصاب» ، کارکرد «ذهن» او را نیز تبدیل به پدیده‌ای برای مطالعه کرد. از زمان تولد این علم تا کنون دانشمندان زیادی پدیده‌هایی همچون تفکر [۱] ، خواب [۲] و بیماری‌های حافظه [۳] را با کارکرد سلول‌های عصبی توصیف کرده‌اند. یکی از مهم‌ترین شاخه‌های این علم بررسی مسئله‌ی «هم‌گامی» است. زمانی که کارکرد سلول‌های عصبی با یکدیگر هم‌زمانی و یا هماهنگی پیدا می‌کنند. وجود همگامی باعث بیماری‌هایی مانند صرع می‌شود [۴، ۵، ۶] و برای همین شناخت این که چه چیزهایی باعث همگامی‌می‌شوند مهم است. علاوه بر این به نظر می‌رسد که مغز در نقطه‌ی بحرانی قرار دارد [۷، ۸، ۹] و یکی از پیشنهادها این است که در مرز گذر همگامی به ناهمگامی قرار دارد. به این ترتیب شناخت گذر فاز همگامی به ناهمگامی بسیار مهم است. مدلسازی‌های بسیاری برای توجیه این گذار ارائه شده است. [۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴] ما در جستار خود یکی از این مدل‌ها را به صورت تحلیلی و عددی بررسی کرده‌ایم، مدلی که مبتنی است بر ورودی ناهمگون نورون‌ها. با مشاهده‌ی پدیده‌ی هم‌گامی در شبکه‌های مختلف، نشان داده‌ایم که این گذار فاز تا حدودی مستقل از نوع مدل تک نورونی است و در مدل‌های ساده‌تری نیز رخ می‌دهد. همچنین نشان داده‌ایم که این هم‌گامی از جنس قفل‌شدگی سرعت‌هاست. به این معنی که در فاز هم‌گامی همه‌ی نورون‌ها به سمت آستانه‌ی تیزه هم‌سو و هم‌سرعت سوق پیدا می‌کنند. حل‌های عددی نتایج تحلیلی ما را تایید می‌کنند.

کلیدواژه‌ها: سلول عصبی، هم‌گامی، صرع، شبیه‌سازی

تشکر

سپاسگزارم از خداوند متعال تا توفیق داد که این فصل از زندگی من در تحصیل و پژوهش رقم بخورد. از او به خاطر حضور پدرومادر نازنینم تشکر می‌کنم که آن‌ها همواره در این مسیر تکیه‌گاه و پشتیبان من بودند.

تشکر می‌کنم از استاد بزرگوارم که همراهی، دلسوزی و تواضع او هم تسهیل بخش مسیر بود و هم سرمشق ادامه‌ی راهم. از او بسیار آموختم و تنها گوشه‌ای از آن را می‌توانم در این نامه بازگو کنم. همچنین تشکر می‌کنم از دوستان پرمهرم آقای امیرمحمد نادری، مهدی نقی‌لو و نویدعلی‌اکبریان که زحمت خواندن و بررسی این پایان‌نامه را کشیدند.

فهرست مطالب

۰ سخن نویسنده ۱۳

۱ پیشگفتار: فیزیک، علوم اعصاب و مدل‌سازی ۱۹

۱-۱ علوم اعصاب به مثابه‌ی ساختار ۱۹

۱-۲ کارکرد سالم ۲۱

۱-۳ صرع ۲۲

۱-۴ لزوم شبیه‌سازی ۲۴

۱-۵ انواعی از مدل‌های نورونی ۲۴

۱-۵-۱ انباشت‌وشلیک ۲۵

۱-۵-۲ چرخنده ۲۶

۱-۶ فاز یا حالت سامانه‌ی نورونی ۲۸

۱-۷ پیکربندی جستار این نامه ۲۹

۲ شبکه انباشت و شلیک ۳۱

۲-۱ آهنگ تیزه زدن ۳۲

۲-۲ نشانگر تشخیص فاز هم‌گامی ۳۳

۲-۳ مسائل پیشروی پیاده سازی شبیه سازی ۳۳

۲-۳-۱ تابع بی‌کران دلتا ۳۳
۲-۳-۲ ثبت تاریخ تیزه زدن‌ها ۳۴
۲-۴ نتایج ۳۵
۲-۴-۱ انحراف از معیار میدان ۳۵
۲-۴-۲ نورون‌های خاموش ۳۵
۲-۴-۳ توزیع تناوب زمانی تیزه‌ها ۳۷
۲-۴-۴ پهن‌کردن قالی صفحه‌ی فاز ۳۷
۲-۴-۵ امکانی برای توصیف تحلیلی؟ ۳۸

۳ شبکه‌ی نورون‌های چرخنده ۳۹
۳-۱ آهنگ تیزه زدن ۴۰
۳-۲ نشانگر توسعه یافته‌ی تشخیص همگامی ۴۱
۳-۳ شبیه‌سازی ۴۱
۳-۴ نتایج ۴۲
۳-۴-۱ در جستجوی تغییرفاز ۴۲
۳-۴-۲ فاصله زمانی بین تیزه‌ها ۴۳
۳-۴-۳ فعالیت شبکه ۴۵
۳-۴-۴ پهن‌کردن قالی صفحه‌ی فاز ۴۷
۳-۴-۵ امکانی برای توصیف تحلیلی؟ ۴۷

۴ شبکه نورون‌های ساده ۴۹
۴-۱ شبیه‌سازی ۵۰
۴-۲ نتایج ۵۱
۴-۲-۱ در جستجوی تغییرفاز ۵۱

۵ تصویرسازی سامانه‌ها ۵۳

۵-۱ پویانمایی ۵۷

۵-۱-۱ مدل انباشت‌وشلیک ۵۷

۵-۱-۲ مدل چرخنده ۵۹

۵-۱-۳ مدل نورونی ساده ۶۲

۵-۲ جمع‌بندی ۶۳

۶ تلاش برای توصیف ۶۵

۶-۱ حل معادلهٔ شبکه‌ی ساده ۶۶

۶-۱-۱ روش بازگشتی ۶۷

۶-۱-۲ روش اختلال ۶۹

۶-۱-۳ بازی از نو(سامانه‌ی تک‌جریان) ۷۸

۶-۱-۴ از شبکه‌ی ساده به پیچیده‌تر ۹۵

۷ نتیجه‌گیری ۱۰۱

آ نمونه‌گیری صفحه فاز ۱۰۵

آ-۱ انباشت‌وشلیک ۱۰۵

آ-۲ چرخنده ۱۰۷

آ-۳ ساده ۱۰۷

آ-۴ محاسبه‌ی دوره‌ی تناوب نورون‌های چرخنده ۱۰۷

فهرست شکل‌ها

۱-۱ مقاله‌ی اندرسون در سال ۱۹۷۲ که آغازگر جهان‌بینی جدیدی در حل مسائل پیچیده بود. ۲۰

۱-۲ تفکیک بخش‌های مختلف مغز بر حسب کنترل اعضای بدن [۱۵] ۲۲

۱-۳ سرایت هم‌گامی از کانون آن به ناحیه‌های همسایه [۱۶] محور عمودی در شکل بالا نمایش دهنده‌ی شمارنده‌های گیرنده‌هایی است که سیگنال‌های دریافتی از ناحیه‌های مختلف مغز را ضبط کرده‌اند. در این شکل به وضوح می‌بینیم که پس گذشت ۱۰ ثانیه از شروع فعالیت کانون صرع، بقیه بقیه نواحی هم شروع به تشدید می‌کند و پس از گذشت ۸۰ ثانیه حمله‌ی صرع متوقف می‌شود. ۲۳

۱-۴ آزمایش جعبه‌ی سیاه - در این آزمایش بررسی می‌شود که آیا مدل یا برنامه‌ی ارائه شده توانسته است که با توجه به ورودی‌ها خروجی‌های مورد انتظار را بازتولید کند یا خیر. ۲۵

۱-۵ نمونه‌ای از تیزه‌های تک نورونی با مدل انباشت‌وشلیک که به جریان خارجی ۱/۲ متصل شده است. ۲۶

۱-۶ . . . . . ۲۷

۱-۷ نمونه‌ای از تیزه‌های تک نورونی با مدل چرخنده که به جریان خارجی ۱۳/۵ متصل شده است. ۲۷

۲-۳ تعداد تیزه بر حسب جریان تصادفی برای سامانه‌ای با ده هزار نورون و ضریب تاثیر $g = ۵۰$ ۴۵

۵-۱ تصویر فضای فاز سامانه نورونی انباشت‌وشلیک ۵۳

۵-۲ . . . . . ۵۷

۵-۳ نمایی از پویایی سامانه‌ی نورونی انباشت‌وشلیک در نقطه‌ی A - این پویانمایی پس گذشت ۲۰۰ ثانیه از تاریخچه‌ی سامانه انجام شده است. شرایط اولیه به گونه‌ای است که نورون‌ها با توزیع یکنواخت در صفحه‌ی فاز پراکنده شده‌اند.*دقت کنیم که محور زمان نمودار E، نشان دهنده‌ی اتفاقات ۰/۸ ثانیه‌ی گذشته است و نه از ابتدای سامانه. ۶۰

۵-۴ نمایی از پویایی سامانه‌ی نورونی چرخنده در نقطه‌ی A - این پویانمایی پس گذشت ۲۰۰ ثانیه از تاریخچه‌ی سامانه انجام شده است. شرایط اولیه به گونه‌ای است که نورون‌ها با توزیع یکنواخت در صفحه‌ی فاز پراکنده شده‌اند. ۶۱

۵-۵ نمایی از پویایی سامانه‌ی نورونی ساده در نقطه‌ی A - این پویانمایی پس گذشت ۲۰۰ ثانیه از تاریخچه‌ی سامانه انجام شده است. شرایط اولیه به گونه‌ای است که نورون‌ها با توزیع یکنواخت در صفحه‌ی فاز پراکنده شده‌اند. ۶۴

۶-۱ تطابق جریان پایای به دست آمده از حل عددی و تحلیلی ۷۴

۶-۲ تحول میدان سامانه‌ای تک‌جریان و با تیزه‌های پهن از اخنلالی کوچک از حالت پایا (شکل اشتباه است) ۸۱

۶-۳ مشخصه‌ی نظم سامانه ده هزار نورونی تک‌جریان ۸۳

۶-۴ . . . . . ۸۴

۶-۵ مقایسه‌ی نقطه‌ی گذرفاز محاسبه شده و داده‌های شبیه‌سازی ۹۶

۶-۶ تطبیق شبیه‌سازی عددی با رابطه‌ی تحلیلی ۶-۲۰۶ . . . . . ۹۹

آ-۱ نقاطی از صفحه فاز که از آن‌ها داده‌گیری انجام شده است به رنگ سفید درآمده‌اند. . ۱۰۶

آ-۲ نقاطی از صفحه فاز که از آن‌ها داده‌گیری انجام شده است به رنگ سفید درآمده‌اند. ۱۰۷

آ-۳ نقاطی از صفحه فاز که از آن‌ها داده‌گیری انجام شده است به رنگ سفید درآمده‌اند. . ۱۰۸

فصل ۰

سخن نویسنده

به یاری خداوند برگی دیگر از داستان زندگی من در دانشگاه شریف ورق خورد. پس از انتظار بسیار و دوران طولانی کارشناسی و ارشد، بالاخره زمانی رسید که اثری کوچک با نام خودم در دنیای بی‌انتهای علم برجای بگذارم. برای تمام فیزیک‌پیشگان و متخصصان علمی کاملا واضح و ملموس است که این مسیر همواره پر از رنج، سختی و لذت است. حال که به این نقطه رسیده‌ام تا نامه‌ای را در پایان به جامعه علمی تقدیم کنم؛ دریغ است که از سختی‌های مسیر ننویسم. از راهی که هر متخصص و پیشگام علمی باید تجربه کند.

به همین خاطر می‌خواهم پایان‌نامه‌ام را به شیوه‌ی داستانی نگارش کنم. این نامه، نه تنها شامل نتایج پژوهش استاد ارجمندم «سامان مقیمی عراقی» و من است بلکه شامل راه‌های بن‌بستی نیز هست که در این دوسال به آن برخوردیم. بعضا شامل حدس‌هایی است که در ابتدا زدیم و صحیح نبودند. شامل مکاتباتی است که بین من و استادم صورت می‌گرفت.

مایل هستم تا از آن بن‌بست‌ها هم بنویسم هر چند که نگارش آن‌ها نیازمند متحمل شدن سختی دیگری است. پس این نامه را نه تنها ارزشمند می‌دانم به خاطر مطالب علمی آن؛ بلکه یک روایت و رمانی است از مسیری که یک دانشجوی ارشد باید در دوران تحصیل خود تجربه کند. هم شامل مقصد است و هم از راه روایت می‌کند.

شروع داستان

در ابتدای تابستان پیش از شروع دوره‌ی ارشد؛ از برنامه‌نویسی رایانه‌های کوانتومی خبردار شدم. اگر این پردازنده‌ها از پایه، طریق محاسبه‌ی متفاوتی دارند؛ پس باید برنامه‌نویسی آن‌ها نیز تفاوت کند. این یعنی در دهه‌های پیشرو دیگر خبری از برنامه‌نویسی کلاسیکی نخواهد بود. این رایانه‌ها ساخته شده‌اند تا محاسبات پیچیده را با الگوریتم‌هایی حل کنند تا مرتبه‌ی زمان لازم برای حل آن‌ها به طریق خیره کننده‌ای کاسته شود.

پس این ایده در ذهن من متبلور شد که آیا این فناوری می‌تواند در حل مسائلی که آن‌ها را پیچیده می‌نامیم هم کاربرد داشته باشد یا خیر. آیا آینده‌ی این دو گرایش به یک دیگر گره خواهد خورد؟ شروع کردم به پرسش از اساتید دانشکده و کسانی که در این دو گرایش فعال و متخصص بودند.

جملات زیر شرح متخصری از نظرات چندتن از اساتید متخصص است. این جملات نقل به مضمون هستند.

۱. دکتر صادق رئیسی: امروز در مورد معماری رایانه‌های کوانتومی تحقیق می‌کنیم و هنوز تا کاربرد مستقیم این رایانه‌ها فاصله داریم. پس از بلوغ این رایانه‌ها علی‌الاصول متخصصان این حوزه برنامه‌نویسی آن را به گرایش‌هایی همچون سامانه‌های پیچیده خواهند آموخت و علاقه‌مندی به برنامه‌نویسی کوانتومی شرط کافی برای ورود به این حوزه نیست.

۲. دکتر سامان ابوالفتح بیگی: معماری این رایانه‌ها به گونه در حال توسعه است که آن‌ها را دوگانه‌سوز [۱] پیش ببرد. پس با اضافه شدن معماری کوانتومی لزوما شیوه‌ی کار با آن‌ها متفاوت از رایانه‌های کلاسیکی نخواهد شد و این تفاوت تنها در لایه‌های محاسباتی خواهد ماند.

۳. دکتر وحیدکریمی‌پور: مطمئنا شیوه‌ی حل مسائل در عصر رایانه‌های کوانتومی تغییر خواهد کرد. اولین تفاوت مهم بین منطق این دو رایانه‌ها این است که رایانه‌های کلاسیکی «گزاره‌های شرطی» را می‌فهمند و در سمت دیگر اصلا حالت صحیح و غلط اصلا مطلق نیست وو برهم‌نهی از این دو حالت وجود دارد. پس اگر کسی می‌خواهد اصول کار با این رایانه‌های را بیاموزد باید از معماری آن‌ها نیز اطلاع داشته باشد.

[۱] هیبرید

شروع مکاتبات

پس از تمام این صحبت‌ها به این نتیجه رسیدم؛ زمانی که در آن زندگی می‌کنم هنوز فاصله‌ی زیادی با آینده‌ی ایده‌آل من دارد؛ پس تصمیم گرفتم همچنان به علاقه‌ی اول خود یعنی «سامانه‌های پیچیده» برگردم و آن را فعلا به شکل کلاسیکی دنبال کنم. از آن‌جا که رابطه‌ی بسیار خوبی با استاد سامان مقیمی داشتم و همچنین از متخصصان نامی این حوزه هستند؛ تصمیم گرفتم تا درخواست خودم را با یک نامه الکترونیکی به ایشان تقدیم کنم.

صندوق پیام‌ها

من : سلام استاد خوبین؟ سلام مجدد

می‌گم من پیرو صحبت دفعه پیشی که کردیم به این نتیجه رسیدم توی این مقطع فعلا زمان مناسبی برای پرداختن به اون مطلب نیست و باید به صورت علاقه شخصی مطالعه کنم و پیگیرش باشم تا در مقاطع دیگه با تجربه بیشتر به سمتش برم.

از حضورتون وقتی رو برای ملاقات می‌خواستم. تا اگر قابل بدونید با شما پروژه کارشناسی ارشدم رو شروع کنم.

ارادتمند شما

محسن (چهارشنبه، ۲۸ آبان ۱۳۹۹)

استاد : سلام

قابل دونستن یعنی چی. من معمولا احساسم برعکسه. اگر توانایی‌اش رو داشته باشم بتونم لذت این رو داشته باشم که همراه شما باشم. برای هفته‌ی بعد می‌تونیم هماهنگ کنیم. مثلا شنبه یک‌شنبه.

سامان مقیمی (پنجشنبه، ۲۹ آبان ۱۳۹۹)

[*پس یکشنبه شروع رسمی کار من با استاد بود.*]

نحوه‌ی ارجاع به مکاتبات

برای خواندنی کردن هر چه بیشتر این پایان‌نامه، تلاش کردم تا گوشه‌ای از مکاتباتی که با استادم داشتم را گردآوری کنم. فکر می‌کنم اشاره به آن‌چه که در پس پرده‌ی این تلاش‌ها اتفاق افتاد می‌تواند در درک هر چه بیشتر آن کمک کند و چهره‌ای واقعی‌تر از یک سخن علمی را به تصویر بکشد. پس برای تحقق این هدف پاره‌ای از متن رایانامه‌هایی را که مبادله شد؛ در میان فصول آورده‌ام. این رایانامه‌ها به با صفحاتی با رنگ متمایز به مانند صفحه‌ی قبل مشخص شده‌اند. اگر چه خواندن این جزئیات را بسیار به هم‌قطاران خود توصیه می‌کنم اما گذر کردن از آن‌ها لطمه‌ای به فهمیدن این پژوهش نمی‌زند و قابلیت رد شدن دارند.

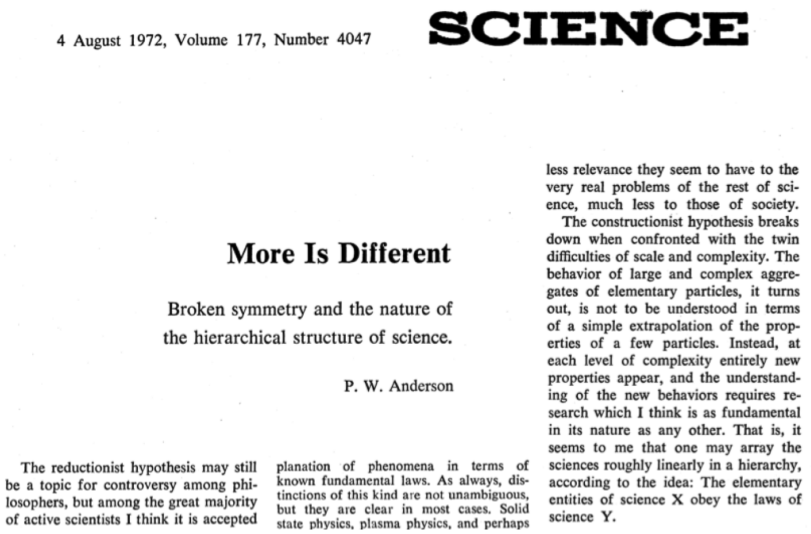
فصل ۱

پیشگفتار: فیزیک، علوم اعصاب و مدل‌سازی

۱-۱ علوم اعصاب به مثابه‌ی ساختار

مطالعه فعالیت شبکه‌های عصبی برای تحقیق و بررسی کارکردهای مغز اهمیت زیادی دارد. همه بر این باوریم که مغز محمل اندیشه و تفکر است. ما کنجکاو هستیم که چگونه همکاری بین نورون‌های آن باعث می‌شود تا حافظه، کشف و پردازش صورت گیرد. شاید در نگاه اول مطالعهٔ علوم اعصاب فقط از منظر زیست‌شناسی دارای معنا باشد اما در حقیقت مسائل علوم اعصاب چنان پیچیده و جذاب می‌نماید که توجه گستره‌ی بزرگی از علوم بنیادی از جمله فیزیک، شیمی، علوم رایانه و ... را به خود جلب کرده است. شایان ذکر است که تا کنون گرایش‌های یاد شده خدمات بزرگی را به این حیطه ارائه کرده‌اند که دستاوردهای آن‌ها قابل ملاحظه است.

از نگاه علم فیزیک، دستگاه اعصاب مغز به مانند یک سامانهٔ بس‌ذره‌ای است که هر ذرهٔ آن را واحدهای سلولی نورونی تشکیل می‌دهند. بی‌تردید فیزیکدانان تبحر خود را در مطالعهٔ سامانه‌های بس‌ذره‌ای نشان داده‌اند. یک مثال بسیار آشنا برای آن‌ها مطالعهٔ الکترون‌هاست که در میان اتم‌های فلزی نوسان می‌کنند و پدیده‌های خارق‌العاده‌ای چون رسانایی یا ابررسانایی را در کل سامانه پدیدار می‌کنند. اگر هر نورون را به مانند یک نوسانگر توصیف کنیم که میان حالت فعال [روشن] یا غیرفعال [خاموش] رفت‌وآمد می‌کند؛ آنگاه فیزیک بس‌ذره‌ای می‌تواند رفتارهای بسیاری از این سامانه را برای ما آشکار کند و چگونگی رخداد آن‌ها را با مدلسازی توضیح دهد.


4 August 1972, Volume 177, Number 4047 SCIENCE

More Is Different

Broken symmetry and the nature of the hierarchical structure of science.

P. W. Anderson

The reductionist hypothesis may still be a topic for controversy among philosophers, but among the great majority of active scientists I think it is accepted

planation of phenomena in terms of known fundamental laws. As always, distinctions of this kind are not unambiguous, but they are clear in most cases. Solid state physics, plasma physics, and perhaps

less relevance they seem to have to the very real problems of the rest of science, much less to those of society.

The constructionist hypothesis breaks down when confronted with the twin difficulties of scale and complexity. The behavior of large and complex aggregates of elementary particles, it turns out, is not to be understood in terms of a simple extrapolation of the properties of a few particles. Instead, at each level of complexity entirely new properties appear, and the understanding of the new behaviors requires research which I think is as fundamental in its nature as any other. That is, it seems to me that one may array the sciences roughly linearly in a hierarchy, according to the idea: The elementary entities of science X obey the laws of science Y.

شکل (۱-۱) مقاله‌ی اندرسون در سال ۱۹۷۲ که آغازگر جهان‌بینی جدیدی در حل مسائل پیچیده بود.

همهٔ دانشمندان حوزه‌ی علوم اعصاب بر این باور هستند که حافظه یا پردازش اطلاعات درون مغز به کمک «جمعیت» نورونی انجام می‌شود و هیچ «تک‌نورونی» به تنهایی نمی‌تواند این خواص را پدیدار کند. گواه آن که اگر بخشی از نورون‌های مغز را از جمعیت جدا کنیم؛ آنگاه مشکلات بسیاری در این فرآیندهای طلایی رخ می‌دهد. در واقع کلید فهم دقیق این رفتارها درون برهم‌کنش‌ها نهفته است و نه مطالعهٔ تک‌ذره و در مقیاس کوچک.

شاید این جملات ما را به یاد جملهٔ معروف و تاریخی فیزیکدان بزرگ اندرسون بیاندازد. او مقاله‌ی جنجالی خود را در سال ۱۹۷۲ با عنوان تاریخی «بیشتر، متفاوت است.» منتشر کرد ــ شکل ۱-۱. در واقع نقد او به جریان علمی زمان خودش آن بود که دانشمندان برای مطالعهٔ هر پدیده‌ای آن را به تکه پازل‌های کوچکتر خرد می‌کردند تا رفتار آن سامانه را توضیح دهند. او اظهار کرد که گویا سامانه‌ای که از کنار هم قرار دادن اجزای کوچک ساخته می‌شود گاه از جمع اعضا فراتر می‌رود و رفتارهایی متفاوت از خود نشان می‌دهد که درون هیچ کدام از اجزا به تنهایی قابل مطالعه نیست.

او تاکید کرد که برای مطالعهٔ برخی خواص سامانه‌های پیچیده مطالعه در مقیاس کوچک راهبردی نیست و باید کلید را در مقیاس بزرگ جستجو کرد. به عنوان مثال برای مطالعهٔ طوفان، تشریح مولکول

آب روشنگر نیست و باید همهٔ جمعیت مولکول‌های آب را در کنار یکدیگر مطالعه کنیم. او جهان‌بینی جدیدی را با نام «پیچیده» [۱] برای دسته‌ای از مسائل سامانه‌های بس‌ذره‌ای پیشنهاد کرد.

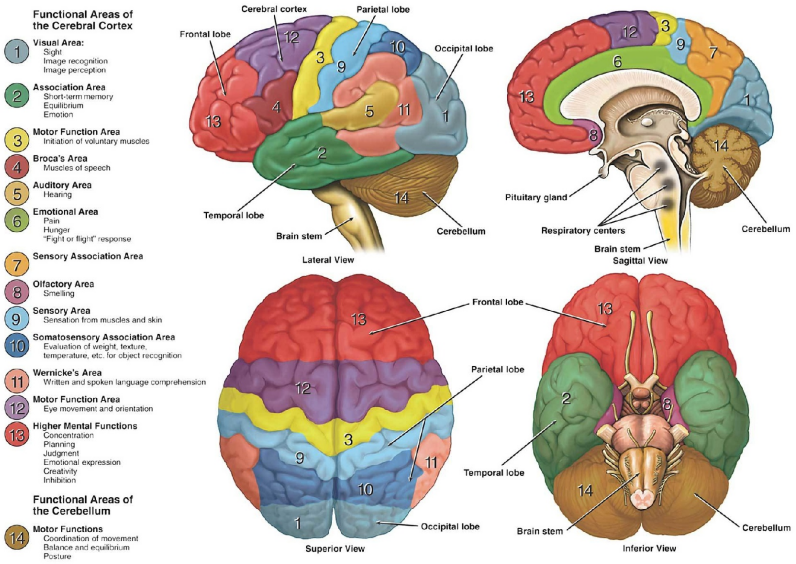
اکنون که بیش از نیم‌قرن از عمر گفتمانی که او پایه‌گذاری کرد می‌گذرد؛ فیزیکدانان زیادی با جهان بینی «پیچیده» تلاش می‌کنند از علت رفتارهای جمعیتی زیادی پرده برداری کنند. یکی از معروف‌ترین شاخه‌ی این جریانات، فیزیکدانانی هستند که در حیطهٔ علوم اعصاب فعالیت می‌کنند. آن‌ها تلاش می‌کنند با مدلسازی رفتارهای طلایی مغز همچون حافظه، خواب و ... و همچنین نابسمانی‌هایی چون آلزایمر، پارکینگسون، صرع و ... را با این جهان‌بینی توصیف کنند. کاری که در این پایان‌نامه ما انجام خواهیم داد مطالعهٔ بیماری صرع است. یک اختلال که ناشی از فاصله گرفتن «جمعیت» نورونی از کارکرد سالم خود است.

۱-۲ کارکرد سالم

هر نورون می‌تواند در حالت فعال [روشن] یا غیرفعال [خاموش] قرار گیرد. از آزمایش‌های بالینی انجام شده از افراد سالم دریافته‌ایم که الگوهای روشن و خاموش شدن نورون‌های مغز صورتی مشخص دارند. به این صورت که در هنگام پردازش اطلاعات دریافتی از هر ناحیه‌ی بدن تنها بخشی از مغز را به فعالیت در می‌آورد. تو گویی که هر کدام از قسمت‌های مغز وظیفه‌ی کنترل بخشی از اعضای بدن را در اختیار دارد - شکل ۱-۲.

در حالت سالم هر کدام از ناحیه‌های مغز می‌توانند به تفکیک فعال شوند و سپس خاموش شوند. به این معنا که روشن‌وخاموش شدن یک ناحیه نباید روی ناحیه‌های همسایه به گونه‌ای مؤثر اثر بگذارد و کارکرد آن را دچار اختلال کند. در صورت بروز این اختلال فرد تمرکز خود را از کنترل یا پردازش صحیح از دست می‌دهد. به عنوان مثال سخرانان و خوانندگان پیشرفته قادر هستند تا ناحیه‌ای که مربوط به تکلم است را به تنهایی در اختیار گیرند و به صورت جداگانه به زبان بدن خود بیاندیشند. این رفتار ماهرانه اغلب در افراد مقدماتی یا دچار اختلال دیده نمی‌شود. به این ترتیب که تکلم فرد همواره همراه با الگوهای نامنظمی از تکان خوردن دست و پاست.

