Separarea solutiilor ecuatiilor algebrice si transcendente

Rezolvarea prin metode numerice a unei ecuații se divide in două etape:

1. Separarea intervalelor pe care ecuația are o singură soluție.

2. Micșorarea pe cit mai mult posibil a fiecărui din aceste intervale sau a unuia din ele

Metoda analitica

Pentru separarea analitică a soluţiilor vor fi folosite proprietăţile derivatei.Dacă soluţiile ecuaţiei $f'(x)=0$ pot fi uşor calculate,atunci, pentru a separa soluţiile

$f(x)=0$, este necesar:

1. să se determine soluțiile distincte $a \le x1 \le x2 \le \ldots, \le x_n \le b$ ale ecuației $f'(x)=0$;

2. considerind $a = x_0$ și $b = x_{n+1}$, să se calculeze valorile $f(x_0)$, $f(x_1)$, ..., $f(x_{n+1})$. Segmentele $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, n$, pentru care $f(x_i) \times f(x_{i+1}) < 0$ vor conţine cite cel puţin o soluţie a ecuaţiei $f(x)=0$.

Exemplu

Sarcina: Să se separe rădăcinile ecuaţiei $x^3 - 9x^2 + 24x - 19 = 0$ pe segmentul [0,8].

Rezolvare:

$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 19$;

$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$.

Rezolvind ecuaţia $f'(x) = 0$, se obţin soluţiile $x_1 = 2$, $x_2 = 4$.

x	f(x)	Semn f(x)
0	-19	-
2	1	+
4	-3	-
8	109	+

Deci ecuaţia va avea trei soluţii, cite una pe fiecare din segmentele [0, 2], [2, 4], [4, 8].

Metoda grafica

O altă posibilitate de separare a rădăcinilor ecuației $f(x) = 0$ este

cercetarea directă

a graficului funcției $f(x)$. Pentru construcția acestuia pot fi folostie atit

aplicații software specializate, cit și programe simple, elaborate cu ajutorul instrumentelor

unui limbaj de programare.

Lista programelor de constructie a graficelor functiilor

1. Desmos
2. Graph Plotter
3. GraphSketch
4. Mathway
5. Draw.io

Metoda bisectiei

În analiză numerica, **metoda înjumătățirii intervalului** este un algoritm de determinare a rădăcinilor, care pornește de la un interval inițial de determinare a rădăcinii unei funcții și apoi selectează un subinterval în care se află rădăcina. Este o metodă foarte simplă și robustă, dar relativ lentă. Metoda se mai numește și **metoda căutării binare** sau **metoda bisectiei**.

Descrierea metodei

Metoda este aplicabilă atunci când rezolvăm ecuația f(x) = 0 pentru variabila reală x, unde f este o funcție continuă definită pe intervalul [a, b], iar f(a) și f(b) au semne opuse. În acest caz, teorema valorii intermediare garantează că există o rădăcină a funcției f în intervalul (a, b).
La fiecare pas, metoda împarte intervalul în două, calculând jumătatea intervalului c = (a+b) / 2 și valoarea funcției f(c) în acest punct. În afară de cazul în care c este însăși rădăcina funcției, mai există două posibilități: ori f(c) este de semn opus cu f(a), ori este de semn opus cu f(b). Metoda selectează subintervalul (a,c) în primul caz sau (c,b) în al doilea caz, iar acest subinterval devine noul interval în care urmează să fie căutată rădăcina funcției. În acest fel, interval care conține o rădăcină a funcției f este redus în lățime cu 0.5, la fiecare pas.Procesul se continuă până când intervalul este suficient de mic

Exemplu

Considerăm funcția polinomială $f(x) = x^3 - x - 2$

Deoarece funcția este continuă, există o rădăcină în intervalul [1, 2].
În prima iterație, $a_1 = 1$ și $b_1 = 2$ iar mijlocul intervalului este $c_1 = 1.5$

Valoarea funcției la mijlocul intervalului: f(c1) = - . Deoarece este negativ, este înlocuit cu pentru următoarea iterație, pentru a respecta condiția ca și să aibă semne opuse. După un număr finit de pași, intervalul va avea lățimea tinzând spre 0, iar valorile funcției în acest interval vor converge spre rădăcina funcției. În tabelul următor se poate observa evoluția funcției.

Iteration	a_n	b_n	c_n	$f(c_n)$
1	1	2	1.5	−0.125
2	1.5	2	1.75	1.6093750
3	1.5	1.75	1.625	0.6660156
4	1.5	1.625	1.5625	0.2521973
5	1.5	1.5625	1.5312500	0.0591125
6	1.5	1.5312500	1.5156250	−0.0340538
7	1.5156250	1.5312500	1.5234375	0.0122504
8	1.5156250	1.5234375	1.5195313	−0.0109712
9	1.5195313	1.5234375	1.5214844	0.0006222
10	1.5195313	1.5214844	1.5205078	−0.0051789
11	1.5205078	1.5214844	1.5209961	−0.0022794
12	1.5209961	1.5214844	1.5212402	−0.0008289
13	1.5212402	1.5214844	1.5213623	−0.0001034
14	1.5213623	1.5214844	1.5214233	0.0002594
15	1.5213623	1.5214233	1.5213928	0.0000780

După 15 iterații, se determină rădăcina funcției, care ia valoarea 1.521.

Metoda coardelor

La fel ca metoda bisectiei, metoda coardelorîncepe cu două puncte a_1 și b_1 astfel încât $f(a_1)$ și $f(b_1)$ sunt de semne opuse, ceea ce înseamnă, conform teoremei valorilor intermediare că funcția continuă *f* are cel puțin un zero în intervalul $[a_1, b_1]$.
Metoda constă în producerea unui șir descrescător de intervale $[a_k, b_k]$ care conțin rădăcina funcției *f*.
La pasul *k*, este calculat numărul c_k.
După cum se poate verifica, c_k este abscisa intersecției dreptei care trece prin punctele liniei prin $(a_k, f(a_k))$ și $(b_k, f(b_k))$ cu axa, absciselor. Dacă $f(a_k)$ și $f(c_k)$ au același semn, atunci punem $a_{k+1} = c_k$ *și* $b_{k+1} = b_k$*; altfel, punem* $a_{k+1} = a_k$ *și* $b_{k+1} = c_k$.
Acest proces se repetă până când se ajunge la o valoare a funcției suficient de aproape de zero.
Pentru a verifica corectitudinea algoritmului, considerăm numerele reale *a* și *b*. Construim dreapta care trece prin punctele $(a, f(a))$ și $(b, f(b))$, ca și în contra figura alăturată. Această dreaptă este o coardă a graficului funcției *f*. Ecuația acestei drepte se determină folosind formula ecuației dreptei care trece printr-un punct și are o pantă dată:
y – f(b) = ((f(b) – f(a))/ (b - a)) * (x - b);

Se determină acum *c*, abscisa intersecției acestei drepte cu axa x
f(b) + ((f(b) – f(a)) / (b – a)) * (c - b) = 0;

Rezolvarea ecuației de mai sus oferă c_k

Metoda Newton

Având o funcție reală f, iar derivata ei, $f\,'$, vom începe cu stabilirea unei valori inițiale pentru x_0 pentru o rădăcină a funcției f. O aproximare mai bună pentru rădăcina funcției este
x1 = x0 – f(x0) / f'(x0);
Geometric, (x_1, 0) este la intersecția cu axa x a tangentei funcției f în punctul (x_0). Procesul se repetă

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \,/\, f'(x_n)$$

până se atinge o valoare suficient de precisă.
Vom începe procesul cu o valoare inițială arbitrară x_0.