

Prácticas 1 a 11

Análisis A 66

Exactas e Ingeniería

2017

Índice general

1. Práctica 0: Preliminares	1
2. Práctica 1: Funciones Reales	3
3. Práctica 2: Números Reales	9
4. Práctica 3: Sucesiones	11
5. Práctica 4: Límites y Continuidad	18
6. Práctica 5: Derivada	24
7. Práctica 6: Teorema del Valor Medio	29
8. Práctica 7: Estudio de Funciones	34
9. Práctica 8: Teorema de Taylor	41
10. Práctica 9: Integrales	46
11. Práctica 10: Aplicaciones de la Integral	52
12. Práctica 11: Series	56
13. Programa	61
14. Bibliografía	62

Práctica 0: Preliminares

Ejercicio 1 Calcule

a) $\frac{5}{8} + \frac{7}{8}$

b) $\frac{7}{6} + \frac{2}{3}$

c) $\frac{3}{7} + \frac{2}{5}$

d) $\frac{5}{6} + \frac{2}{3} - \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{6}\right)$

e) $9 \left(\frac{\sqrt{9+25}}{2}\right)^{-1}$

f) $\frac{\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{8}{9}\right)}{\frac{4}{9}}$

g) $\left(\frac{4}{3} - \frac{2}{9}\right)^{-1} \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{2}\right)^2$

h) $\left(-\frac{1}{5}\right)^0 + \sqrt[3]{-\frac{27}{8}}$

i) $\left[\left(\frac{1}{7}\right)^6 \left(\frac{1}{7}\right)^3\right]^{\frac{2}{9}}$

j) $\left[\left(\frac{2}{5}\right)^6 : \left(\frac{2}{5}\right)^4\right]^{-1}$

k) $\left(\frac{1}{8} + \frac{2}{5}\right) \left(\frac{5}{2} : \frac{1}{4}\right)$

l) $\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{3}{4}}$

m) $\left(\frac{1}{4} - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)^2\right)^{-2}$

Ejercicio 2

a) Desarrolle

a) $(x - 5)^2$

b) $(x + 7)^2$

c) $(x - 3)(x + 1)$

d) $(x - y)(x + y)$

b) Escriba como producto de dos factores

a) $x^2 - 81$

b) $x^3 - 11x$

c) $x^4 - 16$

d) $x^2 - 10x + 25$

Ejercicio 3 Represente en el plano los siguientes puntos

$(1; 3), (3; 1), (-1; 2), (-1; -5), (0; 1), (1; 0), (3; 3), (-1; -1)$

Para cada uno de estos puntos represente los puntos simétricos respecto de

a) el eje x b) el eje y

c) el origen de coordenadas.

Ejercicio 4 Represente en el plano los siguientes conjuntos de \mathbb{R}^2

a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = 1\}$

c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x < 0, y = 2\}$

b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \leq 2\}$

d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x < 1, y < 1\}$

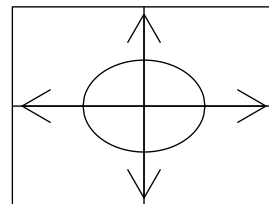
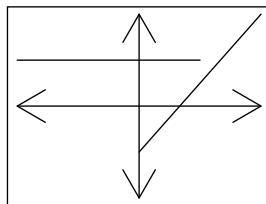
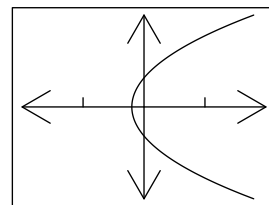
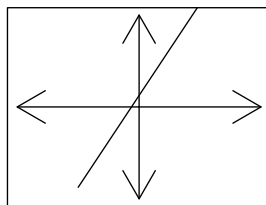
Práctica 1: Funciones Reales

Ejercicio 1 Haga un gráfico que refleje la evolución de la temperatura del agua a lo largo del tiempo atendiendo a la siguiente descripción:

“ Saqué del fuego una cacerola con agua hirviendo. Al principio, la temperatura bajó con rapidez, de modo que a los 5 minutos estaba en 60 grados. Luego, fue enfriándose con más lentitud. A los 20 minutos de haberla sacado estaba en 30 grados y 20 minutos después seguía teniendo algo más de 20 grados, temperatura de la cual no bajó, pues era la temperatura que había en la cocina.”

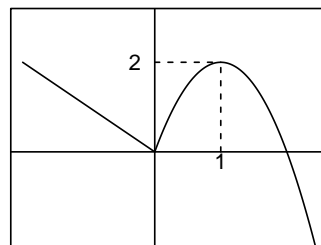
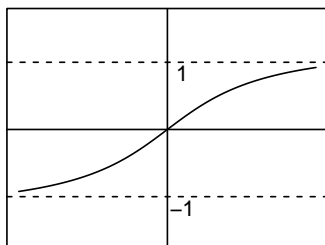
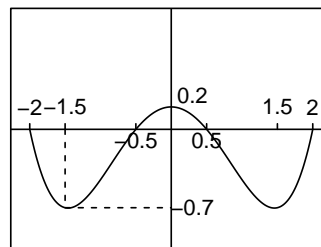
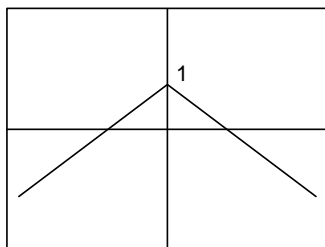
¿Es el gráfico que hizo el único que respeta las consignas anteriores?

Ejercicio 2 Dados los siguientes conjuntos del plano, determine, en cada caso, si existe una función cuyo gráfico sea el dado.



Ejercicio 3 Dibuje una función que sea creciente en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(2, +\infty)$, cuyo valor máximo sea 4 y se alcance en $x = -1$ y cuyo valor mínimo sea -3 y se alcance en $x = 2$.

Ejercicio 4 Dados los siguientes gráficos de funciones, determine, en cada caso, en qué intervalos es creciente, en qué intervalos es decreciente, en qué punto alcanza su máximo, en que punto alcanza su mínimo y cuál es el valor mínimo y/o el valor máximo.



Ejercicio 5

a) Encuentre, en cada caso, una función lineal f que satisfaga

i) $f(1) = 5$ y $f(-3) = 2$.

iii) $f(0) = 4$ y $f(3) = 0$.

ii) $f(-1) = 3$ y $f(80) = 3$.

iv) $f(0) = b$ y $f(a) = 0$, donde a y b son números fijos.

b) Calcule en i) y en ii) $f(0)$. Calcule en iii) $f(-2)$

c) Encuentre la pendiente de las rectas que son gráficas de las funciones lineales dadas en a). Haga un gráfico de tales rectas.

Ejercicio 6 Halle la ecuación de la recta de pendiente m que pasa por el punto P siendo

a) $P = (2; 3), m = 1$

c) $P = (3; -4), m = -2$

b) $P = (1; 5), m = 0$

d) $P = (0; b), m = 1$

Ejercicio 7 Encuentre la función lineal g que da la temperatura en grados Fahrenheit, conocida la misma en grados Celsius, sabiendo que 0 grados Celsius son 32 grados Fahrenheit y que 100 grados Celsius son 212 grados Fahrenheit. Recíprocamente, encuentra la función h que da la temperatura en grados Celsius conocida la misma en grados Fahrenheit.