[۱] Complex paradigm



شکل (۱-۲) تفکیک بخش‌های مختلف مغز بر حسب کنترل اعضای بدن [۱۵]

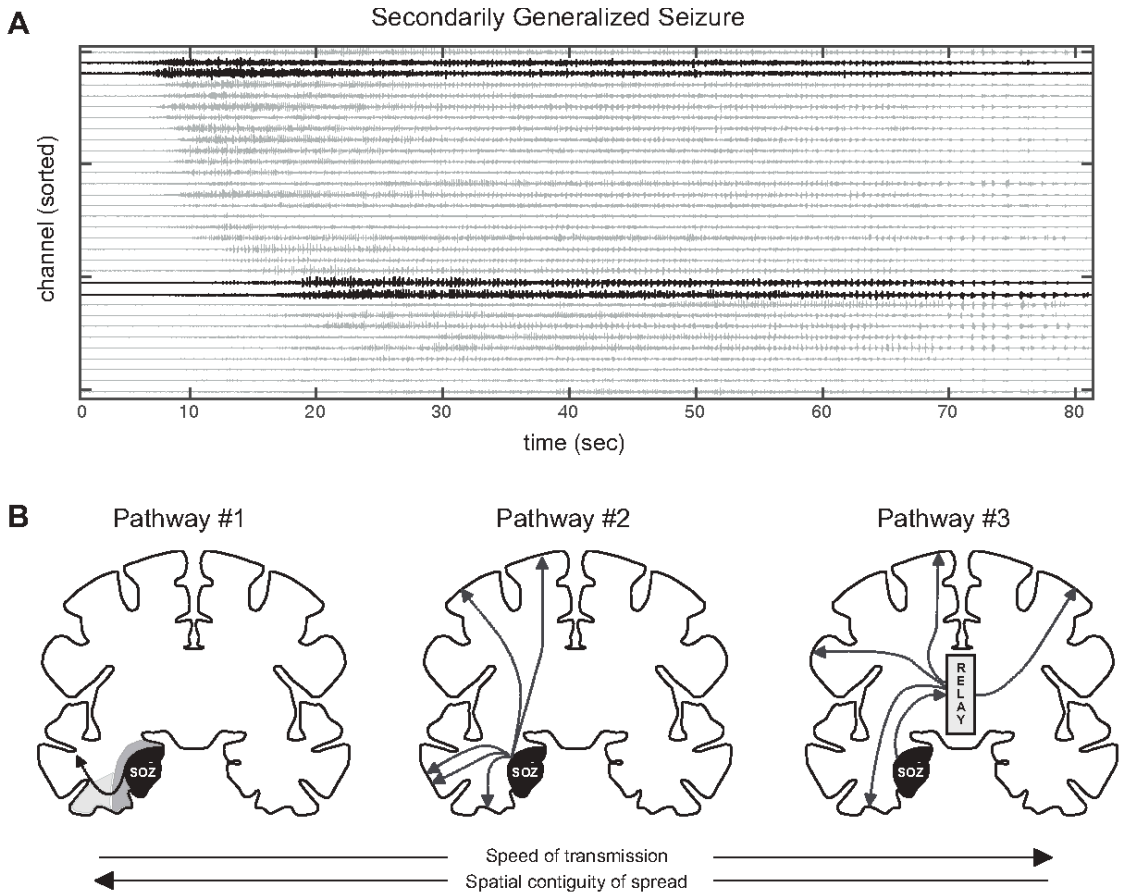
بیماری صرع که در ادامه با آن آشنا خواهیم شد در واقع حالتی کاملا مختل از مغز را ناشی می‌شود که تمام ناحیه‌های مغز همدیگر را به گونه‌ای خاص مختل می‌کنند که امکان دارد فرد دارای این بیماری هشیاری خودش را کاملا از دست بدهد.

۱-۳ صرع

شاخص‌ترین علامت بیماری صرع تشنج‌های مداوم است. گاه این تشنج‌ها در افراد بسیار خفیف و آهسته است و گاه در برخی بیماران دیگر بسیار ناگهانی و شدید اتفاق می‌افتد که می‌تواند بیمار را کاملا از هشیاری ببرد.

بیماری صرع یک اختلال در کارکرد جمعیت نورونی است. هم اکنون شواهدی وجود دارد که نشان می‌دهد این تشنج‌ها همراه با الگویی خاص از خاموش‌وروشن شدن جمعیت‌های نورونی همراه است.

در زمان حمله‌ی تشنج دیده می‌شود که نورون‌های درگیر شده همگی با یکدیگر خاموش‌وروشن می‌شوند که تو گویی با یک دیگر هم‌ضربان یا «**هم‌گام**» شده‌اند. گاه این هم‌گامی فقط در یک ناحیه‌ای خاص از مغز اتفاق می‌افتد و فقط عملکرد آن ناحیه را متاثر می‌کند و گاه به ناحیه‌ای گسترده از مغز سرایت می‌کند و عملکردهای مختلف بدن را مختل می‌کند.



Multiple pathways compatible with secondary seizure generalization are demonstrated. *A*: electrographic recording of a secondarily ge

شکل (۱-۳) سرایت هم‌گامی از کانون آن به ناحیه‌های همسایه [۱۶] محور عمودی در شکل بالا نمایش دهنده‌ی شمارنده‌های گیرنده‌هایی است که سیگنال‌های دریافتی از ناحیه‌های مختلف مغز را ضبط کرده‌اند. در این شکل به وضوح می‌بینیم که پس گذشت ۱۰ ثانیه از شروع فعالیت کانون صرع، بقیه بقیه نواحی هم شروع به تشدید می‌کند و پس از گذشت ۸۰ ثانیه حمله‌ی صرع متوقف می‌شود.

مثلا در صورتی که کانون صرع در لوب آهیانه‌ای [۲] باشد احتمالا منجر به اختلال در سیستم حرکتی ولرزش ماهیچه‌ها می شود، یا در لوب پس سری [۳] و گیج گاهی [۴] باعث اختلال در پردازش اطلاعات حسی و در لوب پیشانی [۵] منجر به ازدست رفتن توجه و هوشیاری می‌شود.

[۲] Parietal Lobe
[۳] Occipital Lobe
[۴] Temporal Lobe
[۵] Frontal Lobe

۱-۴ لزوم شبیه‌سازی

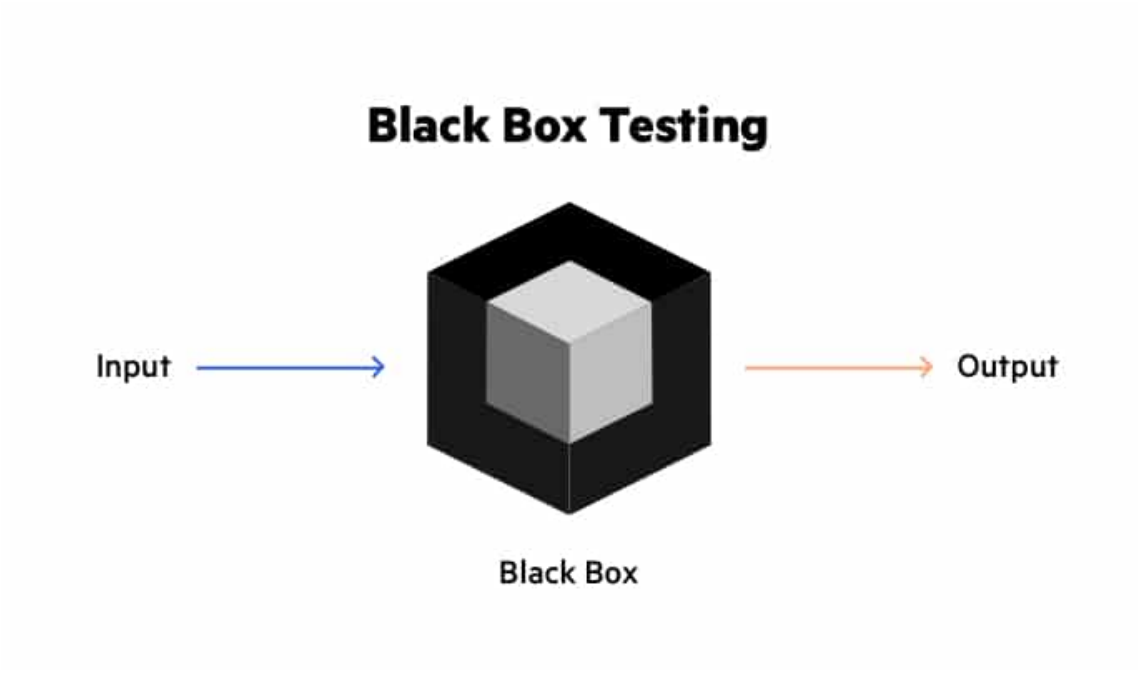
آیا در میان تمام میلیاردها نورون‌های مغز، نورون‌هایی که کانون صرع می‌شوند ژنتیک خاصی دارند؟ شبکه‌ی اتصال حقیقی نورون‌ها به چگونه است؟ بی‌تردید دستیابی به تمام جزییات مغز برای ما میسّر نیست اما در صورت جمع‌آوری همه‌ی این اطلاعات هم پردازش و فهمیدن آن‌ها کاری بس دشوار است. پس به فراصت می‌افتیم تا اطلاعات مسئله را گزینشی‌تر بررسی کنیم و تا جایی که امکان دارد مسئله را ساده کنیم.

به همین دلیل به سراغ مدلسازی و آزمایش «جعبه سیاه» می‌رویم. اگر مسئله‌ی ما دشوار است تلاش می‌کنیم که با پیشنهاد مدل ساده آنچه درون سامانه اتفاق می‌افتد را حدس بزنیم. سپس به سامانه‌ی شبیه‌سازی شده به آن به عنوان یک «**جعبه‌ی سیاه**» نگاه می‌کنیم (شکل ۱-۴) و بررسی می‌کنیم که چنان که انتظار می‌رود آیا توانسته‌ایم رابطه‌ی بین ورودی‌ها و خروجی‌های ثبت شده‌ی سامانه‌ی حقیقی را بازتولید کنیم یا خیر.

کاری که در این پژوهش انجام خواهیم داد تلاشی است برای پیشنهاد دادن یک مدل برای این جعبه‌ی سیاه که رفتار نسبتا مشابهی را میان ورودی و خروجی‌های این جعبه سیاه شبیه‌سازی می‌کند. همچنین به کمک بررسی دقیق‌تر این مدل تلاش می‌کنیم تا نقطه‌ی تقریبی گذرفاز سامانه را از فاز ناهم‌گام به هم‌گام پیدا کنیم.

۱-۵ انواعی از مدل‌های نورونی

در این بخش به معرفی مدل‌های نورونی که برای جعبه‌ی سیاه در نظر خواهیم گرفت؛ می‌پردازیم. انواع مدل‌های نورونی استفاده شده در این نامه به ترتیب زیر هستند.



شکل (۱-۴) آزمایش جعبه‌ی سیاه - در این آزمایش بررسی می‌شود که آیا مدل یا برنامه‌ی ارائه شده توانسته است که با توجه به ورودی‌ها خروجی‌های مورد انتظار را بازتولید کند یا خیر.

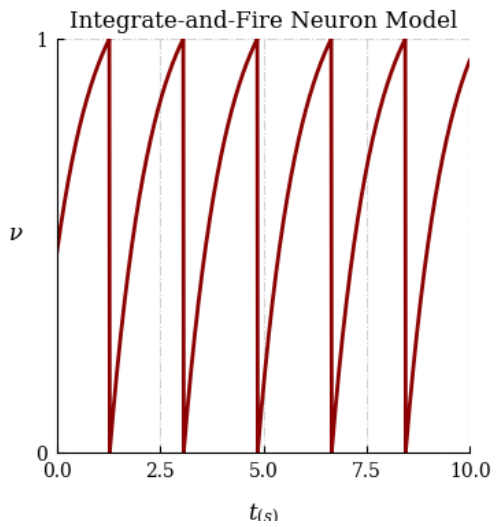
۱-۵-۱ انباشت‌وشلیک

مدل‌های زیادی برای شبکه‌های عصبی ارائه شده است که توانایی تولید هم‌گامی نورون‌ها را در آن‌ها می‌توانیم جستجو کنیم. یکی از این مدل‌ها که در تمام فصول شبیه‌سازی از آغاز تا کنون از آن بهره برده شده است؛ مدل انباشت و شلیک است [۱۷، ۱۸]. پتانسیل هر نورون از نوع انباشت‌وشلیک درون شبکه، متاثر است از: جریان خارجی، نشت جریان از درون و تاثیر جریان نورون‌های همسایه.

$$\dot{v}_i = a_{exti} - v_i + \sum_j g_{ij} I_{ij} \qquad (۱-۱)$$

که در رابطه‌ی بالا v_i پتانسیل نورون i ام ، a_{exti} جریان متصل شده به نورون از خارج آن است. جریان I_{ij} جریانی است که نورون همسایه‌ی j ام به نورون i ام می‌رساند. کمیت g_{ij} ضریب تاثیر نورون j ام روی iام است. این کمیت با توجه به مهاری یا تحریکی بودن نورون j تغییر علامت می‌دهد. به این صورت که اگر مهاری باشد؛ باعث کاهش پتانسیل نورونi می‌شود و اگر تحریکی باشد؛ افزایش می‌دهد [۱۹].

هر گام مسیر تحول به سمتی رفت که پتانسیل نورون از آستانه‌ی $v_i = ۱$ گذر کند؛ نورون تیزه خواهد



شکل (۱-۵) نمونه‌ای از تیزه‌های تک نورونی با مدل انباشت‌وشلیک که به جریان خارجی ۱/۲ متصل شده است.

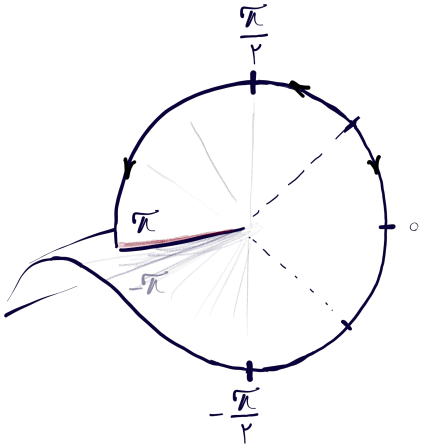
زد و پتانسیل آن به پتانسیل استراحت $v_i = 0$ باز خواهد گشت و مجدد شروع به تحول خواهد کرد - شکل ۱-۵.

۱-۵-۲ چرخنده

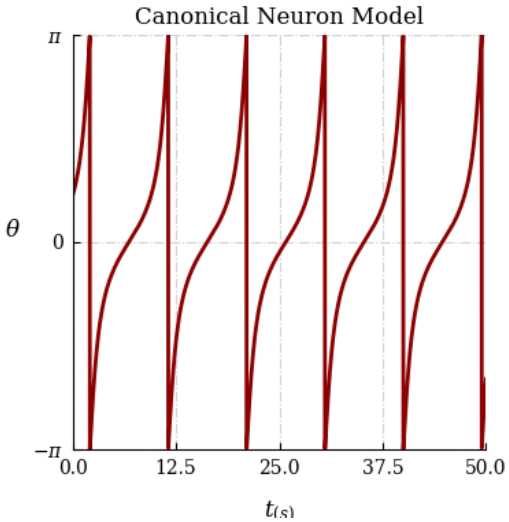
اما مدلی که در این نامه بسیار با آن کار خواهیم کرد؛ مدل چرخنده است. عوامل ماثر بر پتانسیل آن‌ها بسیار شبیه به نورون انباشت‌وشلیک است.

$$\dot{\theta}_i = a_{exti} - cos(\theta_i) + \sum_j g_{ij} I_{ij} \qquad (۱-۲)$$

نام مدلی که با این معادله تحول پیدا می‌کند را چرخنده گذاشتیم زیرا که می‌توان حالت‌های مختلف نورون را روی نقاط دایره پهن کرد. در این معادلات θ_i حالت نورون و یا زاویه‌ای است که نقطه‌ی معرف آن با محور مثبت افق می‌سازد. همچنین توجه کنید که پتانسیل نشتی درونی نورون از جنس تابع دوره‌ای $cos(\theta_i)$ است. جمله‌ای که در مدل انباشت‌وشلیک به شکلی خطی داشت.
حالت آستانه در این مدل زاویه $+\pi$ است و حالت استراحت با یک دور کامل عقب‌تر در $-\pi$ قرار دارد؛ شکل ۱-۶.
نمونه‌ای از تیزه‌های تک نورونی با مدل چرخنده در شکل ۱-۷ قابل مشاهده است.



شکل (۱-۶)



شکل (۱-۷) نمونه‌ای از تیزه‌های تک نورونی با مدل چرخنده که به جریان خارجی ۱۳/۵ متصل شده است.

۱-۶ فاز یا حالت سامانه‌ی نورونی

همان‌طور که پیشتر گفتیم؛ مغز از سلول‌های عصبی زیادی به نام نورون تشکیل شده‌است که با هم در ارتباط هستند. جالب است که همین مغز می‌تواند تحت ورودی‌های یکسانی پاسخ‌های متفاوتی را بدهد. به عنوان مثال شنیدن یک صدای آرام در حالت خواب، مغز را به فعالیت زیادی وانمی‌دارد؛ در صورتی که در حالت هشیاری می‌تواند خبر آن جمله را دریافت کند.
حال داستان «جعبه سیاه» را به خاطر بیاورید. اگر چه اجزای تشکیل دهندهٔ این جعبه‌سیاه در مثال ما اصلا تغییر نکرده است اما رفتار این جعبه کاملا متفاوت شده‌است. این تفاوت در رفتار را با معرفی مفهوم «فاز» و یا حالت معرفی می‌کنیم. در حالت اول مغز در «فاز استراحت» بود و به تحریک خارجی پاسخی نشان نداد و در «فاز هشیاری» کاملا روشن شد.

گذرفاز و حضور نقطه‌ی بحرانی

به طور کلی مغز می‌تواند در حالات یا فازهای متفاوتی حضور داشته باشد مانند فاز «هم‌گام» یا «ناهم‌گام»، «روشن» یا «خاموش». به همین خاطر در کنار مبحث «فاز»، موضوع «گذرفاز» هم مطرح می‌شود که به معنای عبور سامانه از یک فاز به فاز دیگر است. گاه این گذار کاملا ملایم انجام می‌شود و گاه مرز بسیار باریکی دارد.

گذرفاز مفهومی بسیار وسیع است که در پدیده‌های زیادی همچون ماده‌چگال، ابررسانایی، جمعیت‌شناسی و بسیار از پدیده‌های آماری خودش را نشان می‌دهد. به همین علت فیزیک‌پیشگان علاقه‌ی بسیاری یه مطالعهٔ این پدیده دارد و نظریات آماری زیادی را برای شناخت آن توسعه دادند. چون در مغز هم چنین پدیده‌ای قابل مشاهده است؛ نظر فیزیکدانان زیادی به مطالعهٔ مغز و فازهای آن جلب شده است.

آزمایش‌ها و مدلسازی‌های زیادی انجام شده‌است تا فاز و گذرفاز سامانه‌ی نورون‌های مغز را شکار کنند [۲۰]. گستره‌ی بزرگی از ادبیات این مجموعه به تحقیق در مورد گذر فاز بین «هم‌گام» و «ناهم‌گام» می‌پردازد. به عنوان مثال نویسندگان مقاله [۱۰] تلاش کردند تا با ارائهٔ مدلی مبتنی بر نورون‌های مهاری سامانه‌ای را توصیف کنند که در فاز «هم‌گام» محبوس می‌شود. آن‌ها نشان دادند که تغییر قدرت اتصالات بین نورون‌ها سهم بزرگی در گذرفاز بین حالت «ناهم‌گام» و «هم‌گام» دارد.

۱-۷ پیکربندی جستار این نامه

جستار خود را این گونه پیش می‌بریم:

(آ) ابتدا مدل پیشنهادی نویسندگان [۱۰] را بازتولید می‌کنیم و تلاش می‌کنیم تا نتایج آن‌ها را دوباره به دست آوریم. بنظر می‌آید تمام کمیت‌های مهم را اندازه‌گیری نکرده‌اند. پس جوانب دیگر مسئله را هم بررسی خواهیم کرد. [به فصل شبکه انباشت و شلیک نگاه کنید.]

(ب) «آیا این رفتار همگامی برای مدل‌های نورونی دیگر نیز اتفاق خواهد افتاد؟ یا فقط با این مدل این رفتار را مشاهده خواهیم کرد؟» پس مدل نورونی خود را عوض می‌کنیم تا پاسخ این پرسش را دریابیم. مدل پیشنهادی و جایگزین ما «چرخنده» است. [به فصل شبکه‌ی نورون‌های چرخنده نگاه کنید.]

(ج) تلاش کنیم تا مکان تغییر فاز به همگامی را با مدل‌های تحلیلی به دست آوریم. این کار برای مدل انباشت‌وشلیک در این مقاله [۲۱] انجام شده است اما آیا می‌توانیم برای مدل‌های نورونی دیگر نیز آن را محاسبه کنیم؟ [به فصل تلاش برای توصیف نگاه کنید.]

فصل ۲

شبکه انباشت و شلیک

در این نوشتار [۱۰] نویسندگان تلاش می‌کنند تا هم‌گامی را برای شبکه‌ی نورون‌های مهاری رصد کنند. این نورون‌ها به گونه‌ای باهم مرتبط هستند که تیزه زدن هر نورون منجر به مهار پتانسیل دیگر نورون‌ها می‌شود. تک‌تک نورون‌های این شبکه از تحول انباشت و شلیک تبعیت می‌کند. معادله تحول اختلاف پتانسیل هر کدام از نورون‌ها با محیط بیرونش از رابطه زیر داده می‌شود:

$$\dot{v_i} = a_i - v_i - \frac{g}{N}\sum_{n|t_n<t} S_{i,l(n)}\delta(t - t_n - t_d) \tag{۱-۲}$$

- g: ضریب اتصال هر جفت نورون. از آن‌جا که همه‌ی نورون‌ها در این مطالعه مهاری هستند؛ باید این کمیت مثبت انتخاب شود تا تاثیر جمله‌ی پایانی در نهایت منفی باشد.
- S: ماتریس همسایگی. این کمیت نشان می‌دهد که آیا دو نورون به هم متصل و تاثیرگذار هستند یا خیر.
- t_d: زمان تاخیر میان زدن تیزه هر نورون و تاثیر آن روی نورون‌های دیگر.
- a_i: یک پتانسیل تحریکی و خارجی. در این مطالعه این مقدار برای هر نورون به صورت تصادفی انتخاب می‌شود و تا پایان شبیه‌سازی ثابت باقی می‌ماند.
- N: تعداد نورون‌های در شبکه

۲-۱ آهنگ تیزه زدن

پیش از آن که به شبیه‌سازی یک شبکه از نورون‌ها بپردازیم؛ خوب است تا یک نورون تنها را مطالعه کنیم. یک نورون تنها که پویایی از جنس مدل انباشت‌وشلیک دارد؛ دوره تناوب تیزه‌زدن آن از رابطه‌ی زیر قابل محاسبه است .

$$\dot{v_i} = I - v_i \rightarrow \frac{dv_i}{I - v_i} = dt \tag{۲-۲}$$

$$\rightarrow T = ln(\frac{I}{I - ۱}) \tag{۳-۲}$$

این رابطه نشان می‌دهد که بسامد تیزه‌زدن یک نورون با افزایش مجموع جریان‌های ورودی آن به صورت لگاریتمی افزایش می‌یابد.

۲-۲ نشانگر تشخیص فاز هم‌گامی

برای آن که متوجه شویم که شبکه در حالت هم‌گامی یا ناهم‌گامی است نیاز است تا آشکارسازی را تعبیه کنیم که باتوجه به رفتار سامانه، هم‌گامی یا ناهم‌گامی را با عقربه‌ی خود نشان دهد. برای این منظور ابتدا مفهوم میدان (E) را تعریف می‌کنیم که بیانگر شدت فعالیت نورون‌های شبکه است. انحراف از معیار این کمیت در طول زمان، پارامتر مناسبی است که به کمک آن هم‌گامی را تشخیص دهیم.

$$\ddot{E} + ۲\alpha\dot{E} + \alpha^۲ E = \frac{\alpha^۲}{N}\sum_{n|tn<t}\delta(t - t_n - t_d) \tag{۲-۴}$$

$$\sigma^۲ = \langle E^۲\rangle_t - \langle E\rangle_t^۲ \tag{۲-۵}$$

*دقت کنیم که شدت میدان با تعداد تیزه زدن‌ها رفتاری ملایم دارد. به عنوان مثال اگر تیزه‌ها متوقف شوند؛ شدت میدان پس از لحظاتی چند [متناسب با α] صفر می‌شود.

در طول زمان میدان E و σ را رصد می‌کنیم. برای دریافت شهودی عملکرد مناسب این پارامتر نظم، فرض کنید که شبکه در حالتی است که جمعیت بزرگی از آن در حال خاموش و روشن شدن هم‌گام است. پس مشاهده خواهم کرد که میدان که شدت فعالیت نورون‌ها را نشان می‌دهد در حال ضربان رفت و برگشتی است. این افت‌وخیز با تقویت هم‌گامی دامنه‌ی بزرگتر پیدا می‌کند به طوری که انحراف آن از میانگین پهنای قابل توجهی کسب می‌کند. از این رو انحراف معیار میدان، کمیت مناسبی است که میزان هم‌گامی را گزارش کند.

۲-۳ مسائل پیشروی پیاده سازی شبیه سازی

۲-۳-۱ تابع بی‌کران دلتا

یکی از مشکلات شبیه سازی معادلات دیفرانسیلی حضور تابع دلتای دیراک است. این تابع در نقطه صفر خود دارای مقداری بینهایت است. معرفی چنین تابعی به رایانه کاری دشوار است و همانندی محاساتی

ندارد. حال برای برطرف کردن این مشکل چه باید کرد؟ نکته در این جا نهفته است که چون ما برای حل عددی معادله دیفرانسیلی خود از زمان پیوسته استفاده نمی‌کنیم و از گام‌هایی با طول مثبت Δt استفاده می‌کنیم این مشکل به صورت زیر مدیریت می‌شود.

$$v_i(t+\Delta t) = v_i(t) + \int_t^{t+\Delta t} \dot{v}_i dt \tag{۲-۶}$$

$$= v_i(t) + \int_t^{t+\Delta t} \left[a_i - v_i - \frac{g}{N} \sum_{n|t_n<t} S_{i,l(n)} \delta(t - t_n - t_d) \right] dt \tag{۲-۷}$$

$$\approx v_i(t) + [a_i - v_i(t)]\,\Delta t - \frac{g}{N} \sum_{n|t_n<t} S_{i,l(n)} \int_t^{t+\Delta t} \delta(t - t_n - t_d) dt \tag{۲-۸}$$

$$\approx v_i(t) + [a_i - v_i(t)]\,\Delta t - \frac{g}{N} \sum_{n|t_n<t} S_{i,l(n)} H(t + \Delta t - t_n - t_d) \tag{۲-۹}$$

حالا تابع پله کاملا برای ما آشنا و قابل مدلسازی است. دقت شود که تابع پله یاد شده فقط در محدوده $t, t+\Delta t$ زندگی می‌کند و پس از آن اعتبار ندارد. معادله ۲-۹ می‌گوید که باید برای تحول پتانسیل نورون iام بررسی کنیم که آیا نورونی در همسایگی آن تیزه زده است یا نه. اگر چنان باشد؛ یک واحد به جمع تیزه زدگان اضافه کنیم.

۲-۳-۲ ثبت تاریخ تیزه زدن‌ها

برای محاسبه تحول پتانسیل در رابطه ۲-۹ چنان که توضیح داده شد نیاز به دانستن تاریخ تیزه زدن‌ها داریم. اگر بخواهیم برای تمامی نورون‌ها در هر گام زمانی تیزه‌زدن آن را به صورت مجزا ثبت کنیم؛یک آرایه مربعی خواهیم داشت که شماره سطر آن می‌تواند معرف زمان باشد و ستون نماد شماره نورون - شکل شماره (۲-۱آ).

اما مشکلی که برای این شبیه سازی رخ خواهد داد. در صورت افزایش تعداد نورون‌ها و زمان شبیه سازی با یک ابر آرایه روبرو خواهیم شد که امکان دارد در ذخیره سازی آن دچار مشکل شویم. به همین خاطر در شبیه سازی انجام شده تنها مجموع تیزه زدن‌ها را ذخیره کردیم تا یک آرایه یک ستونه داشته باشیم و در ذخیره‌سازی به مشکل نخوریم.

۲-۴ نتایج

اندازه‌ی پارامترهایی که برای این شبیه‌سازی انتخاب کردیم؛ کاملا از صورت مقاله یاد شده برداشته شده و به قرار زیر است.

* $\alpha = ۲۰\ s^{-۱}$
* جریان‌های تصادفی خارجی نورون‌ها از اعضای بازه‌ی (۱/۲, ۲/۸) انتخاب می‌شوند.
* $N = ۱۰۰۰۰$
* $t_d = ۰/۱\ s$

این شبیه سازی برای ۱۰۰۰ ثانیه اجرا شده است که در آن هر گام زمانی برابر ۰/۰۱ ثانیه گرفته شده است. کد شبیه‌سازی در پوشه مسئله همگامی برای مدل انباشت‌وشلیک قابل مشاهده است.

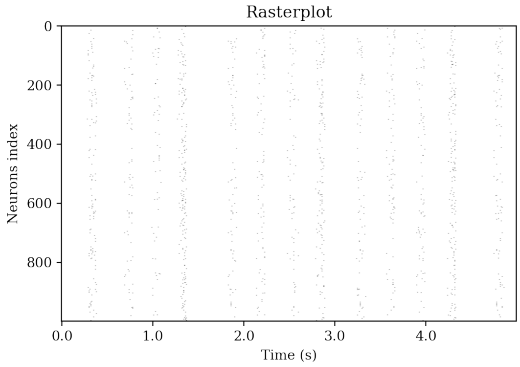
۲-۴-۱ انحراف از معیار میدان

مهم‌ترین شاخصه ما برای ردگیری همگامی، انحراف معیار میدان E است که با زیگما σ نمایش می‌دهیم. جهش به وجود آمده در شکل (۲-۱ب) به این معنی است که سامانه از حالت ناهم‌گامی به هم‌گامی تغییر فاز داده است.

۲-۴-۲ نورون‌های خاموش

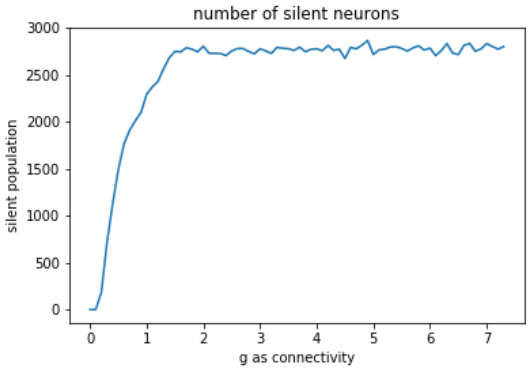
بی‌تردید میدان داخلی نورون‌ها کاملا تابعی است از آمارتیزه‌های درون سامانه. نورون‌هایی که گاهی برای تیزه زدن به پیش می‌روند و گاه به علت حضور میدان داخلی مهار به عقب برمی‌گردند. خوب است بپرسیم که برآیند این رفت و برگشت برای هر نورون چگونه است. آیا این رفت و برگشت منجر به رسیدن به آستانه‌ی تیزه زدن می‌شود و یا نورون در برآیند اصلا پیشروی نمی‌کند و هیچگاه به آستانه نمی‌رسد و خاموش می‌ماند.

