ANÁLISE DE DECISÃO E RISCO - LISTA 1

Matheus Oliveira Meirim
mmeirim@outlook.com

Os códigos desenvolvidos para realizar a lista estão disponíveis **neste repositório do github**.

Questão 4

Item (a)

Para a nova fábrica temos:

- Investimento para construir nos 3 primeiros anos $(I) = 15 \times 200 = 3000$
- Custo de produção por ano $(c) = 0.01 \times 200^2 = 400$
- Receita por ano $(g) = 3 \times 200 = 600$

Dessa forma, temos que o fluxo financeiro desta fábrica é caracterizado por uma despesa de \$3000 ente o Ano 0 e o Ano 2 e por um lucro de \$200 entre o Ano 3 e o Ano 42 (40 anos de vida útil da fábrica).

Para a fábrica existente temos:

- Custo de produção por ano $(c) = 1 \times 100 = 100$
- Receita por ano $(g) = 3 \times 100 = 300$

Dessa formam temos que o fluxo financeiro desta fábrica é caracterizado por um lucro de \$200 entre o Ano 0 e o Ano 42 (considerando que a fábrica possui vida útil até este período). Portanto o fluxo financeiro combinado, sendo P o Parque industrial formado pelas 2 indústrias, é caracterizado por uma despesa de \$2800 ente o Ano 0 e o Ano 2 e por um lucro de \$400 entre o Ano 3 e o Ano 42.

Dessa forma o Valor Presente do parque industrial é dado por:

$$
\begin{aligned}
VP(P) &= \sum_{t=0}^{42} \frac{x_t}{(1+r)^t} \\
&= -2800 \cdot (1.05)^0 - 2800 \cdot (1.05)^{-1} - 2800 \cdot (1.05)^{-2} \\
&+ 400 \cdot (1.05)^{-3} + \cdots + 400 \cdot (1.05)^{-42} \\
&= \$ - 1780.83
\end{aligned}
$$

Como o Valor Presente é negativo, é possível inferir que o investimento em uma nova fábrica considerando a produção anual de 200 unidades não é uma decisão ótima. Isso ocorre pois o valor presente negativo representa que os fluxos financeiros avaliados no tempo inicial representam uma perda financeira, sendo pior abrir a nova fábrica do que manter apenas a fábrica existente.

Item (b)

Definindo o Valor Presente do parque de fábricas $VP_{parque}(Q)$ de forma análoga ao item (a).

$$VP_{parque}(Q) = \sum_{t=0}^{42} \frac{x_t}{(1+r)^t}$$

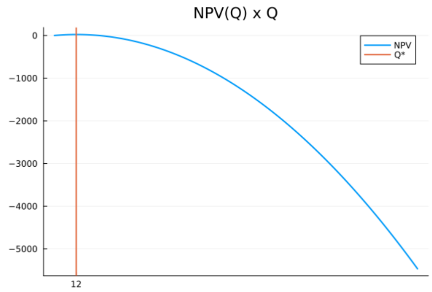
Temos que x_t é funç ao de Q, visto que o investimento na fábrica nova ($I = 15 \cdot Q$) e o lucro ($L = 3 \cdot Q - 0.01 \cdot Q^2$) dependem da quantidade produzida. A capacidade ótima é aquela que maximiza o valor presente, sendo assim

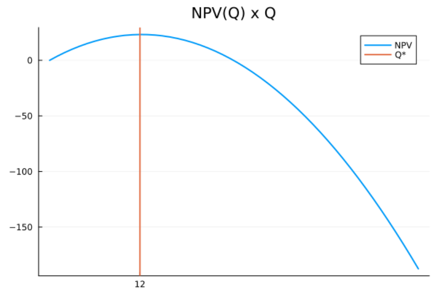
$$Q^* \in argmax(VP_{parque}(Q))$$

Para determinar a quantidade Q^*, é necessário resolver este problema de maximização. Após os cálculos, considerando apenas valores discretos para Q, conclui-se que $Q^* = 12$.