Ejercicio 8 Trace el gráfico de las siguientes funciones cuadráticas

a) $f(x) = x^2$

c) $f(x) = x^2 - 3$

b) $f(x) = -2x^2$

d) $f(x) = -(x - 5)^2$

Determine en cada caso el conjunto imagen.

Ejercicio 9 Para cada una de las siguientes funciones cuadráticas determine en qué intervalo crece, en qué intervalo decrece, dónde es positiva, dónde es negativa, en qué puntos se anula y en qué puntos alcanza su extremo.

a) $f(x) = -2x^2$

d) $f(x) = x^2 + 2x + 1$

b) $f(x) = -2x(x - 3)$

e) $f(x) = -2(x + 3)(x - 5)$

c) $f(x) = -2x^2 + x$

Ejercicio 10 Represente gráficamente las siguientes funciones

a) $f(x) = x^3$

c) $f(x) = x^4$

b) $f(x) = (x - 2)^3$

d) $f(x) = x^4 - 1$

Ejercicio 11 Represente gráficamente las siguientes funciones

a) $f(x) = \frac{4}{x}$

d) $f(x) = \frac{4}{x - 3} + 2$

b) $f(x) = -\frac{4}{x}$

e) $f(x) = \frac{4x + 5}{x - 2}$

c) $f(x) = \frac{4}{x - 3}$

f) $f(x) = \frac{3x + 2}{x + 1}$

Indique en cada caso, el dominio de la función. Indique también en qué intervalos es creciente y en qué intervalos es decreciente.

Ejercicio 12 Considere las funciones $f(x) = 2x^2 + 5x$, $g(x) = \frac{1}{x+3}$,
 $h(x) = 2x - 6$.

a) Calcule si es posible:

$$(f \circ f)(-1) \quad (f \circ h)(1) \quad (g \circ f)(-1) \quad (h \circ g)(2).$$

b) Halle fórmulas para las composiciones que se indican a continuación

$$(f \circ g) \quad (g \circ f) \quad (f \circ g) \circ h \quad (f \circ h) \quad (f \circ f).$$

c) $f \circ g$ y $g \circ f$ ¿Son la misma función?

Ejercicio 13 Halle la función inversa de

a) $f(x) = 3x - 5$

d) $f(x) = 2(x - 1)^2, x \leq 1$

b) $f(x) = x^2, x \leq 0$

c) $f(x) = 2(x - 1)^2, x \geq 1$

e) $f(x) = 3 - \sqrt{x+5}, x \geq -5$

Ejercicio 14 Represente gráficamente las siguientes funciones

a) $f(x) = \sqrt{x}$ b) $f(x) = -\sqrt{x}$ c) $f(x) = \sqrt{x+3}$

Indique en cada caso, el dominio de la función. Analice monotonía.

Ejercicio 15 Halle el dominio de las siguientes funciones

a) $f(x) = \sqrt{x-8}$ b) $f(x) = \sqrt{x^2-9}$ c) $f(x) = \sqrt{x^2+4}$

Ejercicio 16 Dadas las funciones exponenciales $f(x) = r^x$ $\left(r = 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}\right)$,

a) Haga el gráfico de cada una de ellas.

b) Determine el dominio y la imagen.

c) Analice la monotonía.

Ejercicio 17 Si notamos con $\log_r(x)$ a la función inversa de r^x , $r > 0$, $r \neq 1$

- a) Haga el gráfico de $y = \log_r(x)$ para $r = 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}$.
- b) Determine el dominio y la imagen.
- c) Analice la monotonía.

Ejercicio 18 Encuentre el dominio de las siguientes funciones

a) $f(x) = \ln(2x)$ b) $g(x) = \ln(3x^2 + 2x)$.

En cada caso determine los valores de x para los cuales la función vale 1.

Ejercicio 19 Halle la función inversa de

a) $f(x) = \ln(2x)$ b) $f(x) = \ln(x^2 + 4)$, $x > 0$ c) $f(x) = e^{x+3} + 4$.

Ejercicio 20 A partir de los gráficos de $g(x) = \sin(x)$ y $h(x) = \cos(x)$ haga el gráfico de

a) $f(x) = \cos(2x + \pi)$ b) $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

Ejercicio 21 Determine todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ tales que

a) $\sin(x) = \frac{1}{2}$ d) $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
b) $\cos(2x) = \frac{3}{2}$ e) $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
c) $\cos^2(x) - \sin^2(x) = 1$ f) $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(x) - \sin(x))$

Ejercicio 22 Haga el gráfico de las funciones inversas de $g(x) = \sin(x)$ y $h(x) = \cos(x)$. Determine los valores de $x \in \mathbb{R}$ tales que

a) $\arcsin(x) = \frac{\pi}{4}$ b) $\arccos(x) = \pi$

Ejercicio 23 Represente gráficamente las siguientes funciones

a) $f(x) = |x|$ c) $f(x) = |\sin(x)|$
b) $f(x) = |x - 5|$ d) $f(x) = |e^x|$

Ejercicio 24

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \leq -1 \\ -x & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ 3x - 4 & 1 < x \end{cases}$$

calcule $f(-3)$, $f(1)$ y $f(4)$. ¿Para qué valores de y la ecuación $f(x) = y$ tiene solución? ¿Cuándo es única?

Ejercicio 25 Idem para la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & \text{si } x \leq -4 \\ \frac{1}{x + 2} & \text{si } x > -4 \end{cases}$$

Práctica 2: Números Reales

Ejercicio 1 Represente en la recta numérica

a) $-1; 3; 6; \frac{3}{8}; 1+\frac{2}{5}; 1-\frac{2}{5}; -\sqrt{2}; \sqrt{2}+1; \sqrt{2}-1; -\sqrt{2}+1; -\sqrt{2}-1.$

b) $-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; -\pi; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}; 3,14; -3,14.$

Ejercicio 2 Represente en la recta los siguientes conjuntos

a) $[2, 4] \cap [3, 6]$ b) $[2, 4] \cup [3, 6]$ c) $(-\infty, 3) \cap (1, +\infty)$

d) $(-1, 3) \cap [3, +\infty)$ e) $(-1, 3) \cup [3, +\infty)$ f) $(-1, 3) \cup (3, 5)$

Ejercicio 3 Represente en la recta los siguientes conjuntos. Escríbalos como intervalos o como unión de intervalos.

a) Todos los números reales mayores que -1 .

b) Todos los números reales mayores o iguales que 2 .

c) Todos los números reales que distan del cero menos que 3 .

d) $\{x \in \mathbb{R} / 2x - 3 > 5\}$

i) $\left\{x \in \mathbb{R} / \frac{1}{x} < \frac{4}{x}\right\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} / 1 < 2x - 3 < 5\}$

j) $\{x \in \mathbb{R} / |x| < 3\}$

f) $\{x \in \mathbb{R} / x(2x - 3) > 0\}$

k) $\{x \in \mathbb{R} / |x - 2| < 3\}$

g) $\{x \in \mathbb{R} / x^2 - 36 < 0\}$

l) $\{x \in \mathbb{R} / |x| > 3\}$

h) $\left\{x \in \mathbb{R} / 1 + \frac{2}{x} < 3\right\}$

m) $\{x \in \mathbb{R} / |x + 2| < 3\}$

Ejercicio 4 Dados los números $3,14$ y π

a) Halle un número racional comprendido entre ambos.

b) Halle un número irracional comprendido entre ambos (Ayuda: escriba su desarrollo decimal).

