Clase Práctica 1

Recursión Primitiva

Lógica y Computabilidad

2do cuatrimestre de 2020

Conceptos preliminares

Definición

Llamamos *funciones iniciales* a

$$\begin{aligned} n(x) &= 0 \\ s(x) &= x + 1 \\ u_i^n(x_1, \ldots, x_n) &= x_i \qquad \text{para todo } 1 \leqslant i \leqslant n. \end{aligned}$$

Observación

Hay infinitas funciones u_i^n. Por lo tanto, hay infinitas funciones iniciales.

Conceptos preliminares

Definición

Sean $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ y $g_1, \ldots, g_k : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$. Sea $h : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ definida como

$$h(x_1, \ldots, x_n) = f(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_n)).$$

Decimos que h es obtenida a partir de f y $g_1, \ldots, g_k$ por *composición*.

Definición

Una clase de funciones $\mathcal{C}$ es *cerrada por composición* si para cualquier elección de $f, g_1, \ldots, g_k \in \mathcal{C}$, la h obtenida por composición de ellas está en $\mathcal{C}$.

Ejercicios

1. Sea $\mathcal{C}$ una clase cerrada por composición que contiene las funciones iniciales. Ver si están en $\mathcal{C}$:
   a. $\text{uno} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\text{uno}(x) = 1$.

Ejercicios

1. Sea $\mathcal{C}$ una clase cerrada por composición que contiene las funciones iniciales. Ver si están en $\mathcal{C}$:
   a. $\text{uno} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\text{uno}(x) = 1$.
      Tomando en el esquema de composición $k = n = 1$, $f = s$ y $g_1 = n$ (que están en $\mathcal{C}$ por ser funciones iniciales), tenemos que $\text{uno}(x) = 1 = s(n(x))$, para todo $x \in \mathbb{N}$.

Ejercicios

1. Sea $\mathcal{C}$ una clase cerrada por composición que contiene las funciones iniciales. Ver si están en $\mathcal{C}$:
   b. $\mathsf{id} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\mathsf{id}(x) = x$.

Ejercicios

1. Sea $\mathcal{C}$ una clase cerrada por composición que contiene las funciones iniciales. Ver si están en $\mathcal{C}$:

   b. $\mathrm{id} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\mathrm{id}(x) = x$.
   id es simplemente la proyección de una componente, es decir, $\mathrm{id} = u_1^1 \in \mathcal{C}$.

Ejercicios

1. Sea $\mathcal{C}$ una clase cerrada por composición que contiene las funciones iniciales. Ver si están en $\mathcal{C}$:
    c. $s_1 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $s_1(x, y) = x + 1$.

Ejercicios

1. Sea $\mathcal{C}$ una clase cerrada por composición que contiene las funciones iniciales. Ver si están en $\mathcal{C}$:
    c. $s_1 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $s_1(x, y) = x + 1$.
    Tomando en el esquema de composición $k = 1$, $n = 2$, $f = s$ y $g_1 = u_1^2$, tenemos que
    $s_1(x, y) = x + 1 = f(g_1(x, y))$, para todo $(x, y) \in \mathbb{N}^2$.

Ejercicios

1. Sea $\mathcal{C}$ una clase cerrada por composición que contiene las funciones iniciales. Ver si están en $\mathcal{C}$:
   d. $\tilde{f} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $\tilde{f}(x, y) = f(y, x)$, donde $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} \in \mathcal{C}$.

1. Sea $\mathcal{C}$ una clase cerrada por composición que contiene las funciones iniciales. Ver si están en $\mathcal{C}$:
   d. $\tilde{f} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $\tilde{f}(x, y) = f(y, x)$, donde $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} \in \mathcal{C}$. Tomando $k = 2$, $n = 2$, $g_1 = u_2^2$ y $g_2 = u_1^2$, tenemos que $\tilde{f}(x, y) = f(y, x) = f(g_1(x, y), g_2(x, y))$, para todo $(x, y) \in \mathbb{N}^2$.

Ejercicios

1. Sea $\mathcal{C}$ una clase cerrada por composición que contiene las funciones iniciales. Ver si están en $\mathcal{C}$:
   e. $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $h(x) = g(x, x, x)$, donde $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N} \in \mathcal{C}$.

