Lógica Proposicional

Sistemas deductivos y compacidad

Lógica y Computabilidad

Departamento de Computación - FCEyN - UBA

Segundo Cuatrimestre de 2020

Contenido

Sistema deductivo - Repaso

El **sistema deductivo SP** consta de:

- Tres *axiomas*:

  SP1: $\alpha \to (\beta \to \alpha)$

  SP2: $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$

  SP3: $(\neg\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \alpha)$

- Una *regla de inferencia*:

  MP: La fórmula β es consecuencia inmediata de las fórmulas $(\alpha \to \beta)$ y α.

Sistema deductivo - Repaso

Si α una fórmula, entonces:

Definición

- *Una* **demostración** *para* α *es una cadena finita de fórmulas* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, *donde* $\alpha_n = \alpha$ *y cada* α_i *es*
  - *un axioma, o*
  - *consecuencia inmediata de fórmulas anteriores.*
- α *es un* **teorema** *(*$\vdash \alpha$*) si tiene demostración.*
- **Teorema:** *El sistema* SP *es* **consistente***: no existe ninguna fórmula* γ *tal que* $\vdash \gamma$ *y* $\vdash \neg\gamma$*.*

Sistema deductivo - Repaso

Si α, β son fórmulas y Γ es un conjunto de fórmulas, entonces:

Definición

- *Una* **derivación** *de α a partir de Γ es una cadena finita de fórmulas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, donde $\alpha_n = \alpha$ y cada α_i es*
  - *un axioma, o*
  - *una fórmula de Γ, o*
  - *consecuencia inmediata de fórmulas anteriores.*
- *α es* **consecuencia sintáctica** *de Γ ($\Gamma \vdash \alpha$) si tiene una derivación a partir de Γ.*

Sistema deductivo - Repaso

Si α, β son fórmulas y Γ es un conjunto de fórmulas, entonces:

Definición

- Γ *es* **consistente** *si no existe ninguna fórmula* δ *tal que* $\Gamma \vdash \delta$ *y* $\Gamma \vdash \neg\delta$.
- **Teorema de la deducción:** *Si* $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$, *entonces* $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$.
- **Proposición 1:**
  - $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ *es inconsistente si y solo si* $\Gamma \vdash \alpha$.
  - $\Gamma \cup \{\alpha\}$ *es inconsistente si y solo si* $\Gamma \vdash \neg\alpha$.

Ejercicio 1

Demostrar o refutar las siguientes afirmaciones:

- $\{\neg\alpha\} \vdash (\alpha \to \beta)$.

  La afirmación es **verdadera**.
  Damos explícitamente una derivación:

1.	$\neg\alpha$	$[\neg\alpha \in \{\neg\alpha\}]$
2.	$\neg\alpha \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$	[SP1]
3.	$\neg\beta \to \neg\alpha$	[MP 1 y 2]
4.	$(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)$	[SP3]
5.	$\alpha \to \beta$	[MP 3 y 4]

$\square$

Ejercicio 1

- Si $\Gamma \vdash \alpha$ y $\Gamma \vdash \beta$, entonces $\Gamma \vdash (\alpha \wedge \beta)$.

  La afirmación es **verdadera**.
  Recordemos que $\alpha \wedge \beta$ es equivalente a escribir $\neg(\alpha \to \neg\beta)$.
  Veamos que $\Gamma \vdash \neg(\alpha \to \neg\beta)$:
  $\Gamma \vdash \neg(\alpha \to \neg\beta)$ si y solo si $\Gamma' := \Gamma \cup \{\alpha \to \neg\beta\}$ es inconsistente (proposición 1).
  Entonces, el ejercicio se reduce a buscar una fórmula δ tal que $\Gamma' \vdash \delta$ y $\Gamma' \vdash \neg\delta$.

