



论文

北斗三频相位观测值线性组合模型及特性研究

张小红*, 何锡扬

武汉大学测绘学院, 武汉 430079

* E-mail: xhzhang@sgg.whu.edu.cn

收稿日期: 2014-06-13; 接受日期: 2014-10-11; 网络版发表日期: 2015-04-22

国家自然科学基金项目(批准号:41074024, 41204030)和国家重大科技研究发展计划项目(编号: 2013CB733301)资助

摘要 针对北斗三频观测值, 从线性组合的基本模型出发, 推导了减弱各类误差源的实数组合, 包括无电离层组合、无对流层组合和最小噪声组合. 无电离层组合和无对流层组合可分别用一个平面来表示, 最小噪声组合可用一条直线来表示. 从几何的角度对三者关系进行研究. 研究表明: 无电离层组合平面和无对流层组合平面之间的夹角较小, 两者与最小噪声组合线的夹角较大, 其中无对流层组合平面与最小噪声组合线正交. 通过引入巷数、整数电离层数等定义, 对北斗三频整数线性组合的长波长组合以及无电离层整数组合进行了研究, 表明北斗三频整数线性组合的最大波长为 146.53 m, 无电离层整数组合的噪声均较大, 噪声最小的组合为(0, 62, 59). 最后基于巷数、电离层放大因子和噪声放大因子三个指标, 从挑选三个独立线性组合的角度, 研究并给出了具有不同特性的最优北斗三频整数线性组合模型. 针对典型的短基线场景和长基线场景选择得到了最优的三个独立线性的组合.

关键词北斗
三频线性组合
长波长
无电离层
最小噪声

自 20 世纪末, GNSS(Global Navigation Satellite System)精密定位技术在很多领域都得到了广泛的应用, 如大地测量和工程建设等, 开展这些应用需要采用非常精确的 GNSS 载波相位观测值来进行定位. 但是由于原始的载波相位观测值存在未知的整数未知数(称为整周模糊度), 无法直接进行定位解算. 因此, 利用载波相位观测值进行精密定位特别是实时精密定位之前, 需要首先恢复载波相位的整周模糊度, 这一过程称为整周模糊度解算. 此外, 由于信号失锁等原因, 载波相位观测值的整周计数可能出现整周的跳变, 称为周跳. 采用多历元方式进行定位解算时, 还需要探测观测数据中周跳发生的历元, 称为周跳探测. 必要时还需要确定周跳大小并对观测值进行

修复, 称为周跳修复. 针对整周模糊度解算和周跳探测修复, 许多学者开展了大量研究工作. 研究表明, 采用多频观测值有望改善模糊度解算(Harris, 1997; Forsell 等, 1997; Jung, 1999; Feng, 2008; Li 等, 2010; Feng 和 Li, 2010)和周跳探测修复(Dai 等, 2009; Wu 等, 2010; De Lacy 等, 2011)的效率和成功率, 而构建多频线性组合观测值进行模糊度解算或周跳探测是目前普遍采用且有效的方法. 因此, 如何构建最优的多频线性组合模型是其中非常关键的一步.

许多学者对 GPS 以及 Galileo 的多频线性组合进行了研究, 取得了丰富的成果. Odijk(2003)和 Teunissen 等(2003)的研究表明, 加入第三个频率将极大地增加线性组合的数量, 并提供更多的无电离层整数

中文引用格式: 张小红, 何锡扬. 2015. 北斗三频相位观测值线性组合模型及特性研究. 中国科学: 地球科学, 45: 601-610

英文引用格式: Zhang X H, He X Y. 2015. BDS triple-frequency carrier-phase linear combination models and their characteristics. Science China: Earth Sciences, 58: 896-905, doi: 10.1007/s11430-014-5027-9

组合. Han 等(1999)发现了一些长波长和低噪声的组合. 王泽民等(2003)针对 Galileo 系统四个频率, 根据一定的组合标准讨论了具有特定性能的四频组合观测值, 并给出了一些典型的组合. 伍岳等(2006)针对 GPS 频率提出了一种使组合观测值以平方米为单位的方差达到最小值, 同时使其以平方周为单位的方差小于或接近于 L1 观测值的线性组合方法. 徐军等(2013)对 GLONASS 三频载波相位组合进行了研究, 同样给出了一些典型的最优组合. 在北斗线性组合研究方面, 黄令勇等(2012)等根据噪声最小和电离层放大因子最小的准则, 筛选了较优的无几何距离线性组合用于周跳探测. Feng(2008)在提出的 geometry-based TCAR(Three Carrier Ambiguity Resolution)方法中, 筛选了较优的北斗线性组合用于三频模糊度解算. 以上这些研究本质上均是从长波长、消除或削弱电离层误差以及减弱噪声的三个标准的角度, 在一定范围内来搜索最优的组合, 这些方法对不同特性组合观测值的筛选和特点展现仍然存在局限性. 2007 年, Richert 等从几何关系的角度重点研究了 GPS 和 Galileo 系统消除多路径、消除电离层偏差以及消除对流层偏差的组合, 从几何关系的角度更全面地分析了这些组合之间的特点. Collins(1999)以及 Cocard 等(1992)对 GPS 双频组合进行了系统研究, 2008 年, Cocard 等将该方法扩展到三频, 针对 GPS 三频整数线性组合, 从巷数, 电离层放大因子和噪声放大因子的角度, 通过严格的数学推导, 更严密系统地研究了 GPS 三频整数线性组合. 李金龙等(2012)提出了通过列立方程采用函数极值法求解三频 GNSS 最优载波相位组合观测值的方法, 并列举了部分具有最优特性的北斗线性组合观测值, 该方法的基本思想与 Cocard 的方法是一致的.

