Correctitud y Completitud

Sabrina Gisele Silvero *

20 de noviembre de 2020

Definición. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden, Γ un conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas, y $\mathcal{C}$ una clase de $\mathcal{L}$-estructuras.

Decimos que **Γ es correcta con respecto a $\mathcal{C}$** si para toda $\mathcal{L}$-fórmula φ se tiene:

$$\vdash_\Gamma \varphi \Longrightarrow \mathcal{C} \models \varphi$$

Decimos que **Γ es completa con respecto a $\mathcal{C}$** si para toda $\mathcal{L}$-fórmula φ se tiene:

$$\mathcal{C} \models \varphi \Longrightarrow \vdash_\Gamma \varphi$$

Teorema 1. El sistema axiomático SQ es correcto y completo respecto a la clase de todos los modelos.

Teorema 2 (Completitud fuerte de SQ (y de $SQ^=$))**.** Fijado un lenguaje de primer orden, sea Γ un conjunto de fórmulas, y φ una fórmula. Entonces vale:

$$\Gamma \models \varphi \Longrightarrow \Gamma \vdash_{SQ} \varphi$$

Vale el resultado anÃ¡logo para $SQ^=$ sobre la clase de estructuras con igualdad.

Teorema 3 (Correctitud fuerte de SQ (y de $SQ^=$))**.** Fijado un lenguaje de primer orden, sea Γ un conjunto de fórmulas, y φ una fórmula. Entonces vale:

$$\Gamma \vdash_{SQ} \varphi \Longrightarrow \Gamma \models \varphi$$

Vale el resultado análogo para $SQ^=$ sobre la clase de estructuras con igualdad.

Notación. Sea $\mathcal{M}$ un modelo y v una valuación. Usaremos $\mathcal{M}, v \models \varphi$ en lugar de $\mathcal{M} \models \varphi[v]$.

Ejercicio 1. Sea Δ un sistema axiomático de primer orden correcto y completo con respecto a una clase de $\mathcal{L}$-estructuras $\mathcal{C}$ y sea Γ un conjunto de fórmulas consistente (en el sentido usual, con respecto a SQ). Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

1. $\Delta \cup \Gamma$ es completo con respecto a $\mathcal{C}$.
2. $\Delta \cup \Gamma$ es correcto con respecto a $\mathcal{C}$.
3. Si $\mathcal{C} \models \Gamma$, $\Delta \cup \Gamma$ es correcto con respecto a $\mathcal{C}$.

*Basado en apuntes de Sergio Abriola, María Emilia Descotte, y Edwin Pin

1. $\Delta \cup \Gamma$ es completo con respecto a $\mathcal{C}$ **VERDADERO**

   Supongamos que $\mathcal{C} \models \varphi$. Como Δ es completo con respecto a $\mathcal{C}$, entonces $\vdash_\Delta \varphi$. Y como $\Delta \subseteq \Delta \cup \Gamma$, entonces $\vdash_{\Delta \cup \Gamma} \varphi$.

2. $\Delta \cup \Gamma$ es correcto con respecto a $\mathcal{C}$ **FALSO**

   Tomando $\Delta = SQ$ y $\mathcal{L} = \mathcal{R}$, con $\mathcal{R}$ un símbolo de relación binario, $\mathcal{C}$ como el conjunto de todos las $\mathcal{L}$-estructuras y $\Gamma =(\forall$x)x$\mathcal{R}$x. Como podemos notar, cumplimos con todas las condiciones del enunciado, pero $\Delta \cup \Gamma$ no es correcto con respecto a $\mathcal{C}$ (hay estructuras que satisfacen $(\forall$x)x$\mathcal{R}$x pero otras no).

3. Si $\mathcal{C} \models \Gamma$, $\Delta \cup \Gamma$ es correcto con respecto a $\mathcal{C}$ **VERDADERO**

   Supongamos $\vdash_{\Delta \cup \Gamma} \varphi$. Como $\mathcal{C} \models \Gamma$ y Δ es completo respecto a $\mathcal{C}$, $\vdash_\Delta \Gamma$

   Entonces una demostración de φ que use formulas de Γ la podemos convertir en una demostración que use solo formulas de Δ. Obteniendo que $\vdash_\Delta \varphi$.

   Luego, por correctitud de Δ, $\mathcal{C} \models \varphi$.

