



Teórica 6: Grafos eulerianos y hamiltonianos

Los problemas relativos a grafos eulerianos y hamiltonianos tienen una gran cantidad de aplicaciones, como por ejemplo el problema del cartero chino, del viajante de comercio, de scheduling, etc. Tienen su origen en los comienzos de la teoría de grafos.

Aunque parecen dos problemas bastante similares en cuanto a su formulación, son muy diferentes desde el punto de vista de resolución computacional. Existen algoritmos polinomiales para saber si un grafo dado tiene un circuito euleriano. Sin embargo, no se conocen (y no se sabe si existen) algoritmos polinomiales para la versión hamiltoniana.

1. Grafos eulerianos

Volvamos al problema de los puentes de Königsberg. Si representamos a cada territorio mediante un vértice y cada puente por una arista, lo que obtenemos es un multigrafo. Euler estaba interesado en un circuito que pasara exactamente una vez por cada arista (por cada puente). Esto dio origen a las siguientes definiciones.

Definición 1.

- Un circuito C en un grafo (o multigrafo) G es un **circuito euleriano** si C pasa por todas las aristas de G una y sólo una vez.
- Un **grafo euleriano** es un grafo que tiene un circuito euleriano.

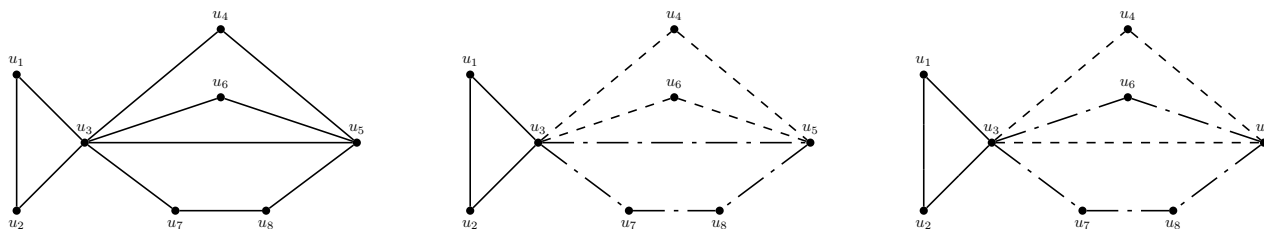
Teorema 1 (Teorema de Euler). *Sea G un grafo (o multigrafo) conexo. Las siguientes sentencias son equivalentes:*

1. G es euleriano.
2. Todos los vértices de G tienen grado par.
3. Las aristas de G pueden ser particionadas en ciclos (circuitos que no repitan vértices).

Demostración:

$1 \Rightarrow 2$) G euleriano y conexo. Sea C un circuito euleriano: $v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_k v_0$. Cada ocurrencia de un vértice dado en C contribuye en 2 al grado de ese vértice. Como cada arista de G aparece exactamente una vez en C , el grado de un vértice v está dado por el doble de la cantidad de apariciones de v en C (no hay aristas que aporten al grado fuera de C ni aristas que aparezcan dos veces en C). Por lo tanto, todo vértice tiene grado par.

$2 \Rightarrow 3$) Todo vértice de G tiene grado par. Veamos que las aristas de G pueden ser particionadas en ciclos (circuitos simples).





G tiene al menos una arista y no tiene vértices de grado 1, porque todo vértice tiene grado par. Como un bosque (con aristas) tiene al menos dos hojas (vértices de grado 1), G no puede ser bosque. Entonces G debe tener algún ciclo (circuito simple), Z_1 .

Sea $G_1 = (V, X_1)$ el grafo resultante de quitar de G las aristas de Z_1 . Si $X_1 = \emptyset$, finalizamos el procedimiento, siendo $\{Z_1\}$ la partición buscada. Si no, en G_1 todo vértice tiene grado par, porque los vértices por los que pasa Z_1 disminuyen su grado en 2 y el de los otros vértices queda igual. Como G_1 no tiene vértices de grado 1 y tiene aristas, G_1 tiene que tener un ciclo, Z_2 .

Sea $G_2 = (V, X_2)$ el grafo resultante de quitar de G_1 las aristas de Z_2 . Si $X_2 = \emptyset$, $\{Z_1, Z_2\}$ define una partición de las aristas de G en ciclos. Si no, repetimos el procedimiento generando un nuevo ciclo Z_3 .