Item (c)

Os gráficos abaixo mostram a variação do valor presente (VP) considerando apenas a nova fábrica em função da variação da quantidade produzida (Q). A linha vertical apresenta o valor Q^* que maximiza o valor presente da fábrica e o gráfico mais a direita apresenta de forma mais detalhada o intervalo no eixo x que engloba o ponto Q^*. É possível verificar o Q^* que maximiza o VP do parque de fábricas olhando apenas para a fábrica 2 pois o fluxo da fábrica 1 é extritamente positivo, logo não afeta a análise de maximização.





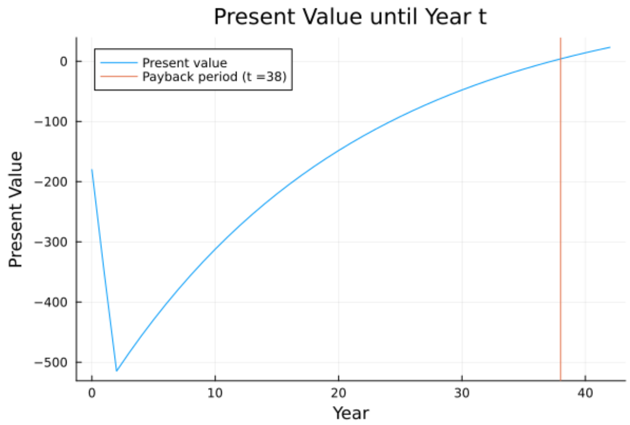
Item (d)

O Payback do investimento na nova fábrica é calculado somando o fluxo de caixa descontado do investimento até o ano em que esse fluxo acumulado seja superior ao montante investido no ano 0. Utilizando o valor de Q^* , o Payback do investimento ocorre no ano 38. O gráfico do valor presente até o período t é apresentado abaixo.

Item (e)

Utilizando o valor de $Q = 200$ o investimento, o Payback do investimento não ocorre dentro do período analisado (até o ano 42).

Este resultado é esperado, pois o valor presente negativo indica que até aquele período o retorno do investimento é negativo e o fato de a partir do ano 3 o fluxo de caixa ser sempre positivo indica que não há como o payback ter ocorrido em algum período anterior ao 42 e após esse período

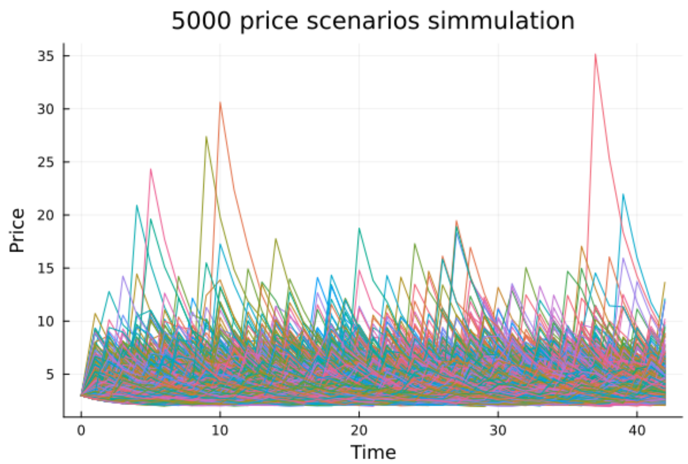


a fábrica começasse a ter retornos negativos que fizessem o valor presente do investimento ao longo dos 2 anos ser negativo.

Além disso, o fluxo de caixa da fábrica 1, que compõe o valor presente calculado no item (a) também é extritamente positivo, não impactando a análise sobre o payback não existir e o valor presente do item (a) ser negativo.

Item (f)

O gráfico com evolução dos preços ao longo do horizonte de análise pode ser visto a seguir.



Item (g)

Definimos o Valor Esperado do Valor Presente do parque de fÃ¡bricas $E[V_parque(Q)]$, considerando P_i a probablidade de ocorrência do cenário i, que para este estudo foi considerada igual para todos os cenários.

$$E[VP_{parque}(Q)] = \sum_{i=0}^{5000} P_i \cdot \sum_{t=0}^{42} \frac{x_t^{(i)}}{(1+r)^t}$$

Temos que $x_t^{(i)}$ é funç ao de Q e de i, visto que o investimento na fábrica nova ($I = 15 \cdot Q$) e o seu lucro ($L = \pi^{(i)} \cdot Q - 0.01 \cdot Q^2$) dependem da quantidade produzida, o que também ocorre para a fábrica já existente ($L = (\pi^{(i)} - 1) \cdot Q_0$). A capacidade ótima é aquela que maximiza o valor presente, sendo assim

$$Q^* \in argmax(E[VP_{parque}(Q)])$$

Para determinar a quantidade Q^*, é necessário resolver este problema de maximização. Após os cálculos, considerando apenas valores discretos para Q, conclui-se que $Q^* = 28$.

