Conjuntos Computables y T. de Rice

Lógica y Computabilidad

Christian G. Cossio-Mercado

Departamento de Computación,
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales,
Universidad de Buenos Aires

9 de octubre de 2020

Temario

Temario

1. Repaso de definiciones
   - Conjuntos Computables
   - Teorema de Rice
2. Ejercicios de calentamiento
3. Parte 1 - Conjuntos computables
4. Parte 2 - Funciones no computables

Conjuntos computables

- La **función característica** de un conjunto A es la función

$$f_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Conjuntos computables

- La **función característica** de un conjunto A es la función

$$f_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Un conjunto es **primitivo recursivo** si su función característica es primitiva recursiva

Conjuntos computables

- La **función característica** de un conjunto A es la función

$$f_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Un conjunto es **primitivo recursivo** si su función característica es primitiva recursiva
- Un conjunto A es **computable** si su función característica es computable

Conjuntos computables

- Un conjunto A es **computable** sii es c.e. y co-c.e.

Conjuntos computables

- Un conjunto A es **computable** sii es c.e. y co-c.e.
- Un conjunto A es **c.e.** si existe $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que

$$A = \{x : g(x) \downarrow\} = \text{dom } g$$

Conjuntos computables

- Un conjunto A es **computable** sii es c.e. y co-c.e.
- Un conjunto A es **c.e.** si existe $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que

$$A = \{x : g(x) \downarrow\} = \text{dom } g$$

- Un conjunto A es **co-c.e.** si $\overline{A} = A^c$ es c.e.

Conjuntos computables

- Un conjunto A es **computable** sii es c.e. y co-c.e.
- Un conjunto A es **c.e.** si existe $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que

$$A = \{x : g(x) \downarrow\} = \text{dom } g$$

- Un conjunto A es **co-c.e.** si $\overline{A} = A^c$ es c.e.
- Si dos conjuntos A y B son computables (o primitivos recursivos), también son computables (o primitivos recursivos) $A \cup B$, $A \cap B$, y $\overline{A}$

Teorema de Rice

- Si A es un conjunto de índices no trivial (i.e., $A \neq \emptyset$ y $A \neq \mathbb{N}$), entonces A no es computable

Teorema de Rice

- Si A es un conjunto de índices no trivial (i.e., $A \neq \emptyset$ y $A \neq \mathbb{N}$), entonces A no es computable
- Un **conjunto de índices** de programas es un conjunto

$$C = \{x : \Phi_x^{(1)} \in \mathcal{C}\}$$

para alguna clase $\mathcal{C}$ de funciones $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ parciales computables

Teorema de Rice

- Si A es un conjunto de índices no trivial (i.e., $A \neq \emptyset$ y $A \neq \mathbb{N}$), entonces A no es computable
- Un **conjunto de índices** de programas es un conjunto

$$C = \{x : \Phi_x^{(1)} \in \mathcal{C}\}$$

  para alguna clase $\mathcal{C}$ de funciones $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ parciales computables
- Un conjunto C es un conjunto de índices si y solo si para todo par de programas P y Q tales que $\Psi_P^{(1)} = \Psi_Q^{(1)}$ y $\#(P) \in C$, se cumple que $\#(Q) \in C$ (Ejercicio 9, práctica 3)

Temario

Conjuntos Computables

1. ¿A qué conjunto corresponde la siguiente función característica?

$$B(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(x) \downarrow \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Conjuntos Computables

1. ¿A qué conjunto corresponde la siguiente función característica?

$$B(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(x) \downarrow \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Corresponde al conjunto K.

Conjuntos Computables

1. ¿A qué conjunto corresponde la siguiente función característica?

$$B(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(x) \downarrow \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

    - Corresponde al conjunto K.

2. ¿Es K un conjunto computable?

Conjuntos Computables

1. ¿A qué conjunto corresponde la siguiente función característica?

$$B(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(x) \downarrow \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

    - Corresponde al conjunto K.

2. ¿Es K un conjunto computable?
    - No, porque su función característica no lo es

Conjuntos Computables

1. ¿A qué conjunto corresponde la siguiente función característica?

$$B(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(x) \downarrow \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

    - Corresponde al conjunto K.

2. ¿Es K un conjunto computable?
    - No, porque su función característica no lo es

3. Si A es un conjunto **finito**, ¿entonces es computable?

Conjuntos Computables

1. ¿A qué conjunto corresponde la siguiente función característica?

$$B(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(x) \downarrow \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   - Corresponde al conjunto K.