Ejercicio 5 Considere los siguientes conjuntos

$$A = \left\{ \frac{1}{n} / n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$B = \left\{ \frac{n}{n+1} / n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$C = (0, 7)$$

$$D = \mathbb{N}$$

$$E = \left\{ n - \frac{1}{n^2} / n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$F = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$G = \{5; 5,9; 5,99; \dots\} \quad H = \{x \in \mathbb{R} / |x - 2| < 1\} \quad I = \{x \in \mathbb{R} / |x| > 3\}$$

En cada caso

- a) Determine si 7 es cota superior.
- b) Determine si 0 es cota inferior.
- c) Determine si está acotado superiormente.
- d) Determine si está acotado inferiormente.
- e) En caso afirmativo encuentre el supremo y/o el ínfimo del conjunto. Decida si alguno de ellos es máximo y/o mínimo del conjunto correspondiente.

Ejercicio 6 Considere el conjunto $A = \left\{2 + \frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}\right\}$. Encuentre el supremo y el ínfimo de A . Dicho conjunto ¿tiene un máximo?; ¿tiene un mínimo?

Ejercicio 7 Sean A y B dos conjuntos de números reales no vacíos y acotados de modo que $A \subset B$. Ordene de menor a mayor los siguientes números:

$$\sup A, \sup B, \inf A, \inf B.$$

Exhiba un ejemplo donde $\sup A = \sup B$ y otro donde la desigualdad sea estricta.

Ejercicio 8 Determine, en caso de que existan, el supremo, el ínfimo, el máximo y el mínimo de los siguientes conjuntos

- a) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x + 2 < 0\}$.
- b) $B = \{y \in \mathbb{R} : y = x^2 - 3x + 2, x \in (0, 2)\}$.
- c) $C = \{y \in \mathbb{R} : y = x^2 - 3x + 2, x \in \mathbb{R}\}$.

Práctica 3: Sucesiones

Ejercicio 1 Dadas las sucesiones

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\sqrt{n}}{n+1} & b_n &= \frac{2^{n-1}}{(2n-1)^3} \\ c_n &= \frac{(-1)^{n+1}}{n!} & d_n &= \frac{\cos(n\pi)}{n} \end{aligned}$$

Calcule a_9 ; b_5 ; c_3 ; d_{11} .

Ejercicio 2 Para cada una de las siguientes sucesiones, proponga el término general a_n y clasifique las mismas en convergentes o divergentes.

$$\begin{aligned} a) & 1, 2, 3, 4, \dots & f) & 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, \dots \\ b) & -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots & g) & 1, -1, 1, -1, \dots \\ c) & 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots & h) & 2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots \\ d) & \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \dots & i) & 1, 1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \dots \\ e) & -1, 2, -3, 4, \dots \end{aligned}$$

Ejercicio 3 Sea $a_n = \frac{n}{n+10,5}$. Decida por la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$
- b) $a_n > 0,9$ para casi todo n .
- c) Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_{n_0} = 1$
- d) La sucesión está acotada superior e inferiormente.

Ejercicio 4 Sea $b_n = \frac{(-1)^n + 2}{n}$. Calcule:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \quad b) \sup \{b_n / n \in \mathbb{N}\} \quad c) \inf \{b_n / n \in \mathbb{N}\}$$

Ejercicio 5 Calcule, si existe, el límite de las siguientes sucesiones.

$$\begin{aligned} a) & a_n = \left(\frac{1}{n} + \frac{2n}{n+1} \right)^3 & e) & e_n = \frac{\sqrt{n^3} + 2}{n^2 - 1} \\ b) & b_n = \frac{3n^2 + 2}{2n^2 + 5n} & f) & f_n = \sqrt{\frac{4n^2 - 1}{9n^2 + 2}} \\ c) & c_n = \frac{3n^2 + 2}{2n^3 + 5n} & g) & g_n = \frac{-n}{\sqrt{n^2 - n} + n} \\ d) & d_n = \frac{-4n^3 + 2n^2 - 3n - 1}{5n^2 + 4} \end{aligned}$$

Ejercicio 6

Calcule, si existe, el límite de las siguientes sucesiones.

$$a) a_n = \frac{n^2 - 5n + 7}{n + 3} + \frac{n^2 + 5}{n + 1}$$

$$b) b_n = \frac{n^2 - 5n + 7}{n + 3} - \frac{n^2 + 5}{n + 1}$$

$$c) c_n = \sqrt{n^2 + n - 2} + n$$

$$d) d_n = \sqrt{n^2 + n - 2} - n$$

$$e) e_n = \sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - n - 3}$$

$$f) f_n = \sqrt{\frac{2n^2 - 1}{3n^2 + 2}} + \frac{3n - 1}{2n + 3}$$

$$g) g_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$$

$$h) h_n = n(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$$

$$i) i_n = \frac{n}{\sqrt{n+1} - n}$$

$$j) j_n = \sqrt{n}(\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n})$$

Ejercicio 7 Muestre que cada una de las siguientes situaciones constituye una indeterminación. Para ello exhiba por lo menos dos ejemplos donde los límites sean distintos (finitos o infinitos). Suponga, cuando haga falta, condiciones suficientes para que las sucesiones estén bien definidas.

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \text{ y } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty \quad i) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) \quad ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \text{ y } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \quad i) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \text{ y } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty \quad i) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n.$$

Ejercicio 8

a) Marque la única respuesta correcta: si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ y b_n es acotada, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$

☐ oscila ☐ tiende a más infinito ☐ es una indeterminación ☐ está acotada.

$$b) \text{ Calcule } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4}{n+1} + \cos n$$

c) Marque la única respuesta correcta: si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$

☐ es igual a 0 ☐ tiende a más infinito ☐ es una indeterminación ☐ no existe

$$d) \text{ Calcule } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} - 1}{n^2 + 1}$$

Ejercicio 9 Calcule, si existen, los siguientes límites

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n + 5}{n}$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2 + (-1)^n) \sin n}{n}$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n (\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1, 5)^n$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 5}{3^n}$

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} (3 + \operatorname{sen} n)(0, 8)^n$

h) $\lim_{n \rightarrow \infty} (0, 9)^n (1, 1)^{n+1}$

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 4^{n+1} + 2}{2^{2n} + 2^n}$

j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 + 1}$

k) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3n^3 + 2n^2 + 1}{n^2 + 2}}$

l) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{5n + 1}{3n + 1}}$

m) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 2}{5n^2 + 3} \right)^{1/n}$

n) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5^n + 2^n}$

Ejercicio 10 Muestre que las siguientes situaciones constituyen una indeterminación. Para ello exhiba por lo menos dos ejemplos donde los límites sean distintos (finitos o infinitos). Suponga, cuando haga falta, condiciones suficientes para que las sucesiones estén bien definidas.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{b_n}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n)^{a_n}$

Ejercicio 11 Calcule, si es posible, los siguientes límites

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n+1} \right)^{n-1}$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^n$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{17}{n} \right)^n$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2 + 2n + 1}{3n^2 - 5} \right)^{\frac{n^2 + 2}{2n + 1}}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n + 1}{3n - 5} \right)^n$

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\operatorname{sen} n}{n^2} \right)^n$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n + 1}{3n - 5} \right)^n$

h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\cos n}{5n^3 + 1} \right)^{2n^2 + 3}$

Ejercicio 12 Calcule, si es posible, los siguientes límites

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{n} \right)^n$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{n^2} \right)^n$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^{n+1}}$$

$$e) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 2^n + n}{2^{n+1} + n^3}$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{2n+1} + \cos n}{2 \cdot 9^n + \sin n}$$

