Compacidad e inexpresabilidad

27 de noviembre de 2020

Definición. Decimos que una propiedad es expresable en un lenguaje $\mathcal{L}$ de primer orden si existe una $\mathcal{L}$-fórmula φ tal que para toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{I}$:

$$\mathcal{I} \models \varphi \; sii \; \mathcal{I} \in \mathcal{K}$$

donde $\mathcal{K}$ es la clase de modelos que cumplen dicha propiedad (también se dice que $\mathcal{K}$ es *definible*).

Ejercicio 1. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con igualdad y un símbolo de predicado binario R. Decidir si es posible expresar en $\mathcal{L}$ la propiedad que afirma que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que todo elemento se relaciona (a izquierda) via R con a lo sumo con k elementos distintos (a derecha).

Resolución. Veremos que la propiedad no es expresable. Esta clase de demostraciones de la *no expresabilidad* de una propiedad en primer orden se caracteriza por cinco pasos:

a) **Suponemos que sí es expresable**. Sea φ_α la fórmula de primer orden que describe la propiedad del enunciado.

b) El segundo paso es clave. Aquí es donde tenemos que apelar a nuestra creatividad y al entendimiento preciso de lo que está enunciando la propiedad. El objetivo es crear un conjunto de fórmulas tales que para poder satisfacer a *todas a la vez*, φ_α debe ser falsa, pero tales que subconjuntos finitos de esas fórmulas sí sean compatibles con φ_α. Dicho de otra manera, **debemos definir infinitas fórmulas con las cuales vayamos negando incrementalmente a φ_α**. En nuestro caso podríamos definir:

φ_1 : "Hay un elemento que se relaciona con al menos 1 elemento".
φ_2 : "Hay un elemento que se relaciona con al menos 2 elementos".
φ_3 : "Hay un elemento que se relaciona con al menos 3 elementos".
...

De este modo, y uniendo todas las fórmulas, no podemos dar un k fijo para nuestra propiedad tal que satisfaga a todas las φ_i puesto que, en particular, φ_{k+1} diría que la propiedad no se cumple para ese k.

En primer orden, la definición de estas fórmulas quedaría expresada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
&\varphi_1 : (\exists x)(\exists y_1) R(x, y_1) \\
&\varphi_2 : (\exists x)(\exists y_1 \exists y_2) y_1 \neq y_2 \wedge R(x, y_1) \wedge R(x, y_2) \\
&\dots \\
&\varphi_i : (\exists x)(\exists y_1 \exists y_2, \dots \exists y_i) todosDistintos(y_1, \dots, y_i) \wedge \\
&\qquad R(x, y_1) \wedge R(x, y_2) \wedge \dots \wedge R(x, y_i)
\end{aligned}$$

donde $todosDistintos(y_1, \dots, y_n)$ denota a la fórmula $y_1 \neq y_2 \wedge \dots \wedge y_1 \neq y_n \wedge y_2 \neq y_3 \wedge \dots \wedge y_{n-1} \neq y_n$.

c) Definimos el siguiente conjunto $\Gamma = \{\varphi_i : i \in \mathbb{N}, i \geq 1\} \;\cup\; \{\varphi_\alpha\}$.

d) Vamos a mostrar que el conjunto Γ es tanto satisfacible como insatisfacible, llegando así al absurdo buscado.

d.I Queremos ver que Γ es insatisfacible.

Suponemos que es satisfacible. Es decir, existen $\mathcal{M}$ y v tales que $\mathcal{M}, v \models \Gamma$. En particular φ_α debe ser verdadera en el modelo $\mathcal{M}$ con valuación v. De aquí se desprende que existe $k \in \mathbb{N}$ fijo tal que todo elemento de $\mathcal{M}$ se relaciona a lo sumo con k elementos distintos de $\mathcal{M}$.

Por otro lado, como $\mathcal{M}, v \models \Gamma$ y $\{\varphi_i : i \in \mathbb{N}, i \geq 1\} \subseteq \Gamma$, entonces φ_{k+1} es verdadera en $\mathcal{M}, v$. Por definición de φ_{k+1}, existe un elemento en $\mathcal{M}$ tal que se relaciona con al menos $k+1$ elementos distintos. Esto representa un **absurdo** puesto que habíamos dicho que todos los elementos de $\mathcal{M}$ se relacionaban con a lo sumo k elementos. Por ende, Γ **es insatisfacible**.

d.II Queremos ver que Γ es satisfacible.

Por **compacidad** vale que si todo $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ finito es satisfacible, entonces Γ también lo es.

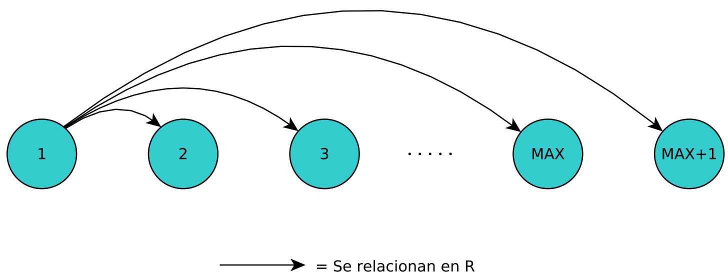
Tomemos $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$ finito y mostremos que dicho conjunto es satisfacible.