2. ¿Es K un conjunto computable?
   - No, porque su función característica no lo es

3. Si A es un conjunto **finito**, ¿entonces es computable?
   - Sí. Más aún, es primitivo recursivo.
     Sea $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, la función característica de A es

$$A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = a_1 \\ 1 & \text{si } x = a_2 \\ \ldots & \\ 1 & \text{si } x = a_n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Conjuntos Computables

4. ¿Es $K \cap \{1, 2, 3, 4\}$ un conjunto computable?

Conjuntos Computables

4. ¿Es $K \cap \{1, 2, 3, 4\}$ un conjunto computable?
   - Sí, porque es finito

Conjuntos Computables

4. ¿Es $K \cap \{1, 2, 3, 4\}$ un conjunto computable?
   - Sí, porque es finito
5. ¿Es verdad que un conjunto A es computable si y solo si su **complemento** $\overline{A}$ es computable?

Conjuntos Computables

4. ¿Es $K \cap \{1, 2, 3, 4\}$ un conjunto computable?
    - Sí, porque es finito
5. ¿Es verdad que un conjunto A es computable si y solo si su **complemento** $\overline{A}$ es computable?
    - Sí. A computable implica $\overline{A}$ computable y $\overline{A}$ computable implica $\overline{\overline{A}} = A$ computable

Conjuntos Computables

4. ¿Es $K \cap \{1,2,3,4\}$ un conjunto computable?
   - Sí, porque es finito
5. ¿Es verdad que un conjunto A es computable si y solo si su **complemento** $\overline{A}$ es computable?
   - Sí. A computable implica $\overline{A}$ computable y $\overline{A}$ computable implica $\overline{\overline{A}} = A$ computable
6. ¿Es $C = \{x : \Phi_x^{(1)}(x) \uparrow\}$ un conjunto computable? ¿Es primitivo recursivo?

Conjuntos Computables

4. ¿Es $K \cap \{1, 2, 3, 4\}$ un conjunto computable?
    - Sí, porque es finito
5. ¿Es verdad que un conjunto A es computable si y solo si su **complemento** $\overline{A}$ es computable?
    - Sí. A computable implica $\overline{A}$ computable y $\overline{A}$ computable implica $\overline{\overline{A}} = A$ computable
6. ¿Es $C = \{x : \Phi_x^{(1)}(x) \uparrow\}$ un conjunto computable? ¿Es primitivo recursivo?
    - No es computable, porque de serlo, su complemento (K) también sería computable
      No es primitivo recursivo, porque de serlo, sería también computable

Conjuntos Computables

7. Si $A \cup B$ (o $A \cap B$) es computable, ¿entonces A y B son computables?

Conjuntos Computables

7. Si $A \cup B$ (o $A \cap B$) es computable, ¿entonces A y B son computables?
   - **¡No!**. $\mathbb{N}$ es computable y $\mathbb{N} = A \cup \overline{A}$ para cualquier A, con lo cual, todos los conjuntos serían computables. De la misma manera, $\emptyset$ es computable y $\emptyset = A \cap \overline{A}$.

Teorema de Rice

Teorema de Rice

1. ¿Es $\{x : \Phi_x^{(1)} \text{ es una función constante}\}$ computable?

Teorema de Rice

1. ¿Es $\{x : \Phi_x^{(1)}$ es una función constante$\}$ computable?
   - No, es un conjunto de índices **no trivial**: el de la clase de las funciones constantes.

Teorema de Rice

1. ¿Es $\{x : \Phi_x^{(1)}$ es una función constante$\}$ computable?
   - No, es un conjunto de índices **no trivial**: el de la clase de las funciones constantes.
2. ¿Es $\{x : \Phi_x^{(1)}$ es una función total$\}$ computable?

Teorema de Rice

1. ¿Es $\{x : \Phi_x^{(1)}$ es una función constante$\}$ computable?
   - No, es un conjunto de índices **no trivial**: el de la clase de las funciones constantes.
2. ¿Es $\{x : \Phi_x^{(1)}$ es una función total$\}$ computable?
   - No, es un conjunto de índices **no trivial**: el de la clase de las funciones totales.

Teorema de Rice

1. ¿Es $\{x : \Phi_x^{(1)}$ es una función constante$\}$ computable?
    - No, es un conjunto de índices **no trivial**: el de la clase de las funciones constantes.
2. ¿Es $\{x : \Phi_x^{(1)}$ es una función total$\}$ computable?
    - No, es un conjunto de índices **no trivial**: el de la clase de las funciones totales.
3. ¿Es $\{x : \Phi_x^{(1)}$ es una función parcial computable$\}$ computable?

