Correctitud y Completitud

Lógica y Computabilidad[1]

Sabrina Gisele Silvero

Departamento de Computación,
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales,
Universidad de Buenos Aires

20 de noviembre de 2019

[1] Basado en apuntes de Sergio Abriola, María Emilia Descotte, y Edwin Pin

Temario

- Conceptos preliminares
- Ejercicio 1
- Ejercicio 2
- Ejercicio 3
- Tarea
- ¿Donde están las mujeres en la historia de la Lógica y Computabilidad?

Definición

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden, dado Γ un conjunto de $\mathcal{L}$-formulas y $\mathcal{C}$ una clase de $\mathcal{L}$-estructuras.

- Decimos que Γ **es correcta con respecto a** $\mathcal{C}$ si para toda $\mathcal{L}$-formula φ se tiene que

$$\vdash_\Gamma \varphi \Longrightarrow \models \varphi$$

- Decimos que Γ **es completa con respecto a** $\mathcal{C}$ si para toda $\mathcal{L}$-formula φ se tiene que

$$\models \varphi \Longrightarrow \vdash_\Gamma \varphi$$

Teorema 1 Completitud fuerte de SQ (y de $SQ^=$)
Fijado un lenguaje de primer orden, sea Γ un conjunto de formulas, y φ una formula. Entonces vale:

$$\Gamma \models \varphi \Longrightarrow \Gamma \vdash_{SQ} \varphi$$

Vale el resultado análogo para $SQ^=$ sobre la clase de estructuras con igualdad.

Teorema 2 Correctitud fuerte de SQ (y de $SQ^=$)
Fijado un lenguaje de primer orden, sea Γ un conjunto de fórmulas, y φ una fórmula. Entonces vale:

$$\Gamma \vdash_{SQ} \varphi \Longrightarrow \Gamma \models \varphi$$

Vale el resultado análogo para $SQ^=$ sobre la clase de estructuras con igualdad.

Notas

- Eventualmente vamos a llamar a Γ **sistema axiomático**.
- El conjunto de todos los axiomas de SQ es correcto y completo con respecto a la clase de todas las $\mathcal{L}$-estructuras.
- Sea $\mathcal{M}$ un modelo y v una valuación. Usaremos

$$\mathcal{M}, v \models \varphi \text{ en lugar de } \mathcal{M} \models \varphi[v].$$

- Al universo de un modelo $\mathcal{M}$ lo denotaremos $|\mathcal{M}|$.

Ejercicio 1

Sea Δ un sistema axiomático de primer orden correcto y completo con respecto a una clase de $\mathcal{L}$-estructuras $\mathcal{C}$ y sea Γ un conjunto de fórmulas consistente (en el sentido usual, con respecto a SQ). Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

1. $\Delta \cup \Gamma$ es completo con respecto a $\mathcal{C}$.
2. $\Delta \cup \Gamma$ es correcto con respecto a $\mathcal{C}$.
3. Si $\mathcal{C} \models \Gamma$, $\Delta \cup \Gamma$ es correcto con respecto a $\mathcal{C}$.

Ejercicio 1

Sea Δ un sistema axiomático de primer orden correcto y completo con respecto a una clase de $\mathcal{L}$-estructuras $\mathcal{C}$ y sea Γ un conjunto de fórmulas consistente (en el sentido usual, con respecto a SQ). Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

1. $\Delta \cup \Gamma$ es completo con respecto a $\mathcal{C}$ **VERDADERO**

Supongamos que $\mathcal{C} \models \varphi$.
Δ es completo con respecto a $\mathcal{C}$, entonces $\vdash_{\Delta} \varphi$.
como $\Delta \subseteq \Delta \cup \Gamma$, entonces $\vdash_{\Delta \cup \Gamma} \varphi$.

Ejercicio 1

Sea Δ un sistema axiomático de primer orden correcto y completo con respecto a una clase de $\mathcal{L}$-estructuras $\mathcal{C}$ y sea Γ un conjunto de fórmulas consistente (en el sentido usual, con respecto a SQ). Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

1. $\Delta \cup \Gamma$ es completo con respecto a $\mathcal{C}$ **VERDADERO**
2. $\Delta \cup \Gamma$ es correcto con respecto a $\mathcal{C}$ **FALSO**

Tomando $\Delta = SQ$ y $\mathcal{L} = \{=\}$, con $=$ un símbolo binario, $\mathcal{C}$ como el conjunto de todos las $\mathcal{L}$-estructuras y $\Gamma = (\forall x)(\forall y)(x = y)$.

