Lógica Proposicional

Lógica y Computabilidad

Departamento de Computación - FCEyN - UBA

Segundo Cuatrimestre de 2020

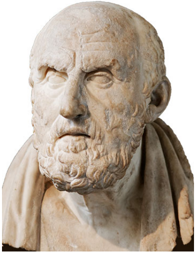
Contenido

Comentarios

¿Qué es una lógica?
Es un **sistema** compuesto por un lenguaje, axiomas y reglas de inferencia y una semántica formal.

- Lógica proposicional (o de orden cero),
- lógica de predicados (o de primer orden),
- lógica modal,
- lógica intuicionista,
- lógica cuántica,
- Cálculo Lambda,
- etc.

Comentarios



(a) Crisipo de Solos (∼ 250 a.C.)

(b) Jan Łukasiewicz (1923)

Lenguaje de la Lógica Proposicional

El lenguaje $\mathcal{L}$ de la lógica proposicional consiste de los siguientes símbolos:

$$p \mid \neg \ \rightarrow \ (\ )$$

Definimos el conjunto de las variables proposicionales como

$$\begin{aligned} PROP &= \{\, p,\ p|,\ p||,\ \ldots \} \\ &= \{\, p_0,\ p_1,\ p_2,\ \ldots \} \\ &= \{\, p,\ q,\ r,\ \ldots \} \end{aligned}$$

donde las últimas dos igualdades son *notación*.

Lenguaje de la Lógica Proposicional

Decimos que una palabra $\alpha \in \mathcal{L}^*$ es **fórmula** si satisface una de las siguientes condiciones:

- $\alpha \in PROP$,
- $\alpha = \neg\beta$ con β fórmula,
- $\alpha = (\beta \to \gamma)$ con β y γ fórmulas.

Llamamos *FORM* al conjunto de todas las fórmulas.

Lenguaje - Ejercicio

Ejercicio

Demostrar que si α es una fórmula, entonces tiene la misma cantidad de paréntesis derechos que de paréntesis izquierdos.

Resolución:
Sean $l(\alpha)$ y $r(\alpha)$ la cantidad de paréntesis izquierdos y derechos de α respectivamente. Hacemos la demostración por inducción estructural.

Lenguaje - Ejercicio (Caso Base)

Ejercicio

Demostrar que si α es una fórmula, entonces tiene la misma cantidad de paréntesis derechos que de paréntesis izquierdos.

Caso Base: $\alpha \in PROP$.
$l(\alpha) = r(\alpha) = 0$, y la proposición se verifica.

Lenguaje - Ejercicio (Caso inductivo)

Ejercicio

Demostrar que si α es una fórmula, entonces tiene la misma cantidad de paréntesis derechos que de paréntesis izquierdos.

Caso Inductivo: Supongamos que α y β verifican la proposición. Vamos a demostrar que tanto $(\alpha \to \beta)$ como $\neg\,\alpha$ la verifican:
$\neg\,\alpha$ la satisface pues

$$l(\neg\,\alpha) = l(\alpha) = r(\alpha) = r(\neg\,\alpha)$$

Y $(\alpha \to \beta)$ también ya que

$$l((\alpha \to \beta)) = l(\alpha) + l(\beta) + 1 = r(\alpha) + r(\beta) + 1 = r((\alpha \to \beta)).$$

Lenguaje - Ejercicio (cont.)

Ejercicio

Demostrar que si α es una fórmula, entonces tiene la misma cantidad de paréntesis derechos que de paréntesis izquierdos.

Como valen los casos base e inductivo, luego la propiedad vale para toda $\alpha \in FORM$. $\square$

Semántica - Definiciones importantes

Una **valuación** es una función $v : PROP \to \{0, 1\}$.
Definimos inductivamente el "valor de verdad de la fórmula α bajo v" de la siguiente manera:

- si $\alpha \in PROP$ entonces $v \models \alpha \iff v(\alpha) = 1$,
- si $\alpha = \neg\beta$ entonces $v \models \alpha \iff v \not\models \beta$,
- si $\alpha = (\beta \to \gamma)$ entonces $v \models \alpha \iff v \models \gamma$ o $v \not\models \beta$.

Importante: v es una función definida sobre *variables*, no sobre fórmulas.

Semántica - Definiciones importantes

Definición

Decimos que $\alpha \in FORM$ *es:*

- *TAUTOLOGÍA si* $v \models \alpha$ *para toda* $v \in VAL$*,*
- *CONTRADICCIÓN si* $v \not\models \alpha$ *para toda* $v \in VAL$*,*
- *CONTINGENCIA si existen valuaciones* v_1 *y* v_2 *tales que* $v_1 \models \alpha$ *pero* $v_2 \not\models \alpha$*.*

Semántica - Ejercicio 1

Ejercicio

Decidir si las siguientes fórmulas son tautologías, contradicciones o contingencias.