Teorema de Rice

1. ¿Es $\{x : \Phi_x^{(1)}$ es una función constante$\}$ computable?
   - No, es un conjunto de índices **no trivial**: el de la clase de las funciones constantes.
2. ¿Es $\{x : \Phi_x^{(1)}$ es una función total$\}$ computable?
   - No, es un conjunto de índices **no trivial**: el de la clase de las funciones totales.
3. ¿Es $\{x : \Phi_x^{(1)}$ es una función parcial computable$\}$ computable?
   - Sí, es el conjunto $\mathbb{N}$, y su característica es la función constante 1.

Teorema de Rice

1. ¿Es $\{x : \Phi_x^{(1)}$ es una función constante$\}$ computable?
   - No, es un conjunto de índices **no trivial**: el de la clase de las funciones constantes.
2. ¿Es $\{x : \Phi_x^{(1)}$ es una función total$\}$ computable?
   - No, es un conjunto de índices **no trivial**: el de la clase de las funciones totales.
3. ¿Es $\{x : \Phi_x^{(1)}$ es una función parcial computable$\}$ computable?
   - Sí, es el conjunto $\mathbb{N}$, y su característica es la función constante 1.
4. ¿Es $\{x : \Phi_x^{(1)}$ es una función estrictamente creciente$\}$ computable?

Teorema de Rice

1. ¿Es $\{x : \Phi_x^{(1)}$ es una función constante$\}$ computable?
   - No, es un conjunto de índices **no trivial**: el de la clase de las funciones constantes.
2. ¿Es $\{x : \Phi_x^{(1)}$ es una función total$\}$ computable?
   - No, es un conjunto de índices **no trivial**: el de la clase de las funciones totales.
3. ¿Es $\{x : \Phi_x^{(1)}$ es una función parcial computable$\}$ computable?
   - Sí, es el conjunto $\mathbb{N}$, y su característica es la función constante 1.
4. ¿Es $\{x : \Phi_x^{(1)}$ es una función estrictamente creciente$\}$ computable?
   - No, es un conjunto de índices **no trivial**: el de la clase de las funciones estrictamente crecientes.

Teorema de Rice

1. ¿Es $\{x : \Phi_x^{(1)}$ es una función constante$\}$ computable?
   - No, es un conjunto de índices **no trivial**: el de la clase de las funciones constantes.
2. ¿Es $\{x : \Phi_x^{(1)}$ es una función total$\}$ computable?
   - No, es un conjunto de índices **no trivial**: el de la clase de las funciones totales.
3. ¿Es $\{x : \Phi_x^{(1)}$ es una función parcial computable$\}$ computable?
   - Sí, es el conjunto $\mathbb{N}$, y su característica es la función constante 1.
4. ¿Es $\{x : \Phi_x^{(1)}$ es una función estrictamente creciente$\}$ computable?
   - No, es un conjunto de índices **no trivial**: el de la clase de las funciones estrictamente crecientes.
5. ¿Es $\{x : \Phi_x^{(1)}$ es una función primitiva recursiva$\}$ computable?

Teorema de Rice

1. ¿Es $\{x : \Phi_x^{(1)}$ es una función constante$\}$ computable?
   - No, es un conjunto de índices **no trivial**: el de la clase de las funciones constantes.
2. ¿Es $\{x : \Phi_x^{(1)}$ es una función total$\}$ computable?
   - No, es un conjunto de índices **no trivial**: el de la clase de las funciones totales.
3. ¿Es $\{x : \Phi_x^{(1)}$ es una función parcial computable$\}$ computable?
   - Sí, es el conjunto $\mathbb{N}$, y su característica es la función constante 1.
4. ¿Es $\{x : \Phi_x^{(1)}$ es una función estrictamente creciente$\}$ computable?
   - No, es un conjunto de índices **no trivial**: el de la clase de las funciones estrictamente crecientes.
5. ¿Es $\{x : \Phi_x^{(1)}$ es una función primitiva recursiva$\}$ computable?
   - No, es un conjunto de índices **no trivial**: el de la clase de las funciones primitivas recursivas.