Ejercicio 2. Decimos que una estructura de primer orden es de *equivalencia* si todas sus relaciones binarias son de equivalencia. Sea $\mathcal{L} = \{\mathcal{R}\}$ un lenguaje con un símbolo de predicado binario.

a) Proponer una axiomatización SQ_{equiv} que extienda a SQ y que sea correcta y completa con respecto a la clase $\mathcal{C}_e$ de todas las $\mathcal{L}$-estructuras de equivalencia.

b) Demostrar que la axiomatización propuesta en el ítem anterior es completa pero no correcta con respecto a la clase de todas las $\mathcal{L}$-estructuras.

Demostración. a) Extendemos a SQ con los siguientes axiomas:

SE1	$\forall x(xRx)$
SE2	$\forall x \forall y\ (xRy \to yRx)$
SE3	$\forall x \forall y \forall z\ ((xRy \wedge yRz) \to xRz)$

Para probar la correctitud, tenemos que ver que para cualquier $\mathcal{L}$-fórmula φ, vale que $\vdash_{SQ_{equiv}} \varphi$ implica $\mathcal{C}_e \models \varphi$. Supongamos $\vdash_{SQ_{equiv}} \varphi$. Por definición de $\vdash_{SQ_{equiv}}$, esto significa que $\{SE1, SE2, SE3\} \underbrace{\vdash}_{\vdash_{SQ}} \varphi$. Luego, por correctitud fuerte de SQ, tenemos que $\{SE1, SE2, SE3\} \models \varphi$. Ahora, si probamos que toda $\mathcal{L}$-estructura en $\mathcal{C}_e$ satisface $\{SE1, SE2, SE3\}$ (es decir que $\mathcal{C}_e \models \{SE1, SE2, SE3\}$) por definición de la consecuencia semántica $\models$ tendríamos que $\mathcal{C}_e \models \varphi$.

Si probamos que para cualquier modelo de la clase y cualquier valuación, los axiomas son verdaderos entonces habremos probado que son válidos en la clase. Fijado un modelo arbitrario $\mathcal{M} \in \mathcal{C}_e$ y una valuación v, veamos que $\mathcal{C}_e \models SE2$, las otras dos quedan de ejercicio.

$\mathcal{M}, v \models \forall x \forall y\ (xRy \to yRx)$ $\qquad (\mathcal{M}, v \models SE2)$

sii para todo $a \in |\mathcal{M}|$ vale que $\mathcal{M}, v[x \mapsto a] \models \forall y\ (xRy \to yRx)$

sii para todos $a, b \in |\mathcal{M}|$ tenemos que $\mathcal{M}, v[x \mapsto a, y \mapsto b] \models (xRy \to yRx)$

sii para todos $a, b \in |\mathcal{M}|$ no vale $\mathcal{M}, v[x \mapsto a, y \mapsto b] xRy$ o vale $\mathcal{M}, v[x \mapsto a, y \mapsto b] \models yRx$

sii para todos $a, b \in |\mathcal{M}|$ no vale $aR^{\mathcal{M}}b$ o vale $bR^{\mathcal{M}}a$

(Vale por ser $\mathcal{M}$ una estructura de equivalencia)

Para ver la completitud, supongamos $C_e \models \varphi$. Como cualquier estructura que satisface $\{SE1, SE2, SE3\}$ es de equivalencia, y como cualquier estructura de equivalencia satisface φ, tenemos en particular que $\{SE1, SE2, SE3\} \models \varphi$. Por lo tanto, por completitud fuerte de SQ, $\{SE1, SE2, SE3\} \vdash \varphi$, que es lo mismo que decir $\vdash_{SQ_{equiv}} \varphi$.

b) La completitud sale de la Observación, pero también podemos verlo así: si $\mathcal{C}$ es la clase de todas las estructuras y $\mathcal{C} \models \varphi$, entonces por completitud de SQ vale $\vdash_{SQ} \varphi$, lo cual implica trivialmente que $\{SE1, SE2, SE3\} \vdash_{SQ} \varphi$, que es lo mismo que decir $\vdash_{SQ\cup\{SE1,SE2,SE3\}} \varphi$, o sea $\vdash_{SQ_{equiv}} \varphi$. Para probar la no correctitud, supongamos en cambio que esta axiomatización es correcta. Entonces, como trivialmente $\vdash_{SQ_{equiv}} SE1$, la fórmula $SE1$ (reflexividad) debería ser verdadera en toda $\mathcal{L}$-estructura, lo cual no es cierto.

