ANÁLISE DE DECISÃO E RISCO - LISTA 3

Matheus Oliveira Meirim
mmeirim@outlook.com

Os códigos desenvolvidos para realizar a lista estão disponíveis **neste repositório do github**.

Questão 1
Item (a)

A modelagem do problema real do jornaleiro, considerando a restrição de revenda, pode ser vista abaixo.

$$\begin{aligned} x^* &= Max\ E[-cx + R_1^{(F)}(x,\xi)] \\ &s.t. : 0 \leq x \leq \bar{x} \\ R_1^{(F)}(x,\xi_w) &= Max\ qy + rz \\ &s.t. : y + z \leq x \\ &\quad\ y \leq \xi_w \\ &\quad\ z \leq 0.1x \\ &\quad\ y, z \geq 0 \end{aligned}$$

A variável de primeiro estágio é x (quantidade de jornais comprados), e as de segundo estágio são y (quantidade de jornais vendidos) e z (quantidade de jornais retornados).

A política ótima de segundo estágio é dada por: $z^* = min\{max\{x^* - \xi_w, 0\}, 0.1 \cdot x\}$ e $y^* = min\{x^*, \xi_w\}$.

Item (b)

Para fazer esta avaliação, computei no Julia a expressão da receita para valores de $x \in [1, 150]$ e os possíveis valores de demanda ($d \in [50, 150]$), considerando que cada um desses valores de demanda tem probabilidade 0.01 de ocorrer.

Após computar estes valores em uma lista, busquei o maior deles e qual o respectivo valor de x. Assim sendo, obtive o valore de $x^* = 120$ e $E[R_1^{(I)}(x^*) + R_1^{(F)}(x^*, \tilde{\xi})] = \$3434.4$.

Item (c)

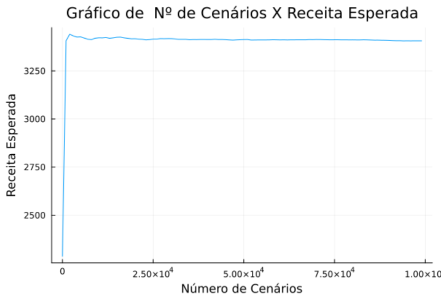
Realizando a geração dos 20 cenários e a modelagem em Julia e rodando o modelo com o Gurobi, obtive os seguintes resultados: $x^* = 127$ e $E[R_1^{(I)}(x^*) + R_1^{(F)}(x,\xi)] = \$3253.08$. É possível ver que o resultado do problema amostral se aproxima do resultado do problema real, porém ainda há um gap entre as soluções. Isso ocorre devido ao pequeno número de cenÃ¡rios que está sendo utilizado.

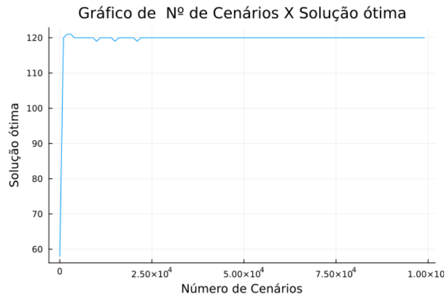
Item (d)

Uma possível metodologia é gerar T vezes este o problema com amostras independentes de tamanho 20. Com isso, é possível gerar um cota inferior e uma superior para o resultado do problema. Obtendo estas cotas através da valor médio das execuções eu consigo obter um estimador não-viesado. Esta metodologia garante que o resultado real está dentro destas cotas, e quanto mais justas elas forem mais preciso é o estimador.

Item (e)

Executando o problema amostral com o número máximo de cenários igual à 100000 e com passos de 10000. É possível ver que ao aumentar o número de cenários a Receita Esperada e a Solução ótima amostral começam a ter menos variação e a convergir para os valores de receita e quantidade de jornais a serem comprados obtidos no problema real. Esse comportamento é esperado devido à propriedade de consistência do problema amostral.





Item (f)

Para calcular o CVaR é necessário calcular a Receita Esperada a partir da decisão ótima x^* para cada um dos cenários gerados. Após calcular as receitas e ordená-las em ordem crescente computamos o valor do CVaR como a média das receitas obtidas até o quartil definido por α. Assim, obtemos $CVaR_{95\%} = -873.74$.