Ejercicio 1

Sea $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ $(\alpha_n = \alpha)$ una derivación de α a partir de $\Gamma \subseteq \Gamma'$.
Como $(\alpha \to \neg\beta) \in \Gamma'$, podemos construir:

$$\begin{array}{rll}
1. & \alpha_1 & \\
 & \vdots & \\
n-1. & \alpha_{n-1} & \\
n. & \alpha & \\
n+1. & \alpha \to \neg\beta & [\alpha \to \neg\beta \in \Gamma'] \\
n+2. & \neg\beta & [\text{MP } n \text{ y } n+1]
\end{array}$$

Que es una derivación válida de $\neg\beta$ a partir de Γ'.
Luego $\Gamma' \vdash \beta$ y $\Gamma' \vdash \neg\beta$, por lo que Γ' es inconsistente, como queríamos probar. $\square$

Ejercicio 1

- Existen un conjunto consistente Γ y una fórmula α tales que $\vdash \alpha$ y $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ es consistente.

  La afirmación es **falsa**.
  Recordemos que, si α es un teorema, entonces es consecuencia sintáctica de cualquier conjunto.
  En particular, para cualquier conjunto Γ, vale $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \alpha$.
  Por otro lado, todas las fórmulas de un conjunto son consecuencias sintácticas del mismo, por lo que $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \neg\alpha$.
  Por lo tanto, $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ es inconsistente para cualquier conjunto de fórmulas Γ (sea o no consistente) y cualquier teorema α. $\square$

Conjuntos maximales consistentes

Definición

- *Un conjunto* Γ *es* **maximal consistente** *si:*
    - *es consistente, y*
    - *si* $\alpha \notin \Gamma$*, entonces* $\Gamma \cup \{\alpha\}$ *es inconsistente.*
- **Lema de Lindembaum:** *Si* Γ *es consistente, existe* Γ' *maximal consistente tal que* $\Gamma \subseteq \Gamma'$*.* *(Ej. 5, p. 5)*
- *Si* Γ *es maximal consistente, entonces:*
    - **Proposición 2:** $\alpha \in \Gamma$ *si y solo si* $\neg\alpha \notin \Gamma$*.* *(Ej. 4.b.1, p. 5)*
    - **Proposición 3:** $\Gamma \vdash \alpha$ *si y solo si* $\alpha \in \Gamma$*.* *(Ej. 4.a, p. 5)*

Ejercicio 2

Demostrar o refutar las siguientes afirmaciones.

- Una fórmula es un teorema si y solo si pertenece a todo conjunto maximal consistente.

  Verdadero.

  ($\Rightarrow$) $\Gamma \vdash \alpha$ pues α es un teorema. Como Γ es maximal consistente, $\Gamma \vdash \alpha$ si y solo si $\alpha \in \Gamma$ (proposición 3).

  ($\Leftarrow$) Consideremos una fórmula α que pertenezca a todo conjunto maximal consistente, y analicemos si se trata (necesariamente) de un teorema.
  Si Γ es un conjunto maximal consistente y $\alpha \in \Gamma$, seguro que $\neg\alpha \notin \Gamma$ (proposición 2).
  Por lo tanto, $\neg\alpha$ no pertenece a ningún conjunto maximal consistente.

Ejercicio 2

$(\Leftarrow)$ Sea Δ cualquier conjunto tal que $\neg\alpha \in \Delta$.
Si Δ fuera consistente, por el lema de Lindembaum, se podría extender a un conjunto maximal consistente, al cual pertenecería $\neg\alpha$.
Como esto no es posible, Δ debe ser inconsistente. En particular, el conjunto $\{\neg\alpha\}$ es inconsistente.
Tomando $\{\neg\alpha\} = \varnothing \cup \{\neg\alpha\}$, afirmamos que $\{\neg\alpha\}$ es inconsistente si y solo si $\varnothing \vdash \alpha$ (proposición 1).
Como las únicas consecuencias sintácticas del conjunto vacío son los teoremas, entonces α es necesariamente un teorema. $\square$

Ejercicio 2

Demostrar o refutar las siguientes afirmaciones.