در شکل ۲-۱ج شمار نورون‌هایی که هیچگاه در سامانه تیزه نمی‌زنند را آورده‌ایم و این که چگونه با با

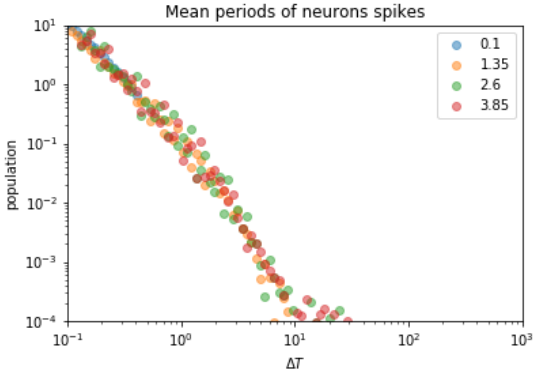


(آ) ثبت لحظه‌ای تیزه زدن هر نورون به صورت مجزا – در این نمودار ضریب تاثیر هر نورون روی همسایه‌هایش $g = ۵$ بوده است. چنان که انتظار می‌رفت شاهد هم‌گامی هستیم.

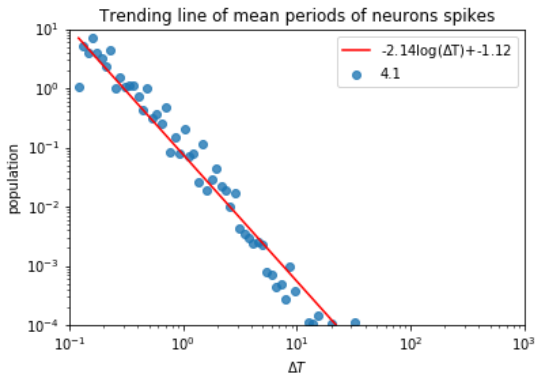
(ب) تغییر فاز از ناهم‌گامی به هم‌گامی برای ۱۰۰۰ نورون



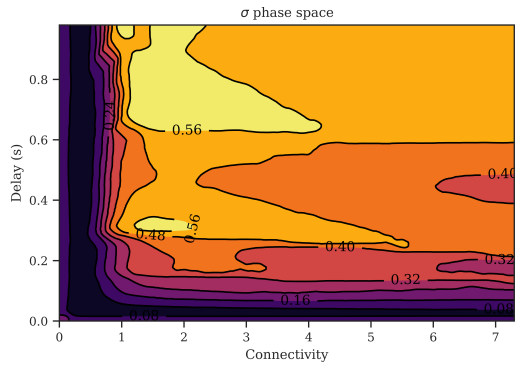
(ج) آمار نورون‌های خاموش درون سامانه



(د) توزیع بسامدی شبکه‌های ۱۰۰۰ نورونی که هر کدام قدرت اتصال متفاوتی دارند.



(ه) محاسبه‌ی نمای توزیع توانی فاصله زمانی بین تیزه‌ها انباشت‌وشلیک: پیوست آ ـ ۱



(و) صفحه‌ی فاز مربوط به سامانه‌ی نورون‌های

افزایش ضریب تاثیر مهاری میدان این آمار رشد می‌کند.
این مشاهده نشان می‌دهد که در فاز هم‌گام، تقریبا ۲۵ درصد نورون‌ها خاموش هستند و نقشی در برقراری جریان داخلی ندارند. قابل حدس است که نورون‌هایی خاموش هستند که جریان‌های تصادفی خارجی پایین دست را داشته‌اند. به این معنی که اگر بازه‌ی جریان تصادفی را تنگ‌تر می‌گرفتیم [مثلا از۱/۶] شروع می‌کردیم؛ سامانه در فاز هم‌گام تفاوت رفتاری نمی‌داشت.
همچنین جالب است که تغییر فاز مشاهده شده در تعداد نورون‌های خاموش - شکل ۲-۱ج- در حالتی در همسایگی و متمایز از تغییر فاز شکل ۲-۱ب نشان می‌دهد.

۲-۴-۳ توزیع تناوب زمانی تیزه‌ها

شبکه‌ی ما متشکل از نورون‌هایی است که مدام در حال تیزه زدن و فعال نگه‌داشتن شبکه هستند. برخی با بسامد بیشتری تیزه می‌زنند و برخی آهسته‌تر. اگر کنجکاو باشیم که جمعیت کل نورون‌های ما چگونه میان دسته‌های مختلف با تناوب‌های متفاوت توزیع شده است؛ لازم است تا توزیع فراوانی آن‌ها را یکجا رسم کنیم - شکل ۲-۱د.
همان طور که می‌بینید به ظاهر این توزیع رفتاری توانی دارد و اگر کنجکاو باشیم می‌توانیم شیب این نمودار تمام لگاریتمی آن را جهت محاسبه‌ی نمای توزیع به دست آوریم - شکل ۲-۱ه.

۲-۴-۴ پهن‌کردن قالی صفحه‌ی فاز

در قسمت‌های پیشین تنها به مطالعهٔ تاثیر ضریب اتصال در تغییرفاز پرداختیم و زمان تاخیر را تنها در $t_d = ۰/۱s$ خلاصه کردیم. حال اجازه دهید تا به تاخیر نیز اجازه‌ی تغییر دهیم. در ادامه‌ی این قسمت از نوشتارمان، به فرش‌کردن صفحه‌ی فاز خود خواهیم پرداخت. امید است که چهره‌ی تمام نمای سامانه بر صورت این قالی نقش بندد.

قالی انحراف از معیار میدان

در شکل ۲-۱و مشاهده می‌کنیم که شدت هم‌گامی در هر کدام از هنگردهای سامانه چقدر است. این شکل شامل اطلاعات بسیار مفیدی است:

۱. به نظر می‌رسد که با افزایش زمان تاخیر و ضریب تاثیر همگامی قدرت پیدا می‌کند

۲. اگر چه تاخیر در جابجایی ضریب‌تاثیر بحرانی تغییری ایجاد نکرده است اما هم‌گامی را قدرت می‌بخشد.

۳. اگر ضریب‌تاثیر را بسیار بزرگ کنیم و فاصله‌ی زیادی از ضریب‌تاثیر بحرانی بگیریم؛ شدت هم‌گامی ضعیف می‌شود. این نکته می‌تواند به علت رشد جمعیت نورون‌های خاموش باشد که از تیزه‌زدن محروم می‌شوند و نمی‌توانند خیزهای بلندی را به جریان داخلی القا کنند.

۲-۴-۵ امکانی برای توصیف تحلیلی؟

برونل در مقاله‌ی خود [۲۱] راه‌حلی تحلیلی برای توصیف گذر فاز در مدل انباشت‌وشلیک ارائه کرده است. قصد ما در این جستار تکرار کار برونل نیست اما از راه‌حل برونل الهام خواهیم گرفت تا مدل‌های دیگر نورونی را توصیف و تحلیل کنیم.

فرصتی برای مدل‌های دیگر نورونی

در بخش قبل به بررسی ویژگی‌های مدل انباشت‌ـ‌شلیک پراختیم. اگر چه این مدل بسیار ساده توانست رفتارهای آشنایی را برای ما بازتولید کند اما شامل محدودیت‌هایی است. این محدودیت‌ها باعث می‌شود تا ما به سراغ مدل‌های نورونی دیگری مانند نورون‌های چرخنده برویم.
این مدل نسبت به مدل قبلی شامل ویژگی‌های مثبتی است. یکی از ویژگی‌های خوب آن این است که پس از بازنشانی فاز نورون تیزه زده، فاز آن به زاویه‌ای برده می‌شود که دارای خواص مثلثاتی مشابهی است. به این معنا که دیگر شاهد گسستگی در اندازه‌ی جملاتی که تحول نورون را توصیف می‌کنند؛ نیستیم.

فصل ۳

شبکه‌ی نورون‌های چرخنده

در این مدل به جای آن که برای شبکه خود از مدل انباشت‌ـ شلیک استفاده کنیم از مدل چرخنده استفاده می‌کنیم. در این مدل نورون‌های ما مانند دونده‌هایی به دور میدان مثلثاتی می‌دوند. ما نقطه‌ی فاز π را به عنوان علامت برای این دونده‌ها قرار دادیم. هر زمان که دونده‌ای از علامت خود گذشت یک تیزه برای او درنظرمی‌گیریم و بلافاصله او را به فاز $-\pi$ باز می‌گردانیم.

برای توصیف فاز هر نورون از معادلات زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_i = I_i - cos(\theta_i) - gE, \quad -۵\pi/۲ \leqslant \theta_i \leqslant \pi \\ \dot{E} = M - \alpha E \\ \dot{M} = -\alpha M + \frac{\alpha^۲}{N} \sum_{n|tn<t} \delta(t - t_n - t_d) \end{cases} \tag{۱-۳}$$

- θ_i: مشخص کننده‌ی فاز هر نورون. این فاز میان دو لبه در حال حیات است. کوچکترین کران بالای آن همان حالت آستانه در π است و بزرگترین کران پایین آن نگه‌دارنده‌ای است که از ریزش نورون‌ها جلوگیری می‌کند.
- E: میدانی است که شدت فعالیت شبکه را نشان می‌دهد.
- M: یک پارامتر فرعی که در حل معادله دیفرانسیل مرتبه دوم به دو معادلهٔ تحول مرتبه اول ما را یاری کرده است.

۳-۱ آهنگ تیزه زدن

برای نورونی تنها که پویایی از جنس چرخنده دارد؛ دوره‌ی تناوب و بسامد تیزه زدن آن بر حسب مجموع جریان ورودی رفتاری مطابق زیر دارد - پیوست آ-۴:

$$T = \frac{۲\pi}{\sqrt{I^۲ - ۱}} \tag{۲-۳}$$

$$f = \frac{۱}{T} = \frac{\sqrt{I^۲ - ۱}}{۲\pi} \tag{۳-۳}$$

این به این معناست که مدل چرخنده و انباشت‌وشلیک اگر چه هر دو با افزایش جریان، بسامد تیزه زدنشان افزایش می‌یابد اما رفتار تغییر آن به دو گونه‌ی متفاوت صورت می‌پذیرد. این نکته‌ی مهمی است که در هنگام مقایسه‌ی دو مدل باید به خاطر داشته باشیم.

۳-۲ نشانگر توسعه یافته‌ی تشخیص همگامی

گفتنی است که برای تشخیص هم‌گامی می‌توان پارامترهای دیگری نیز استفاده کرد. به عنوان مثال در مقاله [۲۲] پارامتر دیگری توسط نویسندگان ابداع و معرفی شده‌است.

$$s = \langle [\frac{1}{N_a} \sum_{i_a} sin(\theta_{i_a})]^2 \rangle_t \tag{۳-۴}$$

میانگین‌گیری بالا روی ۱۰۰۰ گام آخر زمانی انجام می‌شود. این فاصله زمانی باید حتما بزرگ‌تر از گام‌های زمانی تحول ریزمقیاس آن باشد. همچنین برای این متوسط‌گیری نورون‌هایی را مدنظر می‌گیریم که در منطقه ی فعال قرار گرفته‌اند. منطقه‌ی فعال، سمت چپ دایره مثلثاتی است. تعداد این نورون‌ها را با N_a نمایش می‌دهیم.
برای پی بردن به فایده‌ی این مشخصه آن را در مرحله‌ی آزمایش ذهنی قرار می‌دهیم. دو حالت از سامانه در حالت هم‌گام و ناهم‌گام را در نظر می‌گیریم و استدلال می‌کنیم که این مشخصه تفاوت آن‌ها را به روشنی آشکار می‌کند.

(آ) حالتی که همه‌ی نورون‌ها روی دایره‌ی مثلثات به صورت یکنواخت توزیع شده‌اند: به وضوح در چنین حالتی به علت فرد بودن تابع سینوس نتیجه‌ی رابطه‌ی یاد شده صفر خواهد بود. پس این رابطه عدد صفر را برای حالت مطلق ناهم‌گامی در نظر می‌گیرد.

(ب) حالتی از نورون‌ها که همه در یک فاز قرار دارند و با هم روی دایره می‌دوند: در چنین حالتی میانگین زمانی مشخصه‌ی بالا برابر عدد ۱/۲ است.

(ج) گفتنی است که بقیه حالات توزیع نورون‌ها میان این دو حالت لبه‌ای قابل تصور هستند و خروجی این مشخصه عددی بین صفر و ۱/۲ خواهد بود.

۳-۳ شبیه‌سازی

ثوابت مسئله را به گونه‌ی زیر انتخاب می‌کنیم.

* $\alpha = ۲۰\ s^{-۱}$

* جریان‌های تصادفی خارجی نورون‌ها از اعضای بازه‌ی (۹/۵, ۱۳/۵) انتخاب می‌شوند. بیشینه‌ی (کمینه) این بازه به گونه‌ای انتخاب شده‌است که فعالیت نورونی متصل به آن کاملا مشابه نورون انباشت‌وشلیکی باشد که بیشینه‌ی (کمینه) جریان را در بخش قبل داشت.

* $N = ۱۰۰۰۰$

* $t_d = ۰/۱\ s$

حال شبکه‌ی خود را به ازای قدرت اتصال‌های مختلف اجرا می‌کنیم تا مجددا تحقیق کنیم که چگونه تغییر در قدرت اتصال g می‌تواند باعث شود تا تغییر فاز از ناهم‌گامی به هم‌گامی رخ دهد. برای مشاهده‌ی دفترچه شبیه‌سازی به آدرس مسئله همگامی برای مدل چرخنده مراجعه کنید.

۳-۴ نتایج

مرتبه‌ی اجرای این الگورتیم خطی است و برای یک شبکه شامل ۱۰۰۰ نورون و برای ۱۰۰۰۰ گام شبیه‌سازی زمانی در حدود ۴ ثانیه به طول می‌انجامد.

۳-۴-۱ در جستجوی تغییرفاز

پس از رصد کردن تغییرات رفتار سیستم بر حسب قدرت مهار نورون‌ها، تغییر فاز مانند مدل قبلی مشاهده شد اما مکان تغییر فاز تغییر کرد و حول $g = ۳۰$ قرارگرفت. این تغییر فاز در دو شکل ۳-۱آ و ۳-۱ب قابل مشاهده‌است.

شاید به نظر این مسئله کمی عجیب برسد و تا حدودی مسیر حل ما را دچار چالش کند اما نکته‌ی قابل توجه برای ما تفاوت نقاط گذر فاز نیست بلکه کیفیت تغییر فاز است. صرف وجود فازی هم‌گام پس از ناهم‌گام قابل تامل است که برای هر دو مدل نورونی رخداده است.

در مورد جابجایی نقاط گذر نیز می‌توانیم با نگاه دقیق‌تر به معادلات نورون‌های انباشت‌وشلیک و چرخنده آن را دریابیم.

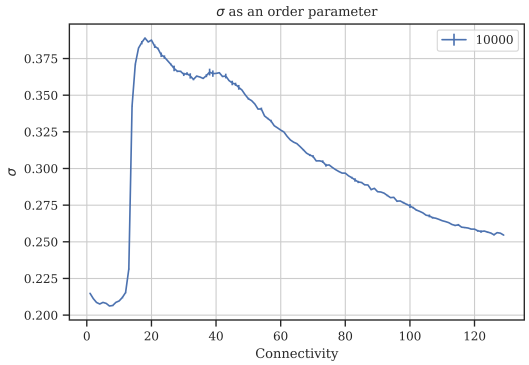
بیایید جمع دو جمله‌ی اول را برای هر مدل از شبکه‌های شبیه‌سازی شده‌ی خود در نظر بگیریم. (الف) برای شبکه‌ی انباشت‌وشلیک در بازه‌ی (۰/۲, ۲, ۸) است و برای (ب) شبکه‌ی چرخنده در بازه‌ی (۸/۵, ۱۳/۵) قرار دارد.
همان‌طور که مشخص است مرکز این بازه‌ها در یک مرتبه‌ی بزرگی با هم تفاوت دارند. اگر کیفیت تغییرفاز برای هر دو مدل مشابه است؛ طبیعی است که تصور کنیم جمله‌ی مهاری سوم نیز در نقطه‌ی گذر باید یک مرتبه‌ی بزرگی بین دو مدل متفاوت باشد.
از آن‌جا که میدان E مستقل از تعداد نورون‌هاست و فقط به چگالی حضور نورون‌ها روی محور آستانه مربوط است؛ این ضریب تاثیر است که باید نقش درخواستی را ایفا کند و یک مرتبه‌ی بزرگی بین دو نورون متفاوت باشد.

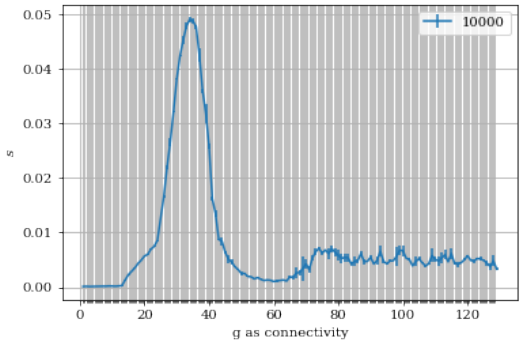
۳-۴-۲ فاصله زمانی بین تیزه‌ها

حال که دیدیم برخی نورون‌ها همواره خاموش می‌مانند و یا به عبارتی دوره‌ی تیزه زدن آن‌ها بینهایت است؛ خوب است که دوره‌ی تیزه زدن نورون‌های دیگر را نیز بررسی کنیم - شکل ۳-۱ج.

این شکل نمایان‌گر آن است که سامانه‌ی ما توزیعی توانی دارد. یا به عبارت دیگر رفتاری بی‌مقیاس دارد با توانی که در شکل ۳-۱د محاسبه شده است. این توان همواره با محاسبه شیب بهترین خط گذرنده از نمودار تمام لگاریتمی آن محاسبه می‌شود.

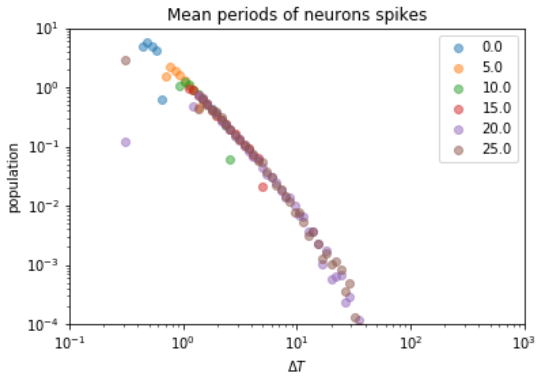
همچنین توجه کنیم که با افزایش ضریب تاثیر رفتار توانی آن‌ها تغییر نمی‌کند. تنها تفاوت در چگونگی انتخاب جایگاه‌های روی خط است. هر چه ضریب تاثیر بزرگتر می‌شود نورون‌ها فاصله‌ی زمانی تیزه‌های بزرگتری را اتخاذ می‌کنند. این امر با خاصیت مهاری بودن نورون‌های شبکه هم‌خوانی خوبی دارد. زیرا با افزایش ضریب تاثیر نورون‌ها در حال کندتر شدن هستند.

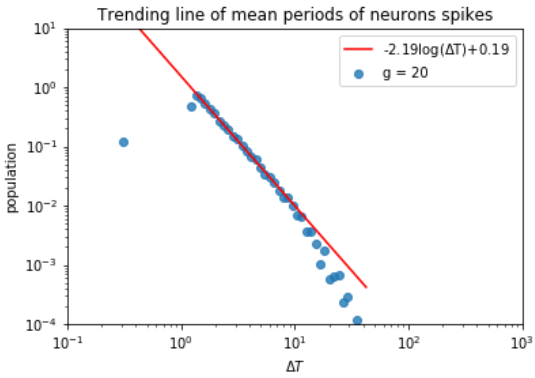




(ب) پارامتر نظم تعریف شده در رابطه ۳-۴ برای مدل

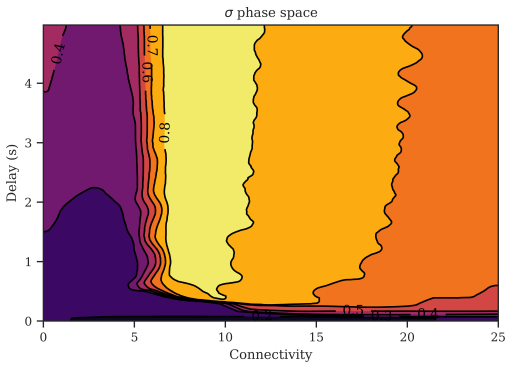
(آ) پهنای جریان یک سامانه چرخنده با ده هزار نورون چرخنده





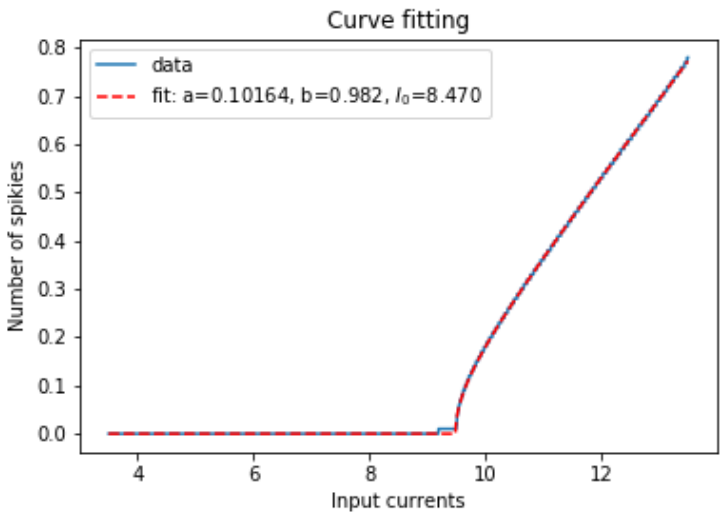
(ج) فاصله‌ی زمانی بین تیزه زدن‌ها

(د) محاسبه‌ی نمای بحرانی



(ه) صفحه‌ی فاز مربوط به سامانه‌ی نورون‌های چرخنده:

پیوست آ-۳



شکل (۳-۲) تعداد تیزه بر حسب جریان تصادفی برای سامانه‌ای با ده هزار نورون و ضریب تاثیر $g = ۵۰$

۳-۴-۳ فعالیت شبکه

همان طور که دیدیم تعدادی از نورون‌ها در شبکه به حالت خاموش درمی‌آیند. قابل حدس است که اگر جمعیتی خاموش در شبکه داشته باشیم؛ احتمالا آنهایی هستند که جریان تصادفی اولیه آن‌ها از بقیه کمتر است. زیرا آهنگ تیزه زدن رابطه‌ی مستقیمی با جریان‌های ورودی به نورون دارد.

به هر جهت رسم نمودار فعالیت نورون‌ها بر حسب جریان‌های تصادفی اولیه‌ی آن‌ها می‌تواند اطلاعات بسیار مفیدی را از شبکه به ما بدهد. به عنوان مثال شکل ۳-۲ نشانگر سامانه‌ای از ده هزار نورون است که با قدرت $g = ۵۰$ روی هم تاثیر می‌گذارند. این ضریب تاثیر همان‌طور که در شکل ۳-۱آ مشخص است؛ درون فاز هم‌گام قرار دارد. خط صاف سمت چپ نمودار به وضوح گویای کندی حرکت نورون‌های با جریان پایین است.

بیاید حسابی سرانگشتی کنیم تا بتوانیم اعدادی را که شبیه‌سازی ضبط کرده است توصیف کنیم. جریان داخلی بین نورون‌ها وابسته به فعالیت شبکه است. پس به سراغ رابطه‌ی فعالیت می‌رویم. می‌دانیم می‌توانیم جریان داخلی را نیز به کمک آن توصیف کنیم.

تعداد تیزه‌های کل شبکه رابطه‌ی مستقیمی با جریان خارجی جاری در شبکه دارد. می‌توانیم با محاسبات تحلیلی نیز به شکل به دست آمده از شبیه‌سازی عددی نزدیک شویم:

$$\begin{cases} I_{in} & = -g \int_{a_{min}}^{a_{max}} p(a) f(a + I_{in}) da \\ f(a) & = \frac{\sqrt{a^{۲} - ۱}}{۲\pi} \end{cases} \tag{۵-۳}$$

در رابطه ۳-۵ ، $f(a)$ تابع فعالیت (تعداد تیزه بر ثانیه) تک نورون بر حسب جریان کل ورودی آن است. همچنین I_{in} مجموع همه‌ی جریان‌های داخلی جاری در شبکه است.

حل این رابطه کمی دشوار است زیرا جریان کل را بر حسب خودش محاسبه کرده است. اما از آنجایی که در انتگرال‌ده تنها یک جابجایی ثابت رخداده است؛ صورت کلی پاسخ انتگرال تغییر نمی‌کند و به صورت زیر به دست خواهد آمد.

$$I_{in} = \frac{-g}{۲}(-a\sqrt{-۱ + a^{۲}} + log(a + \sqrt{-۱ + a^{۲}}))\Big|_{a_{min}+I_{in}}^{a_{max}+I_{in}} \tag{۶-۳}$$

بی‌تردید حل معادلهٔ اخیر آشکار کننده‌ی مقدار I_{in} خواهد بود البته به شرط قابلیت حل!

ظاهرا گرفتن انتگرال و حل دقیق معادله کار ساده‌ای نیست. یک پیشنهاد راه حل عددی برای این مسئله این است که تابع فعالیت را با رابطه‌ی پارامتری زیر هم‌خوانی بدهیم و مقدار $I_{۰}$ را پیدا کنیم.

$$f(I) = a\frac{\sqrt{[b(I - I_{۰})]^{۲} - ۱}}{۲\pi} \tag{۷-۳}$$

به عنوان مثال برای شکل ۳-۲ مقدار جریان داخلی در حدود ۸/۴۷ به دست آمده است.

هر چند این روش مقدار جریان داخلی را نسبتا خوب تخمین می‌زند اما اجازه بدهید همچنان به عنوان یک راه‌حل **سرانگشتی** یاد کنیم. زیرا شامل توصیف محدودی است از هر آن چه که در سامانه رخ می‌دهد.

۳-۴-۴ پهن‌کردن قالی صفحه‌ی فاز

در قسمت‌های پیشین تنها به مطالعهٔ تاثیر ضریب اتصال در تغییرفاز پرداختیم و زمان تاخیر را تنها در $t_d = ۰/۱s$ خلاصه کردیم. حال اجازه دهید تا به تاخیر نیز اجازه‌ی تغییر دهیم. در ادامه‌ی این قسمت از نوشتارمان، به فرش‌کردن صفحه‌ی فاز خود خواهیم پرداخت. امید است که چهره‌ی تمام نمای سامانه بر صورت این قالی نقش بندد.

قالی انحراف از معیار میدان

در شکل ۳-۱ه مشاهده می‌کنیم که شدت هم‌گامی در هر کدام از هنگردهای سامانه چقدر است. بنظر می‌رسد که با افزایش زمان تاخیر و ضریب تاثیر همگامی قدرت پیدا می‌کند و هر دو در ظهور این رفتار شریک هستند. دقیقا به سان قالی مدل انباشت‌وشلیک که هم‌گامی با دو مشخصه‌ی یاد شده، رابطه‌ای مستقیم داشت.

۳-۴-۵ امکانی برای توصیف تحلیلی؟

همان‌طور که پیشتر گفتیم برونل در مقاله‌ی خود [۲۱] راه‌حلی تحلیلی برای توصیف گذر فاز در مدل انباشت‌وشلیک ارائه کرده است. شاید بتوان به پیروی از او راه‌حلی برای مدل چرخنده ارائه کرد اما حضور جمله‌ی غیرخطی $-cos(\theta)$ حل مسئله‌ی چرخنده را بسیار دشوار کرده است. تا تاریخ نوشتن این بند، راه‌حلی تحلیلی با برداشت از برونل برای توصیف گذرفاز آن نیافته‌ایم. حال که با ابعاد دشوار مسئله روبرو شده‌ایم؛ اجازه دهید که زمین بازی خود را عوض کنیم.

یک قدم با احتمال شکست بالا برمی‌داریم و جمله‌ی غیرخطی درون برهم‌کنش را به کلی حذف می‌کنیم. اگر کیفیت گذارفاز هم‌چنان پابرجا بود؛ مسئله‌ی تحلیلی ما بسیار ساده و هموار می‌شود. اگر این اتفاق نیافتد جمله‌ی کسینوسی را باز می‌گردانیم و کلید حل مسئله را فقط در آن جستجو می‌کنیم.

اجازه بدهید تا از این پس مدل معرفی شده را با نام «**شبکه نورون‌های ساده**» صدا کنیم. در بخش بعد به شبیه‌سازی این مدل می‌پردازیم. باشد که گذرفاز هم‌چنان اتفاق افتد.

فصل ۴

شبکه نورون‌های ساده

حل مسئله‌ی مدل چرخنده بسیار دشوار است و تا تاریخ نوشتن این بند، راه‌حلی تحلیلی برای توصیف گذرفاز آن نیافته‌ایم. علت این موضوع هم حضور جمله‌ی غیرخطی $-cos(\theta)$ در جمله‌ی برهم‌کنش‌های آن‌هاست. حال که با ابعاد دشوار مسئله روبرو شده‌ایم؛ اجازه دهید که زمین بازی خود را عوض کنیم. می‌پرسیم که آیا کیفیت گذرفاز از ناهم‌گامی به هم‌گامی به این جمله وابسته است؟ بی‌تردید پاسخ این سوال را نخواهیم فهمید؛ مگر آن که شبکه‌ی جدیدی مطابق درخواست خود ابداع و شبیه‌سازی کنیم. این مدل را در جعبه‌ی زیر تعریف کرده‌ایم. عملا تنها کاری که کرده‌ایم حذف جمله‌ی غیر خطی است. به این ترتیب مدل بسیار ساده شده است.

$$\begin{cases} \dot{\theta}_i = I_i - gE, \quad \theta_i \leqslant \pi \\ \dot{E} = M - \alpha E \\ \dot{M} = -\alpha M + \frac{\alpha^۲}{N} \sum_{n|tn<t} \delta(t - t_n - t_d) \end{cases} \tag{۱-۴}$$

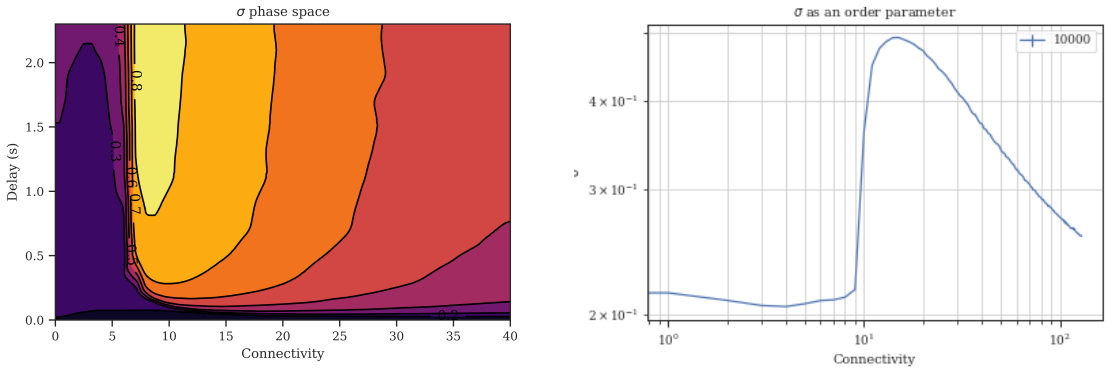
- θ_i: مشخص کننده‌ی فاز هر نورون. این فاز میان دو لبه در حال حیات است. کوچکترین کران بالای آن همان حالت آستانه در π است و بزرگترین کران پایین آن نگه‌دارنده‌ای است که از ریزش نورون‌ها جلوگیری می‌کند.
- E: میدانی است که شدت فعالیت شبکه را نشان می‌دهد.
- M: یک پارامتر فرعی که در حل معادله دیفرانسیل مرتبه دوم به دو معادلهٔ تحول مرتبه اول ما را یاری کرده است.