Ejercicios

1. Sea $\mathcal{C}$ una clase cerrada por composición que contiene las funciones iniciales. Ver si están en $\mathcal{C}$:
   e. $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $h(x) = g(x, x, x)$, donde $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N} \in \mathcal{C}$.
   Tomando $k = 3$, $n = 1$, $f = g$, $g_1 = g_2 = g_3 = u_1^1$, tenemos que $h(x) = f(g_1(x), g_2(x), g_3(x))$, para todo $x \in \mathbb{N}$.

Ejercicios

1. Sea $\mathcal{C}$ una clase cerrada por composición que contiene las funciones iniciales. Ver si están en $\mathcal{C}$:
    f. $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $p(x) = x \dot{-} 1$.

Ejercicios

1. Sea $\mathcal{C}$ una clase cerrada por composición que contiene las funciones iniciales. Ver si están en $\mathcal{C}$:
   f. $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $p(x) = x \dot{-} 1$.
      Podría no estar en $\mathcal{C}$. Usen el ejercicio 3 de la práctica 1 para aclarar esta afirmación. Parte de la razón está relacionada con el siguiente ejercicio.

Ejercicios

2. Sea $\mathcal{C}$ la clase más chica que contiene las funciones iniciales y está cerrada por composición. Sea $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ una función en $\mathcal{C}$. Demostrar que existen $i \in \mathbb{N}$ y $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ en $\mathcal{C}$ tales que $f = g \circ u_i^n$.

Ejercicios

2. Sea $\mathcal{C}$ la clase más chica que contiene las funciones iniciales y está cerrada por composición. Sea $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ una función en $\mathcal{C}$. Demostrar que existen $i \in \mathbb{N}$ y $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ en $\mathcal{C}$ tales que $f = g \circ u_i^n$.

Demostración por inducción estructural.

Usaremos inducción estructural para probar que para toda $f \in \mathcal{C}$ vale la propiedad

"existen $i \in \mathbb{N}$ y $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ en $\mathcal{C}$ tales que $f = g \circ u_i^n$"

Para esto, primero veremos que la propiedad se cumple en los casos base (o sea, para f cualquier función inicial), y luego veremos que vale en los casos inductivos (funciones construidas mediante composición a partir de funciones en $\mathcal{C}$ que cumplen la propiedad).

Ejercicios

2. Sea $\mathcal{C}$ la clase más chica que contiene las funciones iniciales y está cerrada por composición. Sea $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ una función en $\mathcal{C}$. Demostrar que existen $i \in \mathbb{N}$ y $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ en $\mathcal{C}$ tales que $f = g \circ u_i^n$.

Demostración: Casos base.

La propiedad vale para los tres casos base:

$s = s \circ u_1^1$ ✓

$n = n \circ u_1^1$ ✓

para cualesquiera $i, n \in \mathbb{N}$ con $1 \leqslant i \leqslant n$, $u_i^n = u_1^1 \circ u_i^n$ ✓

Ejercicios

2. Sea $\mathcal{C}$ la clase más chica que contiene las funciones iniciales y está cerrada por composición. Sea $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ una función en $\mathcal{C}$. Demostrar que existen $i \in \mathbb{N}$ y $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ en $\mathcal{C}$ tales que $f = g \circ u_i^n$.

Demostración: Caso inductivo.

Sea h una función obtenida por composición de las funciones f y $g_1, \ldots, g_k$, para las cuales vale la propiedad.

$$h(x_1, \ldots, x_n) = f(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_n))$$

Ejercicios

2. Sea $\mathcal{C}$ la clase más chica que contiene las funciones iniciales y está cerrada por composición. Sea $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ una función en $\mathcal{C}$. Demostrar que existen $i \in \mathbb{N}$ y $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ en $\mathcal{C}$ tales que $f = g \circ u_i^n$.

Demostración: Caso inductivo.

En particular, existen $i \in \mathbb{N}$ y g en $\mathcal{C}$ tales que $f = g \circ u_i^k$. Así, para toda tupla $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n$,

$$\begin{aligned} h(x_1, \ldots, x_n) &= f(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_n)) \\ &= g({u_i}^k(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_n))) \\ &= g(g_i(x_1, \ldots, x_n)). \end{aligned}$$

Ejercicios

2. Sea $\mathcal{C}$ la clase más chica que contiene las funciones iniciales y está cerrada por composición. Sea $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ una función en $\mathcal{C}$. Demostrar que existen $i \in \mathbb{N}$ y $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ en $\mathcal{C}$ tales que $f = g \circ u_i^n$.