- Si Γ_1 y Γ_2 son conjuntos inconsistentes, entonces $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ no es maximal consistente.

  Falso.
  Construiremos un contraejemplo partiendo de un conjunto maximal consistente, Δ.
  Tomamos $\alpha, \beta \in \Delta$ tales que $\alpha \neq \beta$. Definimos:
  - $\Gamma_1 = \Delta \cup \{\neg\alpha\}$. Como Δ es maximal consistente y $\alpha \in \Delta$, entonces $\neg\alpha \notin \Delta$. Entonces, Γ_1 es inconsistente.
  - $\Gamma_2 = \Delta \cup \{\neg\beta\}$. De manera análoga, Γ_2 es inconsistente.

  Ahora bien, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \big(\Delta \cup \{\neg\alpha\}\big) \cap \big(\Delta \cup \{\neg\beta\}\big) = \Delta$, que definimos maximal consistente. Entonces, Γ_1 y Γ_2 no cumplen la propiedad enunciada. $\square$

Ejercicio 2

Demostrar o refutar las siguientes afirmaciones.

- Si Γ es un conjunto consistente, y definimos

$$\Gamma' = \{\neg\alpha \to \beta : \alpha \in \Gamma, \beta \in \mathsf{FORM}\}$$

entonces existe un conjunto Δ maximal consistente tal que $\Gamma' \subseteq \Delta$.

Verdadero. Como todo subconjunto de un conjunto consistente también lo es, para que pueda existir tal Δ, Γ' debe ser consistente.
Podemos observar que todas las fórmulas de Γ' pueden derivarse a partir de Γ. Intuituvamente, Γ' debe ser consistente.
Intentemos demostrarlo por el absurdo.

Ejercicio 2

Supongamos que Γ' es inconsistente. Existe una fórmula δ tal que $\Gamma' \vdash \delta$ y $\Gamma' \vdash \neg\delta$.

Sea $\delta_1, \ldots, \delta_n = \delta$ una derivación de δ a partir de Γ'. A partir de ella, construiremos una derivación de δ a partir de Γ. Para cada δ_i:

- Si δ_i es un axioma de SP o se obtiene por MP a partir de fórmulas anteriores, podemos dejarlo como está.
- Si δ_i es una fórmula de Γ', es de la forma $(\neg\alpha \to \beta)$, con $\alpha \in \Gamma$. A partir del ejercicio 1 (a), $\{\alpha\} \vdash (\neg\alpha \to \beta)$, y como $\{\alpha\} \subseteq \Gamma$, vale que $\Gamma \vdash \delta_i$. Entonces, existe una derivación de δ_i $(\tilde{\delta}_1, \ldots, \tilde{\delta}_m = \delta_i)$ a partir de Γ.
  Si en la derivación original agregamos, antes de δ_i, las fórmulas $\tilde{\delta}_1, \ldots, \tilde{\delta}_{m-1}$, seguimos teniendo una derivación válida, pero habiendo reemplazado las fórmulas de Γ' por fórmulas de Γ.

Esto nos permite ver que $\Gamma \vdash \delta$.

Ejercicio 2

No obstante, se puede realizar un procedimiento análogo para construir una derivación de $\neg\delta$ a partir de Γ, y así concluir que $\Gamma \vdash \neg\delta$. Esto es absurdo, porque Γ era consistente. Por lo tanto, Γ' también es consistente.
Aplicando el lema de Lindembaum, concluimos que Γ' puede extenderse a un conjunto Δ maximal consistente, como queríamos ver. $\square$

Correctitud y completitud de SP

Sean α una fórmula y Γ un conjunto de fórmulas.

- **Teorema:** SP es **correcto**. Es decir, si $\Gamma \vdash \alpha$ entonces $\Gamma \models \alpha$.
- **Teorema:** SP es **completo**. Es decir, si $\Gamma \models \alpha$ entonces $\Gamma \vdash \alpha$.
- **Corolario:** Γ es satisfacible si y solo si Γ es consistente.