Teorema de Rice

1. ¿Es $\{x : \Phi_x^{(1)}$ es una función constante$\}$ computable?
   - No, es un conjunto de índices **no trivial**: el de la clase de las funciones constantes.
2. ¿Es $\{x : \Phi_x^{(1)}$ es una función total$\}$ computable?
   - No, es un conjunto de índices **no trivial**: el de la clase de las funciones totales.
3. ¿Es $\{x : \Phi_x^{(1)}$ es una función parcial computable$\}$ computable?
   - Sí, es el conjunto $\mathbb{N}$, y su característica es la función constante 1.
4. ¿Es $\{x : \Phi_x^{(1)}$ es una función estrictamente creciente$\}$ computable?
   - No, es un conjunto de índices **no trivial**: el de la clase de las funciones estrictamente crecientes.
5. ¿Es $\{x : \Phi_x^{(1)}$ es una función primitiva recursiva$\}$ computable?
   - No, es un conjunto de índices **no trivial**: el de la clase de las funciones primitivas recursivas.

Importante: Hay que demostrar que el conjunto no es trivial

Teorema de Rice

6. ¿Es computable el conjunto
   $A = \{x : \Phi_x^{(1)}(y)$ es par siempre que y es par$\}$?

Teorema de Rice

6. ¿Es computable el conjunto
   $A = \{x : \Phi_x^{(1)}(y)$ es par siempre que y es par$\}$?
   - No, es un conjunto de índices no trivial: son los índices de las funciones que en los números pares devuelven un resultado par, y, además, no es trivial. Por ejemplo, la función identidad pertenece a A, con lo cual no es $\varnothing$, y la función constante 17 no pertenece a A, con lo cual no es $\mathbb{N}$.

Teorema de Rice

6. ¿Es computable el conjunto $A = \{x : \Phi_x^{(1)}(y)$ es par siempre que y es par$\}$?
   - No, es un conjunto de índices no trivial: son los índices de las funciones que en los números pares devuelven un resultado par, y, además, no es trivial. Por ejemplo, la función identidad pertenece a A, con lo cual no es $\emptyset$, y la función constante 17 no pertenece a A, con lo cual no es $\mathbb{N}$.
7. ¿Es computable el conjunto $B = \{x :$ el programa número x termina sii recibe como entrada un número par$\}$

Teorema de Rice

6. ¿Es computable el conjunto
   $A = \{x : \Phi_x^{(1)}(y) \text{ es par siempre que } y \text{ es par}\}$?
   - No, es un conjunto de índices no trivial: son los índices de las funciones que en los números pares devuelven un resultado par, y, además, no es trivial. Por ejemplo, la función identidad pertenece a A, con lo cual no es $\emptyset$, y la función constante 17 no pertenece a A, con lo cual no es $\mathbb{N}$.
7. ¿Es computable el conjunto $B = \{x :$
   el programa número x termina sii recibe como entrada un número par$\}$
   - No, es un conjunto de índices no trivial: son los índices de las funciones parciales computables cuyo dominio son exactamente los números pares. (No olvidar justificar que no es trivial, queda de tarea.)

Teorema de Rice

5. ¿Es computable el conjunto
   $C = \{x : \text{el programa número } x \text{ tiene a lo sumo 5 instrucciones}\}$?

Teorema de Rice

5. ¿Es computable el conjunto
   $C = \{x : \text{el programa número } x \text{ tiene a lo sumo 5 instrucciones}\}$?
   - Sí, de hecho, es primitivo recursivo con $C(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x+1| \leqslant 5 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$

     ¡¿Pero no es un conjunto de índices?!
     No, no lo es, porque dada una función, hay programas que la computan con una cantidad de instrucciones tan grande como se quiera, y, por lo tanto, dada cualquier clase de funciones, no todos los números de los programas que computen alguna de sus funciones estarán en el conjunto.

Teorema de Rice

6. ¿Es computable el conjunto $D = \{x : \Phi_x^{(1)}(y) = x \text{ para todo } y\}$?

Teorema de Rice

6. ¿Es computable el conjunto $D = \{x : \Phi_x^{(1)}(y) = x \text{ para todo } y\}$?
    - No, ya sabemos que no lo es por los primeros ejercicios de la Práctica 3. Entonces, ¿D es un conjunto de índices? **No**, porque la propiedad expresada depende del programa que estemos considerando para computar una función dada.
      Notar que, para cualquier función parcial computable, existen infinitos programas que la computan. Si tomamos $e_1 \neq e_2$ tales que $\Phi_{e_1}^{(1)} = \Phi_{e_2}^{(1)}$ y $e_1 \in D$, entonces claramente $e_2 \notin D$.