Item (h)

Considerando **apenas o investimento na fábrica nova** para realizaç ao desta conta, temos:

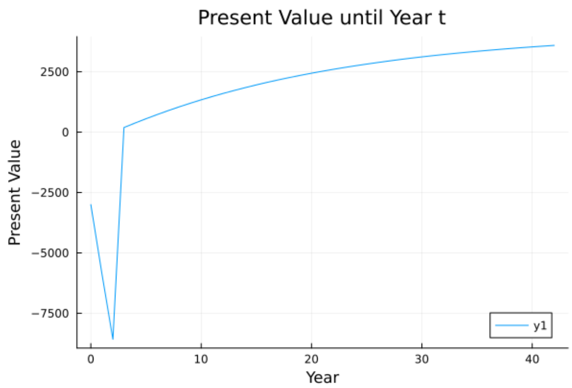
- Probabilidade de um Valor Presente negativo para Q^*: 23.14%
- Probabilidade de um Valor Presente negativo para $Q_Intuitivo$: 99.6%

Considerando o **parque industrial completo** para realizaç ao desta conta, temos:

- Probabilidade de um Valor Presente negativo para Q^*: 0%
- Probabilidade de um Valor Presente negativo para $Q_Intuitivo$: 62.88%

Item (i)

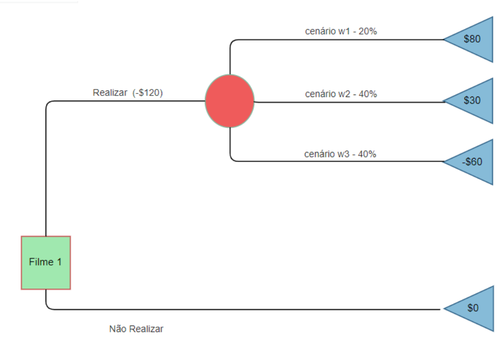
O Payback do investimento na nova fábrica é calculado de forma análoga ao item (d), porém, considerando o valor esperado do investimento e utilizando os cenários de preço geradis. Utilizando o valor de $Q^* = 28$, encontrado no item (g), o Payback do investimento ocorre no ano 3. O gráfico do valor presente até o período t é apresentado abaixo.



Questão 5

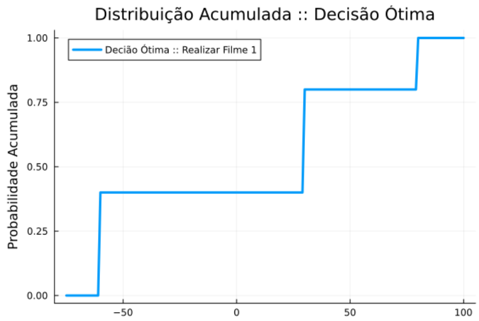
Item (a)

A árvore de decisão pode ser modelada como na figura abaixo e utilizando como funcional de preferência o Valor eperado ($\mathbb{E}$) é possível verificar que $Filme1 \succ_{\mathbb{E}} SemFilme1$, visto que $\mathbb{E}[Filme1] = \$4 > \mathbb{E}[SemFilme1] = \$0$.



Item (b)

O perfil de risco acumulado associado à decisão de realizar o filme 1 é apresentado abaixo. É possível ver que o menor ganho existente é $-\$60$ que ocorre no cenário $\omega3$, com probabilidade 60%. Além disso, o perfil de risco acumulado mostra que há probabilidade de 80% dos ganhos serem inferiores à $30.



Item (c)

Para realizar esta análise, é necessário adicionar o custo de investimento e as receitas geradas pelo filme 2 na árvore de decisão modelada no item (a). Como as decisões são tomadas no mesmo momento, não são acrescentados novos nós de decisão na árvore.

