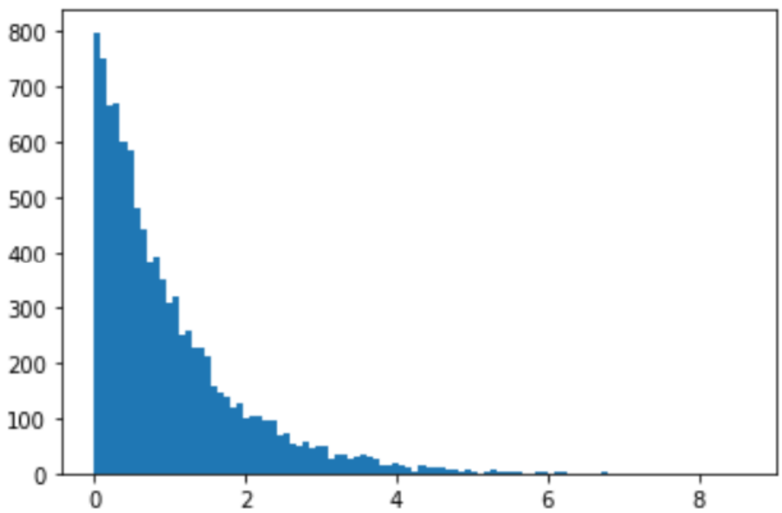
作业二

一.

（1）取变换抽样中的特殊情形：直接抽样。即

$$F(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{0}^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}=1-e^{-\lambda x}$$
$$F(x)^{-1}=-\frac{1}{\lambda}ln(1-\xi)$$
抽取$[0,1]$区间分布伪随机数ξ，则$1-\xi$也满足$[0,1]$均匀分布，则
$\eta=-\frac{1}{\lambda}ln\xi$满足指数分布。
对于$\lambda=1,\eta=-ln\xi$。

作图得：



（2）重要抽样法

$$f(x)=x^{\frac{3}{2}}e^{-x}, \text{取} g(x)=e^{-x}, \text{则} \frac{f(x)}{g(x)}=x^{\frac{3}{2}}\text{。}$$
由(1)对$g(x)$抽样，取N个随机数，$I=\frac{1}{N}\Sigma_{i=1}^{N}\frac{f(\eta_i)}{g(\eta_i)}$。

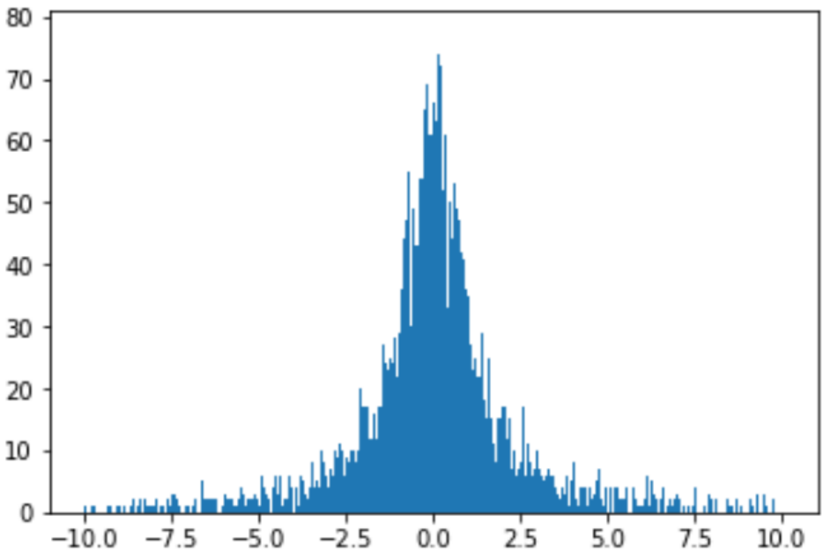
取N=10000000，运行结果`I = 1.33139670622045`，较接近真实值。

二.