Demostración.

Como g_i también cumple la propiedad, existen $j_i \in \mathbb{N}$ y g_i' en $\mathcal{C}$ tales que $g_i = g_i' \circ u_{j_i}^n$. Así, para toda tupla $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n$,

$$\begin{aligned} h(x_1, \dots, x_n) &= g(g_i(x_1, \dots, x_n)) \\ &= g(g_i'(u_{j_i}^n(x_1, \dots, x_n))). \end{aligned}$$

2. Sea $\mathcal{C}$ la clase más chica que contiene las funciones iniciales y está cerrada por composición. Sea $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ una función en $\mathcal{C}$. Demostrar que existen $i \in \mathbb{N}$ y $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ en $\mathcal{C}$ tales que $f = g \circ u_i^n$.

Demostración.

Así, $h = g'' \circ u_{j_i}^n$, donde $g'' = g \circ g_i'$. Observar que $g'' \in \mathcal{C}$, ya que $g \in \mathcal{C}, g_i' \in \mathcal{C}$ y $\mathcal{C}$ es cerrada por composición. Tenemos entonces que la propiedad vale para h. □

Conceptos preliminares

Definición

Sean $f : \mathbb{N}^{n} \to \mathbb{N}$, $g : \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$. Definamos $h : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ como

$$\begin{aligned} h(x_1, \ldots, x_n, 0) &= f(x_1, \ldots, x_n) \\ h(x_1, \ldots, x_n, t+1) &= g(h(x_1, \ldots, x_n, t), x_1, \ldots, x_n, t). \end{aligned}$$

Decimos entonces que h es obtenida a partir de f y g por *recursión primitiva*. En este contexto vamos a considerar que una función 0-aria es una constante k.

Definición

Una clase de funciones $\mathcal{C}$ es *cerrada por recursión primitiva* si para cualquier elección de $f, g \in \mathcal{C}$ la h obtenida por recursión primitiva a partir de ellas está en $\mathcal{C}$.

Ejercicios

3. ¿Cómo se comportan las siguientes funciones definidas por recursión primitiva a partir de f y g?
   a. $n = 0$, $f = 0$, $g = u_2^2$.

Ejercicios

3. ¿Cómo se comportan las siguientes funciones definidas por recursión primitiva a partir de f y g?
   a. $n = 0$, $f = 0$, $g = u_2^2$.
      $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ queda dada por

$$\begin{aligned} h(0) &= f = 0 \\ h(t+1) &= g(h(t), t) = u_2^2(h(t), t) = t \end{aligned}$$

Ejercicios

3. ¿Cómo se comportan las siguientes funciones definidas por recursión primitiva a partir de f y g?

   a. $n = 0$, $f = 0$, $g = u_2^2$.
   $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ queda dada por

$$h(0) = f = 0$$
$$h(t+1) = g(h(t), t) = u_2^2(h(t), t) = t$$

Notar que para todo x, $h(x) = x \dot{-} 1$.

3. ¿Cómo se comportan las siguientes funciones definidas por recursión primitiva a partir de f y g?
   b. $n = 1$, $f = s$, $g(x, y, z) = x + z$.

3. ¿Cómo se comportan las siguientes funciones definidas por recursión primitiva a partir de f y g?
   b. $n = 1$, $f = s$, $g(x, y, z) = x + z$.
      $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ dada por

$$
\begin{aligned}
h(x,0) &= f(x) = x + 1 \\
h(x,t+1) &= g(h(x,t),x,t) = h(x,t) + t.
\end{aligned}
$$

Ejercicios

3. ¿Cómo se comportan las siguientes funciones definidas por recursión primitiva a partir de f y g?
   b. $n = 1$, $f = s$, $g(x, y, z) = x + z$.
      $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ dada por

$$h(x, 0) = f(x) = x + 1$$
$$h(x, t + 1) = g(h(x, t), x, t) = h(x, t) + t.$$

Notar que para todos $x, y \in \mathbb{N}$,

$$h(x, y) = (x + 1) + \sum_{i=1}^{y} (i - 1).$$

Ejercicios

3. ¿Cómo se comportan las siguientes funciones definidas por recursión primitiva a partir de f y g?
    c. $n = 2$, $f(x, y) = x + y$, $g(x, y, z, w) = xyz$.

