Probar que: $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \phi_x(7) = 3 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$ no es comp.

x Reducción a HALT.

- O sea: Supongamos que ~~tenemos~~ una manera/programa p' computar f, nos armamos una manera/programa p' computar HALT.

Pista: ~~Busquemos~~ algún e / f(e) me de info s/ HALT.

e_x $\quad f(e_x)$ $\quad HALT(x,x)$

Pista 2:

$$e_x \begin{bmatrix} Z_1 \leftarrow \phi_x(x) \\ Y \leftarrow 3 \end{bmatrix} \quad f(e_x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \phi_x(x)\downarrow \\ & \end{cases}$$

$$f(e_x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \phi_{e_x}(7) = 3 \text{ si: } \phi_x(x)\downarrow \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

La pregunta es: ¿cómo calculo e_x a partir de x?

Escaneado con CamScanner

→ No podemos poner ctes en los progs! solo vars.

→ ~~$Z_1 \leftarrow \Phi_V(V)$ $V \leftarrow x$ $x \leftarrow 3$~~

Entonces, si yo quiero escribir $Z_1 \leftarrow \Phi_{x}(x)$.

tengo que hacer

$$\begin{array}{l} V \leftarrow x \\ Z_1 \leftarrow \Phi_V(V) \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} V \leftarrow V+1 \\ \vdots \\ V \leftarrow V+1 \end{array}\right\} x \text{ veces} \\ Z_1 \leftarrow \Phi_V(V) \end{array} \right.$$

~~En general puedo construir un prog~~

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} V \leftarrow V+1 \\ \vdots \\ V \leftarrow V+1 \end{array}\right\} x \text{ veces} \\ \left.\begin{array}{l} Z_1 \leftarrow \Phi_V(V) \\ Y \leftarrow 3 \end{array}\right| e \end{array}\right] = e_x.$$

$$e_0 = \# \begin{array}{l} Z_1 \leftarrow \Phi_V(V) \\ Y \leftarrow 3 \end{array}$$

$$f(e_0) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_0(0) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$e_3 = \# \begin{pmatrix} V \leftarrow V+1 \\ V \leftarrow V+1 \\ V \leftarrow V+1 \\ Z_1 \leftarrow \Phi_V(V) \\ Y \leftarrow 3 \end{pmatrix}$$

$$f(e_3) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_3(3)\downarrow \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

★

$$e_x = \# \begin{pmatrix} \left.\begin{array}{l} V \leftarrow V+1 \\ \vdots \\ V \leftarrow V+1 \end{array}\right\} x \text{ veces} \\ Z_1 \leftarrow \Phi_V(V) \\ Y \leftarrow 3 \end{pmatrix}$$

$$f(e_x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_x(x)\downarrow \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

¿Qué tan difícil es computar e_x si tenemos e?

$\text{rep}(V \leftarrow V+1, x)$; e Tarea: probar que $\text{rep}(V \leftarrow V+1, x)$ y $\text{concat}(i,j)(e_1, e_2)$ son p.r.s.

↳ esto es lo que dice el T del P.

Teorema: (del Parámetro - smn Theorem)

Dado $\Phi_e^{m+n}(x_1 .. x_m, y_1 .. y_n)$, existe $S_n^m(y_1 .. y_n, e)$ p.r.

tal que: $\Phi^m_{S^m_n(y_1 .. y_n, e)}(x_1 .. x_m) = \Phi_e^{m+n}(x_1 .. x_m, y_1 .. y_n, e)$

Ej: ~~Sean e_1, e_2~~ Probar q' la función $\circ(e_1, e_2)$ / $\phi^1_{\circ(e_1,e_2)}(x) = \phi^1_{e_1}(\phi^1_{e_2}(x))$ existe y es p.r.

$X_2 \leftarrow e_1$

$X_3 \leftarrow e_2$

$$Z_1 \leftarrow \phi_{e_2}(x) \qquad \boxed{\begin{array}{l} Z_1 \leftarrow \phi_{X_3}(X_1) \\ Y \leftarrow \phi_{X_2}(Z_1) \end{array}}_{\,e}$$

$$\cancel{Z_2} \leftarrow \phi_{e_1}(Z_1)$$

$$f(x,u,v) = \begin{cases} \phi_u(\phi_v(x)) & \text{si } \phi_u \circ \phi_v \downarrow \\ \uparrow & \text{si no.} \end{cases}$$

$$\phi^{(3)}_e(x,u,v) = f(x,u,v)$$

$\circ(e_1, e_2)$ = el nro de un prog q' computa la composición de e_1 y e_2.

$$\circ(e_1, e_2) = S^2_1(e_1, e_2, e) \qquad (\circ) \text{ es p.r.}$$

Veamos q' $(\circ)$ está bien definida:

$$\phi^1_{\circ(e_1,e_2)}(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def de} \\ (\circ)}}{=} \phi^1_{S^2_1(e_1,e_2,e)}(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def de} \\ S^2_1}}{=} \phi^{2+1}_e(x, e_1, e_2) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def de} \\ e}}{=} \phi^1_{e_2}(\phi^1_{e_1}(x))$$

Ej: Probar q' la función $i(e) = \begin{cases} 1 & \text{si } \phi^{(1)}_e \equiv id \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$ <u>no</u> es comp.

