Lógica de primer orden
Interpretaciones, distinguibilidad, expresabilidad, y definibilidad

Lógica y Computabilidad[*]

2do cuatrimestre 2020

Índice

[*]Basado en apuntes de Sergio Abriola, Mariano Rean, y Edwin Pin

$\mathcal{L}$-ESTRUCTURAS

Definición. Un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$ está dado por un conjunto de símbolos de constantes C, un conjunto F de símbolos de funciones (cada una con cierta aridad), y un conjunto P no vacío de símbolos de predicados (cada uno con cierta aridad). A veces consideramos que P contiene al símbolo de relación binaria =, el cual es siempre es interpretado como la igualdad usual.

Decimos que $\mathcal{M}$ es una $\mathcal{L}$-estructura (o una *interpretación* de $\mathcal{L}$) si consiste de un conjunto no vacío M provisto de interpretaciones para todos los símbolos de $\mathcal{L}$. Es decir:

- Para cada símbolo de constante $c \in C$, hay un $c_{\mathcal{M}} \in M$.
- Para cada símbolo de función $f \in F$ de aridad n, hay una función (total) $f_{\mathcal{M}} : M^n \to M$.
- Para cada símbolo de predicado $p \in P$ de aridad n, hay una relación n-aria $p_{\mathcal{M}} \subseteq M^n$.

Ejercicio 1. Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje con igualdad $\{c, f, R, =\}$, donde c es un símbolo de constante, f es un símbolo de función 1-aria, y R un símbolo de predicado (o relación) 2-aria. Decidir si son $\mathcal{L}$-estructuras las siguientes estructuras:

1. $\mathcal{M}_1 = \{\mathbb{Z}, -3, s, <\}$. Donde s es la función 'sucesor'($s(x) = x + 1$) y $<$ tiene la interpretación habitual.
2. $\mathcal{M}_2 = \{\mathbb{N}, 1, +, <\}$. Donde $+$ es la función 'suma'($+(x, y) = x + y$) y $<$ tiene la interpretación habitual.
3. $\mathcal{M}_3 = \{\mathbb{Z}, 0, r, p\}$. Donde $r(x) = \sqrt{x}$, y $x \in p$ sii $x > 0$.
4. $\mathcal{M}_4 = \{T, r, id, \downarrow\}$. Donde T son los nodos de un árbol maximal de altura 2 y ramificación 2, r es la raíz de T (visto como un árbol), $\mathrm{id}(x) = x$, y $x \downarrow y$ sii y es hijo de x.

Resolución

1. Sí. Acá, $c_{\mathcal{M}_1} = -3$, $f_{\mathcal{M}_1} = s$, $R_{\mathcal{M}_1} = <$.
2. No. La suma + no es una interpretación válida para f, porque f es un símbolo de función 1-aria y la suma es 2-aria.
3. No. La raíz cuadrada no es una función total (y además el resultado no siempre está en $\mathbb{Z}$). Ademas, p es relación unaria en vez de binaria.
4. Sí. Acá, $c_{\mathcal{M}_4} = r$, $f_{\mathcal{M}_4} = id$, y $R_{\mathcal{M}_4} = \downarrow$.

Niveles de verdad

Definición. Una $\mathcal{L}$-fórmula φ se dice:

1. **universalmente válida** si para toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{M}$ y toda valuación v de $\mathcal{M}$, $\mathcal{M} \models \varphi[v]$[1].
2. **válida** (o **verdadera**) en una $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{M}$ si para toda valuación v de $\mathcal{M}$, $\mathcal{M} \models \varphi[v]$.
3. **satisfacible** si existe alguna $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{M}$ y una valuación v tales que $\mathcal{M} \models \varphi[v]$.

Ejercicio 2. Sea $\mathcal{L} = \{c, f, R, =\}$, como en el modelo $\mathcal{M}_1 = \{\mathbb{Z}, -3, s, <\}$. Donde s es la función 'sucesor'($s(x) = x + 1$) y $<$ es el orden usual de los $\mathbb{Z}$.
Decidir si las siguientes $\mathcal{L}$-fórmulas son universalmente válidas, válidas en $\mathcal{M}_1$, satisfacibles, o insatisfacibles.