Como podemos notar, cumplimos con todas las condiciones del enunciado, pero $\Delta \cup \Gamma$ no es correcto con respecto a $\mathcal{C}$ (hay estructuras que satisfacen $(\forall x)(\forall y)(x = y)$ pero otras no).

Ejercicio 1

Sea Δ un sistema axiomático de primer orden correcto y completo con respecto a una clase de $\mathcal{L}$-estructuras $\mathcal{C}$ y sea Γ un conjunto de fórmulas consistente (en el sentido usual, con respecto a SQ). Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

1. $\Delta \cup \Gamma$ es completo con respecto a $\mathcal{C}$ **VERDADERO**
2. $\Delta \cup \Gamma$ es correcto con respecto a $\mathcal{C}$ **FALSO**
3. Si $\mathcal{C} \models \Gamma$, $\Delta \cup \Gamma$ es correcto con respecto a $\mathcal{C}$ **VERDADERO**

Supongamos $\vdash_{\Delta \cup \Gamma} \varphi$.
Como $\mathcal{C} \models \Gamma$ y Δ es completo respecto a $\mathcal{C}$, $\vdash_\Delta \Gamma$
Entonces una demostración de φ que use fórmulas de Γ la podemos convertir en una demostración que use solo fórmulas de Δ.
Obteniendo que $\vdash_\Delta \varphi$.
Luego, por correctitud de Δ, $\mathcal{C} \models \varphi$.

Decimos que una estructura de primer orden es de *equivalencia* si todas sus relaciones binarias son de equivalencia.
Sea $\mathcal{L} = \{\mathcal{R}\}$ un lenguaje con un símbolo de predicado binario.

a) Proponer una axiomatización SQ_{equiv} que extienda a SQ y que sea correcta y completa con respecto a la clase $\mathcal{C}_e$ de todas las $\mathcal{L}$-estructuras de equivalencia.

b) Demostrar que la axiomatización propuesta en el ítem anterior es completa pero no correcta con respecto a la clase de <u>todas</u> las $\mathcal{L}$-estructuras.

Ejercicio 2

a) Extendemos a SQ con los siguientes axiomas:

$$\begin{array}{ll} \textbf{SE1} & \forall x(xRx) \\ \textbf{SE2} & \forall x \forall y(xRy \to yRx) \\ \textbf{SE3} & \forall x \forall y \forall z((xRy \wedge yRz) \to xRz) \end{array}$$

Ejercicio 2

Supongamos $\vdash_{SQ_{equiv}} \varphi$.

Por definición de $\vdash_{SQ_{equiv}}$, esto significa que $\{SE1, SE2, SE3\} \underbrace{\vdash}_{\vdash_{SQ}} \varphi$.

Luego, por correctitud fuerte de SQ, tenemos que $\{SE1, SE2, SE3\} \models \varphi$.

Si probamos que toda $\mathcal{L}$-estructura en $\mathcal{C}_e$ satisface $\{SE1, SE2, SE3\}$ (es decir que $\mathcal{C}_e \models \{SE1, SE2, SE3\}$) por definición de la consecuencia semántica $\models$ tendríamos que

$$\mathcal{C}_e \models \varphi.$$

Ejercicio 2

Veamos la demostración formal de que $\mathcal{C}_e \models SE2$, las otras dos quedan de ejercicio.
Sea $\mathcal{M} \in \mathcal{C}_e$ y sea v una valuación.
Tenemos que

$\mathcal{M}$, v$\models \forall x \forall y(xRy \to yRx)$
sii para todo a $\in |\mathcal{M}|$ vale que $\mathcal{M}, v[x \mapsto a] \models \forall y(xRy \to yRx)$
sii para todos a,b $\in |\mathcal{M}|$ tenemos que $\mathcal{M}$,

$$\text{v}[\text{x} \mapsto a, y \mapsto b] \models (xRy \to yRx)$$

sii para todos a,b $\in |\mathcal{M}|$ no vale $\mathcal{M}, v[x \mapsto a, y \mapsto b]xRy$

$$\text{o vale M, v}[\text{x} \mapsto a, y \mapsto b] \models yRx$$

sii para todos a,b $\in |\mathcal{M}|$ no vale $aR^{\mathcal{M}}b$ o vale $bR^{\mathcal{M}}a$

Ejercicio 2

Para ver la completitud, supongamos $C_e \models \varphi$. Como cualquier estructura que satisface $\{SE1, SE2, SE3\}$ es de equivalencia, y como cualquier estructura de equivalencia satisface φ, tenemos en particular que $\{SE1, SE2, SE3\} \models \varphi$.