根据以上研究进展可知, 目前有关三频线性组合的研究多数均是针对 GPS 频率或 Galileo 频率, 而针对北斗多频线性组合的相关研究并不多, 且不系统. 李金龙等(2012)虽然采用了更严密的方式给出了部分具有最优特性的北斗整数线性组合观测值, 但其对北斗系统的各类线性组合观测值的特点的展现仍然不够全面, 且没有对实数线性组合的相关特性进行分析. 北斗系统已于 2012 年底初步建成了由 14 颗卫星组成的区域导航系统, 是目前首个能全星座提供三频信号服务的系统, 因此, 系统地研究基于北斗频率的三频线性组合具有重要意义. 北斗系统与

GPS 系统存在信号频率的差异, 但有关 GPS 线性组合的研究方法可扩展用于北斗系统. 因此, 本文将基于 Richert 等(2007)和 Cocard 等(2008)等相关研究的研究方法, 针对北斗频率对三频相位观测值线性组合进行系统研究.

1 三频线性组合基本模型

北斗系统于 2012 年底初步建成具备亚太地区服务能力的区域导航系统, 目前在轨卫星 14 颗, 其中有 5 颗 IGSO(Inclined Geosynchronous Orbit)卫星、5 颗 GEO(Geostationary Orbit)卫星、4 颗 MEO(Medium Earth Orbit)卫星, 这些卫星均能发射三频卫星信号, 频率大小分别为 B1: 1561.098 MHz, B2: 1207.14 MHz, B3: 1268.52 MHz.

下面我们将对三频线性组合的基本模型进行介绍. 不失一般性, 将频率按从大到小的顺序排列, 令三个频率 f_1, f_2 和 f_3 分别对应于 B1, B3 和 B2, 此时有 $f_1 > f_2 > f_3$, 来自同一颗卫星的三频载波信号的线性组合可表示为

$$\phi_* = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

式中, a_1, a_2 和 a_3 为实数组合系数, ϕ_* 为以周为单位的组合观测值, ϕ_1, ϕ_2 和 ϕ_3 为以周为单位的原始观测值, 分别对应于 f_1, f_2 和 f_3 频率.

定义三频线性组合的组合频率为 f_* 、组合波长为 λ_* 、组合模糊度为 N_* 、相对于 f_1 频率的电离层放大因子为 q_* 、以周为单位的噪声放大因子为 n_* 、以长度单位的噪声放大因子(相对于 f_1 频率观测值)为 \bar{n}_* , 同时假设三个频率的原始相位观测值噪声相等且相互独立, 则各项参数的计算公式如下:

$$f_* = a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3, \quad (2)$$

$$\lambda_* = \frac{c}{a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3}, \quad (3)$$

$$N_* = a_1 N_1 + a_2 N_2 + a_3 N_3, \quad (4)$$

$$q_* = a_1 + a_2 \frac{f_1}{f_2} + a_3 \frac{f_1}{f_3}, \quad (5)$$

$$n_* = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, \quad (6)$$

$$\bar{n}_* = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, \quad (7)$$

式中, c 为光速. N_1 , N_2 和 N_3 为分别对应于 f_1 , f_2 和 f_3 频率原始观测值的模糊度.

2 减弱误差的实数线性组合类

2.1 减弱误差的实数线性组合类

Richert 等(2007)对消除不同误差源的各种组合进行了研究, 表明消除电离层的线性组合和消除对流层的线性组合可分别用一个平面来表示, 具有最小噪声的组合可用一条直线来表示(以上所说的平面和直线都以 (a_1, a_2, a_3) 为变量), 显然其推导也适用于北斗三频组合. 据此, 我们采用类似方法得到了以下几类特殊线性组合类:

(i) 无电离层组合平面

$$a_1 + a_2 \frac{f_1}{f_2} + a_3 \frac{f_1}{f_3} = 0. \quad (8)$$

将数值代入, 得

$$a_1 + 1.231a_2 + 1.293a_3 = 0. \quad (9)$$

任何位于这一平面的 (a_1, a_2, a_3) 值都代表了一个无电离层组合. 对于不在该平面上的组合, 离该平面越近, 电离层放大因子也越小.

(ii) 无对流层组合平面

$$a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3 = 0. \quad (10)$$

将数值代入, 整理得

$$763a_1 + 620a_2 + 590a_3 = 0. \quad (11)$$

任何位于这一平面的 (a_1, a_2, a_3) 值都代表了一个无对流层组合, 这类组合的波长为无穷大.

(iii) 最小噪声线

任何线性组合以周为单位的噪声放大因子都将大于原始观测值对应的噪声放大因子, 因此原始观测值应具有最小的周噪声放大因子(Richert 和 El-Sheimy, 2007). 这里的最小噪声针对的是以长度为单位的噪声放大因子. 将式(3)以及 $\lambda_1 = c/f_1$ 代入式(7), 并根据最小噪声条件, 有

$$\bar{n}_* = \frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}{a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3} f_1 \rightarrow \min. \quad (12)$$

在 (a_1, a_2, a_3) 空间内, 满足上式的组合为一条直

线. 经计算, 该直线表达式为

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 763 \\ 620 \\ 590 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

式中, t 为任意实数比例因子. 符合式(13)的线性组合具有(以长度为单位的)最小噪声放大因子 0.66.

