Lógica de primer orden
Interpretaciones, distinguibilidad, expresabilidad, y definibilidad

Lógica y Computabilidad

Christian G. Cossio-Mercado

Departamento de Computación,
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales,
Universidad de Buenos Aires

13 de noviembre de 2020

Temario

Temario

Lógica de Primer Orden (LPO)

- símbolos lógicos y auxiliares: $x \quad ' \quad \forall \quad \neg \quad \rightarrow \quad (\quad)$
- símbolos de cada lenguaje particular $\mathcal{L} = \mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{P}$, donde
  - $\mathcal{C}$ es un conjunto de símbolos de constantes (puede ser $\mathcal{C} = \varnothing$)
  - $\mathcal{F}$ es un conjunto de símbolos de funciones (puede ser $\mathcal{F} = \varnothing$)
  - $\mathcal{P}$ es un conjunto de símbolos de predicados ($\mathcal{P} \neq \varnothing$)

Lógica de Primer Orden (LPO)

- Tenemos términos y fórmulas.
- Podemos utilizar los símbolos $\exists \quad \vee \quad \wedge$ en reemplazo de las fórmulas correspondientes.

Temario

Interpretación de un lenguaje

Una $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{A}$ de un lenguaje $\mathcal{L} = \mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{P}$ es

- un conjunto A no vacío, se lo llama universo o dominio
- las siguientes asignaciones:
  - para cada símbolo de constante $c \in \mathcal{C}$, un elemento fijo
  $$c_{\mathcal{A}} \in A$$
  - para cada símbolo de función n-aria $f \in \mathcal{F}$, una función
  $$f_{\mathcal{A}} : A^n \to A$$
  - para cada símbolo de predicado n-ario $P \in \mathcal{P}$, una relación
  $$P_{\mathcal{A}} \subseteq A^n$$

Las funciones $f_{\mathcal{A}}$ y predicados $P_{\mathcal{A}}$ son siempre totales.

Ejercicio 1

Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje con igualdad $\{c, f, R, =\}$, donde c es un símbolo de constante, f es un símbolo de función 1-aria, y R un símbolo de predicado (o relación) 2-aria Decidir si son $\mathcal{L}$-estructuras las siguientes estructuras:

1. $\mathcal{M}_1 = \{\mathbb{Z}, -3, s, <\}$. Donde s es la función 'sucesor' ($s(x) = x + 1$) y $<$ es el 'menor' usual
2. $\mathcal{M}_2 = \{\mathbb{N}, 1, +, <\}$. Donde $+$ es la función 'suma' ($+(x, y) = x + y$) y $<$ es el 'menor' usual
3. $\mathcal{M}_3 = \{\mathbb{Z}, 0, r, p\}$. Donde $r(x) = \sqrt{x}$, y $x \in p$ sii $x > 0$
4. $\mathcal{M}_4 = \{T, r, id, \downarrow\}$. Donde T son los nodos de un árbol maximal de altura 2 y ramificación 2, r es la raíz de T (visto como un árbol), $\mathrm{id}(x) = x$, y $x \downarrow y$ sii y es hijo de x

Interpretación de un lenguaje

Cosas a revisar:

1. El universo U es no vacío
2. La interpretación de cada constante pertenece al universo U elegido
3. La interpretación de cada función es total, tiene la aridad definida, y su dominio e imagen son elementos del universo U
4. La interpretación de cada predicado es total

Temario

Definición: Niveles de verdad

Una $\mathcal{L}$-fórmula φ se dice:

- **universalmente válida** si para toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{M}$ y toda valuación v de $\mathcal{M}$, $\mathcal{M} \models \varphi[v]$
- **válida** (o **verdadera**) en una $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{M}$ si para toda valuación v de $\mathcal{M}$, $\mathcal{M} \models \varphi[v]$
- **satisfacible** si existe alguna $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{M}$ y una valuación v tales que $\mathcal{M} \models \varphi[v]$

Ejercicio 2

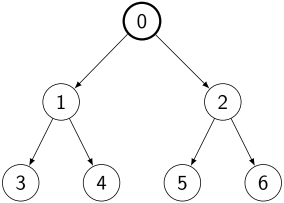
Sea $\mathcal{L} = \{c, f, R, =\}$, como en el modelo $\mathcal{M}_1$ anterior $\mathcal{M}_1 = \{\mathbb{Z}, -3, s, <\}$. Donde s es la función 'sucesor' $(s(x) = x + 1)$ y $<$ es el orden usual de los $\mathbb{Z}$.