Por completitud fuerte de SQ, $\{SE1, SE2, SE3\} \vdash \varphi$, que es lo mismo que decir $\vdash_{SQ_{equiv}} \varphi$.

Ejercicio 2

- Demostrar que la axiomatización propuesta en el ítem anterior es completa pero no correcta con respecto a la clase de <u>todas</u> las $\mathcal{L}$-estructuras.

Para probar la no correctitud, supongamos en cambio que esta axiomatización es correcta.
Entonces, como trivialmente $\vdash_{SQ_{equiv}} SE1$, la fórmula $SE1$ (reflexividad) debería ser verdadera en toda L-estructura, lo cual no es cierto.

Sea un lenguaje de primer orden con igualdad, un símbolo de predicado binario P, y un símbolo de constante r. Sea la clase de modelos $\mathcal{A} = \{\mathcal{M} \mid P^{\mathcal{M}} \text{ define sobre } \mathcal{M} \text{ un árbol con raíz } r^{\mathcal{M}}\}$ (es decir, $P^{\mathcal{M}}(a, b)$ afirma que $a \in |\mathcal{M}|$ es el padre de $b \in |\mathcal{M}|$), donde por árbol se entiende cualquier árbol dirigido donde cada nodo puede tener una cantidad arbitraria de hijos.
Considerar la axiomatización SQ_{Tree}, que extiende a la axiomatización $SQ^{=}$ con las siguientes fórmulas:

$$\begin{array}{rl}
\textbf{SQ8} & (\forall x)\big(\neg P(x, r) \land \neg P(x, x)\big) \\
\textbf{SQ9} & (\forall x)(\forall y)(\forall z)\big((P(y, x) \land P(z, x)) \to (y = z)\big) \\
\textbf{SQ10} & (\forall x)\big(((\forall y)\neg P(y, x)) \to x = r\big)
\end{array}$$

Ejericicio 3

a) Demostrar que los axiomas $SQ8, SQ9$ y $SQ10$ son válidos en $\mathcal{A}$. Usar esto para demostrar que SQ_{Tree} es correcta con respecto a $\mathcal{A}$.

b) Sea $\varphi = (\forall x)(\forall y)\big(P(x,y) \to \neg P(y,x)\big)$. Demostrar que existe un modelo $\mathcal{M}$ tal que todos los axiomas de SQ_{Tree} son válidos en $\mathcal{M}$, pero $\mathcal{M} \not\models \varphi$.

c) Demostrar que φ es válida en $\mathcal{A}$ y concluir que SQ_{Tree} no es completa respecto a $\mathcal{A}$.

Ejercicio 3

Para ver que los axiomas son validos en la clase $\mathcal{A}$ primero interpretemos que significar las formulas interpretadas en un modelo de la clase $\mathcal{A}$

SQ8	$(\forall x)\big(\neg P(x,r) \wedge \neg P(x,x)\big)$
SQ8	Ningún nodo tiene a la raíz como hijo y todos los nodos son irreflexivos.
SQ9	$(\forall x)(\forall y)(\forall z)\big((P(y,x) \wedge P(z,x)) \to (y = z)\big)$
SQ9	Los nodos no comparten hijos.
SQ10	$(\forall x)\big(((\forall y)\neg P(y,x)) \to x = r\big)$
SQ10	El único nodo sin padre es la raíz r.

Probemos formalmente que valen.
Si probamos que para cualquier modelo de la clase y cualquier valuación, los axiomas son verdaderos entonces habremos probado que son válidos en la clase. Fijado un modelo arbitrario $\mathcal{M} \in \mathcal{A}$ y una valuación v, veamos axioma por axioma.