Teorema de Rice

6. ¿Es computable el conjunto $D = \{x : \Phi_x^{(1)}(y) = x \text{ para todo } y\}$?
   - No, ya sabemos que no lo es por los primeros ejercicios de la Práctica 3. Entonces, ¿D es un conjunto de índices? **No**, porque la propiedad expresada depende del programa que estemos considerando para computar una función dada.
     Notar que, para cualquier función parcial computable, existen infinitos programas que la computan. Si tomamos $e_1 \neq e_2$ tales que $\Phi_{e_1}^{(1)} = \Phi_{e_2}^{(1)}$ y $e_1 \in D$, entonces claramente $e_2 \notin D$.

Ojo: No todos los conjuntos que se definen como $\{p : p \text{ es el número de un programa que} \ldots\}$ o $\{x : \Phi_x \ldots\}$ son de índices

Teorema de Rice

6. ¿Es computable el conjunto $D = \{x : \Phi_x^{(1)}(y) = x \text{ para todo } y\}$?
   - No, ya sabemos que no lo es por los primeros ejercicios de la Práctica 3. Entonces, ¿D es un conjunto de índices? **No**, porque la propiedad expresada depende del programa que estemos considerando para computar una función dada.
     Notar que, para cualquier función parcial computable, existen infinitos programas que la computan. Si tomamos $e_1 \neq e_2$ tales que $\Phi_{e_1}^{(1)} = \Phi_{e_2}^{(1)}$ y $e_1 \in D$, entonces claramente $e_2 \notin D$.

Ojo: No todos los conjuntos que se definen como $\{p : p \text{ es el número de un programa que} \ldots\}$ o $\{x : \Phi_x \ldots\}$ son de índices

Igualmente, eso NO implica que sean computables (e.g.,K)

Temario

¿Son conjuntos computables? - I

$$A = \{x : \Phi_x^{(1)}(5) = f(10)\}$$

donde $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una función computable (total) fija

- $f(10)$ es un número fijo.

¿Son conjuntos computables? - I

$$A = \{x : \Phi_x^{(1)}(5) = f(10)\}$$

donde $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una función computable (total) fija

- $f(10)$ es un número fijo.
- Nos permite escribir a A como un conjunto de índices, la clase de funciones:

$$\mathcal{C}_A = \{g : g(5) = f(10)\}$$

¿Son conjuntos computables? - I

$$A = \{x : \Phi_x^{(1)}(5) = f(10)\}$$

donde $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una función computable (total) fija

- $f(10)$ es un número fijo.
- Nos permite escribir a A como un conjunto de índices, la clase de funciones:

$$\mathcal{C}_A = \{g : g(5) = f(10)\}$$

- ¿Es trivial?

¿Son conjuntos computables? - I

$$A = \{x : \Phi_x^{(1)}(5) = f(10)\}$$

donde $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una función computable (total) fija

- $f(10)$ es un número fijo.
- Nos permite escribir a A como un conjunto de índices, la clase de funciones:

$$\mathcal{C}_A = \{g : g(5) = f(10)\}$$

- ¿Es trivial?
  - $A \neq \emptyset$, xq podemos hacer un P_A que compute función que esté en $\mathcal{C}_A$

$$Y \leftarrow f(10)$$

entonces $\Psi_{P_A}^{(1)}(5) = f(10)$, y por lo tanto $\#(P_A) \in A$

¿Son conjuntos computables? - I

$$A = \{x : \Phi_x^{(1)}(5) = f(10)\}$$

donde $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una función computable (total) fija

- $f(10)$ es un número fijo.
- Nos permite escribir a A como un conjunto de índices, la clase de funciones:

$$\mathcal{C}_A = \{g : g(5) = f(10)\}$$

- ¿Es trivial?
  - $A \neq \varnothing$, xq podemos hacer un P_A que compute función que esté en $\mathcal{C}_A$

    $$Y \leftarrow f(10)$$

    entonces $\Psi_{P_A}^{(1)}(5) = f(10)$, y por lo tanto $\#(P_A) \in A$
  - $A \neq \mathbb{N}$, xq existen programas como Q_A que computan funciones que no están en $\mathcal{C}_A$

    $$Y \leftarrow f(10) + 1$$

    entonces $\Psi_{Q_A}^{(1)}(5) = f(10) + 1 \neq f(10)$, y por lo tanto $\#(Q_A) \notin A$

¿Son conjuntos computables? - I

$$A = \{x : \Phi_x^{(1)}(5) = f(10)\}$$

donde $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una función computable (total) fija