Ejercicio 13 Calcule, si existen, los siguientes límites

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n2^n}{n!}$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{10}}{n!}$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + n!}{3^n + 5n!}$$

Ejercicio 14 En cada caso, la sucesión a_n se encuentra sujeta a las condiciones indicadas. Calcule, cuando sea posible, su límite.

$$a) 2 - \frac{3}{2^n} < 5 - 2a_n < 1 + \sqrt[n]{n}$$

$$c) 0 < 3a_n + 2 < \frac{2^n n!}{n^{2n+1}}$$

$$b) \frac{1}{a_n} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

$$d) 2a_n + 6 > \frac{1}{\sqrt[n]{n+1} - 1}$$

Ejercicio 15 Usando subsucesiones, pruebe que cada una de las siguientes sucesiones carece de límite:

$$a) 0, 1, 2, 0, 1, 2, \dots$$

$$b) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$c)$$

$$a_n = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ es impar,} \\ 2 + \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Ejercicio 16 Se sabe que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L > 0$. Calcule

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1}.$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{2n} - a_{3n}).$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Ejercicio 17 Considere la sucesión definida recurrentemente como

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

a) Calcule el cociente de D' Alembert. A partir del mismo, concluya que la sucesión es creciente.

b) Muestre que $a_n = 2^{n-1}$, $n \geq 1$.

Ejercicio 18 Calcule, si existe, el límite de las siguientes sucesiones dadas en forma recurrente:

a) $a_1 = 5, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{3n}.$

b) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{n^n + 3^n}{n!} a_n.$

PROBLEMAS VARIOS

Ejercicio 1 Calcule el siguiente límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n}{n+1} + (-1)^n \frac{n^5 + \cos n}{2 - 6^n} \right)$$

Ejercicio 2 Sean $a_n = n(0,95)^n$ y $b_n = \frac{(1,02)^n}{\sqrt{n}}$. Calcule

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)(b_n).$

Ejercicio 3 Muestre que el valor del $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{n} + \frac{b}{n^2} \right)^{n^2}$ no depende de la constante b .

Ejercicio 4 Sea a_n una sucesión definida en forma recurrente como :

$$a_1 = 5, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{5n}.$$

Se define $b_n = n^2 a_n$. Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

Ejercicio 5 Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ sabiendo que $0 < 5 - 3a_n \leq 7^n \left(1 - \frac{2}{n} \right)^{n^2}$

Ejercicio 6 Halle los valores de a y b para que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^6 + 3bn^4 + 2\sqrt{n}}{5n^4 - 3n + 4} = 4.$$

Ejercicio 7 Se definen $a_n = (-1)^n \frac{3n-1}{7n+2}$ y $b_n = (a_n)^2$.

a) Pruebe por medio de subsucesiones que a_n no tiene límite.

b) Calcule el $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

Ejercicio 8 Halle todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales la sucesión $a_n = \frac{x^{2n+1}}{n^3 4^{n+1}}$ es convergente. Para los x hallados calcule el $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Ejercicio 9 Calcule el siguiente límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n n^2 + n}.$$

Ejercicio 10 Calcule el siguiente límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3 + 7n^2}{5 + n^2} + \sqrt{n^2 + 6n + 17} - \sqrt{n^2 + 17} \right).$$

Ejercicio 11 Calcule, si existe, el siguiente límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{n^4 + 2n^2}{n^4 + n^2 + 1} \right)^{3n^2} + \frac{\sin(n^4 + 2n^2)}{3n^2} \right]$$

Ejercicio 12 Sea $a_n = \frac{\cos(3n) + n!}{n + 2^n}$. Calcule el $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3a_n + 5}{2a_n + 7}$.

Ejercicio 13 Sea a_n tal que $5n - 6n^2 - 7 < 4n^2 a_n < \frac{n^3 + n^2 3^n}{n!} - 6n^2$. Calcule el $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Ejercicio 14 Halle $a \in \mathbb{R}$ para que el $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n^3 + a}{5n^3 + 3} \right)^{4n^3} = e^3$.

Ejercicio 15 Si la sucesión a_n satisface $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 4$ y $a_n > 4$, calcule el

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{12 + a_n} - \sqrt{4a_n}}{(a_n)^2 - 2a_n - 8}.$$

Ejercicio 16 Sea $a_n = \left(\frac{5n+8}{5n+3}\right)^n \frac{n^5+1}{n^4+1}$. Calcule el $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(5a_n)}{\sqrt{a_n}}$.

Ejercicio 17 Sea a_n tal que $\left(\frac{2n+11}{2n+3}\right)^n \leq 2a_n - 6 \leq e^7 + \frac{\cos(9n)}{4^n}$. Calcule el $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Práctica 4: Límites y Continuidad

Ejercicio 1 Calcule los siguientes límites

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - 10x + 1)$$

$$h) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - \sqrt{x}}{1 + 4\sqrt{x}}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2 + 1}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 1})$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 3x + 1}{2x^4 + 2x^2 + 1}$$

$$j) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{(x-10)(x+4)} - x \right)$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{x + 5}$$

$$k) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^3 + 1} - x}{x + 5}$$

$$l) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{|x| + 1}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x - \cos x}$$

$$m) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-4x}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + 6}}{5x - 1}$$

$$n) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{1}{x} \right)$$

Ejercicio 2 Calcule, si es posible, los límites cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$ de las siguientes funciones:

$$a) f(x) = -3x^5 + x^2 - 1$$

$$f) f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3} - x$$

$$b) f(x) = \sqrt{9 + x^2}$$

$$g) f(x) = \frac{e^{x+1} + 4}{3 - 2e^x}$$

$$c) f(x) = \sqrt{1 - x}$$

$$h) f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

$$d) f(x) = \frac{x^2 + 3}{2x - 1}$$

$$i) f(x) = e^{1/x}$$

$$e) f(x) = \frac{x^3 - 5x^2}{x + 3}$$

$$j) f(x) = \frac{x}{|x| + 1}$$

Ejercicio 3 Calcule, si se puede, los límites en el infinito, además de los límites en los puntos que se indican:

$$a) f(x) = \frac{1}{x^3}, \quad x = 0^+, x = 0^-$$

$$b) f(x) = \frac{2x + 1}{x + 3}, \quad x = -3^+, x = -3^-$$

$$c) f(x) = \frac{5x^2}{x+3}, x = -3^+, x = -3^-$$

$$d) f(x) = \frac{x+3}{x^2+1}, x = -1^+$$

$$e) f(x) = e^{1/x}, x = 0^+, x = 0^-$$

$$f) f(x) = e^{\frac{x-1}{x}}, x = 0^+, x = 0^-$$

$$g) f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1}, x = 1, x = -1^+, x = -1^-$$

$$h) f(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^2}}, x = 1^-, x = -1^+$$

Ejercicio 4 En cada una de las siguientes funciones calcule, además del límite que se indica, los límites cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

$$a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^4 - 2}{x^3}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x+8} - 3}{x^2 - x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{4x - 12}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{20}}{e^x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{x^2 - 2x - 3}{4x - 12} \right)^{\frac{2}{x-3}}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)^2}{x}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 0} x \cos \left(\frac{1}{x} \right)$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2 - 1}{x - 2} - \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 2x} \right)$$

$$j) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \left(\frac{1}{x} \right)$$

$$k) \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \left(2 + \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right)$$