Ejercicio 3

Demostrar que $\Gamma \subseteq \mathrm{FORM}$ es un conjunto maximal consistente si y solo si, para alguna valuación v,

$$\Gamma = \{\alpha : v \vDash \alpha\}.$$

$(\Rightarrow)$ Γ es consistente. Por lo tanto, es satisfacible: existe una valuación v tal que $v \vDash \alpha$ para todo $\alpha \in \Gamma$. Para esta v, se cumple que

$$\Gamma \subseteq \{\alpha : v \vDash \alpha\}.$$

Veamos que $\Gamma \supseteq \{\alpha : v \vDash \alpha\}$:
Supongamos que existe una fórmula β tal que $\beta \in \{\alpha : v \vDash \alpha\}$, pero $\beta \notin \Gamma$. Por definición de conjunto maximal consistente, $\Gamma \cup \{\beta\}$ debe ser inconsistente.

Ejercicio 3

Pero a su vez

$$\Gamma \cup \{\beta\} \subseteq \{\alpha : v \vDash \alpha\},$$

que es satisfacible (por v), y por lo tanto también debe ser consistente.

Esto es **absurdo**, porque un conjunto consistente no puede tener un subconjunto inconsistente.

Entonces, todo $\beta \in \{\alpha : v \vDash \alpha\}$ cumple $\beta \in \Gamma$, y por lo tanto,

$$\Gamma = \{\alpha : v \vDash \alpha\}.$$

($\Leftarrow$) Sea v cualquier valuación. Consideremos $\Gamma = \{\alpha : v \vDash \alpha\}$ y veamos que es maximal consistente.
Para empezar, $v \vDash \Gamma$, así que debe ser también consistente.
Para que sea maximal consistente, debe pasar que para cualquier fórmula $\beta \notin \Gamma$, $\Gamma \cup \{\beta\}$ es inconsistente, o lo que es lo mismo, $\Gamma \vdash \neg\beta$ (proposición 1).
Veamos que esto es así. Si tomamos β tal que $\beta \notin \Gamma$, por definición de Γ, sabemos que $v \nvDash \beta$. Por lo tanto, $v \vDash \neg\beta$.
Esto quiere decir que $\neg\beta \in \Gamma$, y entonces, $\Gamma \vdash \neg\beta$. Concluimos entonces que Γ debe ser maximal consistente, como queríamos demostrar.

$\square$

Teorema de compacidad

Teorema

Si todo subconjunto finito $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ es satisfacible, entonces Γ es satisfacible.

Ejercicio 4

- Sean $\Gamma \subseteq \text{FORM}$ y $\beta \in \text{FORM}$ tales que para toda valuación v, existe un $\alpha \in \Gamma$ tal que $v \not\models \alpha \wedge \beta$. Demostrar que existe una cantidad finita de fórmulas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \Gamma$ tales que

$$(\beta \rightarrow \neg\alpha_1) \vee (\beta \rightarrow \neg\alpha_2) \vee \cdots \vee (\beta \rightarrow \neg\alpha_n)$$

es una tautología.

Usamos el teorema de compacidad para demostrar la existencia de algún subconjunto *finito* dentro de otro conjunto. Para estas ocasiones, viene bien tener presente su formulación contrarrecíproca:

Si un conjunto Δ es insatisfacible, existe algún subconjunto finito $\Delta_0 \subseteq \Delta$ insatisfacible.

Ejercicio 4

Para poder usar el teorema debemos tener un conjunto insatisfacible. Definimos, entonces,

$$\Delta := \{\alpha \wedge \beta : \alpha \in \Gamma\},$$

insatisfacible.

Aplicando ahora el teorema de compacidad, sabemos que existe un subconjunto finito e insatisfacible $\Delta_0 \subseteq \Delta$, de la forma

$$\Delta_0 = \{(\alpha_1 \wedge \beta), (\alpha_2 \wedge \beta), \ldots, (\alpha_n \wedge \beta)\}$$

y es falso que todas sus fórmulas sean verdaderas al mismo tiempo.