$\boxed{\text{Sup. que } i \text{ es comp}}$ Vamos a ver si podemos usar i para decidir HALT.

$\Downarrow$

$\boxed{\text{HALT comp}}$. ✗.

$$HALT(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } \phi_u(u)\downarrow \\ \uparrow & \text{si no.} \end{cases}$$

Quiero armar una f p.c./programa tq. sea/compute la id sii HALT(u)

e

$$\begin{array}{l} Z_1 \leftarrow \phi_u(u) \\ Y \leftarrow x \end{array} \quad \vdots \quad \begin{array}{l} Z_1 \leftarrow \phi_{X_2}(X_2) \\ Y \leftarrow X_1 \end{array}$$

$$f(x,u) = \begin{cases} x & \text{si } \phi_u(u)\downarrow \\ \text{✗} & \text{si no} \end{cases}$$

f tiene q' ser <u>p.c.</u>

¿Cómo hacemos para computar HALT a partir de i?

Tomamos e el nro del prog q' armamos / que computa a f.

A partir de e, calculamos e_u, $e \mapsto S_1^1(u, e)$

el nro de un prog donde $X_2 \leftarrow u$ (de una var.)

A este nuevo prog, e_u, lo miramos con i.

$$i(e_u) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi_{e_u}^{(1)} \equiv id \iff \Phi_u(u)\downarrow \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

$$\Phi_{e_u}^{(1)}(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def de } e_u \\ \text{y } S_1^1}}{=} \Phi_e^{(2)}(x, u) = \begin{cases} x & \text{si } \Phi_u(u)\downarrow \\ \uparrow & \text{si } \Phi_u(u)\uparrow \end{cases}$$

Entonces $i(e_u) = HALT(u)$

y como $e_u = S_1^1(u, e)$, puedo escribir esto como función de u

$h(u) = i(S_1^1(u, e)) = HALT(u)$.

Como S es p.r. y estoy suponiendo i comp.

$\Rightarrow h$ comp $\Rightarrow$ HALT comp. ABS.

$\therefore$ i no puede ser comp.

Escaneado con CamScanner

T de la R: Dada $f(x_1 \ldots x_n, u)$ p.c. $\exists e /$
$$\phi_e(x_1 \ldots x_n) = f(x_1 \ldots x_n, e)$$

· Probar que existe un $e / \mathrm{Dom}\,\phi_e = \{0, e, 2e, 3e, \ldots\}$

$$f(x, u) = \begin{cases} \downarrow & \text{si } u \mid x \\ \uparrow & \text{si no.} \end{cases}$$

¿f es p.c.? Sí, es comp. de cosas p.r. y p.c.s.
↳ También podríamos dar un programa.

$\Rightarrow$ Como f es p.c., existe un $e /$
$$\phi_e^1(x) = f(x, e) = \begin{cases} \downarrow & \text{si } e \mid x \\ \uparrow & \text{si no.} \end{cases} \Rightarrow \mathrm{Dom}\,\phi_e = \{x : e \mid x\} = \{0, e, 2e, \ldots\}$$

· Probar que la función
$$\mathrm{fix}(p) = \begin{cases} 1 & \text{si } \phi_p^{(1)} \text{ tiene un pto fijo} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$
no es comp.

Idea: Diagonalizar una f que construyamos c/el T de la R. usando fix.

Sup. fix comp.
$$\Rightarrow f(x, u) = \begin{cases} x+1 & \mathrm{fix}(u) \\ x & \text{si no.} \end{cases}$$

x el T de la R, existe un $e /$. $\phi_e^1(x) = f(x, e) = \begin{cases} x+1 & \text{si } \mathrm{fix}(e) \\ x & \text{si no.} \end{cases}$

$$\phi_e^1(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } \mathrm{fix}(e) \Leftrightarrow \phi_e^1 \text{ tiene un pto fijo.} \\ x & \text{si no} \end{cases}$$

Si ϕ_e^1 tiene un pto fijo $\Rightarrow \mathrm{fix}(e) \Rightarrow \phi_e^1 \equiv suc \Rightarrow \phi_e^{(1)}$ no tiene ningún pto fijo.

Si ϕ_e^1 no tiene un pto fijo $\Rightarrow \neg\mathrm{fix}(e) \Rightarrow \phi_e^1 \equiv id \Rightarrow \phi_e^{(1)}$ tiene un pto fijo.

ABS