Continuamos de esta manera hasta que $X_k = \emptyset$. Entonces, $\{Z_1, \dots, Z_k\}$ será una partición de las aristas de G en ciclos (circuitos simples).

3 \implies 1) Ahora veamos que G tiene un circuito euleriano. Definimos $Z = Z_1$.

Si $k = 1$, entonces $Z = Z_1$ es el circuito euleriano que buscamos.

Si $k > 1$, hay otro circuito Z_i ($i = 2, \dots, k$) con al menos un vértice v en común con Z (porque G es conexo). Extendemos el circuito Z comenzando por v , recorriendo las aristas de Z y luego las de Z_i , volviendo finalmente a v . El nuevo Z es un circuito que contiene exactamente una vez cada arista del anterior Z y de Z_i .

Continuando con este procedimiento hasta incluir a todos los circuitos Z_i construiremos un circuito Z conteniendo exactamente una vez las aristas de cada Z_i , $i = 1, \dots, k$. Ésto implica que G es euleriano. ■

A partir de la idea de la demostración del teorema de Euler se puede definir un algoritmo para construir un circuito euleriano para un grafo que tiene todos sus vértices de grado par.

La idea es construir un circuito que no use la misma arista más de una vez, partiendo de cualquier vértice u_0 y avanzando mientras sea posible. Cuando ya no sea posible avanzar, debemos estar en u_0 , porque, como todos los vértices tienen grado par, cada vez que *llegamos* a un vértice seguro también podemos *salir* de ese vértice. Así formamos un circuito Z . Si no quedan aristas del grafo sin recorrer, terminamos el procedimiento obteniendo un circuito euleriano.

Si aún quedan aristas sin recorrer, sea $G_1 = (V, X_1)$, donde X_1 son las aristas aún no recorridas. Elegimos cualquier vértice u_1 de G_1 sobre el que incida alguna arista de Z y alguna de X_1 (seguro este vértice existe porque G es conexo). A partir de u_1 construimos un circuito de G_1 avanzando mientras sea posible. Seguro volveremos a u_1 , porque G_1 tiene todos sus vértices de grado par (o 0). Intercalamos este nuevo circuito en Z las aristas del nuevo circuito.

Siguiendo este esquema, vamos *pegando* circuitos en Z hasta incluir a todas las aristas de G .



```
circuitoEuleriano( $G$ )
  entrada:  $G = (V, X)$  conexo con todos los vertices de grado par
  salida:  $Z$  circuito euleriano

   $v \leftarrow$  cualquier vertice de  $V$ 
   $Z \leftarrow$  un circuito que empieza y termina en  $v$ 
  mientras exista  $e \in X \setminus Z$  hacer
    elegir  $w$  tal que existe  $(w, u) \in Z$  y  $(w, z) \in X \setminus Z$ 
     $D \leftarrow$  un circuito que empieza y termina en  $w$  con aristas de  $X \setminus Z$ 
     $Z \leftarrow$  unir  $Z$  y  $D$  por medio de  $w$ 
  fin mientras
  retornar  $Z$ 
```

El algoritmo es $\mathcal{O}(m)$.

Definición 2.

- Un **camino euleriano** en un grafo (o multigrafo) G es un camino que pasa por cada arista de G una y sólo una vez.
- Un grafo orientado o digrafo, se dice **euleriano** si tiene un circuito orientado que pasa por cada arco de G una y sólo una vez.

Teorema 2. *Un grafo (o multigrafo) conexo tiene un camino euleriano (y no un circuito) si, y sólo si, tiene exactamente dos vértices de grado impar.*

Demostración:

\Rightarrow) $G = (V, X)$ tiene un camino euleriano $P : (x, u), \dots, (w, y)$. Agregando la arista (x, y) a G , obtenemos $G' = G + (x, y)$ con el circuito euleriano $P + (x, y)$ (G' puede ser multigrafo). Por el teorema anterior todos los vértices tiene grado par en G' . Como $d_G(v) = d_{G'}(v) \forall v \in V \setminus \{x, y\}$, $d_G(x) = d_{G'}(x) - 1$ y $d_G(y) = d_{G'}(y) - 1$, $d_G(v)$ es par $\forall v \in V \setminus \{x, y\}$ y $d_G(x)$ y $d_G(y)$ son impares.