Ejercicio 4

Es decir, la fórmula $\neg\big((\alpha_1 \wedge \beta) \wedge (\alpha_2 \wedge \beta) \wedge \cdots \wedge (\alpha_n \wedge \beta)\big)$, que equivale a $\big(\neg(\alpha_1 \wedge \beta)\big) \vee \big(\neg(\alpha_2 \wedge \beta)\big) \vee \cdots \vee \big(\neg(\alpha_n \wedge \beta)\big)$ es una tautología.
Recordemos que $(\alpha \wedge \beta)$ es equivalente a $\neg(\alpha \to \neg\beta)$, y que esta fórmula equivale a $\neg(\beta \to \neg\alpha)$.[1]
Haciendo los reemplazos correspondientes en la tautología anterior, vemos que equivale a

$$(\beta \to \neg\alpha_1) \vee (\beta \to \neg\alpha_2) \vee \cdots \vee (\beta \to \neg\alpha_n).$$

Con lo cual esta fórmula es una tautología, como queríamos demostrar. $\square$

[1] TAREA: demostrar las equivalencias entre fórmulas que usamos.

Ejercicio 4

- Sea Γ un conjunto de contingencias tal que para todo par de fórmulas α, β se cumple que $\textbf{Var}(\alpha) \cap \textbf{Var}(\beta) = \varnothing$. Probar que Γ es satisfacible. (Ej. 12, p. 5)
  Todo indica que, dado que las contingencias en Γ no comparten ninguna variable, siempre podremos construir una valuación que las satisfaga a todas simultáneamente.
  Conviene utilizar el teorema de compacidad para poder demostrar esto con un buen grado de formalidad.
  El objetivo es probar que Γ, no necesariamente finito, es satisfacible, demostrando que todo subconjunto finito $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ lo es. Dado que tenemos que probar la satisfacibilidad de *cualquier* subconjunto finito, el problema puede resultar difícil de abordar.

Ejercicio 4

Procedemos por inducción en el cardinal de los subconjuntos.[2] Probamos que para todo $n \in \mathbb{N}$, todo subconjunto $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ con n elementos es satisfacible.

(C.B.) Si $n = 0$, $\Gamma_0 = \varnothing$, que es satisfacible por cualquier valuación.

[2] Importante tener presente que solo podemos hacer esto cuando estamos considerando subconjuntos *finitos*, cuyos cardinales son números naturales.

Ejercicio 4

(P.I.) Si Γ_0 tiene $n+1$ elementos, podemos escribir

$$\Gamma_0 = \Gamma_0' \cup \{\alpha\}$$

donde Γ_0' tiene n elementos. Como α es una contingencia, existe una valuación v_1 tal que $v_1 \models \alpha$. Además, por hipótesis inductiva, Γ_0' es satisfacible, es decir, existe una valuación v_2 tal que $v_2 \models \Gamma_0'$.
Definimos la siguiente valuación:

$$v(p) = \begin{cases} v_1(p) & \text{si } p \in \mathbf{Var}(\alpha) \\ v_2(p) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

v está bien definida.

Ejercicio 4

(P.I.) Y $v(p) = v_1(p)$ para cualquier variable $p \in \mathbf{Var}(\alpha)$, por lo que $v \vDash \alpha$ si y solo si $v_1 \vDash \alpha$. Análogamente, para cualquier fórmula $\beta \in \Gamma_0'$, $v \vDash \beta$ si y solo si $v_2 \vDash \beta$.
Entonces $v \vdash \Gamma_0$. Por lo tanto, Γ_0 es satisfacible, como queríamos demostrar.

Esto prueba que todo subconjunto finito de Γ es satisfacible, de donde, **aplicando compacidad**, se sigue que Γ también es satisfacible, como queríamos demostrar. $\square$