همچنین دقت کنیم که اگر چه این مدل کاهش یافته‌ای از مدل چرخنده است اما در صورت کاستن مدل انباشت‌وشلیک هم به همین جملات برهم‌کنشی می‌رسیدیم. تنها تفاوت در آن می‌شد که فاصله‌ی بین حالت تیزه (π) و بازنشانی (صفر) در حالت ابداعی π برابر مدل کاسته‌شده‌ی انباشت‌وشلیک می‌شد.

۴-۱ شبیه‌سازی

برای مدل توصیف شده‌ی بالا شبیه‌سازی خود را با تنظیمات زیر به اجرا گذاشتیم.

* $\alpha = ۲۰\ s^{-۱}$
* جریان‌های تصادفی خارجی نورون‌ها از اعضای بازه‌ی (۹/۵, ۱۳/۵) انتخاب می‌شوند.
* $N = ۱۰۰۰۰$
* $t_d = ۰/۱\ s$



(آ) پهنای جریان یک سامانه ساده با ده هزار نورون (ب) صفحه‌ی فاز شبکه نورون‌های ساده: پیوست: آ–۲

۴–۲ نتایج

۴–۲–۱ در جستجوی تغییرفاز

قابل توجه است که کیفیت تغییرفاز با حذف جمله‌ی ذکر شده تغییر نکرد و تنها مکان و ارتفاع انحراف از معیار جریان داخلی است که دست خور تغییر شده است – شکل ۴–۱آ. نکته‌ی جالب‌تر اینجاست که صفحه‌ی فاز هم تقریبا همان رنگ‌آمیزی را دارد که در برای نورون‌های دیگر دیدیم. به جهت اهمیت نکات پیشین اجازه بدهید ملاحظات را یک بار دیگر اینجا آوریم:

۱. به نظر می‌رسد که با افزایش زمان تاخیر و ضریب تاثیر همگامی قدرت پیدا می‌کند

۲. برای ضریب‌تاثیر یک گذرفاز کاملا ناگهانی و برای تاخیر زمانی که گذرفازی ملایم!

۳. اگر چه تاخیر در جابجایی ضریب‌تاثیر بحرانی تغییری ایجاد نکرده است اما هم‌گامی را قدرت می‌بخشد.

۴. اگر ضریب‌تاثیر را بسیار بزرگ کنیم و فاصله‌ی زیادی از ضریب‌تاثیر بحرانی بگیریم؛ شدت هم‌گامی ضعیف می‌شود. این نکته می‌تواند به علت رشد جمعیت نورون‌های خاموش باشد که از تیزه‌زدن محروم می‌شوند و نمی‌توانند خیزهای بلندی را به جریان داخلی القا کنند.

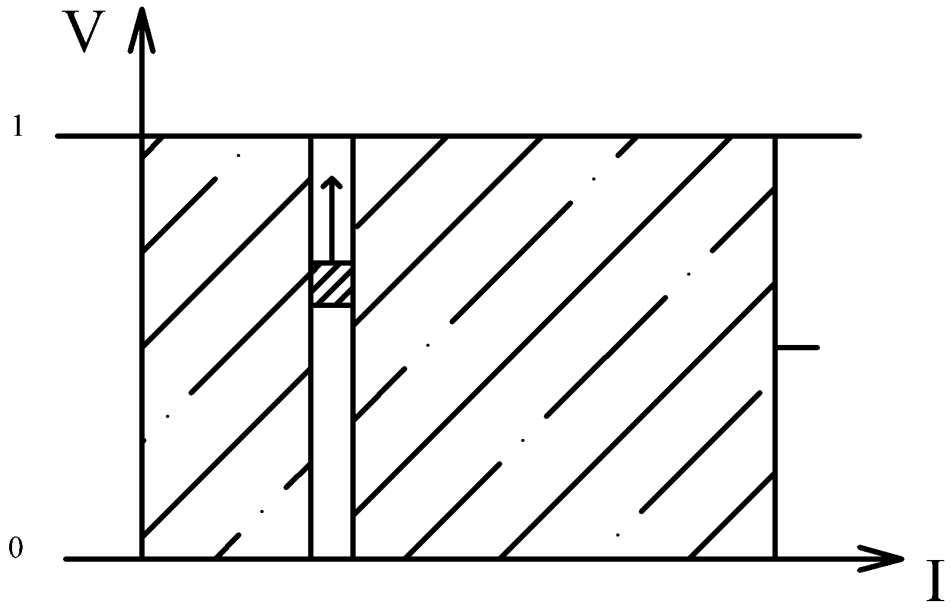
تاملی برای گام بعدی

به نظر می‌آید قدمی که به سمت حذف جمله‌ی غیرخطی داشتیم کاملا مفید بود. زیرا مدل را با حفظ خاصیت گذر فاز، ساده‌تر کرد. به راستی چه اتفاقی دارد در پس پرده می‌افتد؟ سامانه‌ی هم‌گام با ناهم‌گام چه تفاوت‌هایی دارد؟ پاسخ به این سوال‌ها با مطالعهٔ اعداد خروجی کاری دشوار است زیرا همواره همراه با حدس و گمان ذهنی است. بیاید قدم بعدی را به سمت «تصویرسازی» برداریم.

فصل ۵

تصویرسازی سامانه‌ها

در فصل‌های گذشته تنها با ثبت عددی خروجی‌های مدلسازی سروکار داشتیم. خروجی‌ها تلاش داشتند تا رفتار سامانه را به ما بشناسانند. ما نیز تلاش کردیم تا بررسی اشکال و نمودارها آنچه را که در پس‌پرده [جعبه سیاه] می‌گذرد؛ «حدس» بزنیم. به همین دلیل برآن شدیم تا روشی برای به تصویر کشیدن سامانه ابداع کنیم تا از لحظه‌لحظه‌ی سامانه با خبر شویم. شکل ۵-۱



شکل (۵-۱) تصویر فضای فاز سامانه نورونی انباشت‌وشلیک

هر نقطه در این صفحه نمایانگر حالت یک نورون است. محور افقی نشان دهنده‌ی جریان ثابت خارجی است که به هر نورون در ابتدا متصل کرده‌ایم و محور عمودی نشان دهنده‌ی پتانسیل نورون است. پویایی شکل ۵-۱ به ما نشان خواهد داد که چگونه سامانه در زمان متحول می‌شود. طبق توصیفی که از پویایی سامانه‌ی خود داریم؛ توقع داریم که نورون‌هایی که از آستانه عبور کردند؛ مجددا از محور صفر پیدا شوند.

صندوق پیام‌ها

محسن : سلام استاد خوبین؟

استاد امروز وقت دارید باهم صحبت کنیم؟

محسن

استاد : سلام

آره، هستم. یک خوبه؟

سامان

من : خیلی خوب می‌شه!

من چندتا انیمشین درست کردم؛ همون ساعت اکران می‌کنم :)

فقط امکانش هست مجازی صحبت کنیم؟ چون من با دانشگاه فاصله دارم.

محسن (یکشنبه، ۲۲ اسفند ۱۴۰۰)

[*این جلسه شامل بحث خیلی مفیدی بود. از گوشه‌گوشه‌ی این پویانمایی‌ها توانستیم گزاره‌های بسیار مفیدی را استخراج کنیم.*]

حال بیایید تا پویایی مدل‌های مختلف سامانه‌های نورونی را از این طریق رصد کنیم. به این ترتیب که برای هر کدام از نقاطی خاص از فضای فاز مربوط به آن‌ها انتخاب می‌کنیم و می‌پرسیم که سامانه چه تصویری دارد.

در شکل ۵-۲ از هر صفحه‌ی فاز ۴ نقطه به اختصار انتخاب شده است.

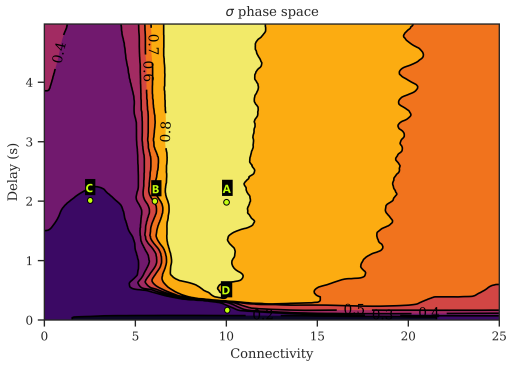
آ. نقطه‌ی A :معرف نقطه‌ای است که سامانه دقیقا در حالت هم‌گام قرار دارد.

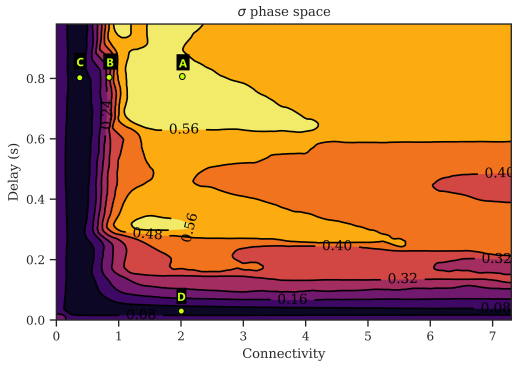
ب. نقطه‌ی B :نقطه‌ای میانی بین فاز هم‌گام و ناهم‌گام است.

ج. نقطه‌ی C : حالتی ناهم‌گام است با این وجود که تاخیر آکسونی در سامانه وجود دارد اما هم‌گامی رخ نمی‌دهد.

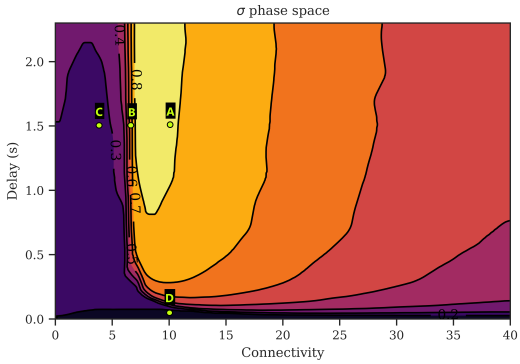
د. D : حالتی از سامانه است که ضریب تاثیر قابل ملاحظه‌ای دارد اما تاخیر در سامانه نزدیک به صفر است.

برای مشاهده‌ی کامل پویانمایی‌هاپوشه‌ی مربوط به هر مدل مراجعه کنید: پوشه‌ی پویانمایی





(آ) نقاط انتخاب شده در فضای فاز شبکه‌ی نورون‌های انباشت‌وشلیک (ب) نقاط انتخاب شده در فضای فاز شبکه‌ی نورون‌های چرخنده



(ج) نقاط انتخاب شده در فضای فاز شبکه‌ی نورون‌های ساده

شکل (۵-۲)

۵-۱ پویانمایی

۵-۱-۱ مدل انباشت‌وشلیک

شکل ۵-۳ نمایی از ۶ برداشت از پویانمایی سامانه‌ی نورون‌های انباشت‌وشلیک ارائه شده است. شرایط اولیه این سامانه به گونه‌ای است که همه‌ی نورون‌ها در فضای فاز به صورت یکنواخت توزیع شده‌اند. تو گویی حالت اولیه شبکه یک مستطیل یکنواخت را روایت می‌کرده است.

بیاید ورقی بزنیم و به نکاتی این زنجیره از اشکال با خود دارد بپردازیم:

تجمع فازها نمای سامانه در این حالت بسیار قابل توجه است. همه‌ی نورون‌هایی که جریان خارجی مشخصی دارند؛ در یک فاز جمع شده‌اند.

نورون‌های همسایه فاصله‌ی فاز هر دو نورون با جریان خارجی نزدیک به هم رابطه‌ای خطی دارد. این پیشامد نیز با بازنویسی معادلات دیفرانسیل قابل درک است.

$$\dot{v_a} = a - v_a - gE \tag{۵-۱}$$

$$\Delta\dot{v_a} = \Delta a - \Delta v_a \tag{۵-۲}$$

$$\frac{\Delta\dot{v_a}}{\Delta a} = ۱ - \frac{\Delta v_a}{\Delta a} \tag{۵-۳}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta v_a}{\Delta a} = ۱ + C.e^{-t} \tag{۵-۴}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta v_a}{\Delta a} \to ۱ \tag{۵-۵}$$

پس این معادلات کاملا توضیح می‌دهد که فارغ از شرط اولیه در صفحه‌ی فاز باید انتظار یک خط با شیب یک داشته باشیم که همه‌ی نورون‌ها در آن جمع شده‌اند. در کنار این شرط دوره‌ای هم باید در نظر گرفته شود که باعث شده است این خط بریده‌بریده شود.

جفت شدن سرعت‌ها هم‌گامی در این شکل به معنای جفت شدن سرعت‌های نورون‌ها با یکدیگر است و نه فاز آن‌ها. آن‌ها با هم به سمت آستانه حرکت می‌کنند و باهم عقب‌نشینی می‌کنند اما دوشادوش یک‌دیگر کمتر قرار می‌گیرند.

بیاید به معادلات قسمت قبل دوباره نگاه کنیم. می‌توانیم نتیجه بگیریم تفاوت سرعت‌های دو نورون با جریان‌های پشت سرهم صفر خواهد بود.

$$\Delta\dot{v_a} = \Delta a - \Delta v_a \tag{۵-۶}$$

$$= \Delta a(۱ - \frac{\Delta v_a}{\Delta a}) \to ۰ \tag{۵-۷}$$

به این ترتیب می‌توان فهمید این فازها نیستند که باهم جفت می‌شوند ($\Delta v_a \nrightarrow ۰$) بلکه این سرعت‌ها هستند که بهم قفل می‌شوند ($\Delta\dot{v_a} \to ۰$)

۵-۱-۲ مدل چرخنده

شکل ۵-۴ نمایی از ۶ برداشت از پویانمایی سامانه‌ی نورون‌های ساده ارائه شده است. شرایط اولیه این سامانه به گونه‌ای است که همه‌ی نورون‌ها در فضای فاز به صورت یکنواخت توزیع شده‌اند. تو گویی حالت اولیه شبکه یک مستطیل یکنواخت را روایت می‌کرده است.

تشابهات به نظر می‌آید نکاتی که مربوط به حالت هم‌گامی در قسمت انباشت‌وشلیک روایت کردیم (به جز ویژگی‌هایی جزئی) برای این سامانه هم برقرار است.

منحنی جاذب توجه داشته باشیم که در برخی از قسمت‌های شکل، نورون‌ها روی منحنی‌هایی تجمع کرده‌اند. این منحنی‌ها را می‌توان با نوشتن معادلات توصیف کرد:

$$\dot{\theta_a} = a - Cos(\theta_a) - gE \tag{۸-۵}$$

$$\Delta\dot{\theta_a} = \Delta a - \Delta Cos(\theta_a) \tag{۹-۵}$$

$$\frac{\Delta \dot{v_a}}{\Delta a} = ۱ - Sin(\theta_a)\frac{\Delta\theta_a}{\Delta a} \tag{۱۰-۵}$$

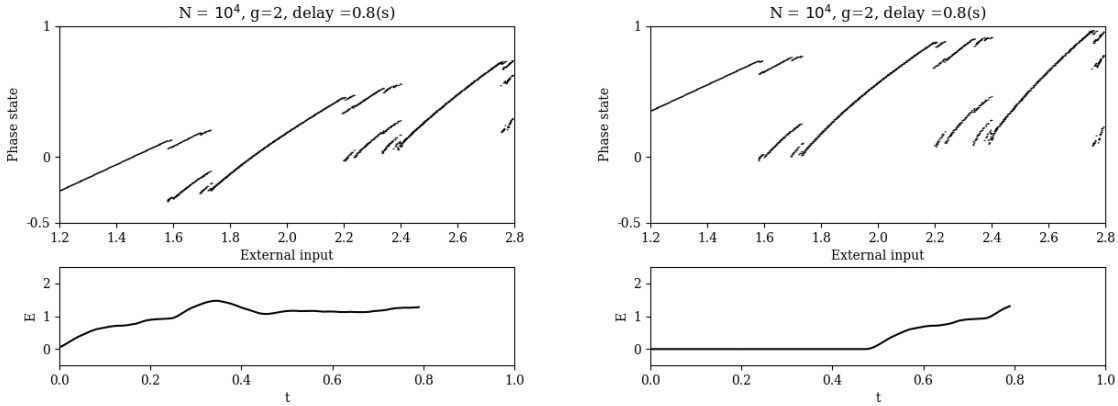
$$\frac{\Delta \dot{v_a}}{\Delta a} = ۰ : ۱ - Sin(\theta_a)\frac{\Delta\theta_a}{\Delta a} = ۰ \tag{۱۱-۵}$$

$$\Rightarrow \Delta\theta = -\frac{\Delta a}{Sin(\theta)} \tag{۱۲-۵}$$

$$= -Cosec(\theta_a)\Delta a \tag{۱۳-۵}$$

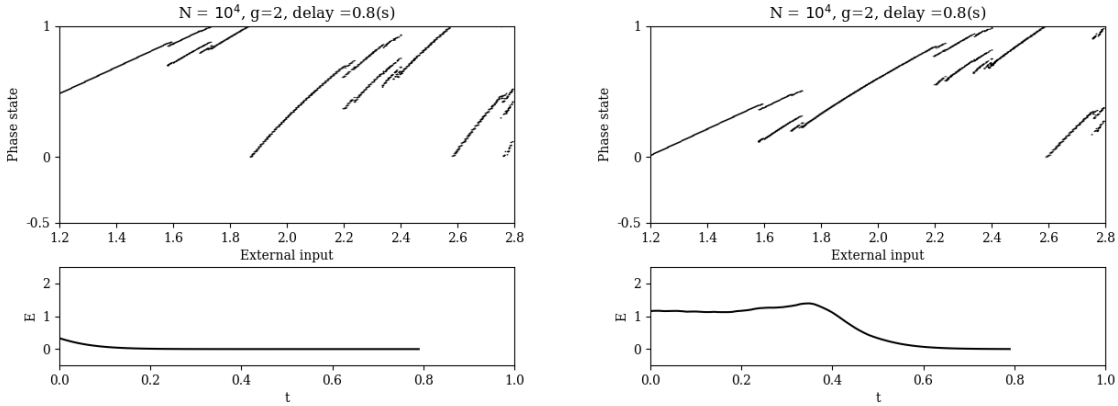
همان طور که معادلات نشان می‌دهد منحنی‌های تجمع بسیار شبیه به عکس سینوس هستند.

پراکندگی در اطراف منحنی شاید بپرسیم که چرا در ناحیه‌های دیگر صفحه‌ی فاز چرا نورون‌ها تجمع نکرده‌اند. می‌تواند به این علت باشد که منحنی‌های یاد شده به ازای آن جریان‌های خارجی جاذب نیستند. هر چند حضور شرط دوره‌ای نیز بی‌تاثیر نیست.



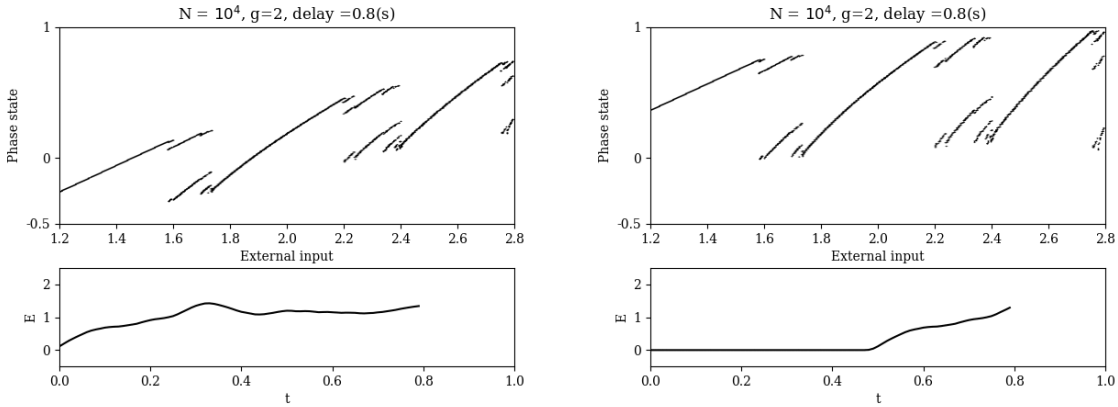
(آ) ثانیه صفرم

(ب) ثانیه ۰/۵



(ج) ثانیه ۱

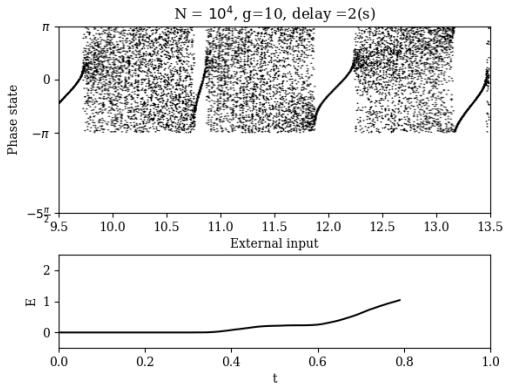
(د) ثانیه ۱/۵



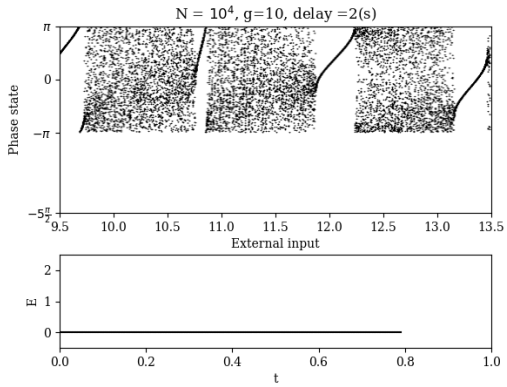
(ه) ثانیه ۲

(و) ثانیه ۲/۵

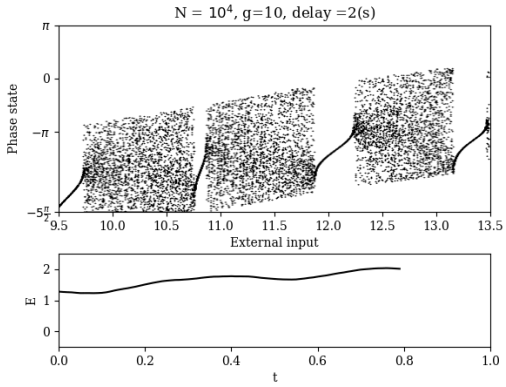
شکل (۵-۳) نمایی از پویایی سامانه‌ی نورونی انباشت‌وشلیک در نقطه‌ی A - این پویانمایی پس گذشت ۲۰۰ ثانیه از تاریخچه‌ی سامانه انجام شده است. شرایط اولیه به گونه‌ای است که نورون‌ها با توزیع یکنواخت در صفحه‌ی فاز پراکنده شده‌اند.*دقت کنیم که محور زمان نمودار E، نشان دهنده‌ی اتفاقات ۰/۸ ثانیه‌ی گذشته است و نه از ابتدای سامانه.



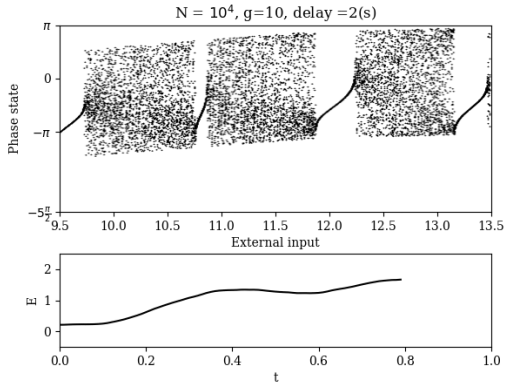
(ب) ثانیه ۰/۵



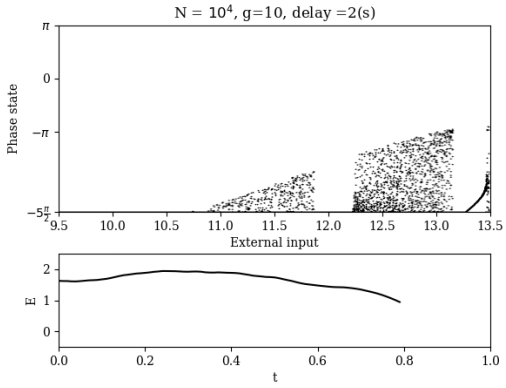
(آ) ثانیه صفرم



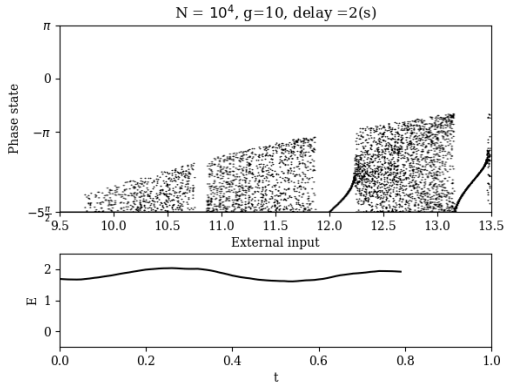
(د) ثانیه ۱/۵



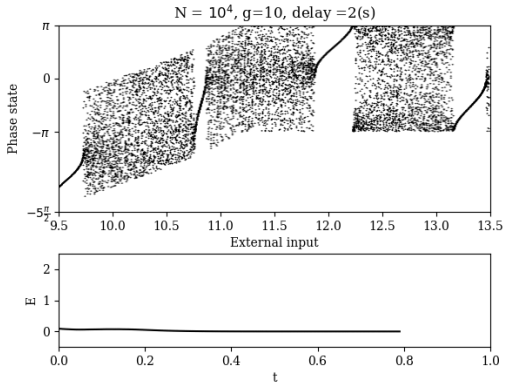
(ج) ثانیه ۱



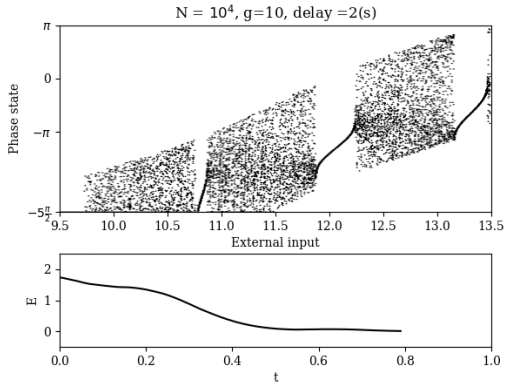
(و) ثانیه ۲/۵



(ه) ثانیه ۲



(ح) ثانیه ۳/۵



(ز) ثانیه ۳

شکل (۵-۴) نمایی از پویایی سامانه‌ی نورونی چرخنده در نقطه‌ی A - این پویانمایی پس گذشت ۲۰۰ ثانیه از تاریخچه‌ی سامانه انجام شده است. شرایط اولیه به گونه‌ای است که نورون‌ها با توزیع یکنواخت در صفحه‌ی فاز پراکنده شده‌اند.

۵-۱-۳ مدل نورونی ساده

در شکل ۵-۵ نمایی از ۶ برداشت از پویانمایی سامانه‌ی نورون‌های ساده ارائه شده است. شرایط اولیه این سامانه به گونه‌ای است که همه‌ی نورون‌ها در فضای فاز به صورت یکنواخت توزیع شده‌اند. تو گویی حالت اولیه شبکه یک مستطیل یکنواخت را روایت می‌کرده است.
این پویانمایی نشانی‌های بسیار خوبی به ما می‌دهد تا در بخش‌های بعدی هم‌گامی را به شکل تحلیلی نیز توضیح دهیم. شاید این واضح‌ترین تصویری است که می‌توانیم در مورد شکل‌گیری همگامی در میان شبکه نورونی خود ببینیم.

منحنی جاذب؟ چون این مدل جمله‌ای از جنس مهار ذاتی درون معادلات دیفرانسیل خود ندارد؛ شکل نهایی آن دارای منحنی جاذب نیست و چگالی یک یکنواختی دارد.

مرزهای سامانه در هر مرحله از فراز و فرود سامانه، شکل مستطیلی آن تبدیل به متوازی‌الاضلاع می‌شود و پس از عبور از آستانه، شرط دوره‌ای شکل اولیه آن را به او برمی‌گرداند.

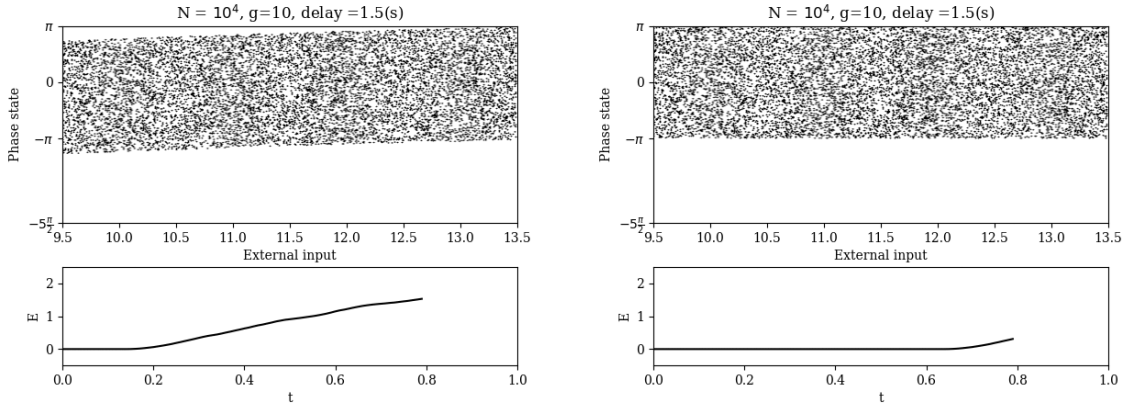
شروع هم‌گامی به نظر می‌آید شروع هم‌گامی از ضریب تاثیری است که موفق می‌شود نورون‌هایی که کمترین جریان خارجی را دارند از محور آستانه پس بزنند. به طوری که در چند لحظه‌ی متوالی از تیزه زدن باز بمانند.