2.2 实数线性组合类之间的关系

(i) 无电离层组合与无对流层组合之间的关系

无对流层组合平面与无电离层组合平面之间夹角为

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{n_{\text{trop}} \cdot n_{\text{iono}}}{|n_{\text{trop}}| |n_{\text{iono}}|} \right) = 12.7^\circ, \quad (14)$$

式中, n_{trop} 和 n_{iono} 分别为无对流层组合平面和无电离层组合平面的法向量, 两个平面之间的几何关系如图 1 所示. 两个平面的夹角较小, 说明获取电离层放大因子小且受对流层影响较小的组合相对较为容易.

(ii) 无电离层组合与最小噪声组合之间的关系

最小噪声线与无电离层组合平面之间的夹角为

$$\theta = \sin^{-1} \left(\frac{v_{\text{noise}} \cdot n_{\text{iono}}}{|v_{\text{noise}}| |n_{\text{iono}}|} \right) = 77.3^\circ, \quad (15)$$

式中, v_{noise} 为最小噪声线向量, 两者之间的几何关系如图 2 所示. 由于无电离层平面与最小噪声线的夹角很大, 如果组合非常接近于无电离层平面, 其将离最小噪声线很远; 反过来, 如果组合接近于最小噪声线, 其将远离无电离层平面, 这也说明找到噪声很小且不受电离层影响的组合很困难. 换句话说, 无电离层组合都具有较大的噪声放大因子.

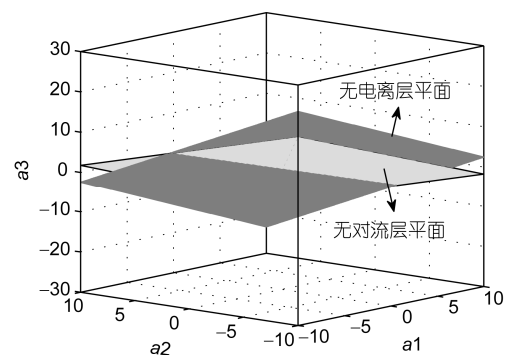


图 1 无对流层平面与无电离层平面之间的几何关系

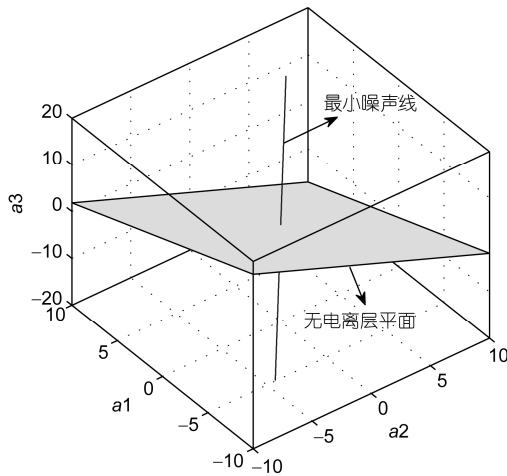


图2 最小噪声线与无电离层平面之间的几何关系

(iii) 无对流层组合与最小噪声组合之间的关系

由式(11)和(13)可知, 最小噪声线与无对流层平面是正交的, 这印证了一个事实: 具有更大波长的组合通常也具有更大的(以长度为单位的)噪声. 因此进行精密定位解算时, 需要选择波长较短的组合进行解算. 由式(6)可知, 组合越接近原点, (以周为单位的)噪声放大因子越小. 由于无对流层平面和无电离层平面均为穿过原点(0, 0, 0)的平面, 虽然位于两个平面上的整数线性组合均具有很大的(以周为单位的)噪声放大因子, 但存在一些组合既靠近原点也靠近无对流层平面, 即(以周为单位的)噪声较小且具有较大的波长的组合, 这些组合将有利于模糊度的解算. 由于无对流层组合平面与无电离层组合平面之间夹角较小, 因此还可找到同时满足靠近无电离层平面的组合, 以削弱电离层误差的影响.

3 三频整数线性组合

为了便于模糊度解算, 我们往往需要模糊度保持整数特性的线性组合, 因此以下我们将对整数线性组合进行研究. 为此, 我们引入 Cocard 等(2008)中有关 GPS 整数线性组合的若干概念, 基于北斗频率进行了重新定义, 以便于后续搜索最优的整数线性组合. 基于这些概念, 本节还对长波长整数组合和无电离层整数组合进行了研究.

3.1 巷数

由式(4)知, 为了保持组合模糊度为整数, 组合

系数必须为整数. 为此, 将第 1 节中的组合系数(a_1, a_2, a_3)替换为(i_1, i_2, i_3), 其中 i_1, i_2 和 i_3 均为整数. 不同于 GPS 和 Galileo, 北斗三频基准频率并不是采用的基准频率 $f_0=10.23$ MHz, 其三个频率不是 10.23 MHz 的倍数. 为此, 我们需要为其确定一个虚拟基准频率. 对北斗三个频率的数值求最大公约数, 得到最大公约数的值为 2046000. 我们将该数值当做北斗三频的虚拟基准频率, 即

$$f_0 = 2.046 \text{ MHz}. \quad (16)$$

此时, 频率与基准频率的关系可写为

$$f_i = k_i f_0, \quad (17)$$

式中, k_i 为整数, 对 f_1, f_2 和 f_3 分别对应于 $k_1=763, k_2=620, k_3=590$. 此时组合频率用 k_i 可表示为

$$f_* = f_0 (i_1 k_1 + i_2 k_2 + i_3 k_3). \quad (18)$$

由于式中所有 i 和 k 都为整数, 其线性组合 $i_1 k_1 + i_2 k_2 + i_3 k_3$ 也为整数, 这表明所有模糊度保持整数特性的北斗三频线性组合可由整数组(i_1, i_2, i_3)来表示. 令

$$k = i_1 k_1 + i_2 k_2 + i_3 k_3. \quad (19)$$

根据此式, 可通过简单的关系式

$$f_* = k f_0, \quad (20)$$

获得整数线性组合的频率. 整数线性组合的波长为

$$\lambda_* = \frac{\lambda_0}{k}, \quad (21)$$

式中, $\lambda_0=146.53$ m, 对应于 $f_0=2.046$ MHz. 以下, 我们将 k 称为巷数(lane number 或波长因子), 这一参数唯一地定义了每个组合的波长.