Ejercicio 5 Calcule los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{2x}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x+6)}{x+2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\sin 2x}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(3x)}{x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{\sin 3x}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(5x)}{x^2}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{1 - \cos x}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{sen}(x\pi)}{\operatorname{sen}(3x\pi)}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + 4 \operatorname{sen}(2x)}{x^2 + 5 \operatorname{sen} x}$$

$$j) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{sen}(x\pi)}{x - 1}$$

Ejercicio 6 Calcule los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^{\frac{x^2 + 1}{x + 1}}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{3x + 2}{5x - 2}\right)^{\frac{1}{x - 2}}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x + 1}{3x + 4}\right)^{\frac{2x^2 + 1}{x - 3}}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(1 + \frac{3}{x + 1}\right)^{\frac{x^2}{2x + 1}}$$

$$c) \lim_{t \rightarrow 0} (1 + 3t)^{1/t}$$

$$h) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(h + 2) - \ln 2}{h}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{sen} x)^{1/x}$$

$$i) \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + y)}{y}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{3x + 2}{5x - 2}\right)^{\frac{1}{x - 2}}$$

$$j) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}$$

$$k) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 5x)}{e^x - 1}$$

Ejercicio 7 Marque la única respuesta correcta:

$$a) \text{ El } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} + x \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right) \right)$$

☐ no existe ☐ es igual a 1 ☐ es igual a 0 ☐ es infinito

$$b) \text{ El } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + ax + 1} - 1}{x} = 2 \text{ para}$$

☐ ningún valor de a ☐ $a = 4$ ☐ $a = 0$ ☐ todo a

Ejercicio 8 Determine los puntos de discontinuidad de las funciones dadas a continuación. Vea si en esos puntos la discontinuidad es evitable.

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7} & \text{si } x > 7 \\ 0 & \text{si } x \leq 7. \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{si } x > 1 \\ 1 & \text{si } x \leq 1. \end{cases}$$

$$d) f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x(x-\pi)}$$

$$e) f(x) = \frac{x^2}{1-\cos x}$$

Ejercicio 9 En cada caso determine el o los valores de la constante a para los cuales las funciones resulten continuas.

$$a) f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{si } x \geq 2 \\ a - x^2 & \text{si } x < 2. \end{cases} \quad c) f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right) & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} e^{\frac{x-1}{x+1}} & \text{si } x > -1 \\ 3x + a & \text{si } x \leq -1. \end{cases} \quad d) f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 5x + a & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Ejercicio 10 Muestre que las siguientes funciones tienen una discontinuidad evitable en los puntos señalados

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{x-5}{\sqrt{x+4}-3} & \text{si } x \neq 5, x \geq -4 \\ 0 & \text{si } x = 5. \end{cases}, \text{ en } x = 5$$

$$b) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x+7}-4} & \text{si } x \neq 9, x \geq -7 \\ 0 & \text{si } x = 9. \end{cases}, \text{ en } x = 9$$

Ejercicio 11

a) Demuestre que la ecuación $x^3 - 3x + 1 = 0$ tiene al menos una solución en el intervalo $(-1, 1)$. Encuentre un intervalo de longitud $0,2$ o menor que contenga dicha solución.

b) Demuestre que la ecuación $x^2 = \sqrt{x+1}$ tiene al menos una solución. Encuentre un intervalo de longitud 1 o menor que la contenga.

Ejercicio 12 Pruebe que las siguientes ecuaciones tienen al menos una solución real. En cada caso encuentre un intervalo de longitud 1 o menor que contenga a una de ellas.

$$a) 2x - 1 = \cos x$$

$$d) \frac{x}{x^4 + 1} = 0, 2$$

$$b) x^{11} + x^2 + 1 = 0$$

$$e) \frac{x^2 + 1}{x + 2} + \frac{x^4 + 1}{x - 3} = 0$$

$$c) \ln x = -3x$$

Ejercicio 13 Para cada una de las siguientes funciones determine ceros, puntos de discontinuidad. A partir de ellos, halle el conjunto donde la función es positiva.

$$a) f(x) = x^2(x + 3)(x - 2)$$

$$c) f(x) = x \ln x$$

$$b) f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 1}$$

$$d) f(x) = \frac{e^x - 1}{x + 5}$$

PROBLEMAS VARIOS

Ejercicio 1 Sea $f(x) = \frac{2x^4}{x^3 + 1}$. Halle los valores de a y b para los cuales el $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$.

Ejercicio 2 Determine en cada caso el valor de la constante a :

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{ax^2 + 4x + 1} - 1}{x} = 5$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + ax - 1} - \sqrt{x^3 + ax - 1}}{x - 1} = 2$$

Ejercicio 3 Sea $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(ax)}{4x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Halle $a \in \mathbb{R}$ para que f sea continua en $x = 0$.

Ejercicio 4 Sea $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(ax) - 1}{2 \sin x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Pruebe que f es continua en $x = 0$ cualquiera sea $a \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 5 Sea $f(x) = \begin{cases} \frac{ax^2 + 3 - 3 \cos x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 4 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Halle $a \in \mathbb{R}$ para que f sea continua en $x = 0$

Ejercicio 6 Sea $f(x) = \begin{cases} \frac{3x - 6\sqrt{x}}{x - 4} & \text{si } x > 4 \\ a & \text{si } x \leq 4 \end{cases}$

Halle $a \in \mathbb{R}$ para que f sea continua en $x = 4$.

Ejercicio 7 Halle los límites en $+\infty$ y en $-\infty$ de las siguientes funciones. Además calcule, si existe, el límite en los puntos indicados

a) $f(x) = \frac{10e^{2x}}{5e^{2x} + 3x^2}$ c) $g(x) = \frac{4e^{-x^2}}{x^2 - 16}$, $x = 4$, $x = -4$.

b) $h(x) = \sqrt{x-2}e^{-4(x-2)^2} - \frac{\sin 5x}{x}$, $x = 0$.

Práctica 5: Derivada

Ejercicio 1 Justifique, por medio de los cocientes incrementales, las siguientes igualdades

$$a) f(x) = 7 \implies f'(x) = 0$$

$$d) f(x) = \frac{1}{x} \implies f'(2) = -\frac{1}{4}$$

$$b) f(x) = 3x + 5 \implies f'(x) = 3$$

$$e) f(x) = \sqrt{x+5} \implies f'(4) = \frac{1}{6}$$

$$c) f(x) = (x+1)^2 \implies f'(4) = 10$$

Ejercicio 2 Halle, usando el cociente incremental, el valor de la derivada de las siguientes funciones en los puntos que se indican. Escriba la ecuación de la recta tangente en esos mismos puntos,

$$a) f(x) = 4x + 7, \text{ en } x = 3$$

$$b) f(x) = \frac{2}{x-1}, \text{ en } x = 5$$

$$c) f(x) = \sqrt{x+12}, \text{ en } x = 13$$

$$d) f(x) = x + \ln(x), \text{ en } x = 1$$

$$e) f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x > 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x \leq 1 \end{cases} \quad \text{en } x = 1$$

$$f) f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{en } x = 0$$

Ejercicio 3 ¿En qué punto de la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 6x + 8$ la recta tangente es paralela al eje de las x ?

Ejercicio 4 Sean $f(x) = 3x^2 + x$ y $g(x) = 5x + 2$. Encuentre el punto en el cual las rectas tangentes de f y g resultan paralelas. Halle las correspondientes ecuaciones.