مرزبندی مشابه اگر به مرزهای فضای حالت‌های نورون‌های چرخنده و انباشت‌وشلیک توجه کنیم؛ متوجه می‌شویم که آن‌ها نیز زیرشکلی از این مستطیل را در اختیار داشتند و تحول آن‌ها از ناهم‌گامی به هم‌گامی باید شبیه شکل نورون‌های ساده باشد.

۵-۲ جمع‌بندی

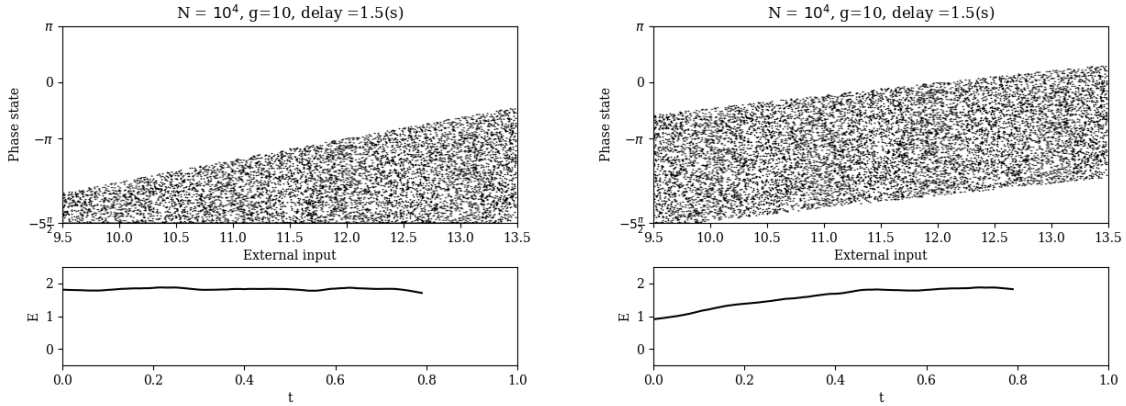
همان‌طور که انتظار می‌رفت تصویرسازی کمک شایانی در فهم سامانه‌ها به ما ارائه داد و باعث شد تفاوت‌ها و شباهت‌های زیادی را بین سامانه‌ها دریافت کنیم. از مهم‌ترین شباهت‌هایی که بین مدل‌های نورونی پیدا کردیم؛ «جفت‌شدن سرعت‌ها» و «مرزهای مستطیل‌گون» اهمیت بسیار زیادی دارند. زیرا به نظر می‌آید که هم‌گامی ارتباط نزدیکی با هر کدام از این خواص دارد و شاید اصلا ناشی از این دو اتفاق هندسی باشد.

از آن‌جا که مدل نورونی ساده در این دو خاصیت با مدل‌های قبلی شباهت دارد و هم‌چنین خاصیت هم‌گامی را به قوت همراه خود دارد؛ اجازه دهید تا محاسبات تحلیلی خود را با آن آغاز کنیم. باشد که راهنمایی برای تحلیل مدل‌های دیگر نیز پیدا کنیم.



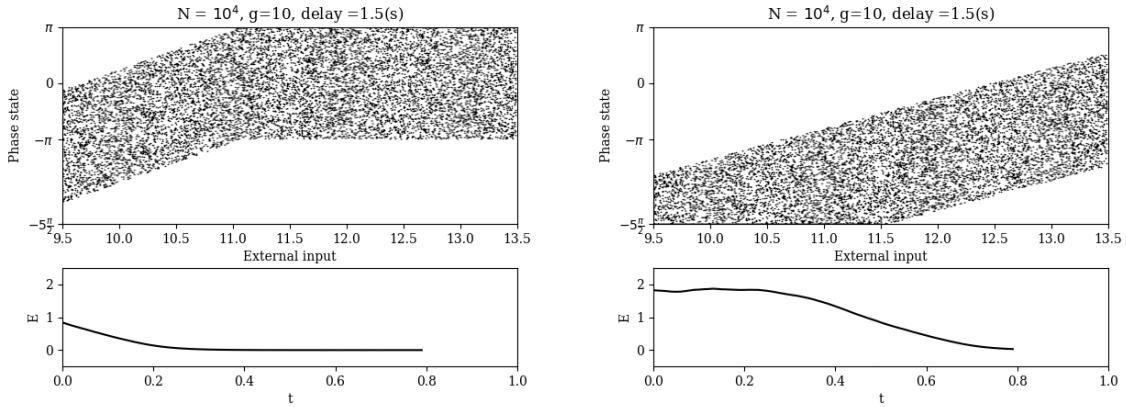
(آ) ثانیه صفرم

(ب) ثانیه ۰/۵



(ج) ثانیه ۱

(د) ثانیه ۱/۵



(ه) ثانیه ۲

(و) ثانیه ۲/۵

شکل (۵-۵) نمایی از پویایی سامانه‌ی نورونی ساده در نقطه‌ی A - این پویانمایی پس گذشت ۲۰۰ ثانیه از تاریخچه‌ی سامانه انجام شده است. شرایط اولیه به گونه‌ای است که نورون‌ها با توزیع یکنواخت در صفحه‌ی فاز پراکنده شده‌اند.

فصل ۶

تلاش برای توصیف

از آنجا که معادلات پاره‌ای شبکه‌های نورونی ما شامل جزئیات بسیار است؛ بدیهی است که نوشتن پاسخ تحلیلی برای توصیف دقیق آن آسان نباشد. در این بخش تلاش می‌کنیم که از جهات متفاوت به مسئله‌ی خود حمله کنیم؛ باشد که بتوانیم صورتی کلی برای مسئله‌ی خود ارائه دهیم. شروع ما با اطلاعات ساده‌ای است که در ابتدا می‌دانیم.

می‌دانیم هر نورونی که از حالت $\theta = \pi$ عبور می‌کند [تیزه می‌زند] باعث می‌شود تا سهمی از جریان با کیفیت $p(t) := \alpha^{۲} t \cdot exp(-\alpha t)$ به جریان درونی کل سامانه $E(t)$ اضافه شود.

$$E(t) = \frac{۱}{N} \int_{۰}^{\infty} \int J_a(\pi, t-d-u) da \cdot \alpha^{۲} u\, e^{-\alpha u} du \qquad (۱-۶)$$

اما جریان برای هر نورون با ورودی a به طریق زیر است:

$$J_a(\theta, t) = n_a(\theta, t) \cdot \dot{\theta}_a \qquad (۲-۶)$$

این رفتار به خوبی نشان می‌دهد جریان فقط در ناحیه‌ی $\theta \leqslant \pi$ وجود دارد. زیرا ورود نورون به ناحیه‌ی مثبت‌تر را ممنوع کرده‌ایم. بی‌تردید برای فهمیدن چگونگی تغییر جریان در ناحیه‌های میانی باید از معادلهٔ پخش استفاده کنیم.

$$\frac{\partial n_a}{\partial t} = -\frac{\partial J_a}{\partial \theta} \qquad (۳-۶)$$

$$= -\frac{\partial n_a}{\partial \theta} \cdot \dot{\theta}_a \qquad (۴-۶)$$

۶-۱ حل معادلهٔ شبکه‌ی ساده

اجازه بدهید تا اولین تلاش خود را از ساده‌ترین نوع شبکه‌ها شروع کنیم. شبکه‌ای که به جز جریان داخلی و جریان تصادفی اولیه ورودی دیگری ندارد. پس خواهیم داشت:

$$\begin{cases} E(t) = \frac{1}{N}\int_0^\infty \int n_a(\pi, t-d-u)\cdot\big[a - gE(t-d-u)\big]da\cdot\alpha^2 u\, e^{-\alpha u}du \\ \frac{\partial n_a}{\partial t} = -\frac{\partial n_a}{\partial \theta}\cdot(a - gE(t)) \end{cases} \tag{۶-۵}$$

همان‌طور که از معادلات بالا مشخص است ما با یک دستگاه مواجه هستیم که دستور تغییر E را به خود E در زمان‌های گذشته مربوط کرده است. گذشته از آن که تغییر عبارت n_a نیز بر طبق معادلهٔ پخش به E وابسته است! همان‌طور که خواننده مدنظر دارد؛ ما با معادلاتی طرف هستیم که بسیار گره‌خورده‌اند.

بی‌تردید می‌توان از زوایای متفاوت به مسئله نگاه کرد و راه‌حل‌های زیادی را پیشنهاد داد. ما در اینجا پیشنهاداتی را که در زمان مواجهه اولیه با این دستگاه داشتیم در زیر آوردیم:

۱. انتگرال اول را به صورت بازگشتی در خودش جاگذاری کنیم.

۲. از آنجا که میدان به گونه‌ای متناوب عمل می‌کند؛ یک پیشنهاد خوب می‌تواند آن باشد که بسط فوریه‌ی آن را بنویسیم.

$$E(t) = \sum c_i \cdot cos(\omega_i t) \tag{۶-۶}$$

که اگر ثابت کنیم تحت شرایطی یکی از ضرایب c_i از بقیه ضرایب بزرگتر می‌شود؛ آنگاه مساله‌ی ما حل می‌شود.

۳. دشواری مساله از در هم تنیدگی زمانی معادلات برآمده است. مسئله را در حالت آماری بررسی کنیم و حالت پایستار [۱] آن را پیدا کنیم. سپس در مرتبه‌ی بالاتر یک نوفه‌ی کوچک به میدان اضافه کنیم و مشاهده کنیم که پاسخ معادلات چگونه تغییر می‌کنند.

[۱] حالتی است که کمیت‌های بزرگ مقیاس با زمان تغییر نمی‌کنند.

۶-۱-۱ روش بازگشتی

نکته‌ای که برای ما حل معادلات را دشوار می‌کند تبعیت E از خودش است. بگذارید به شیوه‌ای که خود معادله درخواست دارد عمل کنیم. یعنی E را مجددا در سمت راست معادله جاگذاری کنیم. برای راحت‌تر شدن محاسبات ابتدا دو متغیر کمکی زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{J}(\pi, t-d-u) \equiv \int n_a(\pi, t-d-u) a \cdot da \tag{۶-۷}$$

$$\mathcal{N}(\pi, t-d-u) \equiv \int n_a(\pi, t-d-u) \cdot da \tag{۶-۸}$$

$$\mathcal{P}(u) \equiv \alpha^{۲} u\, e^{-\alpha u} \tag{۶-۹}$$

عبارت $\mathcal{J}(\pi, u)$ به معنای جمع جریان تصادفی نورون‌هایی است که در زمان u در آستانه قرار دارند. همچنین عبارت $\mathcal{N}(\pi, u)$ به معنای تعداد همین نورون‌هاست.
حال با نمادهای بالا شروع به بازنویسی جملات پیشین می‌کنیم:

$$E(t) = \frac{۱}{N} \int_{۰}^{\infty} \mathcal{J}(\pi, t-d-u_۱) \cdot \mathcal{P}(u_۱) du_۱ \tag{۶-۱۰}$$

$$- \frac{g}{N} \int_{۰}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-d-u_۱) \cdot \mathcal{P}(u_۱) E(t-d-u_۱) du_۱ \tag{۶-۱۱}$$

جمله‌ی اول را می‌توانیم با عبارت دیگری خلاصه‌سازی می‌کنیم:

$$\mathcal{A}(t) \equiv \frac{۱}{N} \int_{۰}^{\infty} \mathcal{J}(\pi, t-d-u_۱) \cdot \mathcal{P}(u_۱) du_۱ \tag{۶-۱۲}$$

جمله‌ی دوم که حاوی عبارتی از جنس میدان است می‌تواند با معادله‌ای مشابه بازنویسی شود. به این ترتیب برای آن خواهیم داشت:

$$E(t-d-u_۱) = \frac{۱}{N} \int_{۰}^{\infty} \mathcal{J}(\pi, t-۲d-u_۱-u_۲) \cdot \mathcal{P}(u_۲) du_۲ \tag{۶-۱۳}$$

$$- \frac{g}{N} \int_{۰}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-۲d-u_۱-u_۲) \cdot \mathcal{P}(u_۲) E(t-۲d-u_۱-u_۲) du_۲$$

(۶-۱۴)

با جاگذاری معادل‌سازی‌های ذکر شده برای رابطه‌ی ۶-۱۱ جملات آن را بازنویسی می‌کنیم تا به این ترتیب مرحله‌ی اول روش بازگشتی به سرانجام برسد. برای مراحل بعدی نیز باید همین معادل‌سازی‌ها را تکرار کنیم. این روند باعث می‌شود تا E(t) برحسب بسط جملاتی نوشته شود که حاصل اتفاقات زمان‌های گذشته هستند.

$$E(t) = \mathcal{A}(t-d) - g\int_{۰}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-d-u_۱)\cdot \mathcal{P}(u_۱)E(t-d-u_۱)du_۱ \tag{۶-۱۵}$$

$$= \mathcal{A}(t-d) - g\int_{۰}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-d-u_۱)\cdot \mathcal{P}(u_۱)\cdot \left[\mathcal{A}(t-۲d-u_۱) - g\int_{۰}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-d-u_۱-u_۲)\cdot \mathcal{P}(u_۲)E(t-۲d-u_۱-u_۲)du_۲\right]du_۱ \tag{۶-۱۶}$$

$$= \mathcal{A}(t-d) - g\int_{۰}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-d-u_۱)\cdot \mathcal{P}(u_۱)\cdot \mathcal{A}(t-۲d-u_۱)du_۱ \tag{۶-۱۷}$$

$$+ g^۲\int_{۰}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-d-u_۱)\cdot \mathcal{P}(u_۱)\int_{۰}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-۲d-u_۱-u_۲)\cdot \mathcal{P}(u_۲)E(t-۲d-u_۱-u_۲)du_۲du_۱ \tag{۶-۱۸}$$

$$= \mathcal{A}(t-d) - g\int_{۰}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-d-u_۱)\cdot \mathcal{P}(u_۱)\cdot \mathcal{A}(t-۲d-u_۱)du_۱ \tag{۶-۱۹}$$

$$+ g^۲\int_{۰}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-d-u_۱)\cdot \mathcal{P}(u_۱)\int_{۰}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-۲d-u_۱-u_۲)\cdot \mathcal{P}(u_۲)\mathcal{A}(t-۳d-u_۱-u_۲)du_۲du_۱ \tag{۶-۲۰}$$

$$- g^۳\int_{۰}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-d-u_۱)\cdot \mathcal{P}(u_۱)\int_{۰}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-۲d-u_۱-u_۲)\cdot \mathcal{P}(u_۲)\int_{۰}^{\infty} \mathcal{N}(\pi, t-۳d-u_۱-u_۲-u_۳)\cdot \mathcal{P}(u_۳)E(t-۳d-u_۱-u_۲-u_۳)du_۳du_۲du_۱ \tag{۶-۲۱}$$

حال اگر عمر این سامانه کراندار باشد؛ تعداد جملات بالا محدود می‌شوند. پس اگر سامانه پیش از یک زمانی کاملا خاموش بوده باشد $E = ۰$؛ آنگاه می‌توان میدان کنونی را بر اساس جملات ضربی بین شدت جریان و تعداد نورون‌های تیزه زده پیدا کرد.
اگر چه به نظر نویسنده این راه‌حل بسیار درخشان است اما فعلا اطلاعات لازم برای ادامه‌ی آن را در اختیار نداریم. پس بهتر است آن را در گوشه‌ای نگه‌داریم تا در مراحل بعدی از آن استفاده کنیم.

۶-۱-۲ روش اختلال

محاسبه‌ی حالت پایستار - تلاش شماره‌ی ۱

به نمودار ۳-۱آ دقت کنید. در زمانی که تعداد نورون‌ها بی‌نهایت باشد؛ در فاز ناهم‌گام انحراف معیار میدان صفر خواهد شد. این به این معنی است که جریان در زمان ثابت خواهد ماند. پس بگذارید با علم بر این موضوع یک جواب معادلهٔ ۶-۵ را در حالت حدی میدان ثابت $E_۰$ معرفی کنیم.
با فرض ثابت بودن میدان، اندازه‌ی آن را محاسبه می‌کنیم. سپس مجدد به معادلات برمی‌گردیم و می‌پرسیم که در صورت جمع با یک جمله‌ی اختلالی کوچک این انحراف رشد خواهد کرد یا خیر. به عبارت دیگر آیا این جواب جاذب است.

$$\begin{cases} E_۰ = \frac{۱}{N}\int_{-\infty}^{t-d}\int n_a(\pi,u)\cdot\left[a-gE_۰\right]da\cdot\alpha^۲ u\, e^{-\alpha u}du \\ \frac{\partial n_a}{\partial t} = -\frac{\partial n_a}{\partial \theta}\cdot(a-gE_۰) \end{cases} \tag{۶-۲۲}$$

یک راه خوب برای پیشبرد سطر اول معادلات آن است که از دو طرف آهنگ تغییرشان با زمان را بپرسیم. از آنجا که سمت چپ معادله ثابت است؛ سمت راست هم باید جوابی مشابه را حکایت کند.

$$۰ = \frac{dE_۰}{dt} = \frac{\alpha^۲(t-d)e^{-\alpha(t-d)}}{N}\cdot\left[-gE_۰\cdot\int n_a(\pi,t-d)da + \int n_a(\pi,t-d)\cdot a\,da\right] \tag{۶-۲۳}$$

مشخص است که کدام جمله از جملات ضربی بالا صفر است. پس برای $E_۰$ خواهیم داشت:

$$E_۰ = \frac{۱}{g}\cdot\frac{\int n_a(\pi,t-d)\cdot a\,da}{\int n_a(\pi,t-d)da} \tag{۶-۲۴}$$

حال برای ادامه‌ی فرآیند نیاز داریم تا عبارت حاکم بر $n_a(\pi, t-d)$ را به دست آوریم. اگر فرض کنیم که نورون با جریان خارجی a، در زمان صفر در فاز $\theta_۰$ حضور داشته؛ جواب پیشنهادی ما برای چگالی حضور نورون از جنس تابع دلتاست:

$$n_a(\theta, t) = \delta(\theta - \theta_a(t)) \tag{۶-۲۵}$$

$$= \delta(\theta + \theta_۰ - (a - gE_۰)t + ۲\left\lfloor K_a^{(t)} \right\rfloor \pi) \tag{۶-۲۶}$$

$$= \delta(\theta - (a - gE_۰)t + ۲\left\lfloor K_a^{(t)} \right\rfloor \pi + \theta_۰) \tag{۶-۲۷}$$

$$\Rightarrow n_a(\pi, t) = \delta((۲\left\lfloor K_a^{(t)} \right\rfloor + ۱)\pi - (a - gE_۰)t + \theta_۰) \tag{۶-۲۸}$$

$$\tag{۶-۲۹}$$

که در این معادلات $K_a^{(t)}$ کسری است که تعداد دور هر نورون را از آغاز تا کنون روایت می‌کند و ما مجبور به عقب کشیدن ۲π فاز کامل پس از تیزه زدن آن به تعداد $\left\lfloor K_a^{(t)} \right\rfloor$ شده‌ایم. [۲] قابل محاسبه است که عبارت کامل آن به صورت زیر است.

$$K_a^{(t)} = \frac{(a - gE_۰)t + \pi + \theta_۰}{۲\pi} \tag{۶-۳۰}$$

برای محاسبه‌ی انتگرال‌هایی که شامل این دلتای دیراک هستند؛ لازم است تا صفرهای آرگومان آن را محاسبه کنیم.

$$(۲\left\lfloor \frac{(a - gE_۰)t + \pi + \theta_۰}{۲\pi} \right\rfloor + ۱)\pi - (a - gE_۰)t + \theta_۰ = ۰ \tag{۶-۳۱}$$

$$۲\pi \times \left(\left\lfloor \frac{(a - gE_۰)t + \pi + \theta_۰}{۲\pi} \right\rfloor - \frac{(a - gE_۰)t + \pi + \theta_۰}{۲\pi} \right) = ۰ \tag{۶-۳۲}$$

$$۲\pi \times \left(\left\lfloor K_a^{(t)} \right\rfloor - K_a^{(t)} \right) = ۰ \tag{۶-۳۳}$$

این رابطه کاملا یک تابع تناوبی را توصیف می‌کند. یک تابع مقطع که در مکانی که آرگومان آن صحیح می‌شود؛ مقدار صفر به خود می‌گیرد. پس روشن است که توقع داشته باشیم. تعداد صفرهای این معادله به اندازه‌ی تعداد تناوبی است که در هر زمان در بازه‌ی جریان‌های داده شده دارد.

$$\Delta K_a^{(t)} = ۱ \tag{۶-۳۴}$$

$$\Delta K_a^{(t)} = \frac{t}{۲\pi}\Delta a \tag{۶-۳۵}$$

$$\Delta a = \frac{۲\pi}{t} \tag{۶-۳۶}$$

[۲] دقت کنیم که معادلهٔ ذکر شده برای نورون‌هایی درست است که $(a - gE_۰) > ۰$

این دوره‌ی تناوب با افزایش زمان کوچکتر می‌شود. اگر تعداد نورون‌ها را به صورتی ترمودینامیکی بزرگ بگیریم؛ آنگاه به ازای هر دوره‌ی تناوب یک نورون حتما هست که روی محور آستانه قرار گرفته است.
حال که دوره‌ی تناوب Δa را به دست آوردیم؛ می‌دانیم که ریشه‌های رابطه‌ی ۶-۳۳ چه زمانی رخ می‌دهند. فرض کنیم که اولین صفر در جریانی مثل a_m رخ می‌دهد. توجه کنید حتما اندازه‌ی این جریان به گونه‌ای است که نورون را به صورت فعال نگه دارد. پس باید حتما $(a_m - gE_۰) > ۰$ باشد. حال می‌توانیم انتگرال‌های مورد نظر خود را این چنین بسط دهیم.

$$\int n_a(\pi, t-d) a\, da = \int \delta\Big(۲\pi(\lfloor K_a^{(t)} \rfloor - K_a^{(t)})\Big) a\, da \tag{۶-۳۷}$$

$$= \frac{۱}{۲\pi} \cdot \sum_{K_a^{(t)} \in Z} a_i \tag{۶-۳۸}$$

$$= \frac{۱}{۲\pi} \cdot \sum_{m=۰}^{M} a_m + m \cdot \Delta a \tag{۶-۳۹}$$

$$= \frac{M+۱}{۲\pi} \cdot (\frac{a_m + a_{max}}{۲}) \tag{۶-۴۰}$$

$$\tag{۶-۴۱}$$

و از طرفی:

$$\int n_a(\pi, t-d)\, da = \int \delta\Big(۲\pi(\lfloor K_a^{(t)} \rfloor - K_a^{(t)})\Big) a\, da \tag{۶-۴۲}$$

$$= \frac{۱}{۲\pi} \cdot \sum_{K_a^{(t)} \in Z} ۱ \tag{۶-۴۳}$$

$$= \frac{۱}{۲\pi} \cdot \sum_{m=۰}^{M} ۱ \tag{۶-۴۴}$$

$$= \frac{M+۱}{۲\pi} \tag{۶-۴۵}$$

حال اگر به محاسبه‌ی میدان ثابت خود برگردیم و تکه‌های پازل را کنار هم بگذاریم؛ خواهیم داشت:

$$E_۰ = \frac{۱}{g} \cdot \frac{\int n_a(\pi, t-d) \cdot a\, da}{\int n_a(\pi, t-d) da} \tag{۶-۴۶}$$

$$= \frac{۱}{g} \cdot \frac{\frac{M+۱}{۲\pi} \cdot (\frac{a_m + a_{max}}{۲})}{\frac{M+۱}{۲\pi}} \tag{۶-۴۷}$$

$$= \frac{۱}{g} (\frac{a_m + a_{max}}{۲}) \tag{۶-۴۸}$$

این میدان معادل است با جریان میانگین بین نورون‌هایی که آن‌ها را روشن خطاب کرده بودیم. این نتیجه صحیح نیست زیرا اگر میدان در میانه‌ی این جریان‌ها قرار گیرد؛ آنگاه نورون‌های با جریان پایین‌دست $a < \frac{1}{g}(\frac{a_m+a_{max}}{2})$ را خاموش خواهد کرد و اصلا روشن نخواهند ماند. پس این راه‌حل نیز دارای مشکل است و تا مشخص شدن نقص آن، آن را کنار می‌گذاریم.

محاسبه‌ی حالت پایستار - تلاش شماره‌ی ۲

در این روش فرض می‌کنیم که برای هر جریان تصادفی اولیه، نورون‌های زیادی را به اختیار گرفته‌ایم. در حالت پایا ، در یک حالت خاص تغییری در چگالی جمعیت مشاهده نمی‌شود پس در معادلهٔ ۶-۵ خواهیم داشت:

$$\frac{\partial n_a}{\partial t} = 0 \tag{۶-۴۹}$$

همچنین در حالت پایا که در واقع از نگاه ما حالت ناهم‌گام است؛ جریان بین نورون‌ها - که کمیتی بزرگ مقیاس است - در زمان تغییری نمی‌کند. پس به این ترتیب:

$$\begin{cases} \frac{\partial n_a}{\partial t} = -\frac{\partial J_a(t)}{\partial \theta} = 0 \\ J_a(\theta,t) = n_a(\theta,t)\cdot[a-gE] \end{cases} \Rightarrow J_a(\theta,t) = J_a(t) \tag{۶-۵۰}$$

$$\Rightarrow n_a(\theta,t) = n_a \tag{۶-۵۱}$$

$$\tag{۶-۵۲}$$

پس توزیع جمعیت نورون‌ها مستقل از زمان و حالت آن‌ها خواهد شد. اگر توزیع را در ابتدا یکنواخت میان جریان‌های مختلف توزیع کرده باشیم؛ برای همه‌ی زمان‌ها و حالت‌ها داریم:

$$n = \frac{N}{2\pi(a_{Max}-a_{min})} \tag{۶-۵۳}$$

برای جریان بین نورون‌ها هم خواهیم داشت:

$$E = \frac{1}{N}\int_{-\infty}^{t-d}\int n\cdot\big[a-gE\big]da\cdot\alpha^2 u\, e^{-\alpha u}du \tag{۶-۵۴}$$

$$= \int \frac{n}{N}\cdot\big[a-gE\big]da \tag{۶-۵۵}$$

دقت کنیم که انتگرال رابطه‌ی ۶-۵۵ روی نورون‌هایی است که مستعد تیزه زدن هستند. [۳]

اولین جریانی که نورون را مستعد تیزه زدن می‌کند a_* نام‌گذاری می‌کنیم. وقتی جریان مهاری حاصل از تیزه زدن‌ها کوچک است؛ همه‌ی نورون‌ها فعال هستند و در نتیجه $a_* = a_{min}$ می‌شود. اما در حالتی که جریان مهاری زیاد می‌شود؛ این مقدار از کمترین جریان تصادفی اولیه سامانه بزرگتر می‌شود. محاسبات را ادامه می‌دهیم:

$$E = \int \frac{n}{N} \cdot \big[a - gE\big] da \tag{۶-۵۶}$$

$$= \frac{n}{N} \cdot \big[\frac{a_{Max}^{۲} - {a_*}^{۲}}{۲} - gE(a_{Max} - a_*)\big] \tag{۶-۵۷}$$

$$\Rightarrow E = n \cdot \big[\frac{a_{Max}^{۲} - {a_*}^{۲}}{۲}\big] / \big[N + gn(a_{Max} - a_*)\big] \tag{۶-۵۸}$$

شاید بنظر این یک معادلهٔ درجه یک ساده باشد که میدان را گزارش می‌کند اما در واقع خود a^* هم به میدان وابسته است و باید وابستگی آن را لحاظ کنیم. به تقریب: $a^* = gE$ با اضافه کردن این معادله و حل معمول یک معادلهٔ درجه‌ی دو برای میدان صراحتا خواهیم داشت:

$$E = \big(\frac{a_{Max}}{g} + \frac{N}{ng^{۲}}\big) \pm \big[\big(\frac{N}{ng^{۲}} + \frac{a_{Max}}{g}\big)^{۲} - \frac{{a_{Max}}^{۲}}{g^{۲}}\big]^{\frac{۱}{۲}} \tag{۶-۵۹}$$

نتیجه می‌دهد که a_* هم باید به صورت زیر باشد:

$$a_* = \big(a_{Max} + \frac{N}{ng}\big) \pm \big[\big(\frac{N}{ng} + a_{Max}\big)^{۲} - {a_{Max}}^{۲}\big]^{\frac{۱}{۲}} \tag{۶-۶۰}$$

$$= \big(a_{Max} + \frac{N}{ng}\big) \pm \big[\frac{N^{۲}}{n^{۲}g^{۲}} + \frac{۲a_{Max}N}{ng}\big]^{\frac{۱}{۲}} \tag{۶-۶۱}$$

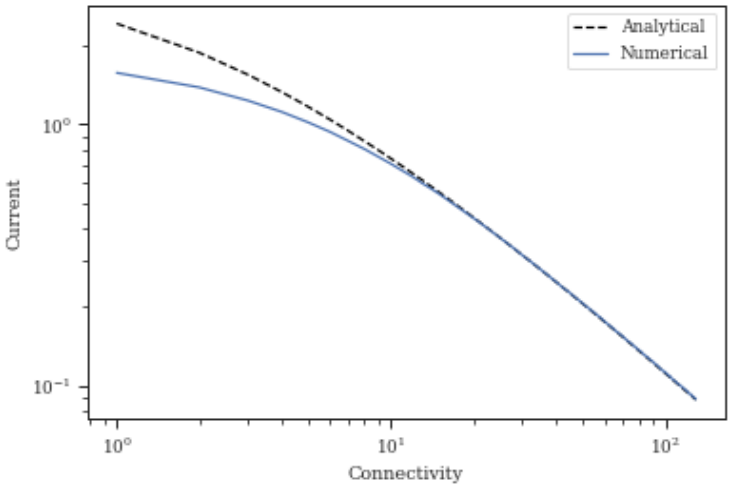
اجازه بدهید علامت مثبت را کنار بگذاریم زیرا مقدار a_* را خارج بازه‌ی جریان‌های سامانه گزارش می‌کند. پس هم برای میدان و هم جریان a_* خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a_* = \big(a_{Max} + \frac{N}{ng}\big) - \big[\frac{N^{۲}}{n^{۲}g^{۲}} + \frac{۲a_{Max}}{ng}\big]^{\frac{۱}{۲}} \\ E = \big(\frac{a_{Max}}{g} + \frac{N}{ng^{۲}}\big) - \big[\frac{N^{۲}}{n^{۲}g^{۴}} + \frac{۲Na_{Max}}{ng^{۳}}\big]^{\frac{۱}{۲}} \end{cases} \tag{۶-۶۲}$$

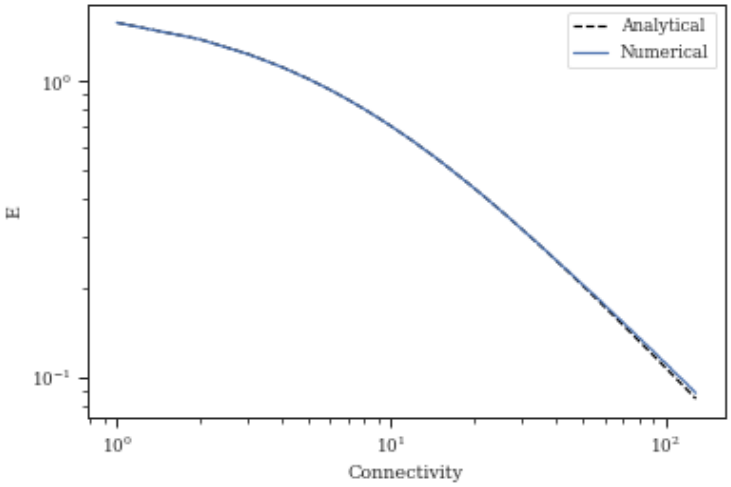
حال اگر نتایج به دست آمده را با داده‌های شبیه‌سازی تطبیق دهیم؛ خواهیم دید که تطابق خوبی با یک دیگر دارند.