Γ_1 puede o no contener a φ_α, y como Γ_1 es finito tiene que contener a una cantidad finita de φ_i (en particular, puede que no contenga ninguna φ_i). Lo que tenemos que ver es que existe un modelo $\mathcal{M}$ y una valuación v que hacen verdaderas a todas las fórmulas de Γ_1.

Tomemos $MAX = max(\{i \geq 1 : \varphi_i \in \Gamma_1\} \;\cup\; \{1\})$. La unión con el conjunto que sólo tiene al 1 se debe a que el primer conjunto podría ser vacío y queremos darle un valor a MAX.

Sólo resta construir el modelo $\mathcal{M}$ y ver que se satisfacen todas las fórmulas de Γ_1.

Sea $\mathcal{M}$:



En primer lugar, notar que ningún valor de verdad de nuestras φ_i depende de la valuación v, ya que se trata de sentencias, es decir, fórmulas con todas sus variables ligadas. Usando al elemento 1 como el testigo del existencial sobre x se satisfacen todas las φ_i en Γ_1, pues 1 se relaciona con al menos MAX elementos. También se satisface φ_α, en caso de que estuviera en Γ_1, pues todo elemento de $\mathcal{M}$ se relaciona con a lo sumo MAX elementos. Por ende, Γ_1 es satisfacible.

Como vimos que todo subconjunto finito de Γ es satisfacible, concluimos por el Teorema de Compacidad que Γ **es satisfacible**.

e) Como probamos que Γ es insatisfacible por d.I y, a la vez, satisfacible por d.II entonces llegamos a un absurdo, que provino de suponer que φ_α era expresable en primer orden.

$\square$

Ejercicio 2. Considerar un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$ con igualdad y un símbolo de predicado binario $\lhd$. Demostrar que no es posible expresar en primer orden la proposición que afirma: "para todo par de elementos x e y, si $x \lhd y$, entonces es finita la cantidad de elementos x_i que cumplen que $x \lhd x_i$ y $x_i \lhd y$".

Resolución. Utilizaremos el mismo esquema de demostración que en el ejercicio anterior.

a) Suponemos que la propiedad es expresable por una fórmula en primer orden. Sea φ_β dicha fórmula.

b) Definimos una serie de fórmulas que intenten[1] contradecir incrementalmente a φ_β:

$$\begin{aligned}
&\varphi_0 : (\exists x \exists y) x \lhd y \\
&\varphi_1 : (\exists x \exists y)(\exists z) x \lhd y \land x \lhd z \land z \lhd y \\
&\dots \\
&\varphi_i : (\exists x \exists y)(\exists z_1, z_2, \dots, z_i) todosDistintos(z_1, \dots, z_i) \land \\
&\qquad x \lhd y \land x \lhd z_1 \land \dots \land x \lhd z_i \land z_1 \lhd y \land \dots \land z_i \lhd y
\end{aligned}$$

c) Sea $\Gamma = \{\varphi_i : i \in \mathbb{N}_0\} \cup \{\varphi_\beta\}$.

d) Ahora debemos mostrar que Γ es tanto satisfacible como insatisfacible.

d.I Querríamos ver que Γ es insatisfacible. Pero... ¿lo es? Si tomamos $\mathcal{M}$ la interpretación usual de los enteros donde $\lhd$ se interpreta como $<_\mathbb{Z}$ entonces $\mathcal{M}$ satisface a φ_β, pues es cierto que entre todo par de enteros x, y hay una cantidad finita de elementos menores que y y mayores que x. También satisface a todas las φ_i ya que para cualquier i podemos encontrar un par de enteros x, y entre los cuales haya i elementos menores que y y mayores que x. El problema estuvo en que no definimos de manera adecuada las fórmulas φ_i. La estrategia debería haber sido utilizar 2 variables libres x, y para de este modo predicar siempre sobre el mismo par y que, incrementalmente, existan cada vez más elementos entre ese par fijo de elementos x e y.

Este intento fallido sirve para remarcar que la parte crítica de la demostración reside en definir correctamente las infinitas fórmulas en el segundo punto del esquema.

Retomemos entonces desde allí:

b)

$$\begin{aligned}
&\varphi_0(x, y) : x \lhd y \\
&\varphi_1(x, y) : (\exists z) x \lhd y \land x \lhd z \land z \lhd y \\
&\qquad \dots \\
&\varphi_i(x, y) : (\exists z_1 \exists z_2, \dots \exists z_i) todosDistintos(z_1, \dots, z_i) \land \\
&\qquad x \lhd y \land x \lhd z_1 \land \dots \land x \lhd z_i \land z_1 \lhd y \land \dots \land z_i \lhd y
\end{aligned}$$

c) Sea $\Gamma = \{\varphi_i : i \in \mathbb{N}_0\} \cup \{\varphi_\beta\}$.

d) Ahora debemos mostrar que Γ es tanto satisfacible como insatisfacible.

d.I Probaremos que Γ es insatisfacible.