Ejercicio 5 Usando las reglas de derivación, halle las derivadas de las siguientes funciones en su dominio de definición.

$$a) f(x) = x^3 + x^2 + \sin(x)$$

$$d) f(x) = x \ln(x)$$

$$b) f(x) = x^2 \cos(x)$$

$$e) f(x) = x^5 + \frac{1}{x}$$

$$c) f(x) = 3 \sin(x)$$

$$f) f(x) = e^x + \ln(x)$$

$$g) f(x) = x \operatorname{sen}(x) + e^x \cos(x)$$

$$j) f(x) = (x+2)(x^2+1) \ln(x)$$

$$h) f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$$

$$k) f(x) = \frac{x \ln(x)}{x^2+1}$$

$$i) f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$$

$$l) f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{\sqrt{x}}$$

Ejercicio 6 Usando la regla de la cadena, halle las derivadas de las siguientes funciones en su dominio de definición

$$a) f(x) = (1+x)^2$$

$$i) f(x) = \ln(2 + \operatorname{sen}(x))$$

$$b) f(x) = (1+x)^3$$

$$j) f(x) = e^{x^2 + \cos(x)}$$

$$c) f(x) = (1+x)^{2001}$$

$$k) f(x) = \ln^2(x^2+1)$$

$$d) f(x) = e^{x+3}$$

$$l) f(x) = \ln(5x)$$

$$e) f(x) = (1-x)^3$$

$$f) f(x) = \cos(3x)$$

$$m) f(x) = \frac{(2x^3+3)^2}{\ln(x^2+1)}$$

$$g) f(x) = 3\operatorname{sen}^4(x)$$

$$n) f(x) = \sqrt{4+5x^2}$$

$$h) f(x) = \ln(x+1)$$

Ejercicio 7 Calcule la derivada de la función en su dominio de definición, siendo $f(x) =$

$$a) x^x$$

$$b) x^{3x} + 2^x$$

$$c) (\operatorname{sen}^3(x))^{\ln(x)}$$

$$d) x^{\sqrt{x}}$$

Ejercicio 8 Sean f , ℓ y h funciones tales que

$$f(x) = 1 + x^2, \quad \ell'(x) = \operatorname{sen}^2(\operatorname{sen}(1+3x)), \quad \ell(0) = 4, \quad h(x) = \ell(1+2x)$$

Calcule $(f \circ \ell)'(0)$ y $(h \circ f)'(0)$.

Ejercicio 9 Pruebe que la función $f(x) = 7e^{kx}$ es solución de la ecuación $f'(x) = kf(x)$.

Ejercicio 10 Para cada una de las siguientes funciones estudie la continuidad y, mediante el estudio del cociente incremental, la derivabilidad en el punto indicado.

$$a) f(x) = \begin{cases} 3 + \sqrt{x+1} & \text{si } x > 0 \\ 2x + 4 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{en } x = 0$$

$$b) f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & \text{si } x > 1 \\ 3x + 1 & \text{si } x \leq 1 \end{cases} \quad \text{en } x = 1$$

$$c) f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{en } x = 0$$

En las funciones que resulten derivables en los puntos indicados, escriba la ecuación de la recta tangente.

Ejercicio 11 Marque la única respuesta correcta: Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función

$$\text{definida como } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{si } x > 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \leq 1 \end{cases} . \text{ Entonces, en } x = 1$$

- ☐ f es continua pero no derivable.
- ☐ f es continua y derivable.
- ☐ f no es continua pero si es derivable.
- ☐ f no es ni continua ni derivable.

Ejercicio 12 Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5e^{x^3+2x}$

- a) Muestre que $f'(x) > 0$ para todo x . Además, note que $f(0) = 5$.
- b) Use el teorema de la función inversa para justificar la existencia de $(f^{-1})'(5)$ y calcule su valor.

Ejercicio 13 La temperatura C de un cuerpo que inicialmente estaba a 90 grados Celsius, se enfría de acuerdo a la ley $C(t) = 20 + 70e^{-0,1t}$ (se está suponiendo que la temperatura ambiente es de 20° Celsius) donde t es el tiempo en minutos.

- a) Calcule con qué velocidad se está enfriando el cuerpo a los 5 minutos.
- b) Muestre que la velocidad de enfriamiento es proporcional a la diferencia entre la temperatura C y la temperatura ambiente. Más precisamente:

$$C'(t) = -0,1 (C(t) - 20)$$

- c) Muestre que la velocidad de enfriamiento va tendiendo a 0 conforme avanza el tiempo.

Ejercicio 14 Calcule las siguientes derivadas

a) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, $f^{(5)}(x), f^{(70)}(x)$

b) $f(x) = e^x$, $f^{(19)}(x), f^{(200)}(x)$

c) $f(x) = e^{kx}$, $f^{(20)}(x)$

d) $f(x) = \ln(x+1)$, $f^{(4)}(x)$

e) $f(x) = 5x^3 + 8x$, $f^{(3)}(x), f^{(200)}(x)$

Ejercicio 15 Dados a y $b \in \mathbb{R}$ muestre que $f(x) = a \operatorname{sen}(x) + b \cos(x)$ es solución de la siguiente ecuación

$$f''(x) + f(x) = 0$$

Ejercicio 16 Considere la función $f(x) = (1+x)^n$, con n natural. Calcule $f^{(k)}(0)$ para todo valor de k .

PROBLEMAS VARIOS

Ejercicio 1 Pruebe que la función $f(x) = x|x|$ es derivable para todo x , que $f'(x)$ es continua pero que no existe $f''(0)$.

Ejercicio 2 Pruebe que el gráfico de la función $f(x) = x + \ln(x)$ tiene una recta tangente que pase por el origen.

Ejercicio 3 Halle, si existen, la o las ecuaciones de las rectas tangentes al gráfico de $f(x) = x + \frac{1}{x}$ que pasen por el punto

a) $(1, 0)$ b) $(0, 0)$ c) $(0, 4)$.

Ejercicio 4 La recta tangente de la función f en el punto de abscisa $x = -1$ tiene ecuación $y = -5x + 3$. Calcule la ecuación de la recta tangente al gráfico de la función $g(x) = f(-x^2 + \operatorname{sen}(\pi x))$ en el punto de abscisa $x = 1$.

Ejercicio 5 Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+5}-3}{\sqrt{x}-2} & \text{si } x \neq 4 \\ a & \text{si } x = 4 \end{cases}.$$

Encuentre $a \in \mathbb{R}$ para que f sea continua. Determine si resulta derivable.

Ejercicio 6 Sea

$$f(x) = \begin{cases} x + a \ln(x) & \text{si } x \geq 1 \\ bx + 5 & \text{si } x < 1 \end{cases}.$$

Determine a y b para que f sea derivable en $x = 1$.

Ejercicio 7 Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ ax + b & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

Halle los valores de a y b para que f resulte derivable.

Ejercicio 8 Sean f y g funciones derivables tales que la recta tangente al gráfico de f en $x_0 = 1$ tiene ecuación $y = 4x - 1$ y la recta tangente al gráfico de g en $x_0 = 2$ tiene ecuación $y = 3x - 5$. Halle, si es posible, la ecuación de la recta tangente al gráfico de

- a) $f \circ g(x)$ en $x_0 = 2$,
- b) $f^{-1}(x)$ en $x_0 = 3$,
- c) $g^{-1}(x)$ en $x_0 = 1$.