$\square$

Ejercicio 3. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con igualdad, un símbolo de predicado binario P, y un símbolo de constante r. Sea la clase de modelos $\mathcal{A} = \{\mathcal{M} \mid P^{\mathcal{M}}$ define sobre $\mathcal{M}$ un árbol con raíz $r^{\mathcal{M}}\}$ (es decir, $P^{\mathcal{M}}(a, b)$ afirma que $a \in |\mathcal{M}|$ es el padre de $b \in |\mathcal{M}|$), donde por árbol se entiende cualquier árbol dirigido donde cada nodo puede tener una cantidad arbitraria de hijos.

Considerar la axiomatización SQ_{Tree}, que extiende a la axiomatización $SQ^{=}$ con las siguientes fórmulas:

$$\begin{array}{rl} \textbf{SQ8} & (\forall x)\big(\neg P(x, r) \wedge \neg P(x, x)\big) \\ \textbf{SQ9} & (\forall x)(\forall y)(\forall z)\big((P(y, x) \wedge P(z, x)) \to (y = z)\big) \\ \textbf{SQ10} & (\forall x)\big(((\forall y)\neg P(y, x)) \to x = r\big) \end{array}$$

a) Demostrar que los axiomas $SQ8, SQ9$ y $SQ10$ son válidos en $\mathcal{A}$. Usar esto para demostrar que SQ_{Tree} es correcta con respecto a $\mathcal{A}$.

b) Sea $\varphi = (\forall x)(\forall y)\big(P(x, y) \to \neg P(y, x)\big)$. Demostrar que existe un modelo $\mathcal{M}$ tal que todos los axiomas de SQ_{Tree} son válidos en $\mathcal{M}$, pero $\mathcal{M} \not\models \varphi$.

c) Demostrar que φ es válida en $\mathcal{A}$ y concluir que SQ_{Tree} no es completa respecto a $\mathcal{A}$.

Resolución (a). Para ver que los axiomas son validos en la clase $\mathcal{A}$ primero interpretemos que significar las formulas interpretadas en un modelo de la clase $\mathcal{A}$

SQ8	Los nodos son irreflexivos y ningún nodo tiene a la raíz como hijo.
SQ9	Los nodos no comparten hijos.
SQ10	El único nodo sin padre es la raíz r.

Probemos formalmente que valen.

Si probamos que para cualquier modelo de la clase y cualquier valuación, los axiomas son verdaderos entonces habremos probado que son válidos en la clase. Fijado un modelo arbitrario $\mathcal{M} \in \mathcal{A}$ y una valuación v, veamos axioma por axioma

SQ8. $\mathcal{M}, v \models (\forall x)\big(\neg P(x, r) \wedge \neg P(x, x)\big)$ si y sólo si

$$\mathcal{M}, v[x \mapsto a] \models \big(\neg P(x, r) \wedge \neg P(x, x)\big)$$

para cualquier $a \in |\mathcal{M}|$. Y esto ocurre si y sólo si

$$\mathcal{M}, v[x \mapsto a] \models \neg P(x, r) \ \text{ y } \ \mathcal{M}, v[x \mapsto a] \models \neg P(x, x)$$

para cualquier $a \in |\mathcal{M}|$. Siguiendo las definiciones semanticas, lo anterior sucede si y sólo si

$$\mathcal{M}, v[x \mapsto a] \not\models P(x, r) \ \text{ y } \ \mathcal{M}, v[x \mapsto a] \not\models P(x, x)$$

para cualquier $a \in |\mathcal{M}|$. Finalmente llegamos a que debe suceder

$$(a, r^M) \notin P^M \ \text{ y } \ (a, a) \notin P^M \tag{1}$$

para cualquier $a \in |\mathcal{M}|$.

Es **muy importante** llegar hasta esta instancia para luego poder justificar la validez de la fórmula. Al principio sólo tenemos una fórmula, y una fórmula es solamente una serie de símbolos. Recien en esta instancia tenemos una (o más) condición sobre una relación (que es un elemento matemático) y sabemos que esta relación se interpretara como dicta la definición de $\mathcal{A}$.