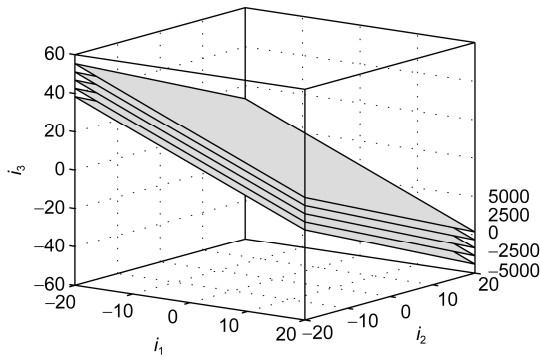
由巷数 k 的定义知, 构建相同波长的组合的数量是无限的. 满足下式的组合实际上定义了在(i_1, i_2, i_3)整数空间的一组平面

$$763i_1 + 620i_2 + 590i_3 = k. \quad (22)$$

我们称这组平面为巷平面, 巷数 k 决定了平面的位置. 几何上, 所有巷平面都是平行的, 两个相邻平面之间的距离为

$$\delta = \|n_{\text{lane}}\|^{-1} = 1/\sqrt{763^2 + 620^2 + 590^2} \approx 0.0009. \quad (23)$$

以零巷平面($k=0$)为对称面, 存在一系列的巷平面, 其离零巷平面的距离 $k\delta$. 图 3 给出了 $k=0, k=\pm 2500$ 以及 $k=\pm 5000$ 的巷平面.

图3 $k=0, k=\pm 2500$ 和 $k=\pm 5000$ 的巷平面

3.2 整数电离层数

令整数线性组合的电离层放大因子为 \bar{q} , 则有

$$\bar{q} = i_1 + i_2 \frac{f_1}{f_2} + i_3 \frac{f_1}{f_3}. \quad (24)$$

将式(17)代入, 可得

$$(k_2 k_3) \bar{q} = (k_2 k_3) i_1 + (k_1 k_3) i_2 + (k_1 k_2) i_3. \quad (25)$$

将数值代入并约去公因子 10, 得

$$36580 \bar{q} = 36580 i_1 + 45017 i_2 + 47306 i_3. \quad (26)$$

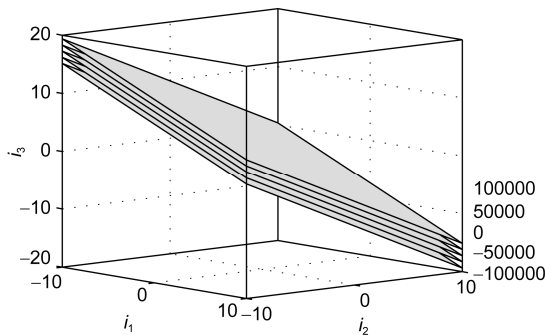
类似于巷数, 依据上式我们可以引入一个整数电离层数(ion number), 定义为

$$\bar{q}_i = 36580 \bar{q}, \quad (27)$$

从而

$$36580 i_1 + 45017 i_2 + 47306 i_3 = \bar{q}_i. \quad (28)$$

整数电离层数的取值均为整数, 该式同样定义了在 (i_1, i_2, i_3) 整数空间的一组平面, 整数电离层数 \bar{q}_i 决定了平面的位置. 当 $\bar{q}_i = 0$ 时, 确定的平面为无电离层整数组合平面. 图 4 给出了 $\bar{q}_i = 0$, $\bar{q}_i = \pm 50000$ 以及 $\bar{q}_i = \pm 100000$ 的电离层平面.

图4 $\bar{q}_i = 0$, $\bar{q}_i = \pm 50000$ 和 $\bar{q}_i = \pm 100000$ 的电离层平面

3.3 噪声放大因子

巷平面和电离层平面的交集显然为一条直线, 说明具有相同波长和相同电离层放大因子的整数组合的数量仍然有无穷个. 为了进一步固定所需的组合, 需要引入另外一个指标: 噪声放大因子.

根据式(6)可知, 整数线性组合观测值的噪声以周为单位的噪声放大因子 \bar{n} 为

$$\bar{n} = \sqrt{i_1^2 + i_2^2 + i_3^2}. \quad (29)$$

对应的以长度为单位的噪声放大因子(相对于 f_1 频率观测值)为

$$n = \frac{\lambda_*}{\lambda_1} \bar{n}. \quad (30)$$

由式(29)可知, 在 (i_1, i_2, i_3) 整数空间, 离原点越近的点噪声越小. 因此, 巷平面和电离层平面相交直线上距离原点最近的整数点将是我们希望得到的组合. 根据式(22)和(28), 利用数论中的 Diophantine 线性方程求解方法(Mordell, 1969), 可求得巷平面和电离层平面相交直线的向量解. 依据该直线向量解可求得距离原点最近的唯一整数解, 即对应于 k 和 \bar{q}_i 的最小噪声组合.

3.4 长波长整数线性组合

基于巷数 k 和原始观测值的波长大小, 可将整数线性组合分为以下几组: (1) 长波长区域: $0 < k < 590$. 组合波长大于三个原始观测值波长中的最大波长, 即 λ_3 . (2) 中波长区域: $590 \leq k \leq 763$. 组合波长在最大原始波长(λ_3)和最小原始波长(λ_1)之间. (3) 短波长区域: $k > 763$. 组合波长小于三个原始观测值波长中的最小波长, 即 λ_1 .

