Práctica 2: Funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$

1. Dar el dominio de definición para cada una de las siguientes funciones y graficarlo:

   a) $f(x,y) = \ln(16 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 4)$

   b) $f(x,y) = \sqrt{6 - (2x + 3y)}$

   c) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} + \sqrt{y - x^2}$

   d) $f(x,y) = \dfrac{1}{x}$

   e) $f(x,y) = \dfrac{\ln(1 - y + x^2)}{\operatorname{sen} x}$

   f) $f(x,y) = \displaystyle\int_x^y \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

   g) $f(x,y) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{1 - x^2 + y^2}}$

   h) $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}(x^2 y)}{\ln(1 - x^2)}$

2. Graficar aproximadamente el conjunto $\{(x,y) : f(x,y) = c\}$ para distintos valores de c. En otras palabras, determinar las distintas curvas de nivel.

   a) $f(x,y) = x + y$

   b) $f(x,y) = x^2 + y^2$

   c) $f(x,y) = \sqrt{xy}$

   d) $f(x,y) = \dfrac{y}{x^2}$

   e) $f(x,y) = x^2 - y^2$

3. Estudiar las superficies de $\mathbb{R}^3$ representadas por las siguientes ecuaciones y determinar cuáles de estas superficies son la gráfica de una función $z = f(x,y)$.

   a) $z = 2x^2 + y^2$

   b) $z^2 = 1 - x^2 - \dfrac{y^2}{2}$

   c) $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$

   d) $3x + 2y - z = 0$

   e) $z^2 = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{3} - 2$

   f) $6x^2 + y^2 - z^2 = 1$

   g) $x^2 + y^2 = 4z^2$

4. Graficar aproximadamente el conjunto $\{(x,y,z) : f(x,y,z) = u\}$ para distintos valores de u. En otras palabras, determinar las distintas superficies de nivel.

   a) $f(x,y,z) = x + y + z$

   b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$

   c) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

   d) $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2$

Límite y continuidad

5. ¿A qué distancia de 16 basta tomar x para asegurar que:

   a) $\frac{1}{\sqrt{x}} \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$? *b)* $\frac{1}{\sqrt{x}} \in \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{10}, \frac{1}{4} + \frac{1}{10}\right)$? *c)* $\frac{1}{\sqrt{x}} \in \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{1000}, \frac{1}{4} + \frac{1}{1000}\right)$?

6. Se define $[x]$ la parte entera de x como $[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$. Analizar, para cada $a \in \mathbb{R}$, la existencia de

$$\lim_{x \to a} x - [x].$$

7. Calcular, si existen, los siguientes límites:

   a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + \operatorname{sen} x}{e^x + \cos x}$ *b)* $\displaystyle\lim_{x\to3^+} \frac{[x^2] - [x]^2}{x^2 - 9}$ *c)* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x \operatorname{sen} x$

   d) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{e^{1/x}}{\ln(|x|)}$ *e)* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ *f)* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x}$

   g) $\displaystyle\lim_{x\to0}(1 + x)^{1/\tan x}$ *h)* $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{e^x - 1}{x}$ *i)* $\displaystyle\lim_{x\to0}(\cos x)^{1/x}$

8. (a) Usando sólo la definición de límite demostrar que:
   i. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} x + y = 1;$
   ii. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-1,8)} xy = -8.$

   (b) Si $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = 1/100$ ó $\varepsilon = \alpha^2$, encontrar $\delta > 0$ tal que

$$\|(x, y) - (-1, 8)\| < \delta \Longrightarrow |xy + 8| < \varepsilon.$$

9. Probar por definición que si $(x, y) \to (2, 3)$, entonces $y \operatorname{sen}(xy - 6) \to 0$.

10. Probar que:

   a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(7,2)} x^2 + y^2 - xy = 39;$ *b)* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,3)} \operatorname{sen}(x \cos y) = 0;$

   c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} xe^{xy} = 0;$ *d)* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,3)} \frac{y^2 + \cos(\pi - x)}{y} = \frac{8}{3}.$

   e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} ye^x = 1;$ *f)* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(c,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2y)}{x^2 - y^2} = 0$ si $c \neq 0;$

11. (a) Sea $f : B_r(a,b) \to \mathbb{R}$ tal que f no se anula sobre $B_r(a,b) \setminus \{(a,b)\}$ y $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = 0$. Probar que:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{\operatorname{sen}(f(x,y))}{f(x,y)} = 1.$$

(b) Sea $f : B_r(a,b) \to \mathbb{R}$ tal que $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = +\infty$. Probar que:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{\ln(f(x,y))}{f(x,y)} = 0.$$

12. Calcular:

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$;

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\operatorname{sen}(xy)}{x}$;

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$.

13. Analizar la existencia de los límites restringido a los ejes coordenados y del límite doble de las siguientes funciones en el origen:

a) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$;

b) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$;

c) $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{y}$;

d) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$

e) $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{xy+y-x}$;

f) $f(x,y) = |x|^y$;

g) $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$;

h) $f(x,y) = (x^2+y^2)^{x^2y^2}$;

i) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2-x^2+1}{x^2-y^2}$;

j) $f(x,y) = \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$;

k) $f(x,y) = \dfrac{xy}{|x|+|y|}$;

l) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$;

m) $f(x,y) = x\ln\left(x^2+y^2\right)$

n) $f(x,y) = (x^2+y^2)\ \ln(x^2+y^2)$

o) $f(x,y) = x\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{y}+y\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{x}$;

p) $f(x,y) = \operatorname{sen}\dfrac{x}{y}$;