Suponemos que es satisfacible. Luego, hay un modelo y una valuación que hacen verdaderas a todas las fórmulas de Γ, es decir:

$$\text{existen } \mathcal{M}, v \text{ tales que } \mathcal{M}, v \models \Gamma$$

[1] Van a fallar en la tarea, pero de una manera didáctica

En particular, φ_β es verdadera en dicho modelo y valuación, por lo que para todo par de elementos existe una cantidad finita de elementos 'entre' ambos (según la relación $\lhd$). Por otro lado, las φ_i nos dicen que hay un par de elementos del dominio para los cuales no existe una cantidad acotada de elementos entre ellos. Este razonamiento se desprende por cómo construimos las fórmulas en (b). Utilizamos dos variables libres para poder luego instanciarlas en un valor particular del dominio. Digamos que $v(x) = a$ y $v(y) = b$. Luego, las φ_i nos dicen lo siguiente sobre $\mathcal{M}, v$:

φ_0 : "entre a y b hay al menos 0 elementos que se relacionan según $\lhd$".

φ_1 : "entre a y b hay al menos 1 elemento que se relacionan según $\lhd$".

...

φ_i : "entre a y b hay al menos i elementos que se relacionan según $\lhd$".

...

De esta manera, para el par (a, b) llegamos a una contradicción: existen a la vez una cantidad finita e infinita de elementos entre ellos. Por lo tanto, Γ **es insatisfacible**.

d.II Queremos ver que Γ es satisfacible.

Apelando al teorema de compacidad, basta con ver que todo subconjunto finito incluido en Γ es satisfacible. Sea $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$ finito y veamos que existen un modelo y una valuación que hacen verdaderas a todas las fórmulas en Γ_1, es decir, queremos ver que existen $\mathcal{M}$ y v tales que $\mathcal{M}, v \models \Gamma_1$.

Tomamos $MAX = max(\{i : \varphi_i \in \Gamma_1\} \ \cup \ \{1\})$, al igual que en el ejercicio anterior.

En este caso, nos basta con tomar el modelo usual de los enteros interpretando a $\lhd$ como $<_{\mathbb{Z}}$. En él vale que para todo par de elementos hay una cantidad finita de elementos entre ellos por lo que satisfaceríamos φ_β. Si la valuación v instancia a x e y en 0 y $MAX + 1$ respectivamente, entonces es cierto que entre esos dos números hay al menos MAX elementos, por lo que satisfaceríamos a cada una de las φ_i. Notar que aquí sí fue importante la valuación que utilizamos, ya que necesitamos que entre x e y hubiera al menos MAX elementos. Luego, satisfacimos a todas las fórmulas en Γ_1. Luego, por compacidad, Γ **es satisfacible**.

e) Como probamos que Γ es insatisfacible por d.I y, a la vez, satisfacible por d.II entonces llegamos a un absurdo, que provino de suponer que φ_β era expresable en primer orden.

$\square$

Ejercicio 3. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con igualdad, y con numerables símbolos de constante $c_1, c_2, \ldots$. ¿Es expresable la propiedad 'Cada constante tiene un valor distinto'?

Demostración. Tratar de usar directamente el método que venimos utilizando parece difícil. Sin embargo, observar que esta propiedad es expresable si y solo si también lo es su negación, que dice *'Hay al menos dos constantes (distintas) con la misma interpretación'*. Tratemos de llegar a un absurdo asumiendo que esta propiedad es expresable mediante una φ.

b) Definamos, para $i, j \geq 1$, $i \neq j$,

$$\psi_{i,j} : \neg(c_i = c_j)$$

c) Definamos

$$\Gamma = \{\psi_{i,j}\}_{i \neq j} \cup \{\varphi\}$$

d) Veamos que Γ es insatisfacible y satisfacible.

d.I Insatisfacible: Supongamos que $\mathcal{M}, v \models \Gamma$. Que valga φ significa que existen dos constantes diferentes tales que $c_i^{\mathcal{M}} = c_j^{\mathcal{M}}$. Por otro lado, $\psi_{i,j}$ se interpreta en $\mathcal{M}, v$ como $c_i^{\mathcal{M}} \neq c_j^{\mathcal{M}}$, absurdo.

d.II Satisfacible: Veamos esto con compacidad. Sea Γ_1 un subconjunto finito de Γ. Tomemos

$$k = \max\{i \geq 1 \mid \text{ existe un } j \text{ tal que } \psi_{i,j} \in \Gamma_1 \text{ o } \psi_{j,i} \in \Gamma_1\} \cup \{1\}$$

Basta entonces considerar a la estructura $\mathcal{M}$ con universo $\mathbb{N}$, y donde definimos

$$c_i^{\mathcal{M}} = \begin{cases} i & \text{si } i \leq k \\ k+1 & \text{si } i > k \end{cases}$$

Verificar que todas las fórmulas de Γ_1 son válidas sobre $\mathcal{M}$.

e) Como vimos que Γ es satisfacible e insatisfacible, llegamos a un absurdo que provino de nuestra suposición inicial que la propiedad 'Cada constante tiene un valor distinto' era expresable.

$\square$