Ejercicio 3

SQ8. $\mathcal{M}, v \models (\forall x)\big(\neg P(x, r) \wedge \neg P(x, x)\big)$ si y sólo si

$$\mathcal{M}, v[x \mapsto a] \models \big(\neg P(x, r) \wedge \neg P(x, x)\big)$$

para cualquier $a \in |\mathcal{M}|$. Y esto ocurre si y sólo si

$$\mathcal{M}, v[x \mapsto a] \models \neg P(x, r) \text{ y } \mathcal{M}, v[x \mapsto a] \models \neg P(x, x)$$

para cualquier $a \in |\mathcal{M}|$. Siguiendo las definiciones semánticas, lo anterior sucede si y sólo si

$$\mathcal{M}, v[x \mapsto a] \not\models P(x, r) \text{ y } \mathcal{M}, v[x \mapsto a] \not\models P(x, x)$$

para cualquier $a \in |\mathcal{M}|$. Finalmente llegamos a que debe suceder

$$(a, r^M) \notin P^M \text{ y } (a, a) \notin P^M \tag{1}$$

para cualquier $a \in |\mathcal{M}|$.

SQ9.

$$\mathcal{M}, v \models (\forall x)(\forall y)(\forall z)\big((P(y,x) \wedge P(z,x)) \rightarrow (y = z)\big)$$

si y sólo si

$$\mathcal{M}, v[x \mapsto a, y \mapsto b, z \mapsto c] \models (P(y,x) \wedge P(z,x)) \rightarrow (y = z)$$

para elementos arbitrarios $a, b, c \in |\mathcal{M}|$. Para ahorrar espacio llamemos a una valuación $v' = v[x \mapsto a, y \mapsto b, z \mapsto c]$. La ultima fórmula equivale a

$$\mathcal{M}, v' \not\models P(y,x) \wedge P(z,x) \;\text{ o }\; \mathcal{M}, v' \models (y = z)$$

para elementos arbitrarios $a, b, c \in |\mathcal{M}|$. Si y sólo si

$$\mathcal{M}, v' \not\models P(y,x) \;\text{ o }\; \mathcal{M}, v' \not\models P(z,x) \;\text{ o }\; \mathcal{M}, v' \models (y = z)$$

para elementos arbitrarios $a, b, c \in |\mathcal{M}|$. Si y sólo si

$$(b,a) \notin P^M \;\text{ o }\; (c,a) \notin P^M \;\text{ o }\; (b,c) \in =^M \qquad (2)$$

para elementos arbitrarios $a, b, c \in |\mathcal{M}|$.

SQ10. Este punto queda como ejercicio.

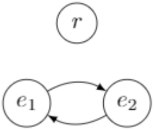
- Demostrar que SQ_{Tree} es correcta con respecto a $\mathcal{A}$.

Ahora, sea φ una fórmula con $\vdash_{SQ_{\mathsf{Tree}}} \varphi$, o equivalentemente $\{SQ8, SQ9, SQ10\} \vdash_{SQ^{=}} \varphi$.
Entonces, por correctitud fuerte de $SQ^{=}$, $\{SQ8, SQ9, SQ10\} \models \varphi$.
Por lo visto anteriormente tenemos que $\mathcal{A} \models \{SQ8, SQ9, SQ10\}$, tenemos que $\mathcal{A} \models \varphi$, como queríamos ver para probar la correctitud del sistema axiomático SQ_{Tree} respecto a $\mathcal{A}$.

Ejercicio 3

- Sea $\varphi = (\forall x)(\forall y)\big(P(x,y) \to \neg P(y,x)\big)$. Demostrar que existe un modelo $\mathcal{M}$ tal que todos los axiomas de SQ_{Tree} son válidos en $\mathcal{M}$, pero $\mathcal{M} \not\models \varphi$.

La fórmula $\varphi = (\forall x)(\forall y)\big(P(x,y) \to \neg P(y,x)\big)$ indica que la relación es antisimétrica.
Consideremos el siguiente modelo:



$\mathcal{M}$

Ahora bien, $\models \varphi$ sii para todo $a, b \in |\mathcal{M}|$ tenemos que $(a,b) \in P^{\mathcal{M}} \Rightarrow (b,a) \notin P^{\mathcal{M}}$, pero tenemos que $(e_1, e_2) \in P^{\mathcal{M}}$ y $(e_2, e_1) \in P^{\mathcal{M}}$. Luego $\mathcal{M} \not\models \varphi$.