1. $(p \to q)$
2. $\neg(p \to q)$
3. $(((p \wedge q) \to r) \to (p \to r))$
4. $(((p \to q) \to p) \to p)$
5. $(((p \to q) \wedge (r \to q)) \to (p \vee r \to q))$

Resolución. Vamos a usar tablas de verdad. $\square$

Semántica - Ejercicio 1

1. $(p \to q)$
   Contingencia.
2. $\neg(p \to q)$
   Contingencia.
3. $(((p \wedge q) \to r) \to (p \to r))$
   Contingencia.
4. $(((p \to q) \to p) \to p)$
   Tautología.
5. $(((p \to q) \wedge (r \to q)) \to (p \vee r \to q))$
   Tautología.

Semántica - Ejercicio 2

Ejercicio

Sea $\phi \in FORM$ una contradicción y $\alpha \in FORM$. Se define α_ϕ como la fórmula que se obtiene al reemplazar todas las variables proposicionales en α por ϕ. Probar que α_ϕ es una contradicción o una tautología.

Resolución:

Demostramos usamos inducción estructural.

Semántica - Ejercicio 2 (Caso Base)

Ejercicio

Sea $\phi \in FORM$ una contradicción y $\alpha \in FORM$. Se define α_ϕ como la fórmula que se obtiene al reemplazar todas las variables proposicionales en α por ϕ. Probar que α_ϕ es una contradicción o una tautología.

Caso Base: $\alpha = q$ para alguna $q \in PROP$.
$\alpha_\phi = \phi$, que es una contradicción.

Semántica - Ejercicio 2 (Caso inductivo)

Ejercicio

Sea $\phi \in FORM$ una contradicción y $\alpha \in FORM$. Se define α_ϕ como la fórmula que se obtiene al reemplazar todas las variables proposicionales en α por ϕ. Probar que α_ϕ es una contradicción o una tautología.

Caso Inductivo: supongamos que la proposición vale para α y para β, probemos que vale tanto para $(\alpha \to \beta)$ como para $\neg\alpha$. Para empezar, observemos que $(\alpha \to \beta)_\phi = (\alpha_\phi \to \beta_\phi)$ y que $(\neg\alpha)_\phi = \neg\alpha_\phi$. Tenemos que ver que esas dos fórmulas son o bien tautologías o contradicciones, suponiendo que α y β son tautologías o contradicciones. La tabla que sigue presenta todas las posibilidades.

Semántica - Ejercicio 2 (Caso inductivo)

Caso Inductivo:

α_ϕ	β_ϕ	$(\alpha_\phi \to \beta_\phi)$	$\neg\,\alpha_\phi$
T	T	T	C
T	C	C	
C	T	T	T
C	C	T	

Semántica - Ejercicio 2 (cont.)

Ejercicio

Sea $\phi \in FORM$ una contradicción y $\alpha \in FORM$. Se define α_ϕ como la fórmula que se obtiene al reemplazar todas las variables proposicionales en α por ϕ. Probar que α_ϕ es una contradicción o una tautología.

Como valen los casos base e inductivo, luego la propiedad vale para toda $\alpha \in FORM$. $\square$

Conjuntos Adecuados

Una *función booleana* es una función $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, donde n es algún número natural. Las funciones booleanas son una manera de formalizar matemáticamente la idea de tabla de verdad.
Por ejemplo, tener la función booleana $f(a,b) = a \times b$ es lo mismo que tener la tabla:

a	b	$f(a,b)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Esta tabla coincide con la tabla de verdad de la fórmula $(a \wedge b)$.

Conjuntos Adecuados

De la misma manera, la función booleana $g(a,b) = \max(a,b)$ se corresponde con la tabla:

a	b	$g(a,b)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

que coincide con la tabla de verdad de la fórmula $(a \vee b)$.
Para cualquier función booleana (es decir, para cualquier tabla de verdad) existe una fórmula del lenguaje proposicional asociada a ella?

Definición

Decimos que un conjunto de conectivos es **adecuado** *si, dada cualquier función booleana f, podemos escribir una fórmula que use sólo esos conectivos y cuya tabla de verdad se corresponda con la tabla de f.*

Conjuntos Adecuados - Ejercicio 1

Proposición

El conjunto de conectivos $\{\wedge, \vee, \neg\}$ *es adecuado.*

Demostración:
Sea una función booleana cualquiera, $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$. Buscamos una fórmula α que se escriba usando sólo conjunciones, disyunciones y negaciones, cuya tabla de verdad se corresponda con la tabla de f. Si f es la función constantemente igual a 0, definimos la fórmula $\alpha = (p_0 \wedge \neg p_0)$.