以上分类中, 我们仅考虑巷数为正数的情况, 从而对应的波长也为正数. 在理论上, 巷数可能为负, 从而也会产生负波长. 但负波长仅是数值意义上的负值, 其特性与正波长是类似的, 因此在此不予考虑.

由以上分类可知, 从波长角度来说, 长波长组合的数量是有限的, 波长最大的组合 $k=1$, 对应波长为 146.53 m. 图 5 给出了最大的 15 个长波长大小.

3.5 无电离层整数线性组合

我们现在寻找不受电离层影响的整数线性组合. 在这种情况下, $\bar{q}_i = 0$. 在 $-1000 < i_1 < 1000$, $-1000 < i_2 < 1000$, $-1000 < i_3 < 1000$ 范围内遍历, 筛选出符合无电

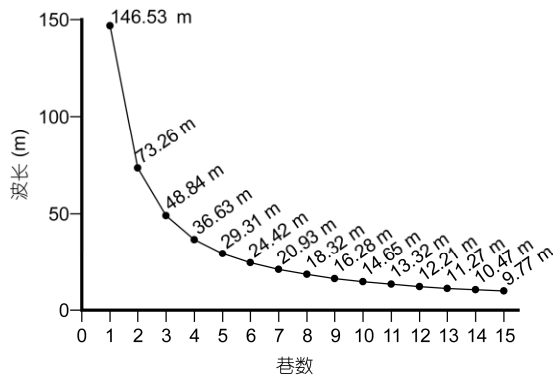


图5 北斗三频整数线性组合的前15个最大波长

电离层条件的整数组合. 按噪声放大因子从小到大排序, 如表1所示. 从表1可以看出, 无电离层整数组合的噪声放大因子都很大, 噪声放大因子最小的组合为(0, 62, 59), 其噪声放大因子 \bar{n} 也达到85.59.

4 最优整数线性组合

在Cocard等(2008)中给出了获取最优整数线性组合的方法, 其判断指标包括三个量: 巷数 k , 电离层放大因子 \bar{q} 和噪声放大因子 \bar{n} , 即通过对这三个指标的限制, 将线性组合限定在一定的范围内. 借鉴

其方法, 我们同样依据这三个指标搜索最优整数线性组合, 具体方法如下: 根据式(6)可知, 假定每个原始相位观测值的标准偏差为0.01周时, i_1, i_2 或 i_3 超过200产生的组合得到的标准偏差将超过2周. 因此首先将 i_1, i_2 或 i_3 的取值范围限制为 ± 200 . 为使组合的电离层放大因子不致过大, 将 q_i 的范围限制在 ± 3 以内. 为使波长不致过小, 将 k 的取值范围限制在 ± 25000 以内. 同时为了使噪声不致过大, 将 \bar{n} 的范围限制在200以内. 依据上述准则进行搜索计算, 可以得到298920个线性组合. 图6在 $k-\bar{q}$ 平面上给出了所产生组合在一定范围内的示意图. 图中每一个空心圆圈代表一个线性组合, 圆圈半径越大, 表明对应组合的噪声越小.

产生的组合可根据组合系数总和 $S=i_1+i_2+i_3$ 进行分组. 由于具有对称性, 我们用 S_x 表示满足 $i_1+i_2+i_3=\pm x$ 的组合. 从图6中可以看出, 选定范围内出现了三个组, 分别为 S_0, S_1 和 S_2 . 离原点最近的组 S_0 , 其次为 S_1 , 最后为 S_2 . 显然, 还存在离原点更远的类似区域组未在图中显示. 从图6还可看出, 每个组均包含一条噪声较小的中心轴线, 组合越接近该轴线越近, 噪声越小. 下面我们将从这些不同组的轴线邻近区域来寻找最优组合.

表1 无电离层整数组合

i_1	i_2	i_3	\bar{n}	k	i_1	i_2	i_3	\bar{n}	k
0	62	-59	85.59	3630	0	682	-649	941.45	39930
0	124	-118	171.17	7260	763	0	-590	964.51	234069
0	186	-177	256.76	10890	763	-620	0	983.14	197769
0	248	-236	342.35	14520	763	62	-649	1003.60	237699
0	310	-295	427.93	18150	0	744	-708	1027.03	43560
0	372	-354	513.52	21780	763	124	-708	1048.24	241329
0	434	-413	599.10	25410	763	186	-767	1097.75	244959
0	496	-472	684.69	29040	0	806	-767	1112.62	47190
0	558	-531	770.28	32670	763	248	-826	1151.50	248589
0	620	-590	855.86	36300	0	868	-826	1198.21	50820
763	-310	-295	874.81	215919	763	310	-885	1208.92	252219
763	-248	-354	876.92	219549	763	-930	295	1238.59	179619
763	-372	-236	881.05	212289	763	372	-944	1269.52	255849
763	-186	-413	887.32	223179	0	930	-885	1283.79	54450
763	-124	-472	905.72	226809	0	992	-944	1369.38	58080
763	-62	-531	931.65	230439					

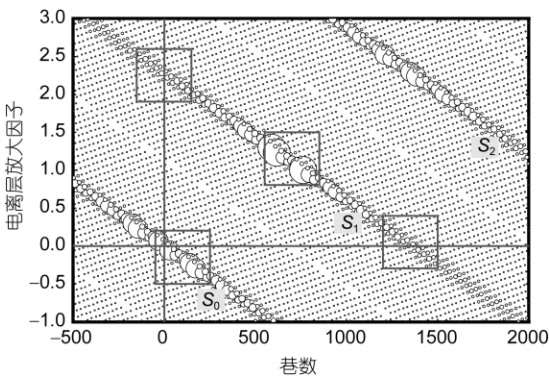


图 6 整数线性组合在 $k-\bar{q}$ 平面上的示意图

4.1 S_0 组的最优组合

S_0 区域离 $k-\bar{q}$ 原点最近, 将 S_0 区域靠近 $k-\bar{q}$ 平面原点的区域(图6)放大, 如图7所示. 这是一个超宽巷区域, 位于该区域的组合电离层放大因子较小. 依据 i_1 的值, 我们可以再次对 S_0 组进行分类, 如图7中不同斜线连接的组合.