Ahora podemos decir que, en la clase $\mathcal{A}$, todo elemento es irreflexivo, en particular para un a cualquiera sucede que $(a, a) \notin P^M$. De igual manera justificamos que, al ser r la raiz, no puede tener padre, por lo tanto $(a, r^M) \notin P^M$. Concluimos que SQ8 es válido en la clase.

SQ9. En este caso saltearé algunos pasos en la demostración de validez, para los parciales es necesario que si saltean algunos pasos los justifiquen adecuadamente. En este punto veremos un ejemplo del tipo de cosas que pueden "saltearse con justificación adecuada". Siempre usen las definiciones de satisfacción hasta llegar a las condiciones sobre elementos del modelo para luego poder justificar su validez.

$$\mathcal{M}, v \models (\forall x)(\forall y)(\forall z)\big((P(y,x) \wedge P(z,x)) \to (y = z)\big)$$

si y sólo si

$$\mathcal{M}, v[x \mapsto a, y \mapsto b, z \mapsto c] \models (P(y,x) \wedge P(z,x)) \to (y = z)$$

para elementos arbitrarios $a, b, c \in |\mathcal{M}|$. Para ahorrar espacio llamemos a una valuación $v' = v[x \mapsto a, y \mapsto b, z \mapsto c]$. La ultima fórmula equivale a

$$\mathcal{M}, v' \not\models P(y,x) \wedge P(z,x) \;\text{ o }\; \mathcal{M}, v' \models (y = z)$$

para elementos arbitrarios $a, b, c \in |\mathcal{M}|$. Si y sólo si

$$\mathcal{M}, v' \not\models P(y,x) \;\text{ o }\; \mathcal{M}, v' \not\models P(z,x) \;\text{ o }\; \mathcal{M}, v' \models (y = z)$$

para elementos arbitrarios $a, b, c \in |\mathcal{M}|$. Si y sólo si

$$(b, a) \notin P^M \;\text{ o }\; P(c, a) \notin P^M \;\text{ o }\; (b, c) \in =^M \tag{2}$$

para elementos arbitrarios $a, b, c \in |\mathcal{M}|$. Ahora que tenemos una condición sobre los elementos del modelo tenemos que probar que se cumple.

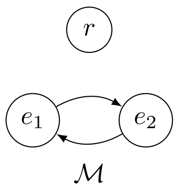
Como tengo 3 disyunciones, en lugar de ver que siempre se cumple alguna de las 3 voy a suponer que no se cumple ninguna y ver que eso no es posible. Eso quiere decir que tengo dos elementos distintos b, c tal que ambos tienen como hijo al elemento a. En un árbol eso no puede suceder. Absurdo.

SQ10. Este punto queda como ejercicio.

Como la parte derecha de estos 'sii' valen sobre la clase de modelos donde $P^{\mathcal{M}}$ define un árbol con raíz $r^{\mathcal{M}}$, probamos que todos los axiomas de SQ_{Tree} son válidos en $\mathcal{A}$. Ahora, sea φ una fórmula con $\vdash_{SQ_{\text{Tree}}} \varphi$, o equivalentemente $\{SQ8, SQ9, SQ10\} \vdash_{SQ^=} \varphi$. Entonces, por correctitud fuerte de $SQ^=$, $\{SQ8, SQ9, SQ10\} \models \varphi$. Como por lo visto anteriormente tenemos que $\mathcal{A} \models \{SQ8, SQ9, SQ10\}$, tenemos que $\mathcal{A} \models \varphi$, como queríamos ver para probar la correctitud del sistema axiomático SQ_{Tree} respecto a $\mathcal{A}$.

□

Resolución (b). La fórmula $\varphi = (\forall x)(\forall y)\big(P(x,y) \to \neg P(y,x)\big)$ indica que la relación es antisimétrica. Por lo tanto debemos concentrarnos en dar un modelo donde la relación no sea antisimétrica, pero que siga cumpliendo todos axiomas de SQ_{Tree}. Este es el punto en el que debemos notar que "algo" le falta a la axiomatización; los árboles son antisimétricos pero nuestros axiomas no lo están forzando. Consideremos el siguiente modelo:



$\mathcal{M}$

Debemos mostrar que todos los axiomas son válidos en el modelo, para lo cual podemos usar que ya sabemos cómo se interpreta cada uno en una $\mathcal{L}$-estructura.