- $f(10)$ es un número fijo.
- Nos permite escribir a A como un conjunto de índices, la clase de funciones:

$$\mathcal{C}_A = \{g : g(5) = f(10)\}$$

- ¿Es trivial?
  - $A \neq \emptyset$, xq podemos hacer un P_A que compute función que esté en $\mathcal{C}_A$

    $$Y \leftarrow f(10)$$

    entonces $\Psi_{P_A}^{(1)}(5) = f(10)$, y por lo tanto $\#(P_A) \in A$
  - $A \neq \mathbb{N}$, xq existen programas como Q_A que computan funciones que no están en $\mathcal{C}_A$

    $$Y \leftarrow f(10) + 1$$

    entonces $\Psi_{Q_A}^{(1)}(5) = f(10) + 1 \neq f(10)$, y por lo tanto $\#(Q_A) \notin A$
- Por lo tanto, por T. de Rice, A no es computable

¿Son conjuntos computables? - II

$$B = \{x : \Phi_x^{(1)}(y) = 0 \text{ para infinitos } y \in \mathbb{N}\}$$

¿Son conjuntos computables? - II

$$B = \{x : \Phi_x^{(1)}(y) = 0 \text{ para infinitos } y \in \mathbb{N}\}$$

- B es un conjunto de índices, el de la clase de funciones

$$\mathcal{C}_B = \{g : g(x) = 0 \text{ para infinitos } x \in \mathbb{N}\}$$

¿Son conjuntos computables? - II

$$B = \{x : \Phi_x^{(1)}(y) = 0 \text{ para infinitos } y \in \mathbb{N}\}$$

- B es un conjunto de índices, el de la clase de funciones

$$\mathcal{C}_B = \{g : g(x) = 0 \text{ para infinitos } x \in \mathbb{N}\}$$

- ¿Es trivial?

¿Son conjuntos computables? - II

$$B = \{x : \Phi_x^{(1)}(y) = 0 \text{ para infinitos } y \in \mathbb{N}\}$$

- B es un conjunto de índices, el de la clase de funciones

$$\mathcal{C}_B = \{g : g(x) = 0 \text{ para infinitos } x \in \mathbb{N}\}$$

- ¿Es trivial?
  - $B \neq \emptyset$, xq existe programa P_A que devuelven 0 en infinitos valores (e.g., el que computa la func. 0 ,entonces $\#(P_B) \in B$

¿Son conjuntos computables? - II

$$B = \{x : \Phi_x^{(1)}(y) = 0 \text{ para infinitos } y \in \mathbb{N}\}$$

- B es un conjunto de índices, el de la clase de funciones

$$\mathcal{C}_B = \{g : g(x) = 0 \text{ para infinitos } x \in \mathbb{N}\}$$

- ¿Es trivial?
  - $B \neq \varnothing$, xq existe programa P_A que devuelven 0 en infinitos valores (e.g., el que computa la func. 0 ,entonces $\#(P_B) \in B$
  - $B \neq \mathbb{N}$, xq existe programa Q_B que computan funciones que devuelven 0 en a lo sumo finitos valores (e.g., si computa la func constante 1), entonces $\#(Q_B) \notin B$

¿Son conjuntos computables? - II

$$B = \{x : \Phi_x^{(1)}(y) = 0 \text{ para infinitos } y \in \mathbb{N}\}$$

- B es un conjunto de índices, el de la clase de funciones

$$\mathcal{C}_B = \{g : g(x) = 0 \text{ para infinitos } x \in \mathbb{N}\}$$

- ¿Es trivial?
  - $B \neq \emptyset$, xq existe programa P_A que devuelven 0 en infinitos valores (e.g., el que computa la func. 0 ,entonces $\#(P_B) \in B$
  - $B \neq \mathbb{N}$, xq existe programa Q_B que computan funciones que devuelven 0 en a lo sumo finitos valores (e.g., si computa la func constante 1), entonces $\#(Q_B) \notin B$
- Así, por T. de Rice, B no es computable

¿Son conjuntos computables? - III

$C = \{x :$ el programa con número x tiene la instrucción $Y \leftarrow Y + 1$ en algún lugar de su código$\}$

¿Son conjuntos computables? - III

$C = \{x$: el programa con número x tiene la instrucción $Y \leftarrow Y + 1$ en algún lugar de su código$\}$

- ¿Es trivial? No

¿Son conjuntos computables? - III

$C = \{x :$ el programa con número x tiene la instrucción $Y \leftarrow Y + 1$ en algún lugar de su código$\}$

- ¿Es trivial? No
- Pero C no solo es computable, sino p.r.