\Leftarrow) Sean x y y los dos vértices de G con grado impar y $G' = G + (x, y)$ (G' puede ser multigrafo). Como G' tiene todos los vértices de grado par, por el teorema anterior G' tiene un circuito euleriano, C . Entonces $C - (x, y)$ es un camino euleriano de $G' - (x, y) = G$. ■

Teorema 3. *Un digrafo conexo es euleriano si, y sólo si, para todo vértice v de G se verifica que $d_{in}(v) = d_{out}(v)$.*

Demostración: Similar al Teorema 1. ■

2. Problema del cartero chino (Kwan, 1962)

Kwan era un cartero chino que debía entregar la correspondencia caminando por las calles y quería minimizar la longitud de su caminata. Formalmente:

Definición 3. Dado un grafo $G = (V, X)$ con longitudes asignadas a sus aristas, $l : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, el **problema del cartero chino** consiste en encontrar un circuito que pase por cada arista de G **al menos** una vez de longitud mínima.



- Si G es euleriano, un circuito euleriano es la solución del problema del cartero chino.
- Hay algoritmos polinomiales para el problema del cartero chino cuando G es orientado o no orientado.
- Pero no se conocen algoritmos polinomiales (el problema no está computacionalmente resuelto) si el grafo es mixto (algunas aristas orientados y otros no).

Vamos a volver a este problema en un par de clases.

3. Grafos hamiltonianos

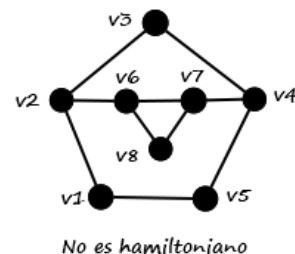
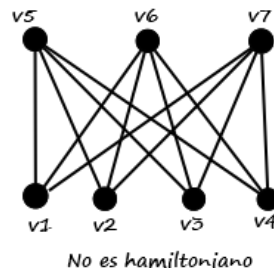
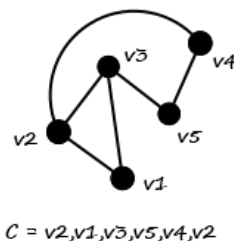
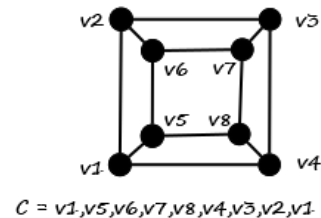
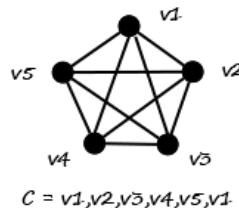
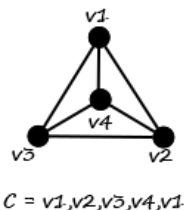
Como comentamos hace algunas semanas, la noción de lo que hoy conocemos como ciclo hamiltoniano ya se mencionó en 1771, cuando Vandermonde estudió el *problema del caballo de ajedrez*, cuyo objetivo era encontrar un camino circular de un caballo de ajedrez que visite todas las casillas del tablero exactamente una vez.

Muchos años después, en 1855, Kirkman volvió a esta idea. Un tiempito más tarde, en 1857, Hamilton creó el *juego icosiano*, y aunque fue un fracaso comercial, difundió este problema como unos desafíos ingeniosos y se ganó el reconocimiento imponiendo su nombre a este concepto.

Definición 4.

- Un ciclo en un grafo G es un *ciclo hamiltoniano* si pasa por cada vértice de G una y sólo una vez.
- Un grafo se dice *hamiltoniano* si tiene un ciclo hamiltoniano.
- Un camino en un grafo G es un *camino hamiltoniano* si pasa por cada vértice de G una y sólo una vez.

Ejemplo 1. Para los primeros cuatro grafos se muestra un ciclo hamiltoniano, mientras los dos últimos no son grafos hamiltonianos.