对 $i_1=0$, 可筛选一个非常实用的组合, 对应于图中灰色圆表示的(0, 1, -1), 其具有较大的波长(≈ 4.88 m), 且具有较小的 \bar{q} 值, 是非常理想的组合. 在 $i_1=0$ 这条线上的其他组合都是(0, 1, -1)的倍数, 即(0, j , $-j$)(其中 j 为整数). 在 $i_1=1$ 线上存在的可用组合较多. 组合(1, -6, 5)具有很大的波长, 组合(1, -5, 4)受电离层影响最小, 且具有较大的波长(≈ 6.37 m). 两个双频宽巷组合(1, -1, 0)和(1, 0, -1)是该条线上噪声最小的组合, 图中两个组合也用灰色圆圈表示. 在 $i_1=-3$ 线上存在一个电离层放大因子很小的组合(3, -14, 11). 表2列出了这些组合及相关的参数.

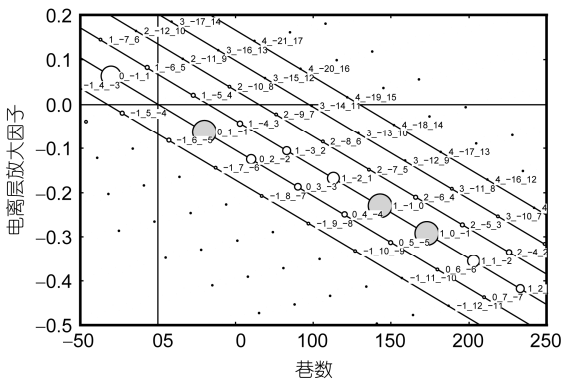


图 7 S_0 组靠近 $k-\bar{q}$ 原点区域的组合

表 2 S_0 组靠近 $k-\bar{q}$ 原点区域的最优组合

i_1	i_2	i_3	k	λ (m)	\bar{n}	\bar{q}
0	1	-1	30	4.884	1.4	-0.063
1	-7	6	-37	-3.960	9.3	0.145
1	-6	5	-7	-20.932	7.9	0.082
1	-5	4	23	6.371	6.5	0.020
1	-4	3	53	2.765	5.1	-0.043
1	-3	2	83	1.765	3.7	-0.105
1	-2	1	113	1.297	2.4	-0.168
1	-1	0	143	1.025	1.4	-0.231
1	0	-1	173	0.847	1.4	-0.293
3	-14	11	99	1.480	18.1	-0.004

4.2 S_1 组的最优组合

在三频模糊度解算中, 需要求解出三个线性无关的线性组合的模糊度, 才能恢复原始频率观测值的模糊度. S_0 区域的组合虽然具有较优的特性, 但由于其满足 $i_1+i_2+i_3=0$, 从中我们只能得到两个线性无关的组合, 第三个组合必须从其他区域选取. 由于在其他区域中, S_1 区域离原点最近(意味着更小的 k 值和 \bar{q} 值), 因此可从 S_1 区域选择第三个线性组合. S_1 区域的特征为 $i_1+i_2+i_3=\pm 1$, 这里我们只考虑 $i_1+i_2+i_3=1$ 的情况, 因为其与 $i_1+i_2+i_3=-1$ 是对称的.

如果第三个组合要求有较小的电离层放大因子, 即较小的 \bar{q} 值, 需从在 S_1 组低噪声轴线与 $\bar{q}=0$ 轴相交点附近区域进行查找(图6). 将该区域放大, 如图8所示, 位于该区域的组合波长为 10~12 cm 左右. 同样依据 i_1 的值可对该区域进行进一步分类, 对应于图中不同斜线连接的组合. 从图中可以看出, 组合(1, 16, -16)是其中电离层放大因子最小的组合, 但其噪声放大因子偏大. 组合(4, 2, -5), (4, 0, -3), (4, 1, -4)以及(5, -3, -1)具有较小 \bar{q} 值和较小的噪声, 是较为实用的组合. 表3列出了这些组合及相关的参数.

如果第三个组合要求有较大的波长, 即较小的 k 值, 需从在 S_1 低噪声轴线与 $k=0$ 轴相交点附近区域进行查找(图6). 将该区域放大, 如图9所示, 位于该区域组合的 \bar{q} 值为 2.3 左右. 依据 i_1 的值可对该区域进行进一步分类, 对应于图中不同斜线连接的组合. 从图中可以看出, 组合(-6, 15, -8)具有很大的波长, 但其噪声较大. 波长较大且噪声较小的组合有(-4, 3, 2), (-4, 4, 1)和(-3, -2, 6). 表4列出了这些组合及相