Práctica 6: Teorema del Valor Medio

Ejercicio 1

- a) Considere la función $f(x) = x^{2/3}$ definida en el intervalo $[-1, 1]$. Esta función es continua sobre este intervalo y $f(-1) = f(1)$. Sin embargo, su derivada no se anula nunca. ¿Por qué esto no contradice el Teorema de Rolle?
- b) Sea $f(x) = x^3 + 3x^5$, $-1 \leq x \leq 1$. Pruebe que en $x_0 = 0$ f no tiene extremo y que $f'(0) = 0$. ¿Por qué esto no contradice el Teorema de Fermat?

Ejercicio 2 Considere la función cuadrática $f(x) = x^2 - 2x$ y cualquier intervalo cerrado, por ejemplo el $[-1, 3]$. Compruebe que el valor $c \in (-1, 3)$ al que hace referencia el Teorema del Valor Medio es calculable en este caso.

Ejercicio 3 Pruebe las siguientes identidades

$$a) \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \qquad b) \ln(x^a) = a \ln(x)$$

(**Ayuda:** use que si dos funciones f y g tienen la misma función derivada, entonces $f(x) = g(x) + c$, donde c es una constante.)

Ejercicio 4 Pruebe que la única solución de la ecuación

$$f'(x) = 2f(x), \quad f(0) = 1,$$

es $f(x) = e^{2x}$. (**Ayuda:** si $u(x)$ es solución de la ecuación estudie la derivada de $h(x) = \frac{u(x)}{e^x}$.)

Ejercicio 5 Para las siguientes funciones, pruebe que el gráfico corta al eje x sólo una vez.

- a) $f(x) = -3x + \sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$
- b) $f(x) = e^{-x} - \ln(x)$, $x > 1$
- c) $f(x) = x + \ln(x)$, $x > 0$
- d) $f(x) = x^{2n+1} + x^3 + x + 1$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.
- e) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x} + 1} - 2$, $x > 0$

Ejercicio 6 Sea $R(x)$ una función con 3 derivadas continuas en $x = 0$ y tal que $R(0) = R'(0) = R''(0) = 0$. Pruebe que $\frac{R(x)}{x^3} = \frac{R'''(c)}{3!}$ para algún c entre 0 y x . (**Ayuda:** use el Teorema de Cauchy 3 veces.)

Ejercicio 7 Calcule los siguientes límites

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{\sin(3\pi x)} - 1}{x - 1}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x - 1 + \cos x}{3x + \sin x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{6(x-3)^2 \ln(x-3)}{x-4}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x-1) + x^2 - 4}{x-2}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)e^{x^2}}{x^2 - 1}$$

Ejercicio 8 Calcule los siguientes límites

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 3x^2}{x^2 + 7x - 1}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - 2^x)^{\sin(x)}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2(x)}{x}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin(x)}$$

Ejercicio 9 Calcule los siguientes límites

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) (e^x - 1)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin(7x) + 2x^2 \ln x$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x}$$

Ejercicio 10 Mediante los cocientes incrementales correspondientes, decida si las siguientes funciones son derivables en el punto indicado.

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{e^{\sin(3\pi x)} - 1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ -3\pi & \text{si } x = 1 \end{cases} \quad \text{en } x = 1$$

$$b) f(x) = \begin{cases} \sin(7x) + 2x^2 \ln x & \text{si } x > 0 \\ 7x & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{en } x = 0.$$

$$c) f(x) = \begin{cases} \frac{4x - 1 + \cos x}{3x + \sin x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{en } x = 0.$$

Ejercicio 11 Para las siguientes funciones, encuentre a para que f resulte continua. Para el valor de a hallado, decida si la función resulta derivable en el punto indicado.

$$a) \quad f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{4x - 10 + 6\sqrt{x}}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ a & \text{si } x = 1 \end{cases} \quad \text{en } x = 1.$$

$$b) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{5 \cos(6x) - a}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{en } x = 0.$$

$$c) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{ax + 3 - 3 \cos(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 6 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{en } x = 0.$$

Ejercicio 12 Explique por qué no es correcta la siguiente aplicación de la Regla de L'Hospital.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x + 2}{2} = 4$$

Ejercicio 13 Muestre por qué no es posible utilizar la Regla de L'Hospital para calcular el límite indicado en cada caso y encuentre el límite por otros medios

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x} \qquad b) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x - e^{-x}} \qquad c) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$$

Ejercicio 14 Justifique las siguientes afirmaciones

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right)}{\operatorname{sen} x} = 0$$

$$b) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \operatorname{sen}(x)}{x + \cos x} = 1$$

Ejercicio 15 Marque la única respuesta correcta: Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida como $f(x) = \begin{cases} x^{3/2} \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$. Entonces, en $x = 0$

- ☐ f es continua pero no derivable.
☐ f es continua y derivable.
☐ f no es continua pero si es derivable.
☐ f no es ni continua ni derivable.

PROBLEMAS VARIOS

Ejercicio 1 Sea $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 3^{5x + \cos(2x)} + 8x + \ln((4x + 1)^{-2}).$$

Pruebe que $f(x) \neq 1 \forall x \geq 0$.

Ejercicio 2 Considere $f(x) = 4\sqrt{x} + 3\ln(x) - 2, \forall x > 0$. Pruebe que existe la función inversa f^{-1} y calcule $(f^{-1})'(2)$ (Observe que $f(1) = 2$.)

Ejercicio 3 Sea f una función continua y derivable tal que $f(-2) = f(5) = 0$. Pudebe que existe un $c \in (-2, 5)$ tal que $f'(c) = 200f(c)$

Ayuda: considere $g(x) = e^{-200x}f(x)$.

Ejercicio 4 Sea $h : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función estrictamente creciente. Pruebe que $2^{h(x)-5} + 3x \neq \sin(x) \forall x \geq 0$.

Ejercicio 5 Pudebe la siguiente desigualdad

$$x^6 + x^4 + x^2 + 3 \geq 12x - 6, \quad x \geq 1$$

Ejercicio 6 Considere la función $f(x) = \begin{cases} \frac{8x^2 + a(1 - \cos(x))}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Encuentre el valor de a para que f resulte derivable en $x = 0$ y además sea $f'(0) = 3$.

Ejercicio 7 Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función con dos derivadas continuas tal que $f(0) = 2, f'(0) = \frac{5}{6}, f''(0) = 5$. Se define $\ell : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en la forma

$$\ell(x) = \begin{cases} \frac{f(6x) - 2}{5x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \ell(x)$ y $\ell'(0)$.

Ejercicio 8 Considere la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = e^{4x} + x^5 + 2$. Pruebe que es biyectiva y que $f^{-1}(3) = 0$. Calcule

$$\lim_{y \rightarrow 3} \frac{f^{-1}(y)}{2y - 6}$$

Práctica 7: Estudio de Funciones

Ejercicio 1 Encuentre los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de las siguientes funciones:

$$a) f(x) = x^7 + 7x^5 + 4x$$

$$i) f(x) = \frac{1-x}{2x+3}$$

$$b) f(x) = 2 - x^{\frac{1}{3}}$$

$$j) f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

$$c) f(x) = \ln(x^2+1)$$

$$k) f(x) = \frac{x}{x^2-1}$$

$$d) f(x) = e^{(x-1)^2}$$

$$l) f(x) = x \ln^2 x$$

$$e) f(x) = xe^x$$

$$f) f(x) = x^2 e^{-x}$$

$$g) f(x) = \sin x \text{ en } [-\pi, \pi]$$

$$m) f(x) = 2x^4 - 4x^2$$

$$h) f(x) = x \ln x$$

$$n) f(x) = e^{2x^4-4x^2}$$

Ejercicio 2 Sea $f(x) = \frac{24e^x}{3e^x+1}$. Pruebe que es monótona y halle la imagen de f .