Após realizar estes ajustes é possível ver que o retorno obtido com a realização dos filmes 1 e 2 é de $-\$2$, quando modelado desta forma, sendo preferível não realizar nenhum, obtendo retorno $\$0$.

Item (d)

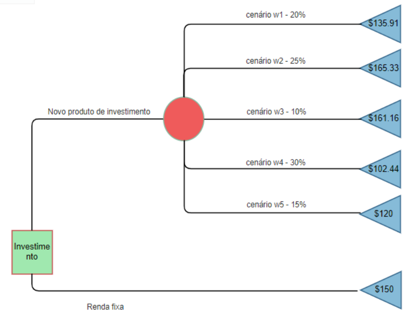
Para realizar esta análise, é necessário adicionar etapas na árvore de decisão criada no item(a). Após a realização de cada cenário do Filme 1, é adicionado um nó de decisão para a realização ou não do Filme 2 e também os nós de incerteza associados á cada um dos possíveis cenários de audiência.

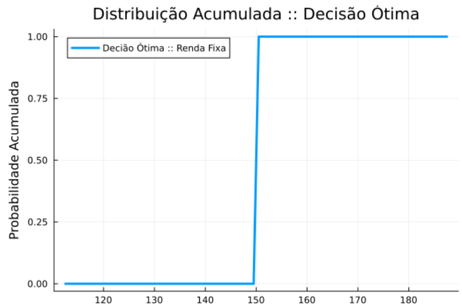
Após atualizar a árvore de decisão e realizar os cálculos, temos que a política ótima é Realizar Filme 1 e não realizar Filme 2, obtendo retorno de $\$4$, tal qual no item (a).

Questão 9

Item (a)

A árvore de decisão pode ser modelada como na figura abaixo e utilizando como funcional de preferência o Valor eperado ($\mathbb{E}$) é possível verificar que $RF \succ_{\mathbb{E}} Inv2$, visto que $\mathbb{E}[RF] = \$150 > \mathbb{E}[Inv2] = \$133.36$. O perfil de risco acumulado associado à renda fixa também é apresentado na imagem abaixo.





Item (b)

Considerando os retornos calculados para os cenários e observando o perfil de risco acumulado é possível ver que para se obter um retorno maior ao da RF é necessário que ocorreram os cenários w2 e w3. Dessa forma, esses cenários juntos podem ocorrer com probabilidade de 35%, sendo esta a probabilidade do novo investimento (Inv2) ter retorno superior à renda fixa.

Item (c)

Para calcular $E[R(\tilde{q_1}, \tilde{q_2}) \mid q_1]$, assumindo a distribuição uniforme $U(-2, 7)$ para $\tilde{q_1}$ e $U(q_1, 10)$ para $\tilde{q_2}$, temos a seguinte expressão:

$$E[R(\tilde{q_1}, \tilde{q_2}) \mid q_1] = 10 \cdot \frac{q_1 + 10}{2} + 50 \exp(-0.5q_1) + 5q_1 \cdot \frac{q_1 + 10}{2}$$
$$E[R(\tilde{q_1}, \tilde{q_2}) \mid q_1] = 5q_1 + 50 + 50 \exp(-0.5q_1) + \frac{5}{2}q_1^2 + 25$$

Agora, para encontrar o valor esperado de $R(\tilde{q_1}, \tilde{q_2})$ vamos calcular a integral abaixo.

$$E[R(\tilde{q_1}, \tilde{q_2})] = \int_{-2}^{7} \left(5q_1 + 50 + 50 \exp(-0.5q_1) + \frac{5}{2}q_1^2 + 25q_1 \right) \cdot \frac{1}{9}\, dq_1]$$

Após os calculos, foi encontrado que $E[R(\tilde{q_1}, \tilde{q_2})] = \$187.37$. Assim, é preferível migrar para o novo investimento.