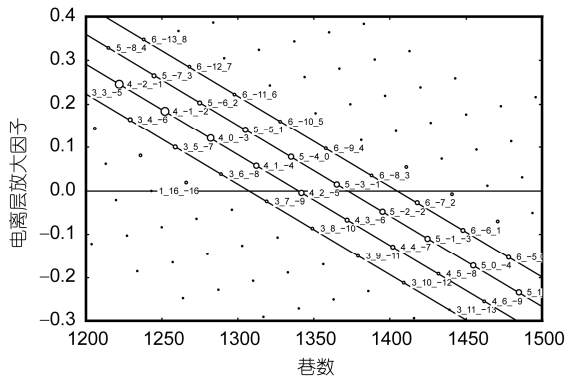


图 8 S_1 组低噪声轴线与 $\bar{q}=0$ 线的相交点附近区域的组合

表 3 S_1 组低噪声轴线与 $\bar{q}=0$ 线相交点附近区域的最优组合

i_1	i_2	i_3	k	λ (m)	\bar{n}	\bar{q}
1	16	-16	1243	0.118	22.6	-0.001
4	0	-3	1282	0.114	5.0	0.120
4	1	-4	1312	0.112	5.7	0.058
4	2	-5	1342	0.109	6.7	-0.005
4	3	-6	1372	0.107	7.8	-0.067
5	-4	0	1335	0.110	6.4	0.077
5	-3	-1	1365	0.107	5.9	0.015
5	-2	-2	1395	0.105	5.7	-0.048

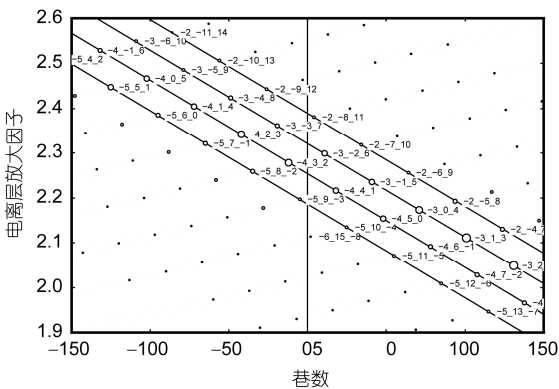


图 9 S_1 组低噪声轴线与 $k=0$ 线相交点附近区域的组合

关的参数。

S_1 组另外一个值得引起注意的小区域是离 $k-\bar{q}$ 平面原点直线距离最近的低噪声轴区域(图 6), 对该区域进行放大, 如图 10 所示. 该区域 \bar{q} 值为 1.0~1.3 左右, 波长为 18~24 cm, 接近于原始频率的 \bar{q} 值和

表 4 S_1 组低噪声轴线与 $k=0$ 线相交点附近区域的最优组合

i_1	i_2	i_3	k	λ (m)	\bar{n}	\bar{q}
-6	15	-8	2	73.263	18.0	2.114
-4	3	2	-12	-12.211	5.4	2.278
-4	4	1	18	8.140	5.7	2.216
-3	-3	7	-19	-7.712	8.2	2.361
-3	-2	6	11	13.321	7.0	2.298

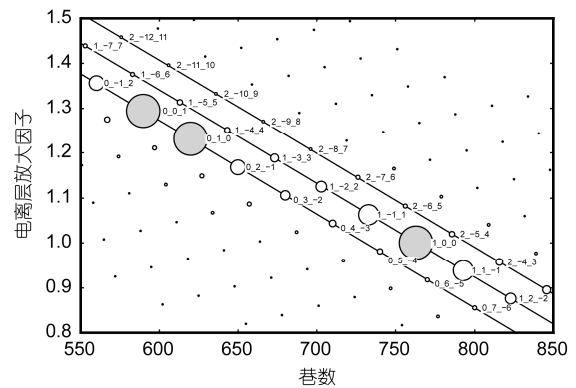


图 10 S_1 组离 $k-\bar{q}$ 原点最近区域的组合

波长. 从图中可以看出, 三个原始频率观测值(1, 0, 0), (0, 1, 0)和(0, 0, 1)均在该区域, 并且具有最小的噪声. 其他组合具有相似的 \bar{q} 值和 k 值, 但噪声更大. 因此, 在该区域仅有原始频率观测值是我们感兴趣的组合.

最后, 需要说明的是, S_1 组低噪声轴上的其他区域的低噪声组合在特定的场合同样能发挥其作用, 取决于观测值噪声和多路径误差的大小以及所受电离层误差的大小. 因此, 第三个独立线性组合应根据实际情况来选择.

4.3 最优组合选取

如何选取最优组合取决于每一类误差源的量级水平, 主要的误差源包括观测噪声, 多路径, 电离层延迟误差和对流层延迟误差. 其中电离层延迟误差和对流层延迟误差与基线的长度有关. 下面将针对短基线和长基线两种典型的场景, 选择最优的三个独立线性组合.

第一组合从 S_0 组中选择. 由以上分析可知, (0, 1, -1)是离原点很近(波长长, 电离层放大因子小)且噪声放大因子很小的组合. 因此, 无论在何种场景中,

都可选择(0, 1, -1)作为第一个线性组合.

第二组合同样从 S_0 组中选择, 但需要保证与(0, 1, -1)线性独立. 对于短基线, 电离层和对流层通过双差几乎完全消除. 在这种情形下, 主要误差源是观测噪声和多路径误差. 所选组合应具有较小的噪声放大因子和较长的波长. (1, -1, 0)和(1, 0, -1)噪声放大因子相对较小, 是较为合理的选择. 对于长基线, 电离层和对流层将成为主要的误差源, 限制电离层放大因子的大小并保证较长的波长将是主要的考虑因素. 此时可选择离原点最近的组合. (1, -5, 4)或(1, -6, 5)将是最合理的选择.