Item (g)

Considerando este conjunto de aceitação, é necessário adicionar uma variável nova e também novas restrições ao problema, de forma a contemplar este conjunto de aceitação. Assim sendo, a Receita esperada é $\$2374$ e a quantidade de jornais a serem compradas é 60.

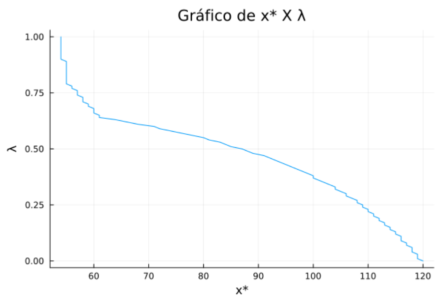
É possível ver que a quantidade de jornais a serem compradas e a receita diminui em relação ao problema real, pois o jornaleiro passa a aceitar soluções dentro de um conjunto de aceitação, visando se resguardar de possíveis perdas fora do conjunto de aceitação, que são possíveis considerando a incerteza associada ao problema.

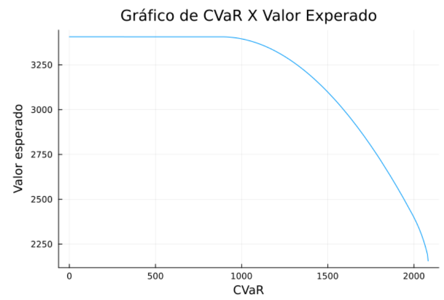
Item (h)

Considerando o novo funcional de preferências, é necessário alterar a função objetivo do problema de otimização para considerar os pesos dados ao CVaR e à Receita Esperada. Com essa alteração feita rodei o modelo com 100000 cenários, com $\lambda = 0.5$. Assim sendo, a Receita esperada é $\$2298$ e a quantidade de jornais a serem compradas é 87.

Item (i)

Os gráficos solicitados podem ser vistos abaixo. é possível notar no primeiro gráfico que conforme o valor de λ aumenta a quantidade de jornais a ser comprada diminui, ou seja, quando o CVaR passa a ter mais peso na Utilidade Esperada. O segundo gráfico mostra que a partir o momento que $\lambda \geq 0.5$ (metade do eixo x) o valor da receita esperada passa a cair de forma acentuada, indicando que a parcela do CVaR passa a ser mais representativa para a maximização da utilidade.





Questão 4

Item (a)

A modelagem do problema real do jornaleiro, considerando a restrição de revenda, pode ser vista abaixo, sendo $capmax_i$ a capacidade máxima permitida para expansão.

$$
\begin{aligned}
& Min\ E[C_1^{(F)}(x, \tilde{d})] + \sum_{i \in n} c_i^{exp} \cdot c_i \\
& s.t. : x_i \leq capmax_i \\
& \quad x_i \geq 0 \\
C_1^{(F)}(x, d_w) = {} & Min\ \sum_{i \in n} c_i^v \cdot y_i \\
& s.t. : \sum_{i \in n} y_i \geq d_w \\
& \quad y_i \leq p_i + x_i \\
& \quad y_i \geq 0
\end{aligned}
$$

A variável de primeiro estágio é x (quantidade MWh expandidos em cada gerador), e a de segundo estágio é y (quantidade Mwh produzidos em cada gerador).

Item (b)

Considerando a geração de cenários e modelando como um problema de programação linear, temos:

$$
\begin{aligned}
& Min\ \sum_{w \in \Omega} prob_w \cdot (\sum_{i \in n} c_i^v \cdot y_{iw}) + \sum_{i \in n} c_i^{exp} \cdot c_i \\
& s.t. : x_i \leq capmax_i, \quad \forall j \in n \\
& \quad \sum_{i \in n} y_{iw} \geq d_w, \quad \forall w \in \Omega \\
& \quad y_{iw} \leq p_i + x_i, \quad \forall i \in n, w \in \Omega \\
& \quad y_{iw}, x_i \geq 0, \quad \forall i, j \in n
\end{aligned}
$$

Item (c)

Construindo o modelo em Julia e utilizando as informações dos cenários disponíveis do EAD, obtive o seguinte mix de expansão ótima: $x_1 = 24.8$ e $x_2 = 0$, obtendo o custo esperado de

\$4290.06. Assim é possível ver que devo aumentar a capacidade do gerador 1 e manter a capacidade do gerador 2, o que faz sentido, visto que os custos de produção e de expansão do gerador 1 são inferiores aos do gerador 2.