¿Son conjuntos computables? - III

$C = \{x :$ el programa con número x tiene la instrucción $Y \leftarrow Y + 1$ en algún lugar de su código$\}$

- ¿Es trivial? No
- Pero C no solo es computable, sino p.r.
- ¿Qué falló? C no es un conjunto de índices

¿Son conjuntos computables? - III

$C = \{x :$ el programa con número x tiene la instrucción $Y \leftarrow Y + 1$ en algún lugar de su código$\}$

- ¿Es trivial? No
- Pero C no solo es computable, sino p.r.
- ¿Qué falló? C no es un conjunto de índices
- La propiedad que caracteriza a C se refiere a programas y no a funciones

¿Son conjuntos computables? - III

$C = \{x :$ el programa con número x tiene la instrucción $Y \leftarrow Y + 1$ en algún lugar de su código$\}$

- ¿Es trivial? No
- Pero C no solo es computable, sino p.r.
- ¿Qué falló? C no es un conjunto de índices
- La propiedad que caracteriza a C se refiere a programas y no a funciones
- Los siguientes programas computan la misma función 0:

$$P_C : \quad \begin{array}{l} Y \leftarrow Y + 1 \\ Y \leftarrow Y \dot{-} 1 \end{array} \qquad\qquad Q_C : \quad \textit{[el programa vacío]}$$

¿Son conjuntos computables? - III

$C = \{x :$ el programa con número x tiene la instrucción $Y \leftarrow Y + 1$ en algún lugar de su código$\}$

- ¿Es trivial? No
- Pero C no solo es computable, sino p.r.
- ¿Qué falló? C no es un conjunto de índices
- La propiedad que caracteriza a C se refiere a programas y no a funciones
- Los siguientes programas computan la misma función 0:

$$P_C: \quad \begin{array}{l} Y \leftarrow Y + 1 \\ Y \leftarrow Y \dot{-} 1 \end{array} \qquad\qquad Q_C: \quad \textit{[el programa vacío]}$$

- Sin embargo, $\#(P_C) \in C$, mientras que $\#(Q_C) \notin C$

Temario

Demostrar que no son computables - I

$$g_1(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(y) \text{ está definido y es par} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demostrar que no son computables - I

$$g_1(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(y) \text{ está definido y es par} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Queremos reducir la f_C de algún conjunto de índices no trivial a g_1

Demostrar que no son computables - I

$$g_1(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(y) \text{ está definido y es par} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Queremos reducir la f_C de algún conjunto de índices no trivial a g_1
- Podríamos fijar cualquiera de las dos variables

Demostrar que no son computables - I

$$g_1(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(y) \text{ está definido y es par} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Queremos reducir la f_C de algún conjunto de índices no trivial a g_1
- Podríamos fijar cualquiera de las dos variables
- Vamos a fijar y

Demostrar que no son computables - I

$$g_1(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(y) \text{ está definido y es par} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Queremos reducir la f_C de algún conjunto de índices no trivial a g_1
- Podríamos fijar cualquiera de las dos variables
- Vamos a fijar y
- Si g_1 fuera computable, también lo sería

$$f_1(x) = g_1(x,42) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(42) \text{ está definido y es par} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demostrar que no son computables - I

$$g_1(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(y) \text{ está definido y es par} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Queremos reducir la f_C de algún conjunto de índices no trivial a g_1
- Podríamos fijar cualquiera de las dos variables
- Vamos a fijar y
- Si g_1 fuera computable, también lo sería

$$f_1(x) = g_1(x, 42) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(42) \text{ está definido y es par} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- f_1 es la f. carac de

$$A_1 = \{x : \Phi_x^{(1)}(42) \text{ está definido y es par}\}$$

que es un conjunto de índices, el correspondiente a la clase de funciones

$$\mathcal{C}_{A_1} = \{g : g(42) \text{ está definido y es par}\}$$

Demostrar que no son computables - I

$$A_1 = \{x : \Phi_x^{(1)}(42) \text{ está definido y es par}\}$$

- A_1 no es trivial

Demostrar que no son computables - I

$$A_1 = \{x : \Phi_x^{(1)}(42) \text{ está definido y es par}\}$$

- A_1 no es trivial
- $A_1 \neq \emptyset$, xq la $f = 0$ está en él

Demostrar que no son computables - I

$$A_1 = \{x : \Phi_x^{(1)}(42) \text{ está definido y es par}\}$$

- A_1 no es trivial
- $A_1 \neq \emptyset$, xq la $f = 0$ está en él
- $A_1 \neq \mathbb{N}$, xq el número de cualquier programa que se indefina no está en A_1