Ejercicios

3. ¿Cómo se comportan las siguientes funciones definidas por recursión primitiva a partir de f y g?

   c. $n = 2$, $f(x, y) = x + y$, $g(x, y, z, w) = xyz$.
   $h : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ dada por

$$h(x, y, 0) = f(x, y) = x + y$$
$$h(x, y, t + 1) = g(h(x, y, t), x, y, t) = h(x, y, t)xy.$$

3. ¿Cómo se comportan las siguientes funciones definidas por recursión primitiva a partir de f y g?

   c. $n = 2$, $f(x, y) = x + y$, $g(x, y, z, w) = xyz$.
   $h : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ dada por

$$
\begin{aligned}
h(x, y, 0) &= f(x, y) = x + y \\
h(x, y, t + 1) &= g(h(x, y, t), x, y, t) = h(x, y, t)xy.
\end{aligned}
$$

   Notar que para todos $x, y, z \in \mathbb{N}$, $h(x, y, z) = (x + y)x^z y^z$.

Conceptos preliminares

Definición

Una clase de funciones $\mathcal{C}$ es *PRC* (por *Primitive Recursively Closed*) si contiene a las funciones iniciales y es cerrada por composición y recursión primitiva.

4. Sea $n > 0$ un número natural fijo y $\mathcal{C}$ la clase de todas las funciones de aridad no mayor a n (funciones definidas sobre no más de n variables). ¿Es $\mathcal{C}$ una clase PRC?

Ejercicios

4. Sea $n > 0$ un número natural fijo y $\mathcal{C}$ la clase de todas las funciones de aridad no mayor a n (funciones definidas sobre no más de n variables). ¿Es $\mathcal{C}$ una clase PRC?
   No. Por muchas razones, pero la más simple es que $\mathcal{C}$ no contiene a todas las funciones iniciales. En particular, u_1^{n+1} no está en $\mathcal{C}$.

Ejercicios

5. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ en $\mathcal{C}$. La *n-ésima iteración* de f, escrita como f^n, es la función
$$f^n(x) = (\underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n\text{-veces}})(x),$$
donde $f^0 = \mathrm{id}$. Demostrar que si f pertenece a una clase PRC $\mathcal{C}$, entonces $\imath_f(x, n) = f^n(x)$ también pertenece a $\mathcal{C}$.

Ejercicios

5. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ en $\mathcal{C}$. La *n-ésima iteración* de f, escrita como f^n, es la función

$$f^n(x) = (\underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n\text{-veces}})(x),$$

donde $f^0 = \mathrm{id}$. Demostrar que si f pertenece a una clase PRC $\mathcal{C}$, entonces $\imath_f(x, n) = f^n(x)$ también pertenece a $\mathcal{C}$.

Demostración.

Veamos que $\imath_f$ se puede definir mediante recursión primitiva. Es decir, debemos encontrar $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ en $\mathcal{C}$ tales que

$$\imath_f(x, 0) = x = h(x)$$
$$\imath_f(x, t+1) = f^{t+1}(x) = g(\imath_f(x, t), x, t).$$

Ejercicios

5. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ en $\mathcal{C}$. La *n-ésima iteración* de f, escrita como f^n, es la función

$$f^n(x) = (\underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n\text{-veces}})(x),$$

donde $f^0 = \mathrm{id}$. Demostrar que si f pertenece a una clase PRC $\mathcal{C}$, entonces $\imath_f(x, n) = f^n(x)$ también pertenece a $\mathcal{C}$.

Demostración.

Veamos que $\imath_f$ se puede definir mediante recursión primitiva. Es decir, debemos encontrar $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ en $\mathcal{C}$ tales que

$$\imath_f(x, 0) = x = h(x)$$
$$\imath_f(x, t+1) = f^{t+1}(x) = g(\imath_f(x, t), x, t).$$

Tomando $h = \mathrm{id}$ y $g = f \circ u_1^3$, se obtiene lo buscado.