Item (d)

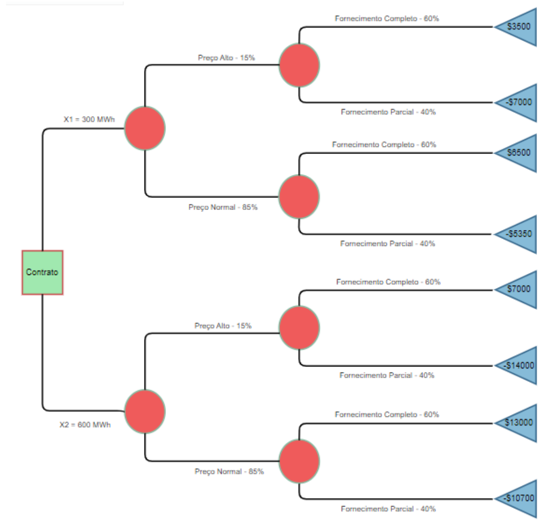
Para solucionar este problema encontrando o valor do Funcional de Preferência de pior caso, foi implementado um modelo de otimização não linear, visando minimizar o retorno, sendo assim encontrar os valores de q_1 e q_2 que resultem nesse pior caso e também o valor deste pior caso.

Após os calculos, foi encontrado que o valor do Funcional de Preferência de pior caso é $\$44.67$, sendo $q_1 = q_2 = 0.73$. Assim, é preferível permanecer no investimento na Renda Fixa.

Questão 14

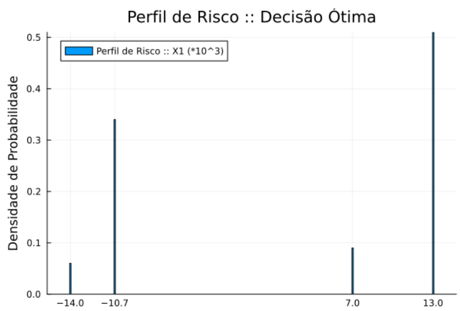
Item (a)

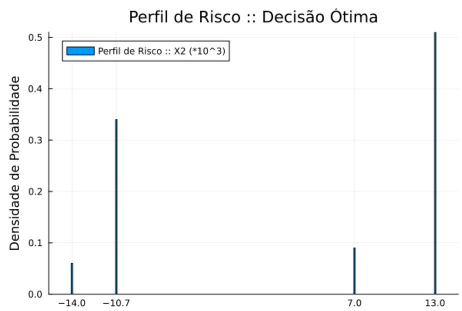
A árvore de decisão pode ser modelada como na figura abaixo e utilizando como funcional de preferência o Valor eperado ($\mathbb{E}$) é possível verificar que $X2 \succ_{\mathbb{E}} X1$, visto que $\mathbb{E}[X2] = \$2.782 > \mathbb{E}[X1] = \$1.391$.



Item (b)

As imagens abaixo apresentam o perfil de risco e o perfil de risco acumulado para as duas alternativas de contratação.

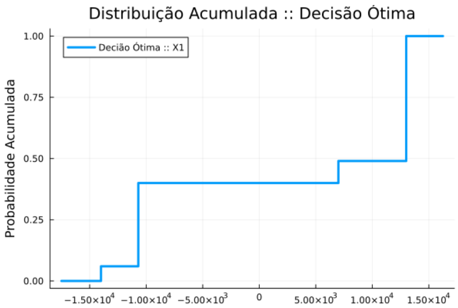


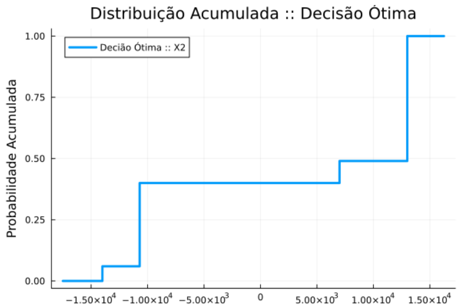


Considerando os retornos calculados para os cenários e observando o perfil de risco acumulado é possível ver que há uma probabilidade de 40% de a receita líquida ser negativa. O que faz sentido, visto que em 40% dos casos o fornecedor irá fornecer apenas metade da demanda e a multa é mais cara do que o ganho que se tem vendendo o que é possível

Item (c)

Para realizar esta análise, é necessário adicionar mais uma etapa na árvore de decisão modelada no item (a), destinada à avaliar se o retorno obtido consultando o especialista com informaçao perfeita é superior ao retorno previamente obtido. Caso o retorno seja superior a diferença entre este e o retorno obtido no item (a) representa o maior valor que a empresa estaria disposta a pagar pela informação.