Conjuntos Adecuados - Ejercicio 1

Si no, llamemos $E = \{\overline{d} \in \{0,1\}^n \mid f(\overline{d}) = 1\}$ al conjunto de las tuplas $\overline{d} = (d_1, \ldots, d_n)$ sobre las cuales f vale uno.
Dado $s \in \{0,1\}$, definimos

$$p_i^s = \begin{cases} p_i & \text{si } s = 1 \\ \neg\, p_i & \text{si } s = 0 \end{cases}$$

y, dada $\overline{d} \in E$, definimos $\alpha_{\overline{d}} = \bigwedge_{i=1}^{n} p_i^{d_i}$
Finalmente, la fórmula

$$\alpha = \bigvee_{\overline{d} \in E} \alpha_{\overline{d}}$$

es lo que buscamos. $\square$

Conjuntos Adecuados - Ejercicio 2

Ejercicio

Decidir si los siguientes conjuntos de conectivos son adecuados o no.

1. $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \neg\}$
2. $\{\rightarrow, \neg\}$
3. $\{\wedge, \neg\}$
4. $\{\wedge, \rightarrow\}$

Conjuntos Adecuados - Ejercicio 2

Resolución.

1. $\{\wedge, \vee, \to, \neg\}$: sí, pues contiene a $\{\wedge, \vee, \neg\}$, que vimos que es adecuado.
2. $\{\to, \neg\}$: sí, podemos escribir tanto $\wedge$ como $\vee$ usando $\to$ y $\neg$. Por lo tanto, este conjunto es equivalente a tener $\{\wedge, \vee, \to\}$.
3. $\{\wedge, \neg\}$: sí, porque podemos escribir $\to$ usando $\wedge$ y $\neg$. Como $\{\neg, \to\}$ es adecuado, $\{\neg, \wedge\}$ también lo es.
4. $\{\wedge, \to\}$: no lo es. Para probarlo, tenemos que mostrar que existe alguna función booleana que no se corresponde con ninguna fórmula que podamos escribir usando sólo la conjunción y la implicación.

Conjuntos Adecuados - Ejercicio 2

Proposición

Si $\alpha \in FORM(\wedge, \rightarrow)$ y v es una valuación que hace verdaderas a todas las variables proposicionales, entonces v $\models \alpha$.

Resolución. ¡TAREA! (Sale por inducción en α) $\square$

Esta proposición nos dice que cuando las variables proposicionales son verdaderas, la fórmula también lo es.
¿Conocemos una función booleana cuyo resultado es 0 y sus entradas valen 1?
¡Sí! Por ejemplo, $f : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$, f(x) $= 1 - x$.
No existe $\alpha \in$ FORM $(\wedge, \rightarrow)$ equivalente a f, por lo que el conjunto $\{\wedge, \rightarrow\}$ no es adecuado. $\square$

Consecuencia Semántica

Definición

Si $\Gamma \subseteq$ *FORM, decimos que v* **satisface a** Γ *si v* $\models \alpha$ *para toda* $\alpha \in \Gamma$*. A esto lo notaremos v* $\models \Gamma$*. Un conjunto de fórmulas* Γ *será* **satisfacible** *si existe una valuación v tal que v* $\models \Gamma$*.*

Definición

Si $\Gamma \subseteq$ *FORM, decimos que las hipótesis* Γ *implican semánticamente a* α *(y lo notamos* $\Gamma \models \alpha$*) si toda valuación v que satisface a las hipótesis* Γ *tambien satisface a la conclusión* α*.*
En otras palabras: decimos que $\Gamma \models \alpha$ *si vale que todas las valuaciones que satisfacen a* Γ *también satisfacen a* α*. Llamamos* $con(\Gamma) = \{\alpha \mid \Gamma \models \alpha\}$ *al conjunto de todas las fórmulas que son consecuencia semántica de* Γ*.*

Consecuencia Semántica - Ejercicio 1

Ejercicio

Sean Γ_1 y Γ_2 satisfacibles. Decidir si los siguientes conjuntos son satisfacibles o no:

- $\emptyset$: Es satisfacible pues cualquier valuación satisface al conjunto vacío.
- $\{p_9\}$: Es satisfacible: cualquier valuación v tal que $v \models p_9$ lo satisface.
- FORM: El conjunto de todas las fórmulas no es satisfacible, pues si existiera $v \models$ FORM en particular $v \models p_0$ y $v \models \neg p_0$, lo cual es imposible.