---

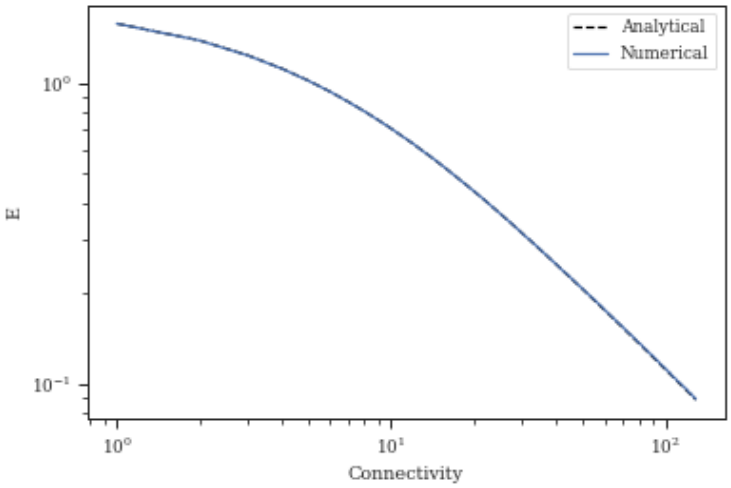
۳ $(a - gE) > ۰$



(آ) نسخه‌ای که کمینه‌ی جریان را از حل محاسبات درنظر می‌گیرد



(ب) نسخه‌ای که همه‌ی نورون‌ها را فعال تصور می‌کند.



(ج) نسخه ساخته شده از اتصال هر دو حالت

شکل (۶-۱) تطابق جریان پایای به دست آمده از حل عددی و تحلیلی

در ضریب تاثیرهای بسیار بزرگ داریم:

$$E \cong \frac{a_{Max}}{g} + \frac{N}{ng^{۲}} - (\frac{۲Na_{Max}}{ng^{۳}})^{\frac{۱}{۲}}\left[۱ + \frac{N}{۲nga_{Max}}\right]^{\frac{۱}{۲}} \tag{۶۳-۶}$$

$$= \frac{a_{Max}}{g} + \frac{N}{ng^{۲}} - (\frac{۲Na_{Max}}{ng^{۳}})^{\frac{۱}{۲}}\left[۱ + \frac{N}{۴nga_{Max}}\right] \tag{۶۴-۶}$$

$$= \frac{a_{Max}}{g} - (\frac{۲Na_{Max}}{ng^{۳}})^{\frac{۱}{۲}} + \frac{N}{ng^{۲}} - (\frac{N}{۲n})^{\frac{۳}{۲}} \cdot \frac{۱}{a_{Max}^{\frac{۱}{۲}} g^{\frac{۵}{۲}}} \tag{۶۵-۶}$$

اختلال در میدان پایستار - تلاش شماره‌ی ۱

همان طور که مشخص است؛ حل دقیق میدان بسیار کار دشواری است اما می‌توان از طریق ترفندهای اختلالی به جواب آن نزدیک شد. یکی از روش‌های معمول حل زنجیری و تودرتوی دستگاه معادلات است.

به این ترتیب که ابتدا از معادله پاسخ حالت پایا (مرتبه‌ی صفرم) را در معادلهٔ پخش جاگذاری می‌کنیم تا توزیع آماری وابسته به زمان نورون‌ها به دست آید. سپس مجددا از توزیع به دست آمده؛ میدان مرتبه‌ی اول را که وابسته به زمان است؛ محاسبه می‌کنیم.

از آنجا که توزیع سامانه رفتاری دوره‌ای به طول ۲π دارد؛ می‌توانیم آن را به صورت زیر بسط دهیم:

$$\rho(\theta, a, t) = \rho_{۰} + \sum_{k} A_k(t) e^{ik\theta}, \quad k \in \mathcal{Z} \tag{۶۶-۶}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \sum \dot{A}_k e^{ik\theta} \tag{۶۷-۶}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \theta} = \sum A_k \cdot ik \cdot e^{ik\theta} \tag{۶۸-۶}$$

$$\tag{۶۹-۶}$$

حال آن را در معادلهٔ پخش قرار می‌دهیم تا بتوانیم معادلهٔ حاکم بر ضرایب را محاسبه کنیم.

$$\sum \dot{A}_k e^{ik\theta} = -\sum A_k \cdot ik(a - gE(t)) \cdot e^{ik\theta} \tag{۷۰-۶}$$

$$\Rightarrow \dot{A}_k = -A_k \cdot ik(a - gE(t)) \tag{۷۱-۶}$$

در تقریب مرتبه‌ی اول برای توزیع داریم:

$$\dot{A}_k = -A_k \cdot ik(a - gE_۰) \tag{۶-۷۲}$$

$$\Rightarrow A_k(t) = A_k(۰)e^{-ik(a-gE_۰)t} \tag{۶-۷۳}$$

$$\Rightarrow \rho(\theta, a, t) = \rho_۰ + \sum_k A_k(۰)e^{ik\theta - ik(a-gE_۰)t} \tag{۶-۷۴}$$

پس برای نورون‌های روی آستانه خواهیم داشت:

$$\rho(\pi, a, t) = \rho_۰ + \sum_k A_k(۰)e^{ik\pi - ik(a-gE_۰)t} \tag{۶-۷۵}$$

حال از نتیجه‌ی به دست آمده استفاده می‌کنیم و همان طور که اشاره شد به محاسبه‌ی مرتبه‌ی بعدی میدان می‌رویم:

$$E(t) = \int\int_۰^\infty \rho(\pi, a, t-d-v) \cdot \dot{\theta} \cdot \alpha^۲ v e^{-\alpha v} dv da \tag{۶-۷۶}$$

$$= E_۰ \tag{۶-۷۷}$$

$$+ \int\int_۰^\infty \sum_k A_k(۰)e^{ik\pi - ik(a-gE_۰)(t-d-v)} \cdot (a - gE_۰)\alpha^۲ v e^{-\alpha v} dv da \tag{۶-۷۸}$$

$$= E_۰ + \sum_k \int\int_۰^\infty A_k(۰)e^{ik\pi - ik(a-gE_۰)(t-d-v)} \cdot (a - gE_۰)\alpha^۲ v e^{-\alpha v} dv da \tag{۶-۷۹}$$

اجازه بدهید سهم مدهای متفاوت از میدان را به صورت جداگانه محاسبه کنیم و سپس مجددا در کنار یکدیگر قرار دهیم.

$$E_{k,a}(t) = -\alpha^۲ A_k(۰)(a - gE_۰)e^{ik\pi} \int_۰^\infty v e^{-[\alpha - ik(a-gE_۰)]v - ik(a-gE_۰)(t-d)} dv \tag{۶-۸۰}$$

با با تغییر متغیر $\beta \equiv \alpha - ik(a - gE_۰)$ محاسبات را ادامه می‌دهیم:

$$= \alpha^۲ A_k(۰)(a - gE_۰)e^{ik\pi} e^{-ik(a-gE_۰)(t-d)} \cdot \int_۰^\infty v e^{-\beta v} dv \tag{۶-۸۱}$$

$$= \alpha^۲ A_k(۰)(a - gE_۰)e^{ik\pi} e^{-ik(a-gE_۰)(t-d)} \cdot \frac{۱}{\beta^۲} \tag{۶-۸۲}$$

$$= A_k(۰)(a - gE_۰)e^{ik[\pi - (a-gE_۰)(t-d)]} \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha - ik(a - gE_۰)}\right)^۲ \tag{۶-۸۳}$$

حال قدم به قدم به محاسبات پیشین خود برمی‌گردیم. ابتدا می‌پرسیم میدان همه‌ی نورون‌های با مد یکسان چه جریانی را تولید می‌کنند.

$$E_k(t) = \int E_{k,a} da \tag{۸۴-۶}$$

$$= \int A_k(۰)(a - gE_۰)e^{ik[\pi-(a-gE_۰)(t-d)]}(\frac{\alpha}{\alpha - ik(a - gE_۰)})^۲ da \tag{۸۵-۶}$$

با تغییر متغیر $h \equiv a - gE_۰$ تلاش می‌کنیم انتگرال را ادامه دهیم.

$$E_k(t) = A_k(۰)e^{ik\pi} \int_۰^{a_M - gE_۰} he^{-ikh(t-d)}(\frac{۱}{۱ - ikh/\alpha})^۲ dh \tag{۸۶-۶}$$

نرم‌افزارهای محاسباتی همچون ابزار ولفرم به ما امکان می‌دهد تا پاسخ آن را به صورت زیر بیان کنیم:

$$E_k(t) = -A_k(۰)\frac{\alpha^۲}{k^۲}e^{ik\pi}\Bigg[\frac{e^{-i(\xi_{(h)}+k(t-d)h)}}{\sqrt{۱ + h^۲k^۲/\alpha^۲}} \tag{۸۷-۶}$$

$$+ e^{-\alpha(t-d)}(\alpha(t-d) + ۱)Ei[(\alpha - ikh)(t-d)]\Bigg]\Bigg|_۰^{a_M - gE_۰} \tag{۸۸-۶}$$

به صورتی که $e^{-i\xi_{(h)}} = \frac{۱+ikh/\alpha}{\sqrt{۱+h^۲k^۲/\alpha^۲}}$ است و Ei همان تابع انتگرال نمایی است که به صورت $Ei[z] = -\int_{-z}^{+\infty} e^{-t}/t dt$ نوشته می‌شود.

$$E_k(t) = - A_k(۰)\frac{\alpha^۲}{k^۲}e^{ik\pi}\Bigg[\frac{e^{-i(\xi_{(a_M-gE_۰)}+k(t-d)(a_M-gE_۰))}}{\sqrt{۱ + (a_M - gE_۰)^۲k^۲/\alpha^۲}} \tag{۸۹-۶}$$

$$+ e^{-\alpha(t-d)}(\alpha(t-d) + ۱)Ei[(\alpha - ik(a_M - gE_۰))(t-d)] \tag{۹۰-۶}$$

$$- e^{-ik(t-d)(a_M-gE_۰)} \tag{۹۱-۶}$$

$$- e^{-\alpha(t-d)}(\alpha(t-d) + ۱)Ei[\alpha(t-d)]\Bigg] \tag{۹۲-۶}$$

$$= - A_k(۰)\frac{\alpha^۲}{k^۲}e^{ik\pi}\Bigg[e^{-ik(t-d)(a_M-gE_۰)}\left(\frac{e^{-i(\xi_{(a_M-gE_۰)})}}{\sqrt{۱ + (a_M - gE_۰)^۲k^۲/\alpha^۲}} + ۱\right) \tag{۹۳-۶}$$

$$+ e^{-\alpha(t-d)}(\alpha(t-d) + ۱)\Big(Ei[(\alpha - ik(a_M - gE_۰))(t-d)] - Ei[\alpha(t-d)]\Big)\Bigg] \tag{۹۴-۶}$$

پس یک جمله‌ی نوسانی دارد و جمله‌ای که شامل تکینگی است.

خبر خوب یا بد این است که این راه هم دارای ایراد است. زیرا در محاسبه‌ی مرتبه‌ی اول میدان اشتباهی

رخداده است - رابطه‌ی ۶-۷۶. در این رابطه باید ضرب مرتبه‌ی صفرم چگالی در مرتبه‌ی اول میدان جا مانده است. یعنی باید می‌نوشتیم:

$$E(t) = \int\int_{۰}^{\infty} (\rho_۰ + \rho_۱)(a - g(E_۰ + E_۱)) \cdot \alpha^۲ v e^{-\alpha v} dv da \tag{۶-۹۵}$$

$$= \int\int_{۰}^{\infty} [\rho_۰(a - gE_۰) + \rho_۱(a - gE_۰)] \cdot \alpha^۲ v e^{-\alpha v} dv da \tag{۶-۹۶}$$

$$+ \int\int_{۰}^{\infty} -gE_۱\rho_۱ \cdot \alpha^۲ v e^{-\alpha v} dv da \tag{۶-۹۷}$$

$$+ \int\int_{۰}^{\infty} -gE_۱\rho_۰ \cdot \alpha^۲ v e^{-\alpha v} dv da \tag{۶-۹۸}$$

$$\tag{۶-۹۹}$$

در واقع جمله‌ی آخر رابطه‌ی بالا جامانده بود و باعث می‌شود بخشی از جواب در پشت آن پنهان بماند. البته با در نظر گرفتن آن جمله پیچیدگی اصلی مسئله دوباره به صفحه‌ی بازی برمی‌گردد.

۶-۱-۳ بازی از نو(سامانه‌ی تک‌جریان)

بنظر نمی‌آید که معادلات ما از این طریق حل شوند. بیاید یک طریق دیگر در پیش گیریم.

صندوق پیام‌ها

استاد : محسن! بیا مسئله را باز هم ساده‌تر کنیم. به جای آن که یک پهنای جریان بگیریم؛ فقط و فقط یک جریان را در سامانه قرار دهیم. آنگاه ببینیم باز هم هم‌گامی خواهیم دید؟
پیشنهاد بعدی این که تیزه‌ها را باریک و بدون پهنا درنظر بگیر ($\alpha \to \infty$) امیدوارم در این حالت مسئله حل شود.

محسن : مسئله شاید کمی عوض شود. زیرا جریان مهاری برآمده از نورون‌هایی با جریان بالا روی پتانسیل نورون‌های پایین‌تر هم تاثیر می‌گذارد.

استاد : می‌دانم. اما از همین سامانه تک‌جریانی باید دربیاید. وقتی یکی را حل کنیم بقیه را می‌توانیم از کنار هم قرار دادن این زیرسامانه محاسبه کنیم.

محسن : خیلی هم خوب! چشم انجام می‌شود.

استاد : فردا می‌توانی بیایی و حضوری باهم جلسه داشته باشیم؟

محسن : بله حتما خدمت خواهم رسید. (اتاق انجمن علمی، سه‌شنبه عصر ۳۰ فروردین)

[*خروجی این مکالمات و چند جلسه پشت سرهم در ادامه‌ی این بخش خواهد آمد.*]

برای ساده‌تر شدن مسئله شرایط را در ابتدا فقط برای تیزه‌های باریک و یک سامانه ی تک‌جریان بررسی می‌کنیم. این شرایط باعث می‌شود که معادلات شکلی ساده‌تر به خود بگیرند. پس بیاید مجدد رابطه‌ی ۶-۵ که جریان را در سامانه گزارش می‌داد برای سامانه‌ی جدید بازنویسی کنیم. با این تفاوت که همه‌ی نورون‌ها فقط به یک نوع جریان خارجی متصلند و همچنین α را به بینهایت سوق داده‌ایم تا تیزه‌ها کاملا باریک شوند.

$$E(t) = \frac{n(\pi, t-d)}{N} \cdot \big[a - gE(t-d)\big] \tag{۱۰۰-۶}$$

حالت‌پایا

برای این سامانه میدان حالت پایا به صورت زیر قابل توصیف است:

$$E_۰ = \frac{n}{N} \cdot \big[a - gE_۰\big] = \frac{۱}{۲\pi}\big[a - gE_۰\big] \tag{۱۰۱-۶}$$

$$\Rightarrow E_۰ = \frac{a}{۲\pi + g} \tag{۱۰۲-۶}$$

اختلال از حالت پایا

حال فرض کنیم که جریان به اندازه‌ای کوچک از حالت پایای خود منحرف شود. $E = E_۰ + \epsilon$ علاقه‌مندیم که سامانه در زمان‌های بعدی چگونه رفتار خواهد کرد. آیا این اختلال به طریقی هضم خواهد شد و یا بزرگ‌تر می‌شود و هماره سامانه را از حالت پایا دور خواهد کرد؟

$$E(t+d) = \frac{۱}{۲\pi}\big[a - gE(t)\big] \tag{۱۰۳-۶}$$

$$= \frac{۱}{۲\pi}\big[a - g(E_۰ + \epsilon)\big] \tag{۱۰۴-۶}$$

$$= \frac{۱}{۲\pi}\big[a - gE_۰\big] - \frac{g\epsilon}{۲\pi} \tag{۱۰۵-۶}$$

$$= E_۰ - \frac{g\epsilon}{۲\pi} \tag{۱۰۶-۶}$$

با ادامه‌ی همین روند می‌توانیم به این نتیجه برسیم که در گام‌های بعدی سامانه چگونه رفتار خواهد کرد(شکل ۶-۲):

$$E(t+nd) = \frac{۱}{۲\pi}\left[a - gE(t+(n-۱)d)\right] \tag{۱۰۷-۶}$$

$$= \frac{a}{۲\pi}\left[۱ - \frac{g}{۲\pi} + (\frac{g}{۲\pi})^{۲} + ... + (\frac{-g}{۲\pi})^{n-۱}\right] + (\frac{-g}{۲\pi})^{n}(E_{۰} + \epsilon) \tag{۱۰۸-۶}$$

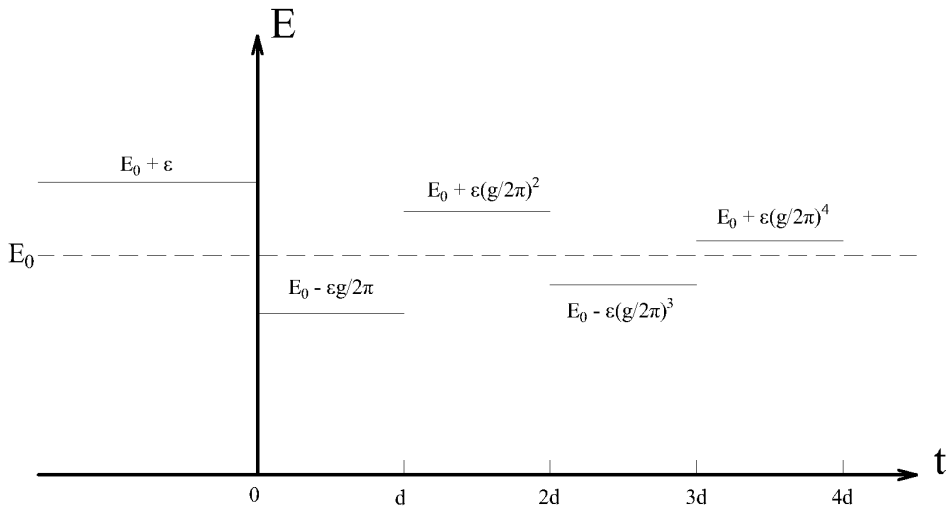
$$= \frac{a}{۲\pi}\frac{۱ - (\frac{-g}{۲\pi})^{n}}{۱ - (\frac{-g}{۲\pi})} + (\frac{-g}{۲\pi})^{n}(E_{۰} + \epsilon) \tag{۱۰۹-۶}$$

$$= \frac{a}{۲\pi + g} - \frac{a}{۲\pi}\cdot\frac{(\frac{-g}{۲\pi})^{n}}{۱ - (\frac{-g}{۲\pi})} + (\frac{-g}{۲\pi})^{n}(E_{۰} + \epsilon) \tag{۱۱۰-۶}$$

$$= \frac{a}{۲\pi + g} - \frac{a}{۲\pi + g}\cdot(\frac{-g}{۲\pi})^{n} + (\frac{-g}{۲\pi})^{n}(E_{۰} + \epsilon) \tag{۱۱۱-۶}$$

$$= E_{۰} + (\frac{-g}{۲\pi})^{n}\cdot\epsilon \tag{۱۱۲-۶}$$

$$= E_{۰} + (\frac{-g}{۲\pi})^{\lfloor t/d\rfloor + ۱}\cdot\epsilon \tag{۱۱۳-۶}$$



شکل (۶-۲) تحول میدان سامانه‌ای تک‌جریان و با تیزه‌های پهن از اختلالی کوچک از حالت پایا (شکل اشتباه است)

پرواضح است که که اگر ضریب تاثیر از مقدار ۲π کمتر باشد؛ این مجموع همگراست و اختلال در سامانه هضم خواهد شد. در صورتی اگر بیشتر باشد؛ واگرا خواهد بود. این مقدار بنظر همان گذرفازی

است که مدت‌هاست به دنبال آن می‌گردیم. پس موفق شدیم که برای سامانه‌ی تک‌جریان نقطه‌ی گذرفاز را محاسبه کنیم. کمتر باشد؛ این مجموع همگراست و اختلال در سامانه هضم خواهد شد. در صوتی اگر بیشتر باشد؛ واگرا خواهد بود.

اگر چه می‌توانستیم مسئله را از طریق دیگری نیز درپیش بگیریم. از معادلهٔ ۶-۱۰۶ اختلاف جدیدی را که با میدان پایا پیدا شده است را به عنوان ϵ' تعریف کنیم و سپس میدان بعدی را از ضرب مجدد عامل $-g/۲\pi$ به دست آوریم. به این ترتیب به طریق ساده‌تر خواهیم داشت:

$$E(t+nd) = E_{۰} + (\frac{-g}{۲\pi})^n \cdot \epsilon \qquad (۶\text{-}۱۱۴)$$

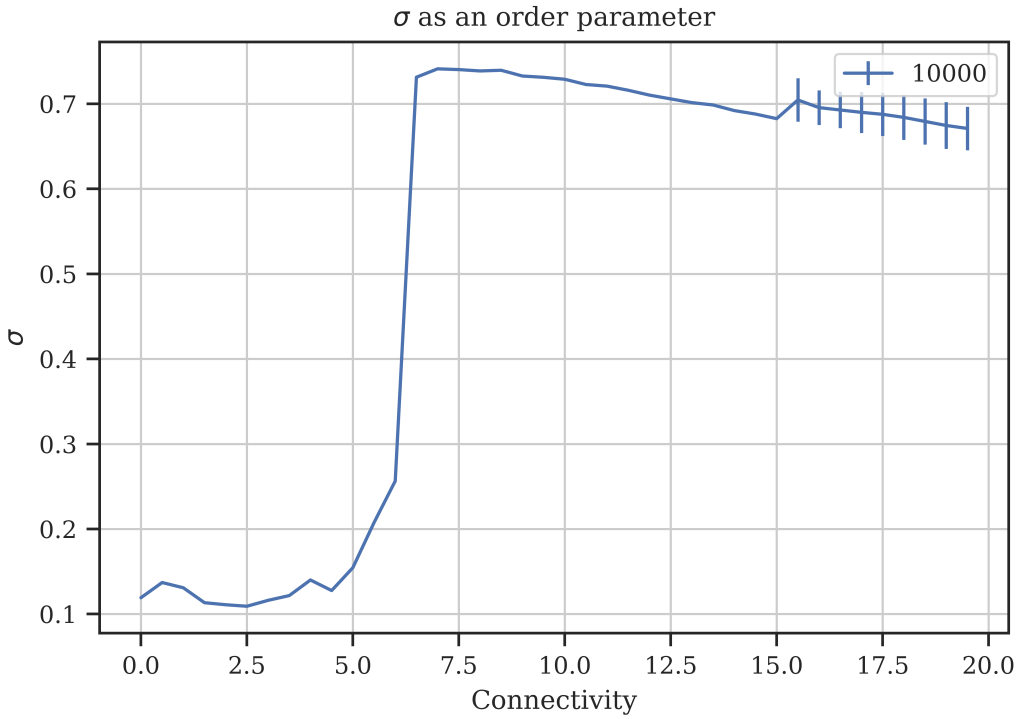
شبیه‌سازی سامانه‌ی تک‌جریان

حدس می‌زنیم که برای سامانه‌ی یاد شده در قسمت قبل گذر فاز در $g = ۲\pi$ رخ دهد. پس شبیه‌سازی را بار دیگر با تنظیمات زیر راه‌اندازی می‌کنیم:

* $\alpha = ۱۰۰\ s^{-۱}$
* جریان خارجی متصل به همه‌ی نورون‌ها یکسان و برابر ۹/۵ است.
* $N = ۱۰۰۰۰$
* $t_d = ۰/۱\ s$
* کل زمان شبیه‌سازی ۱۰۰ ثانیه در نظرگرفته شده
* هر گام زمانی برابر ۰/۰۱ ثانیه است.

به این ترتیب نتیجه‌ی شبیه‌سازی در شکل ۶-۳ قابل مشاهده است. به نظر می آید که نقطه‌ی گذر فاز پیشنهادی در همسایگی عدد ۶ پیدا شده است. پس این مهر تاییدی می‌تواند برای راه‌حل یاد شده باشد.

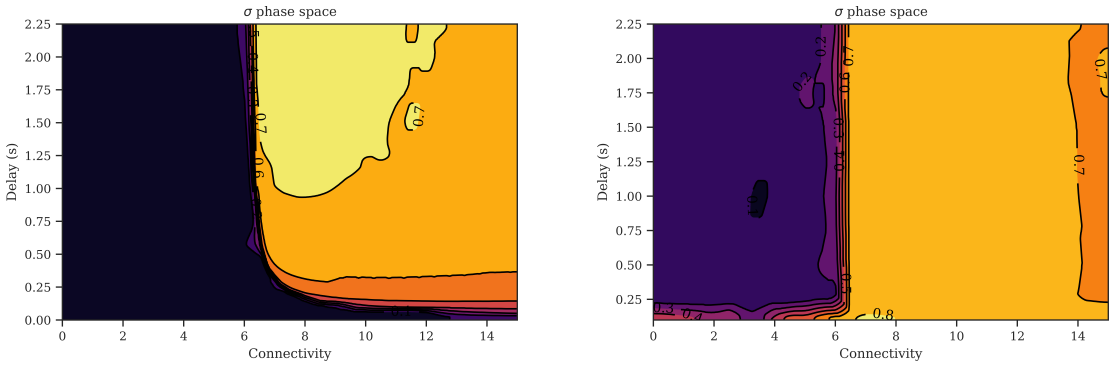
همچنین جالب است که در راه‌حل ما برای نقطه‌ی گذرفاز، اثری از زمان تاخیر به جا نمانده است. پس کنجکاو می‌شویم که نمایش تمام عیاری از صفحه‌ی فاز داشته باشم و بتوانیم شمایل آنچه را که در حضور تاخیرهای مختلف در سامانه رخ می‌دهد؛ به تصویر بکشیم.



شکل (۶-۳) مشخصه‌ی نظم سامانه ده هزار نورونی تک‌جریان

چنان که در شکل ۶-۴ می‌بینیم در حالتی که تیزه‌ها تقریبا باریک هستند ($\alpha = ۱۰۰$) تغییر فاز همان است که پیش‌بینی کردیم؛ یعنی در نزدیکی نقطه‌ی $g = ۲\pi$ رخ می‌دهد و به ازای تمام زمان‌های تاخیر ممکن، همین مقدار می‌ماند اما در تیزه‌های پهن این گذرفاز رفتاری دیگر دارد. زمان‌هایی که تاخیر بسیار بزرگتر از زمان ویژه‌ی تاثیر تیزه‌هاست ($d > \alpha^{-۱}$) گذرفاز در همان نقطه رخ می‌دهد.

پس بهتر است این طور جمع بندی کنیم که راه حل ۶-۱۰۸ برای حالتی درست است که زمان ویژه تیزه‌ها در مقایسه با زمان تاخیر نسبتا کم باشد. $d >> \alpha$



(آ) صفحه‌ی فاز نورون تک جریان با پهنای تیزه‌ی $\alpha = ۱۰۰$ (ب) صفحه‌ی فاز نورون تک جریان با پهنای تیزه‌ی $\alpha = ۲۰$

شکل (۶-۴)

صندوق پیام‌ها

محسن : سلام استاد خوبین؟

استاد نمودار جدید متولد کردم [نمودارهای فاز شکل ۶-۴]. سامانه تک جریان است و زمان تاخیر ۰/۱ ثانیه است.

خدمت شما

استاد : سلام

یعنی برای آلفای زیاد همون دو پی می‌شه جای گذر، نه؟ تا نزدیک پنجاه هم همون شیش و نیم این‌ها می‌مونه. پنجاه یعنی دو صدم، درست می‌گم؟

سامان

محسن : بله بله دقیقا! اگر بیشتر از دو گام شبیه‌سازی اثر تیزه ادامه پیدا کنه؛ جای تغییر فاز تغییر می‌کنه.

همچنین وقتی که زمان ویژه پهن‌شدگی ما از زمان تاخیر بیشتر می‌شه به صورت کلی فاز همگام ناپدید می‌شه.