Item (d)

Esta avaliação de viabilidade foi realizada em julia, verificando se com as redes de transmissão impondo restrições a carga planejada para ser gerada em cada um dos geradores poderia ser disseminada pela rede de forma a atender os consumidores por completo.

Considerando a nova realidade, com as restrições de transmissão, apenas 33 cenários continuam viáveis, assumindo a decisão ótima tomada anteriormente.

Item (e)

Para modificar a formulação de forma a compreender o comportamento da rede de transmissão é necessário acrescentar a variável f_ijw que indica quando de carga é transmitida do gerador i para o gerador j no cenário w e tambÃ©m adicionar algumas restrições. Além disso, consideramos que o conjunto n contém apenas os nós que possuem geradores, o conjunto m contém todos os nós do problema (neste caso, apenas 3) e que . Assim, temos o modelo abaixo.

$$
\begin{aligned}
Min \sum_{w \in \Omega} prob_w \cdot (\sum_{i \in n} c_i^v \cdot y_{iw}) + \sum_{i \in n} c_i^{exp} \cdot c_i \\
s.t. : x_i \leq capmax_i, \;\; \forall j \in n \\
\sum_{i \in n} y_{iw} \geq d_w, \;\; \forall w \in \Omega \\
y_{iw} \leq p_i + x_i, \;\; \forall i \in n, w \in \Omega \\
\sum_{i \in n} f_{ijw} + yjw = \sum_{i \in n} f_{jiw}, \;\; \forall j \in n, w \in \Omega \\
f_{ijw} \leq F_{ij}, \;\; \forall i \in m \\
y_{iw}, x_i, f_{ijw} \geq 0, \;\; \forall i, j \in m, w \in \Omega
\end{aligned}
$$

Item (f)

Construindo o modelo em Julia, considerando a rede de transmissão e utilizando as informações dos cenários disponíveis do EAD, obtive o seguinte mix de expansão ótima: $x_1 = 10$ e $x_2 = 14.8$, ou seja, a limitação da rede de transmissão obriga a expansão no gerador 2, de forma a aumentar o custi esperado para \$5641.67.

Questão 9

Item (a)

Para construir a equação do valor esperado, temos:

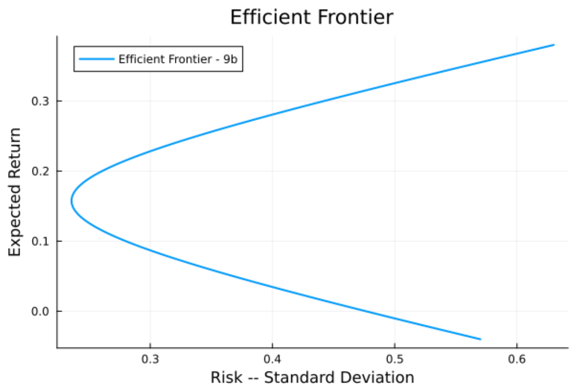
$$\begin{aligned} E[R_c(x, \tilde{r}_a, \tilde{r}_m)] &= E[x\tilde{r}_m + (1-x)\tilde{r}_a] = xE[\tilde{r}_m] + (1-x)E[\tilde{r}_a] \\ E[R_c(x, \tilde{r}_a, \tilde{r}_m)] &= x\mu_m + (1-x)\mu_a \end{aligned}$$

Para construir a equação do desvio padrão, temos:

$$\begin{aligned} V[R_c(x, \tilde{r}_a, \tilde{r}_m)] &= x(1-x) \cdot cov(\tilde{r}_a, \tilde{r}_m) + x^2 \cdot V(\tilde{r}_m) \\ &\quad + (1-x)^2 \cdot V(\tilde{r}_a) + x(1-x) \cdot cov(\tilde{r}_a, \tilde{r}_m) \\ V[R_c(x, \tilde{r}_a, \tilde{r}_m)] &= x^2\sigma_m^2 + (1-x)^2\sigma_a^2 + 2x(1-x)\rho_{am}\sigma_a\sigma_m \\ \sigma[R_c(x, \tilde{r}_a, \tilde{r}_m)] &= \sqrt{x^2\sigma_m^2 + (1-x)^2\sigma_a^2 + 2x(1-x)\rho_{am}\sigma_a\sigma_m} \end{aligned}$$

Item (b)

A fronteira eficiente pode construída no julia, a partir das equações obtidas no item anterior e dos parâmetros fornecidos na questão. Assim, temos o gráfico abaixo:

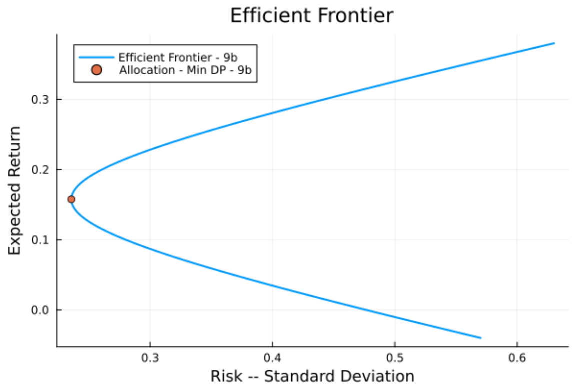


Item (c)

A formulação do problema que minimiza o desvio padrão pode ser vista abaixo. É possível ver que a função objetivo minimiza a variância e para obter o desvio padrão basta calcular a raiz do resultado do modelo.

$$\begin{aligned} &Min \sum_{i \in J} x_i^2\sigma_i^2 + \sum_{i,j \in J(i \neq j)} x_i x_j \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j \\ &s.t.: \sum_{i \in J} x_i = 1 \\ &\qquad x_i \geq 0 \end{aligned}$$

A figura abaixo mostra a o ponto de menor desvio padrão no gráfico da fronteira eficiente. Os cálculos a partir do modelo, indicam que o menor desvio padrão é 0.24 e o retorno esperado com a alocação que dá o menor desvio padrão é de 15.75%.



Item (d)

Para calcular o coeficiente angular da reta tangente em $x = 100\%$, seguindo as dicas, fiz:

$$\frac{dE[R_c(x, \tilde{r}_a, \tilde{r}_m)]}{dx} = \mu_m - \mu_a$$

$$\frac{dV[R_c(x, \tilde{r}_a, \tilde{r}_m)]}{dx} = \frac{x\sigma_m^2 + (1-x)\sigma_a^2 + (1-2x)\rho_{am}\sigma_a\sigma_m}{\sqrt{x^2\sigma_m^2 + (1-x)^2\sigma_a^2 + 2x(1-x)\rho_{am}\sigma_a\sigma_m}}$$

Avaliando em x=1

$$\frac{dV[R_c(x, \tilde{r}_a, \tilde{r}_m)]}{dx} = \frac{\sigma_m^2 - \rho_{am}\sigma_a\sigma_m}{\sigma_m} = \sigma_m - \rho_{am}\sigma_a$$

Logo, temos que: $\lambda = \frac{\mu_m - \mu_a}{\sigma_m - \rho_{am}\sigma_a}$

Item (e)

Como o ativo livre de risco possui variância e covariância nulas, temos as equações abaixo. Equação do valor esperado:

$$E[Lc(x, rf, \tilde{r}_m)] = rf - x(\mu_m - rf)$$

Equação do desvio padrão:

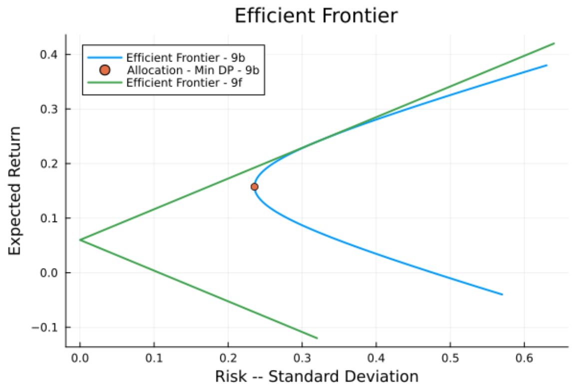
$$V[Lc(x, rf, \tilde{r}_m)] = x^2\sigma_m^2$$
$$\sigma[Lc(x, rf, \tilde{r}_m)] = x\sigma_m$$

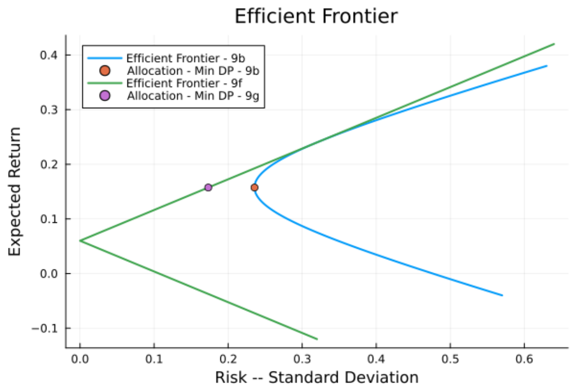
Item (f)