- Demostrar que φ es válida en $\mathcal{A}$ y concluir que SQ_{Tree} no es completa respecto a $\mathcal{A}$.

Todo árbol es antisimétrico, por lo que φ valdrá en toda estructura en $\mathcal{A}$.
Tenemos entonces que $\mathcal{A} \models \varphi$.
Supongamos que SQ_{Tree} fuese completa respecto a $\mathcal{A}$. Entonces valdría que $SQ_{\mathsf{Tree}} \vdash_{SQ^=} \varphi$,

- Demostrar que φ es válida en $\mathcal{A}$ y concluir que SQ_{Tree} no es completa respecto a $\mathcal{A}$.

Todo árbol es antisimétrico, por lo que φ valdrá en toda estructura en $\mathcal{A}$.
Tenemos entonces que $\mathcal{A} \models \varphi$.
Supongamos que SQ_{Tree} fuese completa respecto a $\mathcal{A}$. Entonces valdría que $SQ_{\text{Tree}} \vdash_{SQ^{=}} \varphi$, pero por correctitud (fuerte) de $SQ^{=}$ esto implicaría que $SQ_{\text{Tree}} \models \varphi$, lo cual no es cierto por el item (b). Por lo tanto, SQ_{Tree} no es completa respecto a $\mathcal{A}$.

Ejercicio 4

Sea $= \{c, f, R, =\}$ un lenguaje de primer orden con igualdad, donde c es un símbolo de constante, f es un símbolo de función unaria y R es un símbolo de predicado binario. Sea $\mathcal{Z} = \{\mathbb{Z}, 0, |\cdot|, <\}$ la estructura de los números enteros con la función 'valor absoluto' y con la relación de orden estricto usual. Consideremos SQ_Z, la axiomatización que extiende a $SQ^=$ con los siguientes axiomas:

$$\begin{array}{ll} \textbf{Z1} & \forall x(f(x) = x \rightarrow \neg(xRf(x))) \\ \textbf{Z2} & \forall x(\neg(f(x) = x) \rightarrow xRf(x)) \\ \textbf{Z3} & \forall x(x \neq c \rightarrow \exists y(x \neq y \wedge f(x) = f(y) \wedge \\ & \forall z(f(z) = f(x) \rightarrow (z = x \vee z = y)))) \end{array}$$

a) Probar que SQ_Z es correcta respecto a $\mathcal{Z}$.

b) Demostrar SQ_Z no es completa respecto a $\mathcal{Z}$.

Ejercicio 4

- Probar que SQ_Z es correcta respecto a $\mathcal{Z}$

Supongamos $\vdash_{SQ_Z} \varphi$. Esto significa que $\{Z1, Z2, Z3\} \vdash_{SQ^=} \varphi$, que por correctitud fuerte de $SQ^=$ implica que $\{Z1, Z2, Z3\} \models \varphi$. Ahora podemos ver que $\mathcal{Z}$ satisface $Z1$, $Z2$, y $Z3$ interpretandolas semanticamente, y obtenemos que $\mathcal{Z} \models \varphi$.

- Demostrar SQ_Z no es completa respecto a $\mathcal{Z}$.

Tomemos $\mathcal{M} = \langle \{0\}, 0, id, \emptyset, = \rangle$ y $\psi : \exists x \exists y (x \neq y)$.
Ahora, vemos que $\mathcal{Z} \models \psi$, ya que $\mathbb{Z}$ tiene al menos dos elementos distintos. Si valiese que $\vdash_{SQ_Z} \psi$, tendríamos que $\{Z1, Z2, Z3\} \vdash \psi$, lo cual por correctitud fuerte de $SQ^=$ implica que $\{Z1, Z2, Z3\} \models \psi$, pero esto no es cierto por el que construimos antes, que cumplía $\models \{Z1, Z2, Z3\}$ pero $\not\models \psi$. Luego $\not\vdash_{SQ_Z} \psi$ y por lo tanto SQ_Z no es completa respecto a $\mathcal{Z}$.

Te propongo el siguientes ejercicio:

- Pensá en 5 hombres importantes en la historia de la Lógica y Computabilidad

Te propongo el siguientes ejercicio:

- Pensá en 5 hombres importantes en la historia de la Lógica y Computabilidad
- ¿Ya los tenes en mente?