Após realizar estas etapas é possível ver que o retorno obtido com a consulta ao especialista é de $\$2.887$, sendo preferível consultá-lo. Assim, o valor máximo que a empresa esta disposta a pagar pela informaçao é de $\$105$.

Item (d)

A probabilidade de a consultoria prever Preço Normal na próxima hora é dada pela divisão da quantidade de previsões para Preço Normal realizadas pelo total de previsões realizadas. Após os cálculos é possível afirmar que esta probabilidade é de 65.87%

Para calcular a probablidade do preço do gás natural na próxima hora se realizar Preço Alto, dado que a consultoria previu Preço Normal, é necessário calcular o número de vezes que a previsão Preço Normal foi seguida de Preço Alto e dividir pelo total de previsões realizadas para o Preço Normal. Após os cálculos é possível afirmar que esta probabilidade é de 3.66%.

Item (e)

Para realizar esta análise é necessário comparar o ganho esperado da informação fornecida pela consultoria com o custo do serviço. Para realizar esta análise, prossegui da árvore de decisão utilizada para o item (c), considerando o custo de $\$50$ pelo serviço e as probabilidades dos cenários foram extraídas de forma análoga ao realizado no item (d), a partir dos dados históricos da companhia.

Assim, constrói-se a árvore de decisão e utilizando o valor esperado como funcional de preferência, é possível ver após os cálculos e a redução da árvore que não vale a pena contratar a consultoria, considerando esse custo de serviço e probabilidades dos cenários, visto que ela oferece retorno esperado inferior a $\$2.782$ que é o retorno obtido sem a contrataçao da consultoria.

Questão 15

Item (a)

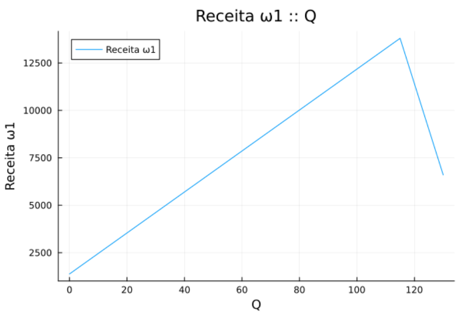
A expressão da receita pode ser dada por:

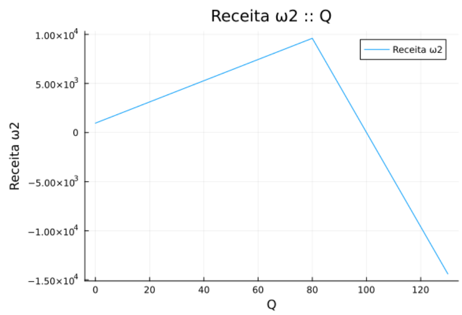
$$R(Q, \tilde{g}) = P \cdot Q - \pi^{(c)} \cdot \max(0, Q - \tilde{g}) + \pi^{(v)} \cdot \max(0, \tilde{g} - Q)$$

Item (b)

As quantidades a serem vendidas em contrato de forma a maximizar a receita são $Q = 115$ no cenário ω_1 e $Q = 80$ no cenário ω_2, gerando $\$13.800$ e $\$9.600$ de receita, respectivamente.

Os gráficos abaixo apresentam a variação da receita $R(Q, \tilde{g})$ de acordo com a variaç do valor vendido em contrato Q.





Item (c)

Utilizando a decisão obtida para o cenário $\omega_1 (Q = 115)$ a receita da mineradora caso ocorra o cenário ω_2 é de $-\$7.200$

Item (d)

Para maximizar o Valor Esperado da receita da mineradora, precisamos considerar a probabilidade de cada cenário e calcular a receita esperada para cada quantidade vendida em contrato.

Sendo a probabilidade do cenário ω_1 $(P(\omega_1) = 0.81)$ e a probabilidade do cenário ω_2 $(P(\omega_2) = 0.19)$.

$$E[R(Q, \tilde{g})] = P(\omega_1) \cdot R(Q, g_{\omega_1}) + P(\omega_2) \cdot R(Q, g_{\omega_2})$$

A soluçao ótima é obtida maximizando o $E[R(Q, \tilde{g})]$ em relação a Q. Realizando os cálculos, foi verificado que para todos os possíveis valores de Q o que maximiza o valor esperado para estas probabilidades é $Q = 80$, obtendo a receita esperada de $\$10.020$ caso ocorra o cenário ω_1 e $\$9.600$ caso ocorra o cenário ω_2.