Veamos que SQ8 vale en el modelo. No hay elementos reflexivos y tampoco hay elementos que tengan a r como hijo. Vale.

Veamos que SQ9 vale en el modelo. No hay elementos con dos hijos. Vale.

Veamos que SQ10 vale en el modelo. Todos los elementos tienen padre menos r. Vale.

El paso siguiente es ver que φ no vale en el modelo. Ahora bien, $\mathcal{M} \models \varphi$ sii para todo $a, b \in |\mathcal{M}|$ tenemos que $(a, b) \in P^{\mathcal{M}} \Rightarrow (b, a) \notin P^{\mathcal{M}}$, pero tenemos que $(e_1, e_2) \in P^{\mathcal{M}}$ y $(e_2, e_1) \in P^{\mathcal{M}}$. Luego $\mathcal{M} \not\models \varphi$. □

Resolución (c). Todo árbol es antisimétrico, por lo que φ valdrá en toda estructura en $\mathcal{A}$.

Tenemos entonces que $\mathcal{A} \models \varphi$. Supongamos que SQ_{Tree} fuese completa respecto a $\mathcal{A}$. Entonces valdría que $SQ_{\text{Tree}} \vdash_{SQ^=} \varphi$, pero por correctitud (fuerte) de $SQ^=$ esto implicaría que $SQ_{\text{Tree}} \models \varphi$, lo cual no es cierto por el item (b). Por lo tanto, SQ_{Tree} no es completa respecto a $\mathcal{A}$.

□

Ejercicio 4. Sea $\mathcal{L} = \{c, f, R, =\}$ un lenguaje de primer orden con igualdad, donde c es un símbolo de constante, f es un símbolo de función unaria y R es un símbolo de predicado binario. Sea $\mathcal{Z} = \{\mathbb{Z}, 0, |\cdot|, <\}$ la estructura de los números enteros con la función 'valor absoluto' y con la relación de orden estricto usual. Consideremos SQ_Z, la axiomatización que extiende a $SQ^=$ con los siguientes axiomas:

Z1 $\forall x(f(x) = x \to \neg(xRf(x)))$
Z2 $\forall x(\neg(f(x) = x) \to xRf(x))$
Z3 $\forall x(x \neq c \to \exists y(x \neq y \wedge f(x) = f(y) \wedge \forall z(f(z) = f(x) \to (z = x \vee z = y))))$

a) Probar que SQ_Z es correcta respecto a $\mathcal{Z}$.

b) Demostrar SQ_Z no es completa respecto a $\mathcal{Z}$.

Demostración. a) Supongamos $\vdash_{SQ_Z} \varphi$. Esto significa que $\{Z1, Z2, Z3\} \vdash_{SQ^=} \varphi$, que por correctitud fuerte de $SQ^=$ implica que $\{Z1, Z2, Z3\} \models \varphi$. Ahora podemos ver que $\mathcal{Z}$ satisface $Z1$, $Z2$, y $Z3$ interpretandolas semanticamente, y obtenemos que $\mathcal{Z} \models \varphi$.

b) Para probar la no completitud, procedamos como en el ejercicio anterior y busquemos una fórmula ψ y un modelo $\mathcal{M}$ de SQ_Z tal que $\mathcal{M} \not\models \psi$ pero $\mathcal{Z} \models \psi$. Una posibilidad es tomar $\mathcal{M} = \langle \{0\}, 0, id, \emptyset, = \rangle$ (ver que aquí son verdaderas $Z1, Z2, Z3$) y $\psi : \exists x \exists y(x \neq y)$.

Ahora, vemos que $\mathcal{Z} \models \psi$, ya que $\mathbb{Z}$ tiene al menos dos elementos distintos. Si valiese que $\vdash_{SQ_Z} \psi$, tendríamos que $\{Z1, Z2, Z3\} \vdash \psi$, lo cual por correctitud fuerte de $SQ^=$ implica que $\{Z1, Z2, Z3\} \models \psi$, pero esto no es cierto por el $\mathcal{M}$ que construimos antes, que cumplía $\mathcal{M} \models \{Z1, Z2, Z3\}$ pero $\mathcal{M} \not\models \psi$. Luego $\not\vdash_{SQ_Z} \psi$ y por lo tanto SQ_Z no es completa respecto a $\mathcal{Z}$.

□