14. Demostrar que las siguientes funciones tienden a cero si (x, y) se aproxima al origen a lo largo de cualquier recta, pero que para ninguna de ellas existe el límite cuando $(x, y) \to (0, 0)$

a) $f(x,y) = \frac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$; *b)* $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2-x}$;

c) $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$; *d)* $f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x^2-y)y}{x^4}, & \text{si } 0 < y < x^2; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$

15. Para cada una de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \frac{1}{2}\sin^2(x)$;

(b) $f(x) = x^2 - [x^2]$;

(c) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in \mathbb{Q}; \\ -x, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}; \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} \cos(\pi x/2), & \text{si } |x| \leq 1; \\ |x-1|, & \text{si } |x| > 1; \end{cases}$

(e) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{si } x > 0; \\ x^2+1, & \text{si } x \leq 0; \end{cases}$

- Calcular su dominio natural.
- Estudiar la continuidad en cada punto de su dominio. En los puntos de discontinuidad, indicar de qué tipo se trata.
- En los puntos que no pertenezcan al dominio, definirla (si es posible) de modo que resulte continua.

16. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la siguiente función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4(x+1)}{|x+1|^3 + 2\,|y|^3} & (x,y) \neq (-1,0) \\ 1 & (x,y) = (-1,0) \end{cases}$$

(a) Probar que f no es continua en $(-1, 0)$.

(b) Redefinirla en $(x, y) = (-1, 0)$, si es posible, de manera tal que resulte continua en $\mathbb{R}^2$.

17. Consideremos la función

$$f(x,y) = xy \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right).$$

(a) Calcular su dominio.

(b) Determinar si es posible extenderla a $\mathbb{R}^2$ de modo que resulte continua.

18. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones en los puntos indicados

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x-y}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0); \end{cases}$ en $(1,0)$ y $(0,0)$;

(b) $f(x,y) = \begin{cases} |y|^x(1+x)^y, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \text{ y } x > -1; \\ 1, & \text{si } (x,y) = (0,0); \end{cases}$ en $(1,0)$ y $(0,2)$;

(c) $f(x,y) = \operatorname{sen}(x \cos y)$ en $(1,1)$ y $(0,2)$;

(d) $f(x,y) = \begin{cases} x+y, & \text{si } x \neq 0 \text{ e } y \neq 0; \\ 1, & \text{en otro caso}; \end{cases}$ en $(0,0)$ y $(1,1)$;

(e) $f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{si } xy \neq 0; \\ 0, & \text{si } xy = 0; \end{cases}$ en $(1,0)$ y $(-1,2)$.

19. Probar que la siguiente función no tiene límite cuando $(x,y) \to (0,0)$.

$$f(x,y) = \frac{\operatorname{sen}(xy)}{|x-y|}$$

Sugerencia: En primer lugar calcular el dominio de f y mostrar que cero es un candidato a límite. Luego elegir uno de los siguientes caminos para probar la no existencia del límite:

- PLAN A: Encontrar alguna trayectoria que pase por el origen sobre la cual f no tienda a cero.
- PLAN B: Considerar la sucesión de puntos $p_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1})$, probar que esta sucesión tiende a cero y calcular el $\lim\limits_{n\to\infty} f(p_n)$.
- PLAN C: Probar si el límite es cero entonces debe existir un entorno del origen en donde f esté acotada. Mostrar que esto último no puede ocurrir.

20. Analizar la existencia de límite en el origen para

$$f(x,y) = \frac{e^{(x^2+y^3)} - 1}{xy - x + y^2}$$

21. Estudiar la continuidad de f en el punto $(1,0)$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x-1)^{\frac{4}{3}}y}{(x-1)^2+y^2|x|} & \text{si} \quad (x,y) \neq (1,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (1,0) \end{cases}$$

Sugerencia: Probar y usar que si $\|(x,y)-(1,0)\| < \frac{1}{2}$ entonces $(x-1)^2 + y^2|x| \geq \frac{1}{2}[(x-1)^2 + y^2]$

22. Estudiar la continuidad de f en el origen de coordenadas.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2 - \tan(x^2y)}{\frac{1}{2}x^2 + y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

23. Probar que la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

es continua respecto de cada una de las variables por separado pero no lo es como función de ambas.

24. Demostrar que si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en $x = a$ y la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ está dada por $f(x,y) = g(x)$, entonces f es continua en todo punto de la recta (a,y). Usar esto para probar que las siguientes funciones son continuas en todo $\mathbb{R}^2$:

(a) $f(x,y) = \operatorname{sen}(x)$. (b) $f(x,y) = \operatorname{sen}(x^2) + e^y$.

25. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones

(a) $f(x,y) = \left(x^2,\ e^x\right)$ (b) $f(x,y) = \left(\dfrac{\operatorname{sen}\,(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\ ,\ \dfrac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}\right)$

26. (a) Hallar todas las funciones continuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f(x)^2 - e^x = 0$.
    (b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{Im}(f) = [a,b] \cup [c,d]$ con $a < b < c < d$. ¿Es f continua?
    (c) Demostrar que la ecuación $x2^x = 1$ tiene al menos una raíz positiva y menor o igual que 1.
    (d) Probar que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y $f(x) \in \mathbb{Q}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces debe ser constante.
    (e) Probar que todo polinomio de grado impar tiene al menos una raíz real.

27. (a) Sea $f : B_1(0) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{1-\|x\|}$. Probar que f es continua y no es acotada.
    (b) Sea $g : B_1(0) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \|x\|$. Probar que g es continua y acotada pero no alcanza su máximo en $B_1(0)$.

28. Sea $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}\,(x^2y)}{\ln(1-x^2)}$
    (a) Encontrar el dominio D de f y graficarlo.
    (b) Dado $q = (q_1, q_2) \in Fr(D)$, ¿existe $\lim\limits_{(x,y)\to(q_1,q_2)} f(x,y)$?