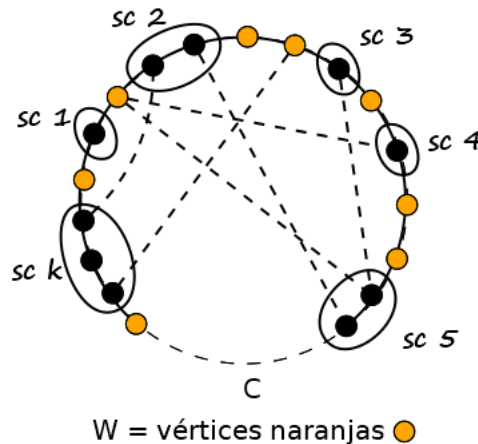
Si en el problema del caballo, pensamos las casillas del tablero como los vértices de un grafo, y hacemos dos vértices adyacentes si es posible ir entre las casillas correspondientes mediante movimientos de caballo, la solución al problema es encontrar un ciclo hamiltoniano en este grafo.

No se conocen buenas caracterizaciones para grafos hamiltonianos. Es decir, no se conocen caracterizaciones que deriven en algoritmos polinomiales para decidir si un grafo es hamiltoniano o no.

Vamos a estudiar distintas condiciones necesarias o suficientes para la existencia de un ciclo hamiltoniano en un grafo dado. Comencemos por una condición necesaria.

Teorema 4. Sea $G = (V, X)$ un grafo conexo. Si existe $W \subset V$ tal que $G \setminus W$ tiene c componentes conexas con $c > |W|$ entonces G no es hamiltoniano.

Demostración: Por el absurdo. Supongamos que G es hamiltoniano y sea C un ciclo hamiltoniano de G . Al quitar los vértices de W , C queda dividido en subcaminos, sc_1, \dots, sc_k . Seguro $k \leq |W|$.

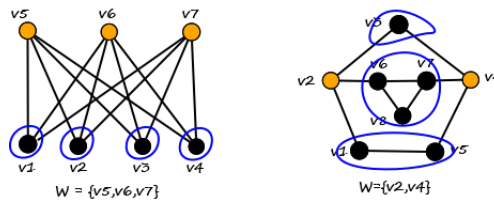


Es posible que más de uno de estos subcaminos pertenezcan a la misma componente conexa, porque pueden *estar unidos* por aristas fuera de C , pero seguro, no puede haber más componentes conexas que k , porque cada subcamino debe pertenecer a la misma componente y todo vértices de $V \setminus W$ está en alguno de los subcaminos (por ser C hamiltoniano).

Entonces $G \setminus W$ tiene a lo sumo $|W|$ componentes conexas contradiciendo las hipótesis del teorema.

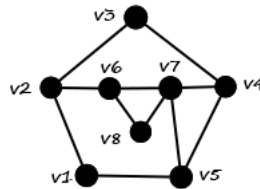
■

Ejemplo 2. Mediante este teorema, tomando los W indicados, podemos demostrar que los siguientes grafos no son hamiltonianos:



En cambio, esta condición no es suficiente (la recíproca de este teorema es falsa), como se puede comprobar en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3. *Este grafo no es hamiltoniano, sin embargo no existe W que cumpla las hipótesis del teorema.*



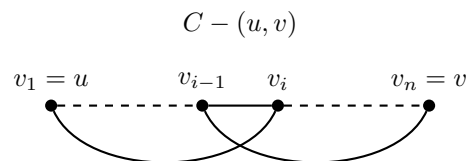
Ahora, estudiemos teoremas que nos brindan condiciones suficientes.

Teorema 5 (Dirac 1952). *Sea $G = (V, X)$ un grafo de n vértices, con $n \geq 3$ y tal que para todo $v \in V$ se verifica que $d(v) \geq n/2$ entonces G es hamiltoniano.*

Demostración: Por el absurdo. Supongamos que G no es hamiltoniano.

Construimos el grafo $G' = (V, X')$ agregando aristas a G mientras el grafo resultante no sea hamiltoniano. Es decir, que G' no es hamiltoniano, pero para toda arista que le agreguemos el grafo resultante pasa a ser hamiltoniano. Se puede hacer esto porque G no es hamiltoniano y K_n sí lo es.