第三组合从 S_1 组中选择. 对于短基线, 所选组合应具有较小的噪声放大因子和较长的波长. 由于不需要考虑电离层放大因子, 可从图 10 中选择噪声放大因子更小的组合. 显然, 原始观测值(1, 0, 0), (0, 1, 0)或(0, 0, 1)具有最小的噪声放大因子, 是最合理的选择. 另外, 从图 9 中选择波长更长的组合可达到相同的效果. 由图 9 可知, (-4, 3, 2)或(-4, 4, 1)将是合理的选择. 对于长基线, 限制电离层放大因子的大小并保证较长的波长将是主要的考虑因素, 此时应从图 8 中选择. 由图可知, (4, 2, -5)离 $\bar{q} = 0$ 轴很近, 但其组合系数值较大, 从而噪声放大因子也较大, 选择该组

合并不合理. 选择与其相邻但噪声放大因子更小的组合(4, 1, -4)或(4, 0, -3)更为合适.

5 结论

本文对北斗三频线性组合进行了系统研究, 得出以下结论:

(1) 无电离层组合类和无对流层组合类可分别用一个平面来表示, 最小噪声组合类可用一条直线来表示. 确定不受电离层和对流层误差影响的三频线性组合较为容易, 而无电离层组合和无对流层组合的噪声均较大.

(2) 北斗三频整数线性组合的最大波长为 146.53 m, 无电离层整数组合的噪声均较大, 噪声最小的组合为(0, 62, 59).

(3) 无论在何种场景下, (0, 1, -1)都将是第一线性组合的最佳选择. 在短基线场景下: 最优的第二线性组合为(1, -1, 0)或(1, 0, -1); 最优的第三线性组合为原始观测值(1, 0, 0)、(0, 1, 0)或(0, 0, 1), 或超宽巷组合(-4, 3, 2)或(-4, 4, 1). 在长基线场景下: 最优的第二线性组合为(1, -5, 4)或(1, -6, 5); 最优的第三线性组合为(4, 1, -4)或(4, 0, -3).

参考文献

- 黄令勇, 宋力杰, 王琰, 等. 2012. 北斗三频无几何相位组合周跳探测与修复. 测绘学报, 41: 763-768
- 李金龙, 杨元喜, 何海波, 等. 2012. 函数极值法求解三频 GNSS 最优载波相位组合观测量. 测绘学报, 41: 797-803
- 王泽民, 柳景斌. 2003. Galileo 卫星定位系统相位组合观测值的模型研究. 武汉大学学报(信息科学版), 28: 723-727
- 伍岳, 郭金来, 孟央, 等. 2006. GPS 多频相位组合观测值的定位精度分析. 武汉大学学报(信息科学版), 31: 1082-1085
- 徐军, 陶庭叶, 高飞. 2013. GLONASS 三种载波频率组合值研究. 大地测量与地球动力学, 33: 86-89
- Cocard M, Geiger A. 1992. Systematic search for all possible widelanes. In: Proceedings of the 6th International Geodetic Symposium On Satellite Positioning. Columbus, 312-318
- Cocard M, Bourgon S, Kamali O, et al. 2008. A systematic investigation of optimal carrier-phase combinations for modernized triple-Frequency GPS. J Geodesy, 82: 555-564
- Collins J P. 1999. An overview of GPS inter-frequency carrier phase combinations. Technical Report. Geodesy and Geomatics Engineering. New Brunswick: University of New Brunswick
- Dai Z, Knedlik S, Loffeld O. 2009. Instantaneous triple-frequency GPS cycle-slip detection and repair. Int J Navig Obs, 2009: 407231, doi: 10.1155/2009/407231
- De Lacy M C, Reguzzoni M, Sanso F. 2012. Real-time cycle slip detection in triple-frequency GNSS. GPS Solut, 16: 353-362
- Feng Y. 2008. GNSS Three carrier ambiguity resolution using ionosphere-reduced virtual signals. J Geodesy, 82: 847-862
- Feng Y, Li B. 2010. Wide area real time kinematic decimeter positioning with multiple carrier GNSS signals. Sci China Earth Sci, 53: 731-740
- Forssell B, Martin-Neira M, Harris R A. 1997. Carrier phase ambiguity resolution in GNSS-2. In: Proceedings of the ION GPS. Kansas City, 1727-1736
- Han S, Rizos C. 1999. The impact of two additional civilian GPS frequencies on ambiguity resolution strategies. In: Proceedings of ION 55th

- Annual Meeting. Cambridge. 315–321
- Harris R A. 1997. Direct resolution of carrier phase ambiguity by “bridging the wavelength gap”. Technical Report. ESA
- Li B, Feng Y, Shen Y. 2010. Three carrier ambiguity resolution: Distance-independent performance demonstrated using semi-generated triple frequency GPS signals. *GPS Solut*, 14: 177–184
- Jung J. 1999. High integrity carrier phase navigation for future LAAS using multiple civilian GPS signals. In: *Proceedings of the ION GPS*. Nashville, 14–17
- Mordell L J. 1969. *Diophantine Equations*. New York: Academic Press
- Odijk D. 2003. Ionosphere-free phase combinations for modernized GPS. *J Surv Eng*, 129: 165–173
- Richert T, El-Sheimy N. 2007. Optimal linear combinations of triple-frequency carrier phase data from future global navigation satellite systems. *GPS Solut*, 11: 11–19
- Teunissen P J G, Odijk D. 2003. Rank defect integer estimation and phase-only modernized GPS ambiguity resolution. *J Geodesy*, 76: 523–535
- Wu Y, Jin S G, Wang Z M et al. 2010. Cycle-slip detection using multi-frequency GPS carrier phase observations: A simulation study. *J Adv Space Res*, 46: 144–149