Consecuencia Semántica - Ejercicio 1

Ejercicio

Sean Γ_1 y Γ_2 satisfacibles. Decidir si los siguientes conjuntos son satisfacibles o no:

- $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$: No es satisfacible en general. Por ejemplo, si tomamos $\Gamma_1 = \{p_0\}$ y $\Gamma_2 = \{\neg p_0\}$ entonces la unión no es satisfacible pero ambos conjuntos lo son.
- $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$: Es satisfacible pues $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \subseteq \Gamma_1$. Cualquier valuación que satisface a Γ_1 también satisface al conjunto más pequeño.

Consecuencia Semántica - Ejercicio 2

Ejercicio

Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

- $\{p_1\} \models p_2$: Falso, pues cualquier valuación que cumpla $v \models (p_1 \wedge \neg p_2)$ satisface las hipótesis sin satisfacer la conclusión.
- $con(\emptyset) = \mathrm{TAUT} = \{\alpha \in \mathrm{FORM} \mid \alpha \text{ es tautología}\}$: Verdadero. Para probarlo, es suficiente probar que $\alpha \in con(\emptyset) \iff \alpha$ es tautología. Pero eso es cierto porque $\emptyset \models \alpha$ es equivalente a decir que toda valuación satisface a α, pues toda valuación satisface a $\emptyset$.
- $\emptyset \models (p_3 \wedge p_7)$: Falso: las únicas consecuencias del vacío son las tautologías. Ver ítem previo.

Consecuencia Semántica - Ejercicio 2

Ejercicio

Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

- $\emptyset \models (p_5 \vee \neg p_5)$: Verdadero, pues esa fórmula es una tautología. Ver segundo ítem.
- FORM $\models (p_1 \wedge \neg p_1)$: Verdadero, porque (entre otros motivos) tanto p_1 como $\neg p_1$ pertenecen a FORM.
- Si Γ es satisfacible, entonces $con(\Gamma)$ también: Verdadero. Si Γ es satisfacible, existe $v \models \Gamma$. La misma valuación satisface a $con(\Gamma)$.

Observación

Del ítem 2 del ejercicio anterior, sabemos que $con(\emptyset) = \mathrm{TAUT}$, y como toda valuación satisface al conjunto vacío (y por ende, a TAUT), podemos afirmar que las tautologías están contenidas en las consecuencias semánticas de cualquier conjunto.

Consecuencia Semántica - Ejercicio 3

Ejercicio

Un conjunto de fórmulas Γ *se dice* **independiente** *si para toda* $\varphi \in \Gamma$, $\varphi \notin con(\Gamma \setminus \{\varphi\})$.
Sea $\Gamma \subseteq FORM$ *independiente. Demostrar que para todo* $\Gamma_0 \subset \Gamma$ *finito y no vacío* $\{\bigwedge_{\varphi \in \Gamma_0} \varphi\}$ *es independiente.*

Resolución: Sea Γ_0 finito. Por definición de conjunto independiente, queremos probar que $\bigwedge_{\varphi \in \Gamma_0} \varphi \notin con(\emptyset)$, que es equivalente (por obs. del ejercicio anterior) a probar que $\bigwedge_{\varphi \in \Gamma_0} \varphi$ no es una tautología.
Alcanza con que exista una valuación v tal que $v \not\models \varphi$ para algún $\varphi \in \Gamma_0$, pues entonces $v \not\models \bigwedge_{\varphi \in \Gamma_0} \varphi$.
Procedemos por el absurdo.

Consecuencia Semántica - Ejercicio 3

Definición

Un conjunto de fórmulas Γ *se dice* **independiente** *si para toda* $\varphi \in \Gamma$, $\varphi \notin con(\Gamma \setminus \{\varphi\})$.

Supongamos que para toda $v \in VAL$, $v \models \varphi$ para toda $\varphi \in \Gamma_0$. Entonces, todas las $\varphi \in \Gamma_0$ son tautologías, y, por la observación previa, están contenidas en las consecuencias de cualquier conjunto. Luego, si elegimos alguna $\varphi \in \Gamma_0$, tenemos que $\varphi \in con(\Gamma \setminus \{\varphi\})$, lo cual es **absurdo** pues Γ era independiente. $\square$

Cómo seguimos

- Ya pueden hacer toda la Práctica 4.
- La semana que viene (viernes 06/11) tendremos la clase práctica de Sistemas Deductivos y Compacidad. También estará dividida en una parte asincrónica y otra sincrónica.