1. $\varphi_1 : x = x$
2. $\varphi_2 : \forall x(x \neq c)$
3. $\varphi_3 : \forall x(R(x, f(x)))$
4. $\varphi_4 : \forall x(x = c) \vee \forall x(f(x) \neq x \wedge f(f(x)) = x)$
5. $\varphi_5 : \forall x(\exists y(f(y) = x))$

Resolución

1. φ_1: Universalmente válida. Depende de la definición de $\mathcal{L}$ y de la interpretación estándar de la igualdad, lo que no se ve afectado por ninguna $\mathcal{L}$-estructura
2. φ_2: Insatisfacible, ya que x puede valer c, ya que por definición las contantes deben pertenecer al Universo
3. φ_3: Es válida en $\mathcal{M}_1$, ya que todo número es menor que su sucesor. **No** es universalmente válida (e.g., no vale para un $\mathcal{M}_1'$ cuando R es $>$)
4. φ_4: No vale en $\mathcal{M}_1$, por lo que no es U.V. Sí podría valer en una $\mathcal{L}$-estructura con universo de un solo elemento, o en alguna donde f se interpretara como la multiplicación por -1, entre muchas otras opciones, por lo que sí es satisfacible.
5. φ_5: Es la propiedad de sobreyectividad. Es válida en $\mathcal{M}_1$, aunque no es universalmente válida (e.g., no vale para una $\mathcal{M}_1''$ con $U = \mathbb{N}$, ya que 0 no tendría correspondencia en el conjunto de partida)

[1] A veces escrito como $\mathcal{M}, v \models \varphi$

Ejercicio 3. Verificar si las fórmulas φ_3 , φ_4 y φ_5 del ejercicio anterior son válidas en la $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{S}$ representada en la Figura 1:

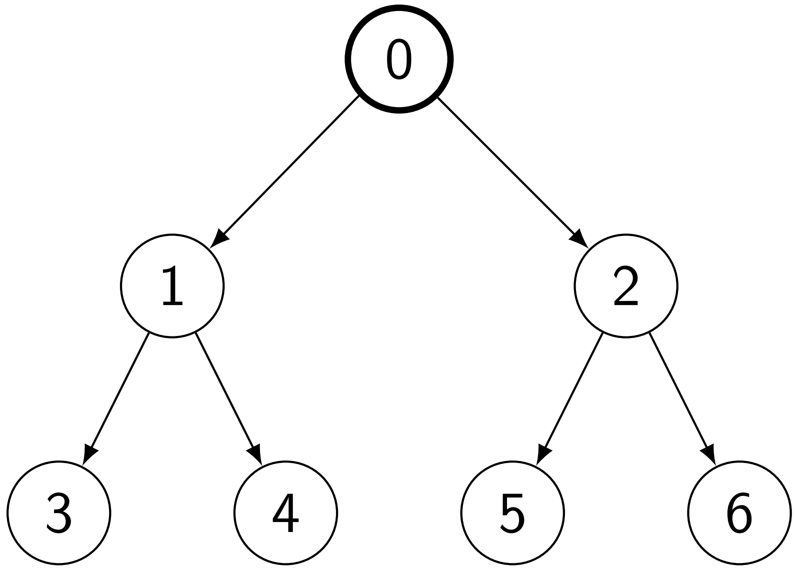

Figura 1: Representación de la $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{S}$

En este caso $f_{\mathcal{S}} = \mathrm{id} : \{0, \dots, 6\} \to \{0, \dots, 6\}$, $c_{\mathcal{S}} = 0$, y $R_{\mathcal{S}}$ es el conjunto de flechas del árbol.