Te propongo el siguientes ejercicio:

- Pensá en 5 hombres importantes en la historia de la Lógica y Computabilidad
- ¿Ya los tenes en mente?
- Pensá en 5 mujeres importantes en la historia de la Lógica y Computabilidad

Te propongo el siguientes ejercicio:

- Pensá en 5 hombres importantes en la historia de la Lógica y Computabilidad
- ¿Ya los tenes en mente?
- Pensá en 5 mujeres importantes en la historia de la Lógica y Computabilidad
- ¿Pudiste recordar alguna?

¿Donde están las mujeres en la historia de la Lógica y Computabilidad?

Si bien en el fragmento de historia de la lógica y computabilidad que vemos en la materia no se hicieron conocidas figuras femeninas, quería mencionar la presencia de las mujeres en estos ámbitos, así como también en la matemática y computación en general.

¿Donde están las mujeres en la historia de la Lógica y Computabilidad?

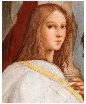
No todas las mujeres que verás a continuación se dedicaron a trabajar en temas de lógica y computabilidad, pero si fueron grandes figuras en la historia de la matemática y/o computación (esta es solo una lista muy reducida de mujeres, hay muchísimas más, pero por cuestiones de tiempo no llegué a incluirlas). Además de todos sus aportes académicos, ellas abrieron puertas, contribuyeron para que hoy miles de mujeres alrededor de todo el mundo tengan la posibilidad de estudiar y dedicarse a lo que les gusta.

¿Donde están las mujeres en la historia de la Lógica y Computabilidad?

Por años nos impidieron estudiar, dar clases y hacer ciencia entre otras cosas. En la actualidad todo es distinto, pero lamentablemente falta mucho camino por recorrer para que estemos todes en igualdad de condiciones, es por eso que tenemos que seguir trabajando y educando. Todes desde nuestra posición podemos contribuir.

¿Donde están las mujeres en la historia de la Lógica y Computabilidad?

- Hipatia[2] *360 d. C - 415 d. C*



- Ada Lovelace [3] *1815 - 1852*

- Sofia Kovalévskaya [4] *1850- 1891*

[2] https://es.wikipedia.org/wiki/Hipatia

[3] https://es.wikipedia.org/wiki/Ada_Lovelace

[4] https:

¿Donde están las mujeres en la historia de la Lógica y Computabilidad?

- Emmy Noether [5] *1882- 1935*

- Marjorie Lee Browne [6] *1882- 1935*

- Mary Kenneth Keller [7] *1913 - 1985*

[5] https://es.wikipedia.org/wiki/Emmy_Noether

[6] https://es.wikipedia.org/wiki/Marjorie_Lee_Browne

[7] https://es.wikipedia.org/wiki/Mary_Kenneth_Keller

¿Donde están las mujeres en la historia de la Lógica y Computabilidad?

- Julia Robinson[8] *1919 - 1985*

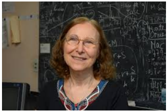
- Margaret Hamilton [9] *1937*

- Mary W. Gray [10] *1938*

[8] https://es.wikipedia.org/wiki/Julia_Robinson
[9] https://es.wikipedia.org/wiki/Margaret_Hamilton
[10] https://es.wikipedia.org/wiki/Mary_W._Gray

¿Donde están las mujeres en la historia de la Lógica y Computabilidad?

- Alicia Dickenstein [11] *1955*



- Elvira Mayordomo [12] *1967*

[11] http://mate.dm.uba.ar/~alidick/

[12] https://en.wikipedia.org/wiki/Elvira_Mayordomo

¿Donde están las mujeres en la historia de la Lógica y Computabilidad?

- Mujeres en informática [13]
- Asociación de Mujeres en Matemáticas [14]
- Mujeres y lógica [15]
- Científicas Latinoamericas [16]
- Relatos de Matemáticas [17]

---

[13] https://es.wikipedia.org/wiki/Mujeres_en_informatica

[14] https://awm-math.org/

[15] https://www.researchgate.net/publication/334181490_Women_and_Logic_What_Can_Women's_Studies_Contribute_to_the_History_of_Formal_Logic

[16] https://docs.google.com/spreadsheets/d/1it-MPifCsjFfQSEYZJ80Z36FsKxQRvX_KSY-x309Www/edit#gid=0

[17] http://www.mat.uc.cl/archivos/libro-retratos-de-mujeres.pdf