محسن (جمعه، ۷ مرداد ۱۴۰۱)

[*به نظر میاد همه‌ی کلید مسئله در مشاهده‌ی دقیق‌تر فضای فاز نهفته بود. پس از ابتدا باید از حالات‌های مختلف سامانه نمونه‌گیری می‌کردم.*]

حال که مسئله در حالت بسیار ساده حل شد؛ کم‌کم گام‌هایی رو به سمت پیچیده شدن برمی‌داریم. اولین گام آن است که کمیت α را به مجددا به محاسبات خود بازگردانیم تا رابطه‌ی متناظر با ۶-۴ برای آن به دست آوریم. حدس می‌زنیم که تغییر میدان دیگر مانند شکل ۶-۲ تیز نباشد و لبه‌هایی نرم‌تر به خود گیرند.

$$E = E_0 + \epsilon \qquad (t < 0) \tag{۶-۱۱۵}$$

$$E(t) = \frac{a}{2\pi} - \frac{g}{2\pi}\int_0^\infty ds_1\Big(\frac{a}{2\pi} - \frac{g}{2\pi}\int ds_2 E(t-2d-s_1-s_2)\alpha^2 s_2 e^{-\alpha s_2}\Big)\alpha^2 s_1 e^{-\alpha s_1} \tag{۶-۱۱۶}$$

$$= \frac{a}{2\pi}\big[1 - \frac{g}{2\pi} + (\frac{g}{2\pi})^2 + \ldots + (\frac{-g}{2\pi})^{n-1}\big] \tag{۶-۱۱۷}$$

$$+ (\frac{-g}{2\pi})^n \int_0^\infty \int \ldots \int E(t-nd-s_1-s_2-\ldots-s_n)\alpha^{2n} s_1 s_2 \ldots s_n e^{-\alpha(s_1+s_2+\ldots+s_n)} ds_1 ds_2 \ldots ds_n \tag{۶-۱۱۸}$$

$$= \mathcal{K}_{a,g}(t) \tag{۶-۱۱۹}$$

$$+ (\frac{-g}{2\pi})^n \int_0^\infty \int \ldots \int E(t-nd-s_1-s_2-\ldots-s_n)\alpha^{2n} s_1 s_2 \ldots s_n e^{-\alpha(s_1+s_2+\ldots+s_n)} ds_1 ds_2 \ldots ds_n \tag{۶-۱۲۰}$$

که در این رابطه $\mathcal{K}_{a,g}(t)$ همان پاسخ معادله در حالتی است که تیزه‌ها کاملا باریک هستند.
این روند تو در تو تا زمانی ادامه می‌یابد که انتگرال‌ده ما به زمانی که ما آن را به صورت دستی مقید کرده‌ایم نرسد. زیرا از آن گام به بعد رابطه‌ی میدان از دینامیک گام پیشین خود به دست نمی‌آید.
آخرین گام این رابطه در زمانی است که بخشی از آن در حالت مقید قرار دارد و بخشی از آن در حالت پویا. پس برای آن که این ملاحظه را اعمال کنیم؛ تغییر متغیر $r \equiv \sum s_i$ را می‌دهیم تا ورودی تابع میدان را رصد کند. سپس روی مقادیر مختلف r انتگرال‌ها را جمع می‌زنیم.

$$\int_0^\infty \int \ldots \int E(t-nd-s_1-s_2-\ldots-s_n)\alpha^{2n} s_1 s_2 \ldots s_n e^{-\alpha(s_1+s_2+\ldots+s_n)} ds_1 ds_2 \ldots ds_n \tag{۶-۱۲۱}$$

$$= \int_0^\infty \int \ldots \int E(t-nd-r)\alpha^{2n} e^{-\alpha(r)} s_1 s_2 \ldots s_n ds_1 ds_2 \ldots ds_n \delta(r - \sum s_i) dr \tag{۶-۱۲۲}$$

معادل تابع دلتای دیراک برای ادامه‌ی انتگرال‌گیری مناسب‌تر است.

$$= \int_{0}^{\infty} \int \dots \int E(t-nd-r)\alpha^{2n} e^{-\alpha(r)} s_1 s_2 \dots s_n ds_1 ds_2 \dots ds_n \frac{e^{ip(r-\sum s_i)}}{2\pi} dr dp \quad (۱۲۳-۶)$$

$$= \int_{0}^{\infty} \int \dots \int E(t-nd-r)\alpha^{2n} e^{-\alpha(r)} s_1 s_2 \dots s_n ds_1 ds_2 \dots ds_n e^{-ip\sum s_i} \frac{e^{ipr}}{2\pi} dr dp \quad (۱۲۴-۶)$$

$$= \int_{0}^{\infty} \int E(t-nd-r)\alpha^{2n} e^{-\alpha(r)} \frac{e^{ipr}}{2\pi} [\int_{0}^{\infty} s e^{-ips} ds]^n dr dp \quad (۱۲۵-۶)$$

عبارت p در جمله‌ی نهایی باید حتما باید قسمت موهومی منفی داشته باشد تا انتگرال ما قابل تعریف باشد.

$$= \int_{0}^{\infty} \int E(t-nd-r)\alpha^{2n} e^{-\alpha r} \frac{e^{ipr}}{2\pi} (-p^{-2})^n dp dr \quad (۱۲۶-۶)$$

به کمک حساب‌مانده‌ها می‌دانیم که حاصل قسمت p انتگرال برابر مشتق $2n-1$ام از انتگرال‌ده آن است.

$$= (-1)^n \int_{0}^{\infty} E(t-nd-r)\alpha^{2n} e^{-\alpha r} \frac{2\pi}{2\pi(2n-1)!} i \cdot \frac{\partial^{2n-1} e^{ipr}}{\partial p^{2n-1}} |_{p=0} \, dr \quad (۱۲۷-۶)$$

$$= \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} \int_{0}^{\infty} E(t-nd-r)\alpha^{2n} e^{-\alpha r} i \cdot (ir)^{2n-1} dr \quad (۱۲۸-۶)$$

$$= \frac{1}{(2n-1)!} \int_{0}^{\infty} E(t-nd-r)\alpha^{2n} e^{-\alpha r} r^{2n-1} dr \quad (۱۲۹-۶)$$

(۱۳۰-۶)

همان‌طور که پیشتر گفته بودیم؛ تنها قسمتی از بازه‌ی انتگرال‌گیری ما مربوط به قسمت پویایی است و باید حساب آن را از قسمت قیدی جدا کنیم. این قسمت در بازه‌ی $0 < r < t-nd$ وجود دارد.

$$= \frac{1}{(2n-1)!} \int_{t-nd}^{\infty} E(t-nd-r)\alpha^{2n} e^{-\alpha r} r^{2n-1} dr + \frac{1}{(2n-1)!} \int_{0}^{t-nd} E(t-nd-r)\alpha^{2n} e^{-\alpha r} r^{2n-1} dr$$

(۱۳۱-۶)

میدان را در زمان‌های مقید می‌دانیم. از روی آن می‌توانیم میدان در گام اول را نیز محاسبه کنیم.

$$= \frac{1}{(2n-1)!} \int_{t-nd}^{\infty} (E_0 + \epsilon)\alpha^{2n} e^{-\alpha r} r^{2n-1} dr + \frac{1}{(2n-1)!} \int_{0}^{t-nd} (E_0 - g\epsilon/2\pi)\alpha^{2n} e^{-\alpha r} r^{2n-1} dr$$

(۱۳۲-۶)

$$= \frac{1}{(2n-1)!} (E_0 + \epsilon) \int_{0}^{\infty} \alpha^{2n} e^{-\alpha r} r^{2n-1} dr + \frac{1}{(2n-1)!} (-\epsilon - g\epsilon/2\pi) \int_{0}^{t-nd} \alpha^{2n} e^{-\alpha r} r^{2n-1} dr$$

(۱۳۳-۶)

اگر بازه‌ی انتگرال اول از صفر شروع می‌شد؛ آنگاه می‌توانستیم آن را تبدیل به تابع گاما کنیم. اگر چه صورت کنونی آن به این شکل نیست اما می‌توانیم با اضافه کردن ادامه‌ی بازه به انتگرال و کم کردن آن از انتگرال دیگر، خواسته‌ی خود را برآورده کنیم.

$$= \frac{۱}{(۲n-۱)!}(E_۰ + \epsilon)(۲n-۱)! + \frac{۱}{(۲n-۱)!}(-\epsilon - g\epsilon/۲\pi)\int_۰^{t-nd} \alpha^{۲n} e^{-\alpha r} r^{۲n-۱} dr \tag{۱۳۴-۶}$$

$$= (E_۰ + \epsilon) + \frac{۱}{(۲n-۱)!}(-\epsilon - g\epsilon/۲\pi)\gamma(۲n, \alpha(t-nd)) \tag{۱۳۵-۶}$$

حال که جمله‌ی درخواستی خود را محاسبه کردیم؛ آن را در کنار جملات قبلی قرار می‌دهیم تا در نهایت برای میدان داشته باشیم:

$$E(t) = \mathcal{K}_{a,g}(t) \tag{۱۳۶-۶}$$

$$+ (\frac{-g}{۲\pi})^n (E_۰ + \epsilon) \tag{۱۳۷-۶}$$

$$+ (\frac{-g}{۲\pi})^n \frac{۱}{(۲n-۱)!}(-\epsilon - g\epsilon/۲\pi)\gamma(۲n, \alpha(t-nd)) \tag{۱۳۸-۶}$$

$$= \mathcal{K}_{a,g}(t) \tag{۱۳۹-۶}$$

$$+ (\frac{-g}{۲\pi})^n (E_۰ + \epsilon) \tag{۱۴۰-۶}$$

$$+ (\frac{-g}{۲\pi})^n (-\epsilon - g\epsilon/۲\pi)\frac{\gamma(۲n, \alpha(t-nd))}{(۲n-۱)!} \tag{۱۴۱-۶}$$

$$= \mathcal{K}_{a,g}(t) \tag{۱۴۲-۶}$$

$$+ (\frac{-g}{۲\pi})^{\lfloor t/d \rfloor + ۱} (E_۰ + \epsilon) \tag{۱۴۳-۶}$$

$$+ (\frac{-g}{۲\pi})^{\lfloor t/d \rfloor + ۱} (-\epsilon - g\epsilon/۲\pi)\frac{\gamma(۲\lfloor t/d \rfloor, \alpha d(t/d - \lfloor t/d \rfloor))}{(۲n-۱)!} \tag{۱۴۴-۶}$$

$$= E_۰ + (\frac{-g}{۲\pi})^{\lfloor t/d \rfloor + ۱} \cdot \epsilon \tag{۱۴۵-۶}$$

$$+ (\frac{-g}{۲\pi})^{\lfloor t/d \rfloor + ۱} (-\epsilon - g\epsilon/۲\pi)\frac{\gamma(۲\lfloor t/d \rfloor, \alpha d(t/d - \lfloor t/d \rfloor))}{(۲n-۱)!} \tag{۱۴۶-۶}$$

$$\tag{۱۴۷-۶}$$

نتیجه‌ی به دست آمده شامل نکات قابل توجهی است و تا حدودی با شواهد به دست آمده از شبیه‌سازی سازگاری دارد.

۱. در گام‌های مضرب d، تابع گامای ناقص ما به صورت $\gamma(۲n, ۰) = ۰$ درمی‌آید. این باعث

می‌شود که فارغ از باریک یا تیزه بودن تیزه‌های ما میدن در این لحظات مطابق عبارت زیر باشد:

$$= \frac{a}{۲\pi}\big[۱ - \frac{g}{۲\pi} + (\frac{g}{۲\pi})^{۲} + ... + (\frac{-g}{۲\pi})^{\lfloor t/d \rfloor - ۱}\big] + (\frac{g}{۲\pi})^{\lfloor t/d \rfloor}(E_{۰} + \epsilon) \qquad (۱۴۸-۶)$$

۲. این عبارت با معادلاتی که برای تیزه‌های باریک به دست آوردیم سازگاری دارد. زیرا اگر کمیت α را به بینهایت میل دهیم؛ بیشینه‌ی تابع گامای ناقص ما به صورت $\gamma(۲n, \infty) = (۲n - ۱)!$ درمی‌آید. در این حالت میدان نهایی عبارتی شبیه توصیف کننده‌ی سامانه‌ی تیزه‌های باریک می‌دهد.

$$= \frac{a}{۲\pi}\big[۱ - \frac{g}{۲\pi} + (\frac{g}{۲\pi})^{۲} + ... + (\frac{-g}{۲\pi})^{\lfloor t/d \rfloor - ۱}\big] + (\frac{g}{۲\pi})^{\lfloor t/d \rfloor}(E_{۰} - g\epsilon/۲\pi) \quad (۱۴۹-۶)$$

صندوق پیام‌ها

محسن : سلام استاد خوبین؟

من محاسباتم را ادامه دادم. چند بار پاک‌نویس کردم به نظرم الان درست هستند. در حال تحلیل کردم نتیجه محاسبات ریاضی هستم. کمی به نظر عجیب می‌رسند. برای شما هم با این نامه فرستادم تا شما را در جریان بگذارم.

ارادتمند شما

محسن

[*محاسبات اولم صحیح نبود. مساله حل نشد.*] (چهارشنبه، ۴ خرداد ۱۴۰۱)

محسن : استاد خبر خیر!

مشکل رو حل کردم. نتیجه را به پیوست درآوردم.

محسن (چهارشنبه، ۴ خرداد ۱۴۰۱)

استاد : سلام

چه خوب. ولی باید برام توضیح بدی. چی شد داستان؟ من متن رو خوندم ولی درست متوجه نشدم.

سامان (پنجشنبه، ۵ خرداد ۱۴۰۱)

[*بازم صحیح نبود اما کمتر ایراد داشت. در بخش بعد توضیح داده‌ام که چرا راه‌حل پیشین شامل ایرادی اساسی است.*]

مشکل پابرجا

متاسفانه مشکل همچنان پابرجاست. پس از تلاش‌های بسیار و زیرورو کردن راه‌حل مشکلات زیادی از میان آن بیرون کشیده شد. هر چند در ابتدا بنظر می‌آمد خودسازگار و جامع باشد.
مسئله‌ی مهم آن است که ما بی‌مهابا هر دم میدان را درون خود جاگذاری می‌کنیم. گذشته از این که این کار به ازای تمامی زمان‌های شبیه‌سازی صحیح نیست. همواره وقتی میدان در زمان‌های منفی سیر می‌کند؛ باید حالت مقید را جاگذاری کنیم. این اتفاق در هر مرحله از بازنویسی انتگرال برحسب گام‌های قبلی رخ می‌دهد. پس قاعدتا هر مرحله باید انتگرال خود را به درستی تفکیک کنیم و فقط برای زمان‌های مثبت خود میدان را بر حسب خود بازنویسی کنیم.
این بار بگذارید که به جای عبارت $\rho_\pi a = a/۲\pi$ و $\rho_\pi g = g/۲\pi$ بگذاریم: $\hat{g}, \hat{a}$

$$E = E_0 + \epsilon \qquad (t < 0) \tag{۶-۱۵۰}$$

$$E(t) = \hat{a} - \hat{g}\int_0^\infty ds_1 E(t-d-s_1)\alpha^2 s_1 e^{-\alpha s_1} \tag{۶-۱۵۱}$$

$$= \hat{a} - \hat{g}\int_{t-d}^\infty ds_1 E(t-d-s_1)\alpha^2 s_1 e^{-\alpha s_1} \tag{۶-۱۵۲}$$

$$- \hat{g}\int_0^{t-d} ds_1 E(t-d-s_1)\alpha^2 s_1 e^{-\alpha s_1} \tag{۶-۱۵۳}$$

$$= \hat{a} - \hat{g}\int_{t-d}^\infty ds_1 (E_0+\epsilon)\alpha^2 s_1 e^{-\alpha s_1} \tag{۶-۱۵۴}$$

$$- \hat{g}\int_0^{t-d} ds_1 \big(\hat{a} - \hat{g}\int_0^\infty ds_2 E(t-2d-s_1-s_2)\alpha^2 s_2 e^{-\alpha s_2}\big)\alpha^2 s_1 e^{-\alpha s_1} \tag{۶-۱۵۵}$$

$$= \hat{a} - \hat{g}\int_{t-d}^\infty ds_1 (E_0+\epsilon)\alpha^2 s_1 e^{-\alpha s_1} \tag{۶-۱۵۶}$$

$$- \hat{g}\hat{a}\int_0^{t-d} ds_1 \alpha^2 s_1 e^{-\alpha s_1} \tag{۶-۱۵۷}$$

$$- \hat{g}\int_0^{t-d}\int_0^\infty ds_1 ds_2 E(t-2d-s_1-s_2)\alpha^2 s_2 e^{-\alpha s_2}\alpha^2 s_1 e^{-\alpha s_1} \tag{۶-۱۵۸}$$

$$= \hat{a} - \hat{g}\int_{t-d}^\infty ds_1 (E_0+\epsilon)\alpha^2 s_1 e^{-\alpha s_1} \tag{۶-۱۵۹}$$

$$- \hat{g}\hat{a}\int_0^{t-d} ds_1 \alpha^2 s_1 e^{-\alpha s_1} \tag{۶-۱۶۰}$$

$$+ (-\hat{g})^2\int_0^{t-d}\int_{t-2d-s_1}^\infty ds_1 ds_2 E(t-2d-s_1-s_2)\alpha^2 s_2 e^{-\alpha s_2}\alpha^2 s_1 e^{-\alpha s_1} \tag{۶-۱۶۱}$$

$$+ (-\hat{g})^2\int_0^{t-d}\int_0^{t-2d-s_1} ds_1 ds_2 E(t-2d-s_1-s_2)\alpha^2 s_2 e^{-\alpha s_2}\alpha^2 s_1 e^{-\alpha s_1} \tag{۶-۱۶۲}$$

$$= \hat{a} - \hat{g}\int_{t-d}^\infty ds_1 (E_0+\epsilon)\alpha^2 s_1 e^{-\alpha s_1} \tag{۶-۱۶۳}$$

$$- \hat{g}\hat{a}\int_0^{t-d} ds_1 \alpha^2 s_1 e^{-\alpha s_1} \tag{۶-۱۶۴}$$

$$+ (-\hat{g})^2\int_0^{t-d}\int_{t-2d-s_1}^\infty ds_1 ds_2 (E_0+\epsilon)\alpha^2 s_2 e^{-\alpha s_2}\alpha^2 s_1 e^{-\alpha s_1} \tag{۶-۱۶۵}$$

$$+ (-\hat{g})^2\int_0^{t-d}\int_0^{t-2d-s_1} ds_1 ds_2 E(t-2d-s_1-s_2)\alpha^2 s_2 e^{-\alpha s_2}\alpha^2 s_1 e^{-\alpha s_1} \tag{۶-۱۶۶}$$

با ادامه‌ی این روند زنجیروار می‌توانیم حدس بزنیم که خانواده‌ای از جمع جملات متفاوت خواهیم داشت که به صورت زیر قابل نوشتن هستند:

$$E(t) = \hat{a} + \hat{a}\sum_{i=1}^{n-1}(-\hat{g})^i \int_0^{t-d}\int_0^{t-2d-s_1}\int_0^{t-3d-s_1-s_2}\dots\int_0^{t-id-s_1-\dots s_{i-1}} \Pi_j^i \alpha^2 s_j e^{-\alpha s_j} ds_j \tag{۱۶۷-۶}$$

$$+ (E_0 + \epsilon)\sum_{i=1}^{n}(-\hat{g})^i \int_0^{t-d}\int_0^{t-2d-s_1}\int_0^{t-3d-s_1-s_2}\dots\int_{t-id-s_1-\dots s_{i-1}}^{\infty} \Pi_j^i \alpha^2 s_j e^{-\alpha s_j} ds_j \tag{۱۶۸-۶}$$

$$+ (E_0 - \epsilon\hat{g})(-\hat{g})^n \int_0^{t-d}\int_0^{t-2d-s_1}\int_0^{t-3d-s_1-s_2}\dots\int_0^{t-nd-s_1-\dots s_{n-1}} \Pi_j^n \alpha^2 s_j e^{-\alpha s_j} ds_j \tag{۱۶۹-۶}$$

$$= \hat{a}\sum_{i=0}^{n-1}(-\hat{g})^i \int_0^{t-d}\int_0^{t-2d-s_1}\int_0^{t-3d-s_1-s_2}\dots\int_0^{t-id-s_1-\dots s_{i-1}} \Pi_j^i \alpha^2 s_j e^{-\alpha s_j} ds_j \tag{۱۷۰-۶}$$

$$(E_0 + \epsilon)\sum_{i=1}^{n}(-\hat{g})^i \int_0^{t-d}\int_0^{t-2d-s_1}\int_0^{t-3d-s_1-s_2}\dots\int_0^{t-id-s_1-\dots -s_{i-1}} (1 - \int_0^{t-id-s_1-\dots -s_{i-1}} \Pi_j^i \alpha^2 s_j e^{-\alpha s_j} ds_j) \tag{۱۷۱-۶}$$

$$+ (E_0 - \epsilon\hat{g})(-\hat{g})^n \int_0^{t-d}\int_0^{t-2d-s_1}\int_0^{t-3d-s_1-s_2}\dots\int_0^{t-nd-s_1-\dots s_{n-1}} \Pi_j^n \alpha^2 s_j e^{-\alpha s_j} ds_j \tag{۱۷۲-۶}$$

$$= \hat{a}\sum_{i=0}^{n-1}(-\hat{g})^i I_i \tag{۱۷۳-۶}$$

$$+ (E_0 + \epsilon)\sum_{i=1}^{n}(-\hat{g})^i [I_{i-1} - I_i] \tag{۱۷۴-۶}$$

$$+ (E_0 - \epsilon\hat{g})(-\hat{g})^n I_n \tag{۱۷۵-۶}$$

$$= E_0 - \epsilon g + \sum_{i=1}^{n} -(-g)^i \cdot \epsilon(1+g) I_i \tag{۱۷۶-۶}$$

که در آن عبارت I_n برابر است با:

$$I_n = \int_{۰}^{t-d} \int_{۰}^{t-۲d-s_۱} \int_{۰}^{t-۳d-s_۱-s_۲} \dots \int_{۰}^{t-nd-s_۱-\dots s_{n-۱}} \Pi_j^n \alpha^۲ s_j e^{-\alpha s_j} ds_j \qquad (۱۷۷-۶)$$

نقطه‌ی گذرفاز پیشنهادی

این محاسبات باید بتوانند نقطه‌ی گذرفاز را پیش‌بینی کنند. برای این منظور اجازه دهید تا بررسی کنیم که روند فراز و فرود میدان به چه صورت تغییر می‌کند و هر مرحله اندازه‌ی جمله‌ای که به سری اضافه می‌شود چیست. پس تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{G}_n := \tilde{E}_n - \tilde{E}_{n-۱} \qquad (۱۷۸-۶)$$

پس بررسی می‌کنیم:

$$T_{n+۱} = \frac{|\tilde{G}_{n+۱}|}{|\tilde{G}_n|} = |-\hat{g} \cdot \frac{I_{n+۱}}{I_n}| \qquad (۱۷۹-۶)$$

حال همه چیز به نسبت به دست آمده در رابطه‌ی ۶-۱۷۹ دارد. اگر این نسبت بزرگتر از یک باشد؛ آنگاه همگامی اتفاق می‌افتد و اگر کوچکتر از یک بشود ناهمگامی داریم.
پیش از ادامه شایان ذکر است که در مرحله‌ای که تیزه‌ها بسیار باریک هستند؛ همه‌ی عبارات I_n برابر یک هستند و نسبت تصاعد به دست آمده در رابطهٔ ۶-۱۷۹ همان g خواهد شد که در قسمت‌های پیشین محاسبه کردیم. پس این نتیجه‌ی ما با نتایج قبلی همخوانی بسیار خوبی دارد.

حال ادامه می‌دهیم و می‌پرسیم که رفتار عبارت‌های I_n به چگونه است و آیا قادر هستند که نقطه‌ی گذرفاز را جابجا کنند یا خیر. همان‌طور که در رابطه‌ی ۶-۱۷۷ دیدیم؛ محاسبه‌ی این انتگرال‌ها بسیار

دشوار است اما می‌توانیم به محاسبه‌ی چند جمله‌ی اول g_{T_n} بسنده کنیم.

$$۱ = \hat{g} \cdot \frac{I_۱}{I_۰} = \hat{g}\gamma(۲, \alpha d) \tag{۱۸۰-۶}$$

$$\Rightarrow \hat{g}_{T_۱} = \frac{۱}{\gamma(۲, \alpha d)} \tag{۱۸۱-۶}$$

$$\Rightarrow g_{T_۱} = \frac{۲\pi}{\gamma(۲, \alpha d)} \tag{۱۸۲-۶}$$

$$۱ = \hat{g} \cdot \frac{I_۲}{I_۱} = \hat{g} \cdot \frac{\int_۰^d \gamma(۲, ۲\alpha(d - s_۱))\alpha^۲ s_۱ e^{-\alpha s_۱} ds_۱}{\gamma(۲, \alpha d)} \tag{۱۸۳-۶}$$

$$= \hat{g} \cdot \frac{۱ - e^{-\alpha d}((\alpha d)^۳ + ۳(\alpha d)^۲ + ۶(\alpha d) + ۶)/۶}{\gamma(۲, \alpha d)} \tag{۱۸۴-۶}$$

$$\Rightarrow \hat{g}_{T_۲} = \frac{\gamma(۲, \alpha d)}{۱ - e^{-\alpha d}((\alpha d)^۳ + ۳(\alpha d)^۲ + ۶(\alpha d) + ۶)/۶} \tag{۱۸۵-۶}$$

$$\Rightarrow g_{T_۲} = \frac{۲\pi\gamma(۲, \alpha d)}{۱ - e^{-\alpha d}((\alpha d)^۳ + ۳(\alpha d)^۲ + ۶(\alpha d) + ۶)/۶} \tag{۱۸۶-۶}$$

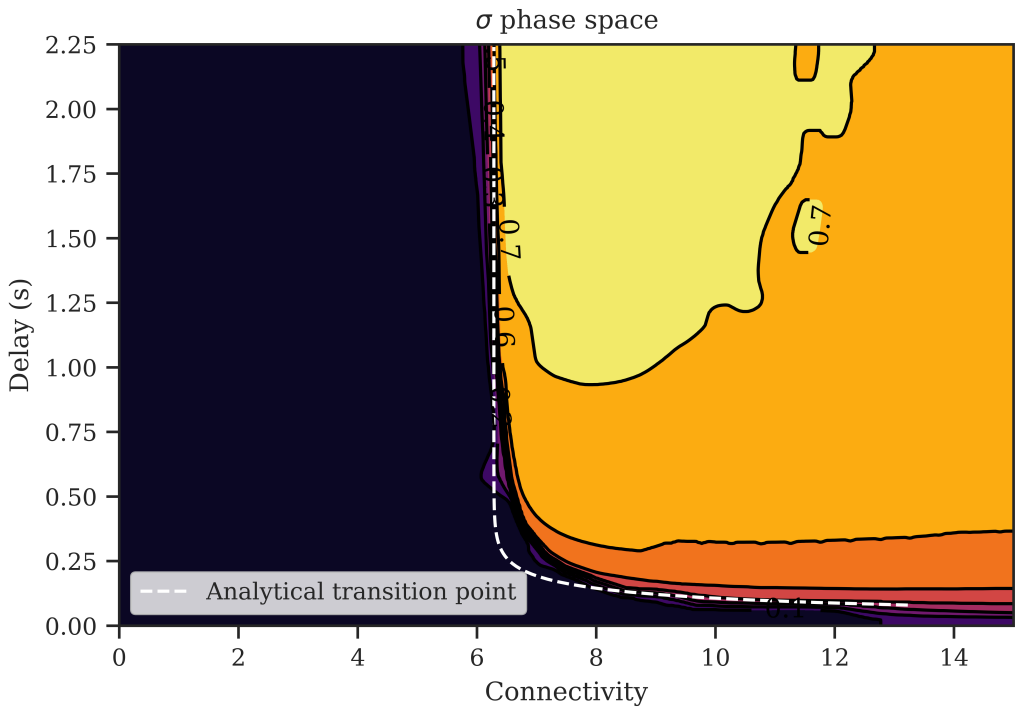
هم‌خوانی با هم‌گامی

حال که موفق شدیم تا حدسی در مورد نقطه‌ی گذرفاز بزنیم نوبت آن است که نتایج خود را با شبیه‌سازی مقایسه کنیم. در شکل ۶-۵ این تطابق موفقیت بزرگی است که توانستیم پس از تلاش‌های فراوان به آن دست پیدا کنیم.

این مسئله نشان می‌دهد که فروض اولیه‌ای که برای نوشتن معادلات در نظر گرفتیم صحیح هستند. به این معنی که میدان E در هر لحظه محصولی از مقادیر آن در زمان‌های گذشته است. دقیقا به همان صورت که رابطه‌ی ۶-۱۷۶ پیش‌بینی می‌کرد.

۶-۱-۴ از شبکه‌ی ساده به پیچیده‌تر

حال که موفق شدیم تا نقطه‌ی گذرفاز شبکه‌ی ساده را محاسبه کنیم؛ خوب است که به مدل‌های قبلی نیز برگردیم و جملاتی که کنار گذاشته بودیم را مجدد به پویایی سامانه برگردانیم.



شکل (۶-۵) مقایسه‌ی نقطه‌ی گذرفاز محاسبه شده و داده‌های شبیه‌سازی

مدل قبلی را می‌خواهم!

در معادلهٔ تحول چرخنده از معادله داشتیم. حال اگر این معادله را جایگزین کنیم. خواهیم دید که تنها تفاوت آن با مدل ساده این است که یک مولفه‌ی جریان مهاری روی آستانه بیشتر دارد. به این معنی که گویا در معادلات میدان E یک واحد به جریان داخلی بین نورون‌ها افزوده شده است.

$$\dot{\theta} = a - cos(\theta) - gE(t) \tag{۱۸۷-۶}$$

$$\dot{\theta}_\pi = a - cos(\pi) - gE(t) \tag{۱۸۸-۶}$$

$$= a + ۱ - gE(t) \tag{۱۸۹-۶}$$

در سمت دیگر در مورد چگالی حضور نورون‌ها روی آستانه نیز باید بحث کنیم. در حالت پایا این مقدار برای تمامی مدل‌های ثابت است اما می‌تواند مقداری متفاوت داشته باشد. این تفاوت باعث می‌شود تا نقطه‌ی گذرفاز بسته به نوع مدل کمی جابجا شود.