(1)

取变量$y=h(x)=arctan(\frac{x-x_0}{\Gamma}), y$满足区间$[0,\pi]$上的均匀分布，即$\phi(y)=\frac{1}{\pi}$.
$h'(x)=\frac{\Gamma}{(x-x_0)^2+\Gamma^2}$, 则$\phi(h(x))h'(x)=\frac{\Gamma}{\pi}\frac{1}{(x-x_0)^2+\Gamma^2}=f(x)$，满足变换抽样条件。
对$[0,1]$均匀分布抽样得δ，则$\pi\delta$满足$[0,\pi]$均匀分布，则$\eta=g(\pi\delta)=\Gamma tan(\pi\delta)+x_0$满足$f(x)$分布。

作图时限定x坐标为（-10，10），可得分布图



(2)

取$g(x)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$，则与(1)类似，可由$[0,1]$均匀分布抽得$\delta,\eta=tan(\pi\delta)$满足$g(x)$分布。

$\frac{f(x)}{g(x)}=\sqrt{x}$。而由对称性，$x>0$和$x<0$区间积分值相差因子复数$i$，故取$N$个随机数，$I_+=\frac{1}{2N}\Sigma_{i=1}^N\pi\sqrt{|\eta_i|}$。

则$I=(1+i)I_+$

取N=10000000时，运行结果`I = (1+i)2.2243938191108183`，较接近真实值。

三.（习题12）

1.当$n=1$时，$f(x)=ax^{-ax}$，满足指数分布。由直接抽样法可得，$\eta=-\frac{1}{a}ln(\xi_1)$，

ξ满足$[0,1]$间的均匀分布。

2.当$n=k-1$时，假设$f(x)$可由抽样方法$\eta=-\frac{1}{a}ln(\xi_1\ldots\xi_{k-1})$得到，$\xi_1\ldots\xi_{k-1}$均满足$[0,1]$均匀分布。

对于$n=k$，有$f_k(x)=\frac{a^k}{(k-1)!}x^{k-1}e^{-ax}=\frac{a^k}{(k-2)!}e^{-ax}\int_0^x t^{k-2}dt=$

$$\int_0^x\frac{a^{k-1}}{(k-2)!}t^{k-2}e^{-at}\cdot ae^{-a(x-t)}dt=\int_0^x f_{k-1}(t)f_1(x-t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}f_{k-1}(t)f_1(x-t)dt$$

满足复合抽样条件，则可用$\eta=-\frac{1}{a}ln(\xi_1\ldots\xi_k)$抽取$n=k$时的分布。

由1，2数学归纳法知题给结论成立。

四.（习题13）

1.当$n=1$时，$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}, f_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^{-x/2}$。取$x=y^2$，$y$满足标准正态分布，即

$\phi(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}$,有$\phi(y(x))|\frac{dy}{dx}|=\frac{1}{2}f_1(x)$

2.当$n=k-1$时，假设可由$\eta=\Sigma_{i=1}^n x_i^2$抽得$f_{k-1}(x)$分布，$x_1 \ldots x_n$满足标准正态分布。

对于$n=k, f_k(x)=\frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)}e^{-x/2}x^{k/2-1}=$

$\frac{1}{2^{k/2}\Gamma((k-1)/2)\Gamma(1/2)}e^{-x/2}x^{k/2-1}\int_0^1 t^{n-3}2(1-t)^{-1/2}dt$

还原$t=xt$,则$f_k(x)=\int_0^x \frac{1}{\Gamma((n-1)/2)2^{(k-1)/2}}e^{-x/2}t^{(k-3)/2}\frac{1}{\sqrt{2\pi(x-t)}}e^{-(x-t)/2}dt=$

$\int_0^x f_{k-1})(x)f_1(x)dt=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{k-1}(x)f_1(x)dt$

满足复合抽样条件，则可用$\eta=\Sigma_{i=1}^n x_i^2$抽取$n=k$时的分布。

由1，2数学归纳法知题给结论成立。