A fronteira eficiente pode construída no julia, a partir das equações obtidas no item anterior e dos parâmetros fornecidos na questão. Assim, temos o gráfico abaixo:

Item (g)

Considerando o Retorno obtido no item (c) a carteira com menor desvio padrão é dada pela alocação de 54.1% do montante no ativo mercado e 45.9% no ativo livre de risco. Esse resultado ocorre pois preciso alcançar o mesmo retorno do item(c), assim não consigo obter a menor variância possível, investindo apenas no ativo livre de risco, porém consigo reduzir a variância em comparação com o item (c), visto que posso alocar parte do montante em um ativo livre de risco.





Item (h)

A partir da fórmula da variância: $x = \pm\frac{\sqrt{V[Lc(x,rf,\tilde{r}_m)]}}{\sigma_m}$
A partir da fórmula valor esperado: $E[Lc(x, rf, \tilde{r}_m)] = rf - x(\mu_m - rf)$
Substituindo o valor obtido através da fórmula da variância:

$$E[Lc(x, rf, \tilde{r}_m)] = rf \pm \frac{(\mu_m - rf)}{\sigma_m} V[Lc(x, rf, \tilde{r}_m)]$$

Item (i)

Igualando e desenvolvendo a expressão do CAPM temos:

$$\frac{\mu_m - \mu_a}{\sigma_m - \rho_{am}\sigma_a} = \frac{\mu_m - rf}{\sigma_m}$$
$$\sigma_m\mu_m - \sigma_m\mu_a = \sigma_m\mu_m + \sigma_m rf + \rho_{am}\sigma_a\mu_m - \sigma_a\rho_{am}rf$$
$$\mu_a - rf = \frac{\rho_{am}\sigma_a}{\sigma_m}(\mu_m - rf)$$
$$\mu_a = rf + \frac{\rho_{am}\sigma_a}{\sigma_m}(\mu_m - rf)$$
$$\mu_a = rf + \beta_a(\mu_m - rf)$$
$$sendo: \mu_a = E[\tilde{r}_a],\ \mu_m = E[\tilde{r}_m]\ e\ \beta_a = \frac{\rho_{am}\sigma_a}{\sigma_m}$$

Item (j)

Questão 10
Item (a)

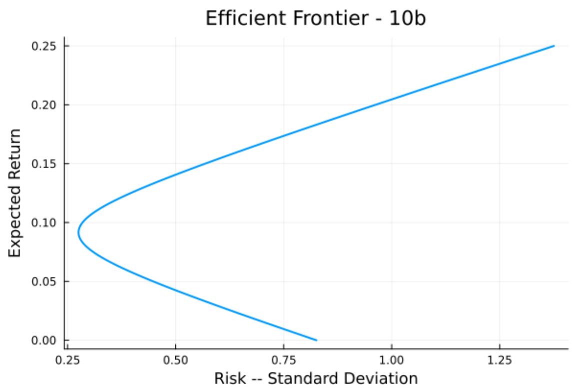
O problema pode ser modelado como:

$$
\begin{aligned}
Min \sum_{i \in J} x_i x_j cov_{ij} \\
s.t.: \sum_{i \in J} x_i = 1 \\
\sum_{i \in J} \mu_i x_i = R_{min}
\end{aligned}
$$

Considerando $R_{min} = 0.14$ e os dados extraídos do EAD, temos que a carteira de menor variância é $x_1 = 0.56$, $x_2 = 0.077$ e $x_3 = 0.36$ com a variância de 0.25.

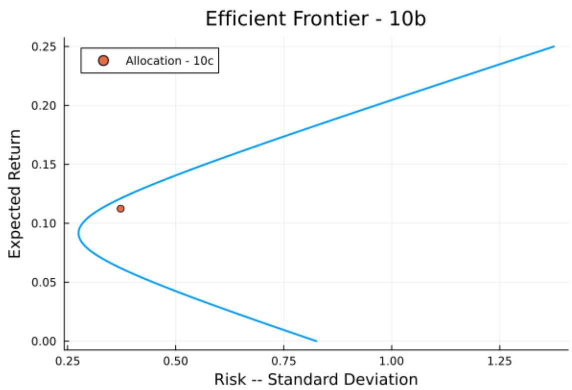
Item (b)

A fronteira eficiente pode ser vista no gráfico abaixo:



Item (c)

Plotando o retorno esperado e a variância da alocação sugerida no gráfico abaixo é possível ver que ele não se coloca na fronteira eficiente, e sim abaixo da mesma, indicando que para o mesmo retorno obtido com esta carteira, existe uma alocação que possui menor variância.