Demostrar que no son computables - I

$$A_1 = \{x : \Phi_x^{(1)}(42) \text{ está definido y es par}\}$$

- A_1 no es trivial
- $A_1 \neq \emptyset$, xq la $f = 0$ está en él
- $A_1 \neq \mathbb{N}$, xq el número de cualquier programa que se indefina no está en A_1
- Por T. de Rice, f_1 no computable, por lo que g_1 tampoco lo es

Demostrar que no son computables - II

$$g_2(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)} \text{ y } \Phi_y^{(1)} \text{ computan la misma función} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demostrar que no son computables - II

$$g_2(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)} \text{ y } \Phi_y^{(1)} \text{ computan la misma función} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Fijamos y en el número de algún programa P, tq $\#P = e$

$$g_e(x) = g_2(x, e) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)} \text{ computa la función } \Psi_P^{(1)} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demostrar que no son computables - II

$$g_2(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)} \text{ y } \Phi_y^{(1)} \text{ computan la misma función} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Fijamos y en el número de algún programa P, tq $\#P = e$

$$g_e(x) = g_2(x,e) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)} \text{ computa la función } \Psi_P^{(1)} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Si g_2 fuera computable, g_e sería computable

Demostrar que no son computables - II

$$g_2(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)} \text{ y } \Phi_y^{(1)} \text{ computan la misma función} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Fijamos y en el número de algún programa P, tq $\#P = e$

$$g_e(x) = g_2(x, e) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)} \text{ computa la función } \Psi_P^{(1)} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Si g_2 fuera computable, g_e sería computable
- g_e es la función característica del conjunto

$$A_2 = \{x : \Phi_x^{(1)} \text{computa la función } \Psi_P^{(1)}\} = \{x : \Phi_x^{(1)} \in \mathcal{P}\}$$

Demostrar que no son computables - II

$$g_2(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)} \text{ y } \Phi_y^{(1)} \text{ computan la misma función} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Fijamos y en el número de algún programa P, tq $\#P = e$

$$g_e(x) = g_2(x,e) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)} \text{ computa la función } \Psi_P^{(1)} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Si g_2 fuera computable, g_e sería computable
- g_e es la función característica del conjunto

$$A_2 = \{x : \Phi_x^{(1)} \text{computa la función } \Psi_P^{(1)}\} = \{x : \Phi_x^{(1)} \in \mathcal{P}\}$$

- Con $\mathcal{P} = \{\Psi_P^{(1)}\}$ la clase de funciones que sólo contiene $\Psi_P^{(1)}$

Demostrar que no son computables - II

$$g_2(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)} \text{ y } \Phi_y^{(1)} \text{ computan la misma función} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Fijamos y en el número de algún programa P, tq $\#P = e$

$$g_e(x) = g_2(x, e) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)} \text{ computa la función } \Psi_P^{(1)} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Si g_2 fuera computable, g_e sería computable
- g_e es la función característica del conjunto

$$A_2 = \{x : \Phi_x^{(1)} \text{computa la función } \Psi_P^{(1)}\} = \{x : \Phi_x^{(1)} \in \mathcal{P}\}$$

- Con $\mathcal{P} = \{\Psi_P^{(1)}\}$ la clase de funciones que sólo contiene $\Psi_P^{(1)}$
- Así, su conjunto de índices no es trivial

Demostrar que no son computables - II

$$g_2(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)} \text{ y } \Phi_y^{(1)} \text{ computan la misma función} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Fijamos y en el número de algún programa P, tq $\#P = e$

$$g_e(x) = g_2(x,e) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)} \text{ computa la función } \Psi_P^{(1)} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Si g_2 fuera computable, g_e sería computable
- g_e es la función característica del conjunto

$$A_2 = \{x : \Phi_x^{(1)} \text{computa la función } \Psi_P^{(1)}\} = \{x : \Phi_x^{(1)} \in \mathcal{P}\}$$

- Con $\mathcal{P} = \{\Psi_P^{(1)}\}$ la clase de funciones que sólo contiene $\Psi_P^{(1)}$
- Así, su conjunto de índices no es trivial
- Por T. de Rice, no es computable, por lo q g_e no es computable

Demostrar que no son computables - III

$$g_3(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(y) = 25 \text{ y } \Phi_y^{(1)}(x) = x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

QUEDA DE TAREA

Conjuntos Computables y T. de Rice
Lógica y Computabilidad

Christian G. Cossio-Mercado

Departamento de Computación,
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales,
Universidad de Buenos Aires

9 de octubre de 2020