پس شروع می‌کنیم تا چگالی حضور نورون‌ها روی آستانه را پیدا کنیم. از معادلهٔ ۶-۳ می‌توانیم برای

حالت پایا چگالی را این گونه باز نویسی کنیم:

$$\frac{\partial n_a}{\partial t} = -\frac{\partial J_a}{\partial \theta} \tag{۱۹۰-۶}$$

$$۰ = -\frac{\partial J_a}{\partial \theta} \tag{۱۹۱-۶}$$

$$\Rightarrow J_a = J_{const} \tag{۱۹۲-۶}$$

$$\rho_\pi \dot{\theta} = J \tag{۱۹۳-۶}$$

$$\rho_\pi = \frac{J}{a - cos\theta - gE_۰}\Big|_{\theta=\pi} \tag{۱۹۴-۶}$$

که در اینجا J جریان پایاست که در این حالت وابستگی به زمان و فاز ندارد. برای به دست آوردن مقدار دقیق آن تقاضا می‌کنیم تا جمع چگالی ما برابر یک شود:

$$۱ = \int_{-\pi}^{\pi} \rho(\theta) d\theta \tag{۱۹۵-۶}$$

$$۱ = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{J}{a - cos\theta - gE_۰} d\theta \tag{۱۹۶-۶}$$

$$۱ = J \cdot \frac{۲\pi}{\sqrt{(a - gE_۰)^۲ - ۱}} \tag{۱۹۷-۶}$$

$$J = \frac{\sqrt{(a - gE_۰)^۲ - ۱}}{۲\pi} \tag{۱۹۸-۶}$$

$$\Rightarrow \rho(\theta) = \frac{۱}{۲\pi} \cdot \frac{\sqrt{(a - gE_۰)^۲ - ۱}}{a - cos\theta - gE_۰} \tag{۱۹۹-۶}$$

$$\Rightarrow \rho(\pi) = \frac{۱}{۲\pi} \cdot \frac{\sqrt{(a - gE_۰)^۲ - ۱}}{a + ۱ - gE_۰} \tag{۲۰۰-۶}$$

$$= \frac{۱}{۲\pi} \cdot \sqrt{\frac{a - ۱ - gE_۰}{a + ۱ - gE_۰}} \tag{۲۰۱-۶}$$

از طرفی میدان در حالت پایا خواهد بود:

$$E_۰ = \rho_\pi (a + ۱ - gE_۰) \tag{۲۰۲-۶}$$

با در کنار هم قرار دادن معادلات میدان و چگالی می‌توانیم چگالی حضور نورون‌ها روی آستانه را به طریق زیر محاسبه کنیم.

$$\rho_\pi = \frac{۱}{۲\pi} \cdot \frac{-g + \sqrt{g^۲ + ۴\pi^۲(a^۲ - ۱)}}{۲\pi(a + ۱)} \tag{۲۰۳-۶}$$

حال هر آنچه که برای نورون‌های ساده با چگالی یکنواخت $\frac{1}{2\pi}$ نوشتیم؛ با چگالی یاد شده در رابطه اخیر برای نورون‌های چرخنده می‌نویسیم. به این ترتیب خواهیم داشت:

$$1 = \rho_\pi g \gamma(2, \alpha d) \tag{۶-۲۰۴}$$

$$1 = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{-g + \sqrt{g^2 + 4\pi^2(a^2 - 1)}}{2\pi(a+1)} \cdot g \cdot \gamma(2, \alpha d) \tag{۶-۲۰۵}$$

با حل معادلهٔ چندجمله‌ای فوق می‌توانیم نقطه‌ی گذرفاز را این چنین محاسبه کنیم:

$$g_{T_1} = 2\pi \sqrt{\frac{a+1}{\gamma^2(2, \alpha d)(a-1) - 2\gamma(2, \alpha d)}} \tag{۶-۲۰۶}$$

حال برای بررسی صحت این حدس، در دو حالت تیزه‌های باریک و پهن نتایج شبیه‌سازی را با رابطه‌ی بالا تطابق می‌دهیم:

جریان‌های وسیعتر

حل یاد شده در قسمت‌های قبل مربوط به سامانه‌ی تک‌جریان بود. حال می‌خواهیم سامانه را به حالتی برگردانیم که پوششی پهن از جریان‌های متفاوت داشت. پس اجازه بدهید تا معادلات را به فرم توزیعی از جریان‌های مختلف برگردانیم:

$$E(t) = \frac{1}{N} \int_0^\infty \mathcal{J}(\pi, t - d - u_1) \cdot \mathcal{P}(u_1) du_1 \tag{۶-۲۰۷}$$

$$- \frac{g}{N} \int_0^\infty \mathcal{N}(\pi, t - d - u_1) \cdot \mathcal{P}(u_1) E(t - d - u_1) du_1 \tag{۶-۲۰۸}$$

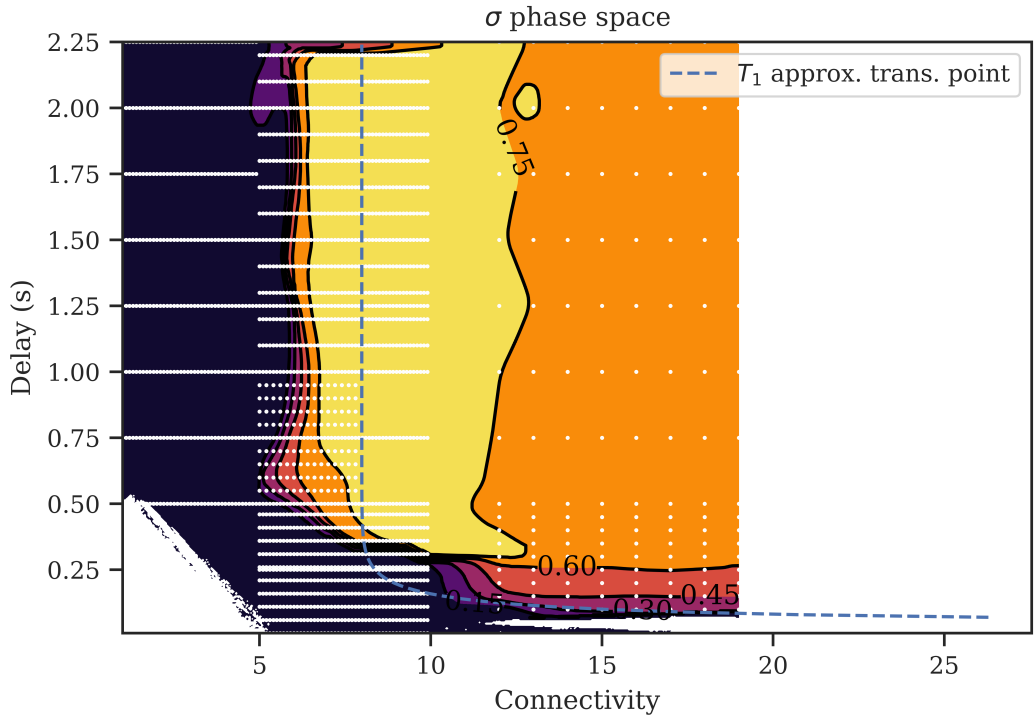
که در این عبارت نمادگذاری‌های زیر جانشین شده‌اند.

$$\mathcal{J}(\pi, t - d - u) \equiv \int n_a(\pi, t - d - u) a \cdot da \tag{۶-۲۰۹}$$

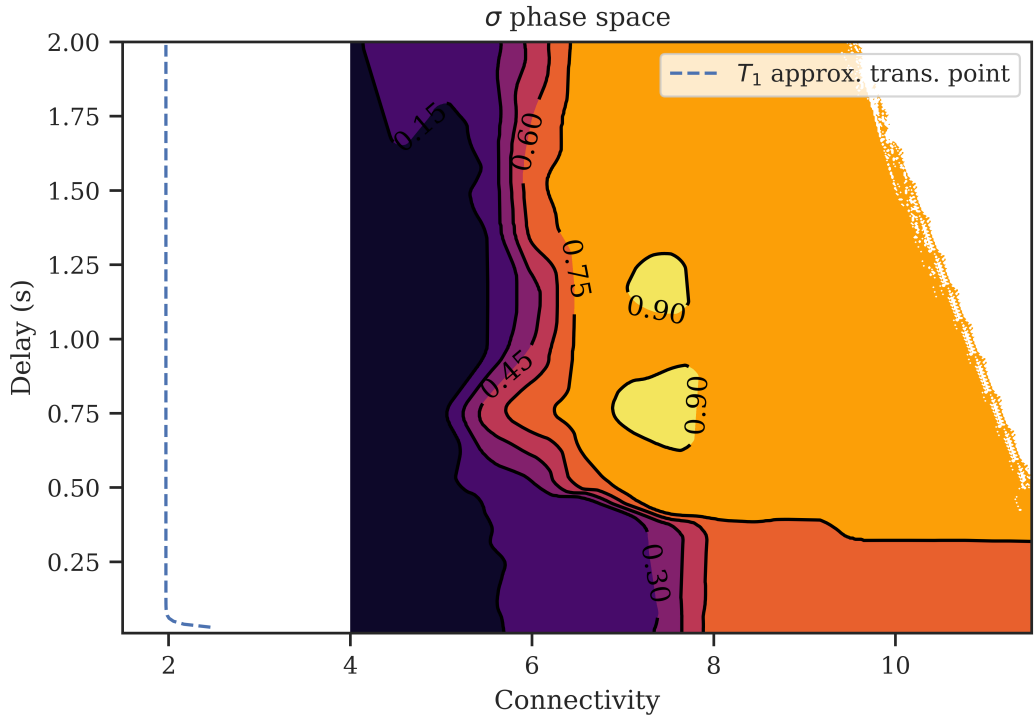
$$\mathcal{N}(\pi, t - d - u) \equiv \int n_a(\pi, t - d - u) \cdot da \tag{۶-۲۱۰}$$

$$\mathcal{P}(u) \equiv \alpha^2 u \, e^{-\alpha u} \tag{۶-۲۱۱}$$

محاسبات اختلالی یاد شده در قسمت قبل مربوط به همسایگی حالت پایا بود. پس اگر اینجا هم



(آ) تیزه‌های پهن



(ب) تیزه‌های باریک

شکل (۶-۶) تطبیق شبیه‌سازی عددی با رابطه‌ی تحلیلی ۶-۲۰۶

معادلات را در حالت پایا پیش ببریم؛ خواهیم داشت:

$$E(t) = \frac{1}{N}\int_0^\infty \mathcal{J}_0 \cdot \mathcal{P}(u_1)du_1 \tag{۲۱۲-۶}$$

$$- \frac{g}{N}\int_0^\infty \mathcal{N}_0 \cdot \mathcal{P}(u_1)E(t-d-u_1)du_1 \tag{۲۱۳-۶}$$

$$E(t) = \hat{\mathcal{J}} - g\frac{\hat{\mathcal{N}}}{N}\int_0^\infty \mathcal{P}(u_1)E(t-d-u_1)du_1 \tag{۲۱۴-۶}$$

$$E(t) = \hat{\mathcal{J}} - g\rho_\pi\int_0^\infty \mathcal{P}(u_1)E(t-d-u_1)du_1 \tag{۲۱۵-۶}$$

همان‌طور که مشخص است جنس معادلات مشابه همان حالت تک‌جریان است با این تفاوت که یک جریان میانگین برای سامانه کار می‌کند و معادلات باهمان پیش خواهند رفت.

فصل ۷

نتیجه‌گیری

همگامی برای همه‌ی مدل‌های نورونی مهاری همه‌ی نتایج و محاسبات ما حاکی از آن است که هم‌گامی ویژگی خاص مدل انباشت‌وشلیک و یا چرخنده نیست. این تغییر فاز در سامانه‌ای مهاری با معادلات تحول ساده نیز اتفاق می‌افتد. هر چند که نقطه‌ی گذرفاز در این سامانه‌ها با یک‌دیگر تطبیق ندارد اما کیفیت تغییر فاز هم‌چنان یکی است. این مسئله را با شبیه‌سازی انواع مدل‌های نورونی در فصل‌های شبکه انباشت و شلیک شبکه‌ی نورون‌های چرخنده شبکه نورون‌های ساده متوجه شدیم. هر سه شامل نشانی از هم‌گامی بودند که کیفیتی مشابه داشتند.

تمایز در همگامی جدا از این در پویانمایی‌های انجام شده در فصل تصویرسازی سامانه‌ها مشاهده شد که در حالت هم‌گامی، نورون‌ها هم‌فاز نمی‌شوند بلکه فازهای آن‌ها پشت‌سرهم بهم جفت می‌شود. از این منظر، با همگامی در مدل‌های [برونل] و [کوراموتو] تفاوت دارد اما می‌توان صفت همگامی را به گونه‌ی دیگری به آن نسبت داد.

اگر به تصویرسازی‌ها نگاهی مجدد بیاندازیم متوجه خواهیم شد که این سرعت‌های نورون‌ها هستند که باهم همگام شده‌اند. توگویی با یکدیگر به سمت آستانه پیش و از آن پس می‌روند. با هر بار افزایش میدان E همه‌ی نورون‌ها عقب می‌روند و با هر بار کاهش آن باریکه‌ی منظمی از نورون‌ها در صف رسیدن به آستانه قرار می‌گیرند تا در نوبت بعدی تیزه بزنند.

توصیف تحلیلی در نهایت تلاش کردیم تا هم‌گامی را در فصل تلاش برای توصیف به صورت تحلیلی

بررسی کنیم. با توجه به این که در فصول اولیه متوجه شدیم که هم‌گامی در مدل نورونی ساده همچنان اتفاق می‌افتد و این که تحلیل معادلات پاره‌ای این مدل ساده‌تر از دو مدل دیگر است؛ به سمت حل تحلیلی آن حرکت کردیم. با این حال تلاش‌های بسیاری کردیم تا پاسخ روی کاغذ نقش ببندد.

ابتدا مسئله را در حالت ساده برای تیزه‌های باریک حل کردیم. در این شرایط، توانستیم با موفقیت تابع میدان E را در زمان به صورت تحلیلی گزارش کنیم. صورت صریح آن به ما کمک کرد تا شرط پایداری و ناپایداری آن را به دست آوریم. نقطه‌ی گذر فاز برای تیزه‌های باریک کاملا مستقل از زمان تاخیر آکسونی و عددی معادل با حجم فضای فاز تک‌نورون پیدا کرد یعنی $g^* = ۲\pi$.

سپس مسئله را به حالت تیزه‌های پهن برگرداندیم. اگر چه صورت میدان E در این حالت پیچیده‌تر شد اما هم‌چنان توانستیم معادلات را متناسب با درخواست خود تغییر شکل دهیم. نقطه‌ی گذر فاز این حالت ارتباطی نزدیک با زمان تاخیر آکسونی پیدا کرد و برحسب آن به صورت زیر در آمد:

$$g^* = \frac{۲\pi}{\gamma(۲, \alpha d)}$$

که α مشخصه‌ی پهن شدگی تیزه‌ها و d زمان تاخیر آکسونی هستند. این عبارت نشان می‌دهد که نسبت زمان تاخیر آکسونی به زمان موثر تیزه‌ها مهم است و هر کدام به تنهایی نقش آفرینی نمی‌کنند.

صندوق پیام‌ها

محسن : سلام استاد

نمی‌دونم شاید واقعا فکر نمی‌کردم امروز برسه یا شاید هم برای این لحظه، لحظه شماری می‌کردم. نسخه نهایی نهایی پایان‌نامه‌ام تقدیم شما!

خیلی ممنون از این همه زحمت و حمایت

ارادتمند همیشگی شما

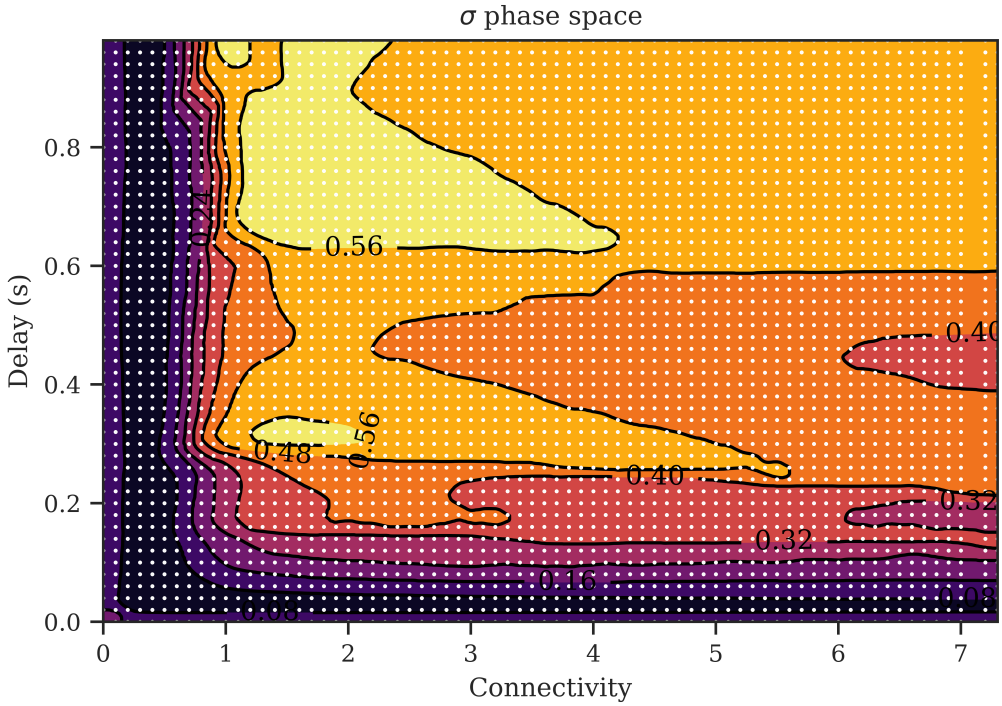
محسن (چهارشنبه، ۱۶ شهریور ۱۴۰۱)

پیوست آ

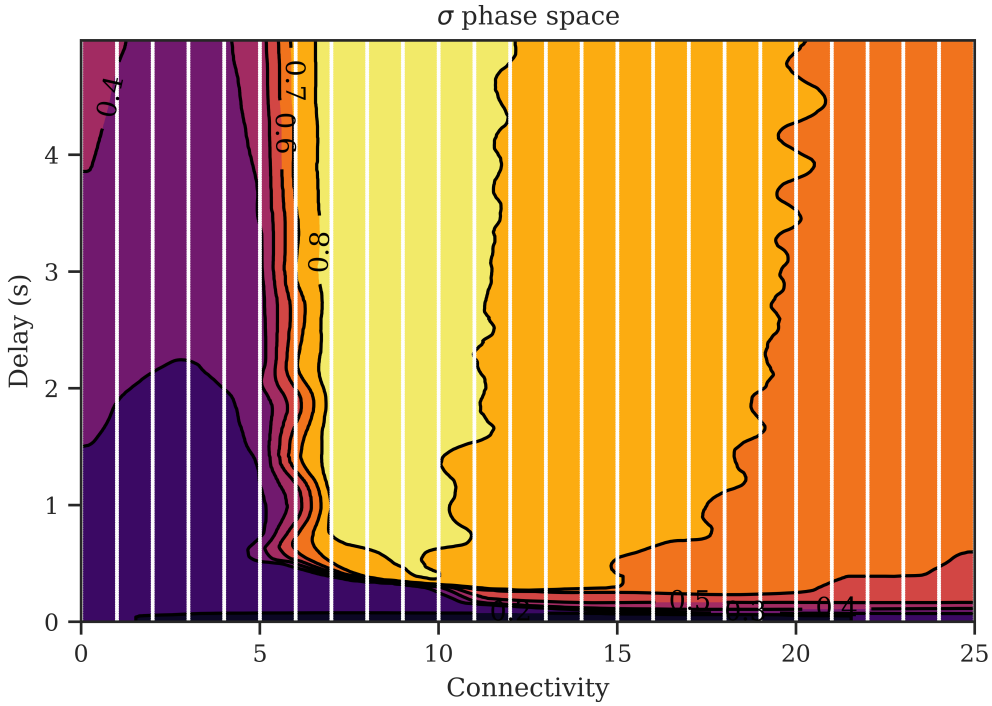
نمونه‌گیری صفحه فاز

آـ۱ انباشت‌وشلیک

شکل ۲-۱ و نمایشگر صفحه‌ی فاز است که مقادیر متفاوتی را برای هر نقطه گزارش می‌کند. بدون شک داده‌گیری از تک‌تک نقاط فضا امکان پذیر نبود و برای ایجاد این شکل یک شبکه از نقاط به فاصله‌ی نزدیک از هم استفاده شد و رنگ نقاط میانی از نقطه‌ی همسایه‌ی نزدیک آن‌ها برداشته شد.



شکل (آ–۱) نقاطی از صفحه فاز که از آن‌ها داده‌گیری انجام شده است به رنگ سفید درآمده‌اند.



شکل (آ_۲) نقاطی از صفحه فاز که از آن‌ها داده‌گیری انجام شده است به رنگ سفید درآمده‌اند.

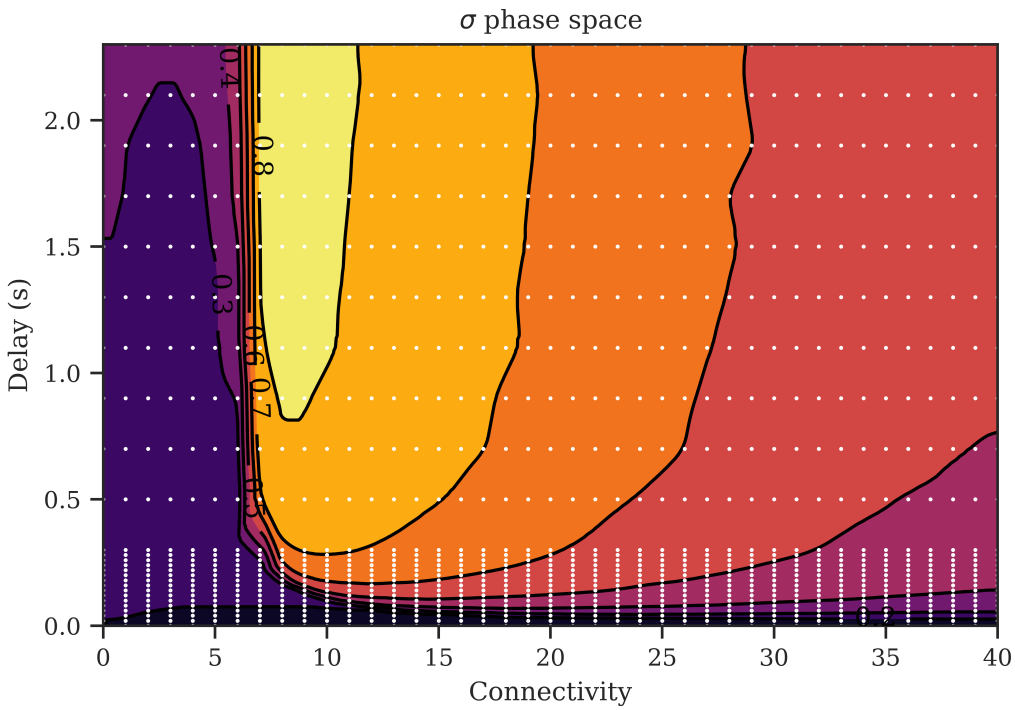
آ_۲ چرخنده

آ_۳ ساده

آ_۴ محاسبه‌ی دوره‌ی تناوب نورون‌های چرخنده

انتگرال مربوط به این محاسبه یکی از انتگرال‌های معروفی است که راه‌حلی کاملا خلاقانه دارد.

$$\begin{aligned}
\int_{۰}^{۲\pi} \frac{dx}{a+\cos x} &= \int_{۰}^{۲\pi} \frac{dx}{a+\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{۲}} \\
&= ۲\int_{۰}^{۲\pi} \frac{e^{ix}\,dx}{۲ae^{ix}+e^{۲ix}+۱} \qquad \text{Let} z = e^{ix},\ \text{so}\ dz = ie^{ix}\,dx. \\
&= \frac{۲}{i}\int_{|z|=۱} \frac{dz}{z^{۲}+۲az+۱} \\
&= \frac{۲}{i}\int_{|z|=۱} \frac{dz}{(z-z_{۱})(z-z_{۲})}
\end{aligned}$$



شکل (آ–۳) نقاطی از صفحه فاز که از آن‌ها داده‌گیری انجام شده است به رنگ سفید درآمده‌اند.

قطب‌های انتگرال به قرار زیر هستند:

$$z_۱ = -a - \sqrt{a^۲ - ۱} \qquad\qquad z_۲ = -a + \sqrt{a^۲ - ۱}.$$

با این تغییر متغیر ادامه می‌دهیم:

$$\begin{aligned}
\frac{۲}{i}\int_{|z|=۱} \frac{dz}{(z-z_۱)(z-z_۲)} &= \frac{۲}{i}\ ۲\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{۱}{(z-z_۱)(z-z_۲)}, z_۲\right) \\
&= ۴\pi \frac{۱}{z_۲ - z_۱} \\
&= ۴\pi \frac{۱}{۲\sqrt{a^۲ - ۱}} \\
&= \frac{۲\pi}{\sqrt{a^۲ - ۱}}.
\end{aligned}$$

مراجع

[1] Daniel Krawczyk. *Reasoning: The Neuroscience of How We Think*. 11 2017.

[2] Gina R. Poe, Christine M. Walsh, and Theresa E. Bjorness. Cognitive neuroscience of sleep. volume 185 of *Progress in Brain Research*, pages 1–19. Elsevier, 2010.

[3] Mark A. Smith. Alzheimer disease. volume 42 of *International Review of Neurobiology*, pages 1–54. Academic Press, 1998.

[4] Vikram R. Rao and Daniel H. Lowenstein. Epilepsy. *Current Biology*, 25(17):R742–R746, 2015.

[5] Xin Ren, Anastasia Brodovskaya, John L. Hudson, and Jaideep Kapur. Connectivity and neuronal synchrony during seizures. *Journal of Neuroscience*, 41(36):7623–7635, 2021.

[6] Amir Mohammad Naderi and Saman Moghimi Araghi. *Role of synchronous subnetwork in the propagation of synchronization to the neuronal population*. PhD thesis, 2022.

[7] Swen Dunkelmann and Günter Radons. Neural networsk and abelian sandpile models of self-organized criticality. In *Proceedings of International Conference Artificial Neural Networks*, pages 867–870. Springer-Verlag, 1994.

[8] Claude Bédard, Helmut Kröger, and Alain Destexhe. Model of low-pass filtering of local field potentials in brain tissue. *Physical Review E*, 73(5):051911, 2006.

[9] John M Beggs and Nicholas Timme. Being critical of criticality in the brain. *Frontiers in physiology*, 3:163, 2012.

[10] Stefano Luccioli and Antonio Politi. Irregular collective behavior of heterogeneous neural networks. *Phys. Rev. Lett.*, 105:158104, Oct 2010.

[11] Sheida Kazemi and Yousef Jamali. Phase synchronization and measure of criticality in a network of neural mass models. *Scientific Reports*, 12(1):1–18, 2022.

[12] Igor Belykh, Enno de Lange, and Martin Hasler. Synchronization of bursting neurons: What matters in the network topology. *Phys. Rev. Lett.*, 94:188101, May 2005.

[13] Danny Eytan and Shimon Marom. Dynamics and effective topology underlying synchronization in networks of cortical neurons. *Journal of Neuroscience*, 26(33):8465–8476, 2006.

[14] John A White, Carson C Chow, Jason Rit, Cristina Soto-Treviño, and Nancy Kopell. Synchronization and oscillatory dynamics in heterogeneous, mutually inhibited neurons. *Journal of computational neuroscience*, 5(1):5–16, 1998.

[15] Nicky Penttila. Neuroanatomy: The basics, Aug 2022.

[16] Samuel B. Tomlinson and Arun Venkataraman. Secondary generalization of focal-onset seizures: examining the relationship between seizure propagation and epilepsy surgery outcome. *Journal of neurophysiology*, 117 4:1426–1430, 2017.

[17] Nicolas Brunel and Mark CW Van Rossum. Quantitative investigations of electrical nerve excitation treated as polarization. *Biological Cybernetics*, 97(5):341–349, 2007.

[18] L. Lapicque. Recherches quantitatives sur l'excitation electrique des nerfs traitée comme une polarization. *Journal de Physiologie et Pathologie General*, 9:620–635, 1907.

[19] Csaba Erö, Marc-Oliver Gewaltig, Daniel Keller, and Henry Markram. A cell atlas for the mouse brain. *Frontiers in Neuroinformatics*, 12, 11 2018.

[20] J Wilting and V Priesemann. 25 years of criticality in neuroscience — established results, open controversies, novel concepts. *Current Opinion in Neurobiology*, 58:105–111, 2019. Computational Neuroscience.

[21] Nicolas Brunel. Dynamics of sparsely connected networks of excitatory and inhibitory spiking neurons. *Journal of computational neuroscience*, 8(3):183–208, 2000.

[22] Amin Safaeesirat and Saman Moghimi-Araghi. Critical behaviour at the onset of synchronization in a neuronal model, 2020.

Centuries passed and the human knew himself as the protagonist who searches around nature and discovers the phenomena. But after the birth of "neuroscience", his wisdom and the process of reasoning were also added to the list of uncovered subjects. Since its arrival, many scientists started investigating "reasoning" [1] , "sleep" [2] , "memory disorders" [3] etc. with a such framework. One of the main branches of this stream is the "Synchronization" problem when the neurons get synced in the matter of spiking likelihood. "Synchronization" means a lot to the community, because it is said that it is one major symptom of Epilepsy [4, 5, 6] . With that said, we need to get to the root of this effect. It seems that the brain lies in some critical state [7, 8, 9] . One promising option is the transition point between synchronization and desynchronization. Recognizing the in-between state demands a well understanding of extreme states. Numerous models have been suggested to describe this matter [10, 11, 12, 13, 14] . However, we discuss one promising model with numerical and analytical details. In this model, we study the networks with neurons of heterogeneous inputs. Of course, there are many options to put for of dynamics of each neuron. However, we found that regardless of the taken equation of dynamic the phase-transition always holds, even at very simple ones. Moreover, we indicated that the synchronization happens to their velocity rather than their phases, better say "velocity-lock" rather than "phase-lock". This means that when they intend to spike, they head toward the threshold simultaneously. Numerical investigation confirms our hypothesis.

keywords: Neurons, synchronization, epilepsy, computational neuroscience

Sharif University of Technology

Department of Physics

M.Sc. Thesis

Synchronization in inhibitory neural networks

By:

Mohsen Mehrani Ardebili

Supervisor:

Dr. Saman Moghimi Araghi

September 2022