Teoricamente podemos calcular qual a alocação ótima com o retorno obtido por esta carteira (11.2%), observando assim que é possível, obter o mesmo retorno alocando $x_1 = 0.31$, $x_2 = 0.36$ e $x_3 = 0.33$ com a variância de 0.11, que é inferior a da carteira sugerida (0.14).

Item (d)

Considerando esta nova restrição, temos a seguinte alocação: $x_1 = 0.55$, $x_2 = 0.05$ e $x_3 = 0.40$ com a variância de 0.25, que é igual a da carteira do item (a). Isso mostra que é possível existirem diferentes alocações com a mesma variância e o mesmo retorno esperado.

Item (e)

Para calcular esta probabilidade, olhei individualmente para cada um dos cenários, calculando os seus retornos com a alocação do item(d). Assim sendo, é possível ver que a probabilidade da carteira obter retorno inferior a 14% é de 60.47%.

Item (f)

Considerando que o retorno mínimo aceito é 20% o modelo de otimização indica que não há alocação ótima. Sendo assim, podemos constatar que não é possível obter este retorno investindo apenas nestes ativos.

Item (g)

Considerando que existe um ativo livre de risco que possui retorno igual ao mínimo desejado e que o modelo visa minimiar a variância a alocação ótima consiste em investir todo o montante no ativo livre de risco, visto que ele trará o retorno desejado com risco 0.

Questão 15

Podemos começar pela definição do CVaR:

$$
\begin{aligned}
-CVaR_\alpha(R(x,\tilde{\xi})) &= \max\ z - \frac{E[max\{z - [R(x,\tilde{\xi}), 0\}]}{1-\alpha} \\
&= \max\ z - \frac{1}{1-\alpha}(\sum p(w) \cdot max\{z - [R(x,\tilde{\xi}), 0\}) \\
&= \max\ z - \frac{1}{1-\alpha}(\sum p(w)\delta) \\
&s.t.:\ z - \delta_w \leq R(x,w) \\
&\delta_w \geq 0
\end{aligned}
$$

Computando o dual, temos:

$$
\begin{aligned}
dual : \min \mu^T R(x,w) &= \sum \mu R(x,w) \\
s.t. : \mu_w &\leq \frac{p(w)}{1-\alpha} \\
\sum \mu_w &= 1 \\
\mu_w &\geq 0
\end{aligned}
$$

A partir das duas últimas restrições temos que $\mu \in [0,1]$. Entendendo que a definfição de uma distribuição de probabilidade é dada por um conjunto de valores entre 0 e 1, que somam 1, podemos afirmar que μ é uma distribuição de probabilidade e portanto $\sum \mu R(x,w) = E[R(x,w)]$

Assim, mostramos que a afirmação abaixo é verdadeira.

$$
-CVaR_\alpha(R(x,\tilde{\xi})) = \min_{\mu \in P(\alpha)} \{E_\mu[R(x,\tilde{\xi})]\}
$$

$$
P(\alpha) = \begin{cases} \mu_w \leq \frac{p(w)}{1-\alpha} \\ \sum \mu_w = 1 \\ \mu_w \in [0,1]\} \end{cases}
$$

Questão 16
Item (a)

Para encontrarmos o máximo podemos tomar a derivada e igualá-la à 0.

$$\frac{d}{dx}\left(z - \frac{1}{1-\alpha}\int max\{z - R(x,w), 0\}p(w)dw\right)$$
$$\frac{d}{dx}\int max\{z - R(x,w), 0\}f(w)dw = 1-\alpha$$
$$\int \mathbf{1}_{\{z|z-R(x,w)>0\}}f(w)dw = 1-\alpha$$
$$P(z - R(x,w) > 0) = 1-\alpha$$
$$P(R(x,w) < z) = F_R(z) = 1-\alpha$$
$$z = F_R^{-1}(1-\alpha) = -VaR_\alpha(x)$$

Item (b)