Item (e)

Considerando a mudança das probabilidades temos que a soluçao ótima é obtida maximizando o $E[R(Q, \tilde{g})]$ em relação a Q. Realizando os cálculos, foi verificado que para todos os possíveis valores de Q o que maximiza o valor esperado para estas probabilidades é $Q = 115$, obtendo a receita esperada de $\$13.800$ caso ocorra o cenário ω_1 e $\$ - 7.200$ caso ocorra o cenário ω_2.

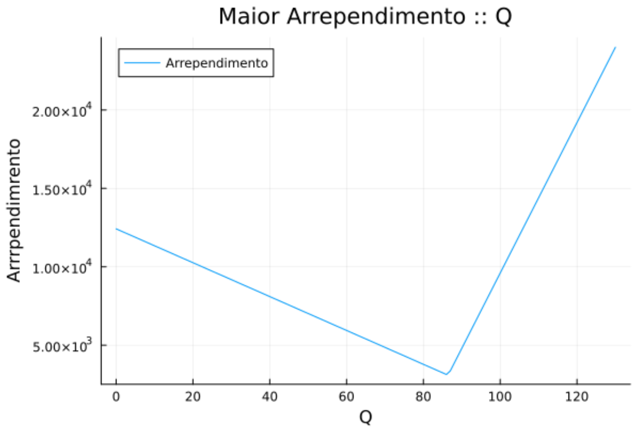
Item (f)

Para calcular o maior arrependimento devemos fazer a conta abaixo, sendo $R\omega_1$ e $R\omega_2$ as receitas ótimas obtidas no item (b).

$$maxArrependimento = max(R\omega_1 - R(Q, g_{\omega_1}); R\omega_2 - R(Q, g_{\omega_2}))$$

Após calcular o maxArrependimento para todos os possíveis valores de Q basta encontar o menor. Dessa forma, a quantidade ótima a ser vendida em contrato que minimize o maior Arrependimento é $Q = 86$, fornecendo a receita de $\$3.132$.

O gráfico abaixo mostra a variação do valor do maior Arrependimento a partir da variação do valor de Q.



Item (g)

Realizando os cálculos, foi verificado que a receita obtida utilizando o valor de $Q = 86$ obtido a partir da avaliação da métrica do maior arrependimento é de $\$10.668$ caso ocorra o cenário ω_1 e $\$6.720$ caso ocorra o cenário ω_2.

Item (h)

$$E[Arrependimento] = P(\omega_1) \cdot (R\omega_1 - R(Q, g_{\omega_1})) + P(\omega_2) \cdot (R\omega_2 - R(Q, g_{\omega_2}))$$
$$E[R(Q, \tilde{g})] = P(\omega_1) \cdot R(Q, g_{\omega_1}) + P(\omega_2) \cdot R(Q, g_{\omega_2})$$

Analisando a primeira expressão, é possível ver que para minimizar o Valor Esperado do Arrependimento é necessário maximizar a receita $R(Q, \tilde{g})$ de forma que a diferença entre ela e a receita máxima seja mínima. Já na segunda expressão é mais claro que para maximizar o Valor Esperado da receita é necessário maximizar $R(Q, \tilde{g})$.

Dessa forma, minimizar o Valor Esperado do Arrependimento é equivalente a maximizar o Valor Esperado da receita, pois ambos buscam maximizar a receita esperada.

Questão 16
Seja $\chi = \{A, B\}$. O problema nos fornece a informaçao que $VP(A) > VP(B)$.

Analisando o funcional de preferência temos que:

$$U(X) = \sum_{t=0}^{T} x_t(1+r)^{(T-t)} = \sum_{t=0}^{T} \frac{x_t}{(1+r)^t} \cdot (1+r)^{(T)} = VP(X) \cdot (1+r)^T$$

Logo,

$$VP(A) > VP(B) \implies \frac{U(A)}{(1+r)^T} > \frac{U(A)}{(1+r)^T}$$
$$\text{sendo } r > 0 \Rightarrow U(A) > U(B) \implies A \succ_U B,$$

Assim, se $A \succ_{VP} B$, então $A \succ_U B$.