Decidir si las siguientes $\mathcal{L}$-fórmulas son universalmente válidas, válidas en $\mathcal{M}_1$, satisfacibles, o insatisfacibles.:

1. $\varphi_1 : x = x$
2. $\varphi_2 : \forall x(x \neq c)$
3. $\varphi_3 : \forall x(R(x, f(x)))$
4. $\varphi_4 : \forall x(x = c) \vee \forall x(f(x) \neq x \wedge f(f(x)) = x)$
5. $\varphi_5 : \forall x(\exists y(f(y) = x))$

Ejercicio 3

Verificar si las fórmulas φ_3 , φ_4 y φ_5 del ejercicio anterior son válidas en la $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{S}$



En este caso $f_{\mathcal{S}} = \mathrm{id} : \{0, \ldots, 6\} \to \{0, \ldots, 6\}$, $c_{\mathcal{S}} = 0$, y $R_{\mathcal{S}}$ es el conjunto de flechas del árbol.

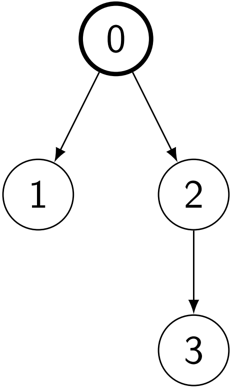
Temario

Definición: Distinguibilidad

Decimos que un elemento e del universo de una $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{M}$ es **distinguible** si existe una $\mathcal{L}$-fórmula φ con una sola variable libre x tal que $\mathcal{M} \models \varphi[v]$ si y sólo si $v(x) = e$.

Ejercicio 4

Consideremos el lenguaje anterior, $\mathcal{L} = \{c, f, R, =\}$. Demostrar que todos los elementos de la $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{T}$ (c es el 0, f es la función identidad, R está representado por las flechas) son distinguibles



Ejercicio 5

Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje con igualdad que consiste únicamente de un predicado binario R. Sea $\mathcal{M}$ una $\mathcal{L}$-interpretación que consiste en un árbol ($R_{\mathcal{M}}$ es la relación de accesibilidad: $xR_{\mathcal{M}}y$ sii y es hijo de x). Demostrar que la raíz de $\mathcal{M}$ es un elemento distinguible.

Ejercicio 6

Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje de primer orden con igualdad, con una relación binaria $<$. Considerar la siguiente $\mathcal{L}$-interpretación $\mathcal{M}$ con universo $\omega^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}\}$.

$$(x, y) <_{\mathcal{M}} (x', y') \text{ sii } (x < x' \text{ o } x = x' \text{ y } y < y')$$

Demostrar que son distinguibles todos los elementos de la forma $(i, 0)$ con $i \in \mathbb{N}$

Temario

Definicion: Expresabilidad

Dada una $\mathcal{L}$-interpretación $\mathcal{M}$ con universo M, decimos que una relación $R \subseteq M^n$ es **expresable** si existe una $\mathcal{L}$-fórmula φ con n variables libres $x_1, \ldots, x_n$ tal que para toda valuación v, vale que $\mathcal{M} \models \varphi[v]$ sii $(v(x_1), \ldots, v(x_n)) \in R$.

Ejercicio 7

Sea $\mathcal{L} = \{+, =\}$, con $+$ un símbolo de función binario. Sea, con cierto abuso de notación, $\mathcal{M} = \langle \mathbb{N}, +, = \rangle$, donde $+$ es la suma de naturales usual. Demostrar que son expresables las relaciones
$R_{\leqslant} = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \leqslant x_2\}$ y $R_{<} = \{(x_1, x_2) \mid x_1 < x_2\}$.

Temario

Definicion: Definibilidad

Decimos que una clase de $\mathcal{L}$-estructuras $\mathcal{K}$ es **definible** si existe una sentencia φ tal que para toda $\mathcal{L}$-interpretación $\mathcal{M}$, vale que $\mathcal{M} \models \varphi$ sii $\mathcal{M} \in \mathcal{K}$.

Ejercicio 8

Sea $\mathcal{L} = \{R, =\}$, donde R es un símbolo de relación binaria. Demostrar que es definible la clase de $\mathcal{L}$-modelos donde R es una relación irreflexiva, transitiva, y con al menos un elemento minimal.

Lógica de primer orden
Interpretaciones, distinguibilidad, expresabilidad, y definibilidad

Lógica y Computabilidad

Christian G. Cossio-Mercado

Departamento de Computación,
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales,
Universidad de Buenos Aires

13 de noviembre de 2020