Resolución

- $\varphi_3 : \forall x(R(x, f(x)))$, **no** es válida para $\mathcal{S}$, ya que se interpreta como que todo elemento del universo tiene una flecha hacia sí mismo, por la interpretación de R y f.
- $\varphi_4 : \forall x(x = c) \lor \forall x(f(x) \neq x \land f(f(x)) = x)$, **no** es válida para $\mathcal{S}$, ya que el universo no es singleton (y sólo contiene a c), y $f_{\mathcal{S}}$ no cumple $f(x) \neq x$.
- $\varphi_5 : \forall x(\exists y(f(y) = x))$, **es** válida para $\mathcal{S}$, ya que la $f_{\mathcal{S}}$ es sobreyectiva

Distinguibilidad

Definición. Decimos que un elemento e del universo de una $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{M}$ es **distinguible** si existe una $\mathcal{L}$-fórmula φ con una sola variable libre x tal que $\mathcal{M} \models \varphi[v]$ si y sólo si $v(x) = e$.

Ejercicio 4. Consideremos el lenguaje anterior, $\mathcal{L} = \{c, f, R, =\}$. Demostrar que todos los elementos de la $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{T}$, representada en la Figura 2, son distinguibles. Así, f es la función identidad, c es el 0, y R está representado por las flechas.

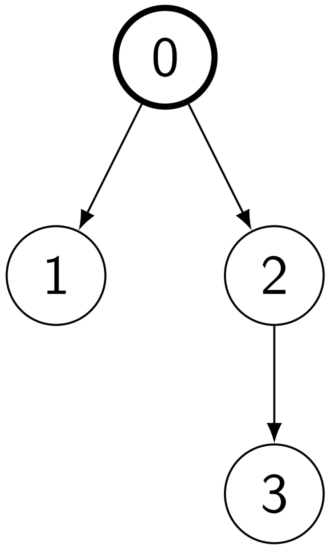

Figura 2: Representación de la $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{T}$

Resolución

- $\varphi_0 : x = c$, o también podría expresarse como $\varphi_0 : \neg(\exists y)(R(y, x))$, ya que '0és el único elemento que no tiene antecesor
- $\varphi_1 : R(c, x) \wedge \neg(\exists y)(R(x, y))$, ya que 1 es el único hijo de 0 que no tiene hijos
- $\varphi_2 : R(c, x) \wedge (\exists y)(R(x, y))$, ya que 1 es el único hijo de 0 que tiene hijos.
  También podría expresarse como $\varphi_2 : R(c, x) \wedge \neg\varphi_1(x)$, ya que es hijo de 0, pero no es 1
- $\varphi_3 : \neg R(c, x)$, ya que 3 es el único que no es hijo directo de 0. Si fuera posible que el modelo se extienda, y para más claridad y robustez, podría definirse como $\varphi_3 : \neg R(c, x) \wedge \neg(\exists y)(R(x, y))$, ya que no es hijo de 0 y no tiene hijos.

Ejercicio 5. Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje con igualdad que consiste únicamente de un predicado binario R. Sea $\mathcal{M}$ una $\mathcal{L}$-interpretación que consiste en un árbol ($R_{\mathcal{M}}$ es la relación de accesibilidad: $xR_{\mathcal{M}}y$ sii y es hijo de x). Demostrar que la raíz de $\mathcal{M}$ es un elemento distinguible.

Resolución

En efecto, bajo la misma idea que en el anterior ejercicio, se puede distinguir a la raíz con la fórmula $\varphi : \forall y(\neg R(y, x))$.

Ejercicio 6. Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje de primer orden con igualdad, con una relación binaria <. Considerar la siguiente $\mathcal{L}$-interpretación $\mathcal{M}$ con universo $\omega^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}\}$.

$$(x, y) <_{\mathcal{M}} (x', y') \text{ sii } (x < x' \text{ o } x = x' \text{ y } y < y')$$

Demostrar que son distinguibles todos los elementos de la forma $(i, 0)$ con $i \in \mathbb{N}$.