Sea $(u, v) \notin X'$. Entonces $G' + (u, v)$ tiene un ciclo hamiltoniano, C , y $(u, v) \in C$. $C - (u, v)$ es un camino hamiltoniano en G' .



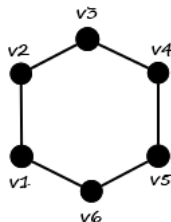
No puede existir $2 \leq i \leq n-1$ tal que $v_{i-1} \in N(v)$ y $v_i \in N(u)$, porque $v_1 v_2 \dots v_{i-1} v_n v_{n-1} \dots v_i v_1$ sería un ciclo hamiltoniano en G' (recordar que $N(w)$ expresa el conjunto de vértices adyacentes a w).

Entonces, por cada vértice adyacente a u en G' hay un vértice de $V - \{v\}$ no adyacente a v (el que está al lado en C). Si $d_{G'}(u) = p$, entonces $d_{G'}(v) \leq n-1-p$. Como $d_{G'}(w) \geq d_G(w) \forall w \in V$, $d_{G'}(u) = p \geq n/2$ y entonces $d_G(v) \leq n-1-n/2 = n/2-1$, contradiciendo que $d(v) \geq n/2$. Por lo tanto, G tiene que ser hamiltoniano. ■



Esta no es una condición necesaria (la recíproca de este teorema es falsa), como lo muestra este ejemplo.

Ejemplo 4. *Este es un grafo hamiltoniano, sin embargo $d(v) = 2 \forall v \in V$ y $n/2 = 3$, es decir que no cumple las hipótesis del teorema de Dirac.*



El teorema de Ore generaliza este resultado. Su demostración es similar.

Teorema 6 (Ore 1960). *Sea $G = (V, X)$ un grafo de n vértices, con $n \geq 3$ y tal que para todo par de vértices no adyacentes $v, u \in V$ se verifica que $d(u) + d(v) \geq n$ entonces G es hamiltoniano.*

4. Problema del viajante de comercio (TSP)

Imaginemos que un viajante debe recorrer un conjunto determinado de ciudades. Cuenta con un vehículo para realizar el viaje, debe visitar exactamente una vez cada ciudad y finalmente retornar al origen. El viajante, obviamente, quiere seguir el *mejor* recorrido.

¿Pero cuál es el *mejor* recorrido? ¿El más corto (minimiza la distancia recorrida)? ¿El más rápido (minimiza el tiempo total de viaje)?

En términos de grafos, es encontrar un ciclo hamiltoniano de longitud mínima en un grafo completo con longitudes asociadas a sus aristas. Formalmente:

Definición 5. Dado un grafo $G = (V, X)$ con longitudes asignadas a las aristas, $l : X \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$, queremos determinar un ciclo hamiltoniano de longitud mínima. Es decir, encontrar C^0 tal que:

$$l(C^0) = \min\{l(C) \mid C \text{ es un ciclo hamiltoniano de } G\}.$$

Se trata de una generalización del problema de ciclo hamiltoniano. Si queremos saber si un grafo G tiene un ciclo hamiltoniano, podemos transformarlo en una instancia del problema TSP definiendo un grafo $G' = (V, X')$ completo y $l : X \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ como $l(e) = 1$ para $e \in X$ y $l(e) = n + 1$ para $e \in X' \setminus X$. La respuesta de TSP en G' será un ciclo hamiltoniano de longitud n si y sólo si G tiene un ciclo hamiltoniano. Así, utilizando TSP, resolvemos el problema de saber si G es hamiltoniano.

Como consecuencia de esto, sabemos que no se conocen algoritmos polinomiales para resolver el problema del viajante de comercio (porque si no, existiría para ciclo hamiltoniano y ya mencionamos que no). Tampoco se conocen algoritmos ϵ -aproximados polinomiales para el TSP general (sí se conocen cuando las distancias son euclidianas).

Y si necesitamos resolverlo, ¿qué hacemos? En la próxima clase veremos...



5. Bibliografía recomendada

- Capítulo 4 de J. Bondy and U. Murty, *Graph theory with applications*, Macmillan, 5ta edición, 1982.
- Capítulo 6 de J. Gross and J. Yellen, *Graph theory and its applications*, CRC Press, 1999.