Resolución

Vamos a construir inductivamente predicados φ_i, tales que cada uno tiene una única variable libre y y cada φ_i es válido únicamente en valuaciones v tales que $v(y) = (i, 0)$.

Para el caso base, definimos

$$\varphi_0 : \neg(\exists x(x < y))$$

Efectivamente tiene como única variable libre a y, y solo se satisface en $\mathcal{M}$ cuando $v(y) = (0, 0)$.

Ahora, supongamos que tenemos a φ_i construida para todo $i \leqslant n$. Veamos que podemos construir a φ_{n+1}. Para eso, primero construimos otra fórmula con variable libre z que dice que z es de la forma $(i, 0)$ para algún i. Notar que estos son exactamente aquellos elementos que no tienen un antecesor inmediato. Entonces, como paso inicial, construyamos primero una fórmula que determina que un elemento no tiene antecesor inmediato.

$$\psi : \forall x(x < z \to \exists x_2(x < x_2 \wedge x_2 < z))$$

Ahora definimos

$$\varphi_{n+1} : \psi(y) \wedge \neg(\varphi_0(y)) \wedge \cdots \wedge \neg(\varphi_n(y)) \wedge \forall z((\psi(z) \wedge z < y) \to (\varphi_0(z) \vee \varphi_1(z) \cdots \vee \varphi_n(z)))$$

Observar que φ_{n+1} distingue a $(n + 1, 0)$, como queríamos.

Entonces, probamos que todos los elementos de $\mathcal{M}$ de la forma $(i, 0)$ son distinguibles.

Expresabilidad

Definición. Dada una $\mathcal{L}$-interpretación $\mathcal{M}$ con universo M, decimos que una relación $R \subseteq M^n$ es **expresable** si existe una $\mathcal{L}$-fórmula φ con n variables libres $x_1, \ldots, x_n$ tal que para toda valuación v, vale que $\mathcal{M} \models \varphi[v]$ sii $(v(x_1), \ldots, v(x_n)) \in R$.

Ejercicio 7. Sea $\mathcal{L} = \{+, =\}$, con $+$ un símbolo de función binario. Sea $\mathcal{M}$ una $\mathcal{L}$-estructura, con universo $\mathbb{N}$, y donde $+$ es la suma de naturales usual. Demostrar que son expresables las relaciones $R_{\leqslant} = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \leqslant x_2\}$ y $R_{<} = \{(x_1, x_2) \mid x_1 < x_2\}$.

Resolución

La siguiente fórmula, de variables libres x_1, x_2 expresa $R_{\leqslant}$:

$$\varphi_{\leqslant} : \exists x(+(x_1, x) = x_2)$$

Por otro lado, la siguiente fórmula expresa $R_{<}$ al poner la condición que el nuevo sumando no sea el 0:

$$\varphi_{<} : \exists x(\neg(+(x, x) = x) \wedge +(x_1, x) = x_2)$$

Definibilidad

Definición. Decimos que una clase de $\mathcal{L}$-estructuras $\mathcal{K}$ es **definible** si existe una sentencia φ tal que para toda $\mathcal{L}$-interpretación $\mathcal{M}$, vale que $\mathcal{M} \models \varphi$ sii $\mathcal{M} \in \mathcal{K}$.

Ejercicio 8. Sea $\mathcal{L} = \{R, =\}$, donde R es un símbolo de relación binaria. Demostrar que es definible la clase de $\mathcal{L}$-modelos donde R es una relación irreflexiva, transitiva, y con al menos un elemento minimal.

Resolución

Una sentencia que sirve es:

$$\varphi : \forall x(\neg R(x, x)) \wedge \forall x(\forall y(\forall z(R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z)))) \wedge \exists x(\forall y(x \neq y \rightarrow \neg R(y, x)))$$

Si se quiere, se puede acortar a otra sentencia equivalente (usando irreflexividad al final):

$$\varphi' : \forall x(\forall y(\forall z(\neg R(x, x) \wedge R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z)))) \wedge \exists x(\forall y(\neg R(y, x)))$$