Ejercicio 3 Determine $k \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x) = \frac{x+k}{x^2+1}$ alcance un extremo local en $x=2$. ¿Es un máximo o un mínimo local?

Ejercicio 4 De la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivable en todo su dominio, se sabe que su derivada se anula en $x=-1$, $x=-\frac{1}{2}$, $x=0$ y $x=\frac{3}{2}$. Además se tiene que

$$\{x \in \mathbb{R} : f'(x) > 0\} = (-\infty, -1) \cup \left(0, \frac{3}{2}\right) \text{ y}$$

$\{x \in \mathbb{R} : f'(x) < 0\} = \left(-1, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$. Encuentre los máximos y los mínimos locales de f .

Ejercicio 5 Encuentre, si las hay, las ecuaciones de las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas (tanto para $x \rightarrow +\infty$ como para $x \rightarrow -\infty$.) de las siguientes funciones. Localice en un dibujo, la posición del gráfico de la función con respecto a las asíntotas halladas:

$$a) f(x) = \frac{x^2+3x+1}{x-1}$$

$$d) f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$$

$$b) f(x) = x + e^x \sin x$$

$$e) f(x) = x \ln \left(e - \frac{1}{x}\right)$$

$$c) f(x) = \frac{x^2-3x+2}{(x-1)(x+1)}$$

$$f) f(x) = 2x + \sqrt{1+x^2}$$

$$g) f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

$$h) f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2}$$

$$j) f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

$$i) f(x) = \frac{3e^x}{5e^x + 1}$$

Ejercicio 6 Encuentre los valores de a y de b tales que la recta $y = 2x + 7$ resulte una asíntota oblicua de $f(x) = \frac{ax^3 + bx^2 + 1}{x^2 + 5}$ para $x \rightarrow \infty$.

Ejercicio 7 Determine los intervalos de concavidad y convexidad y localice los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

$$a) f(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 - 1$$

$$d) f(x) = \frac{x}{1 + x^2}$$

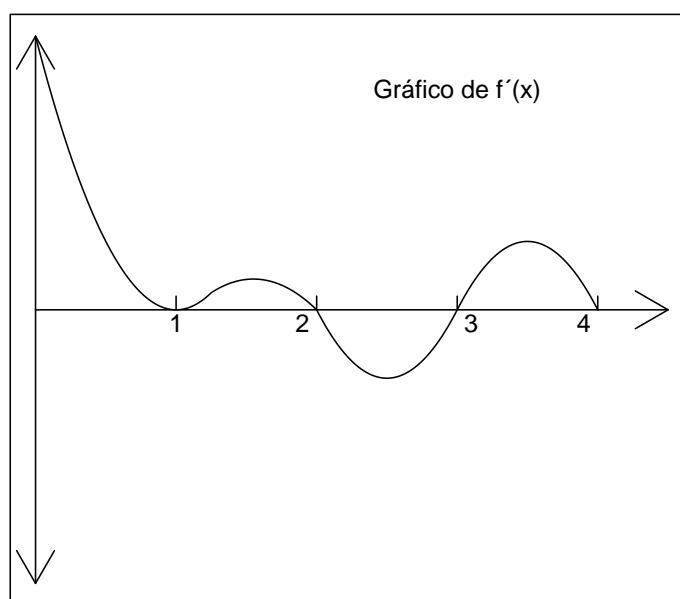
$$b) f(x) = e^{-x^2}$$

$$e) f(x) = xe^{-x}$$

$$c) f(x) = \sqrt[3]{2x^2 - x^3}$$

$$f) f(x) = x^2 \ln x$$

Ejercicio 8 Sea $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y derivable, tal que el gráfico de la función derivada $y = f'(x)$ es el de la figura dada al final del enunciado de este ejercicio. Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, los extremos locales y los puntos de inflexión de f . Si $f(0) = 1$ haga un gráfico aproximado de $f(x)$.



Ejercicio 9 Para cada una de las siguientes funciones, halle el dominio, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, los extremos locales. Determine cuáles de ellos son absolutos. Escriba la ecuación de las asíntotas. Determine, si la cuenta lo permite, los intervalos de concavidad y de convexidad y los puntos de inflexión. Con la información obtenida haga un gráfico aproximado de la función:

a) $f(x) = x^4 - 2x^2$

b) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

c) $f(x) = e^{-x^2}$

d) $f(x) = xe^{-x}$

e) $f(x) = x \ln x$

f) $f(x) = x \ln^2 x$

g) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$

h) $f(x) = x^2 e^{-x}$

i) $f(x) = \frac{x^2+100}{x^2-25}$

j) $f(x) = x\sqrt{4-x}$

k) $f(x) = x^2(2-x)^2$

l) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(1-x)$

m) $f(x) = x^5 - 5x$

n) $f(x) = (1+x+2x^2)e^x$

o) $f(x) = \sqrt{x-2} - 5 \ln(x-2)$

p) $f(x) = x - 3(x-5)^{\frac{2}{3}}$

q) $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$

r) $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

s) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ (x-2)^2 & \text{si } x > 1. \end{cases}$

t) $f(x) = \begin{cases} \frac{8x}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ 3x-x^2 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$

Ejercicio 10 Determine la cantidad de soluciones que tienen las siguientes ecuaciones:

a) $x^7 + 3x^5 + 2x + 1 = 0$

b) $e^x = 1 - x$

c) $xe^{-x^2} = \frac{1}{5}$

d) $4x - 5x^{\frac{4}{5}} = 2$

e) $\frac{x^3}{(x-1)^2} = 2$

f) $xe^{\frac{1}{x}} = 1$

g) $f(x) = 2, \text{ con}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{8x}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ 3x-x^2 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

h) $x \ln x = -\frac{1}{2}$

Ejercicio 11 Pruebe las siguientes desigualdades:

a) $\sin x < x \text{ si } x > 0$

b) $x \ln x \geq -1$

c) $e^x > 1 + x$

d) $-\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{1}{2}} \leq xe^{-x^2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{1}{2}}$

$$e) (1+x)^{10} > 1+10x \text{ si } x > 0 \qquad f) \ln(1+x) > 1 - \frac{1}{x} \text{ si } x > 1$$

Ejercicio 12 Para cada una de las siguientes funciones, analice la existencia de extremos absolutos donde se indica:

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = 3x + 1, & [-1, 3] \\ b) f(x) = x^2 - 1, & [-1, 1] \\ c) f(x) = \frac{1}{x-1}, & [2, 5] \\ d) f(x) = \frac{1}{x-1}, & [0, 2], \quad x \neq 1 \\ e) f(x) = x^2, & [-3, 4] \\ f) f(x) = \frac{\ln x}{x}, & (0, 2] \\ g) f(x) = \frac{1}{1+x^2}, & (-\infty, +\infty) \\ h) f(x) = \sin(2x), & [0, \pi] \end{array}$$

Ejercicio 13 Se quiere ahorrar el máximo de material al hacer un tanque recto de base cuadrada y sin tapa, de manera tal que el volumen sea de 32 m^3 . Halle las dimensiones del tanque. Haga lo mismo pero ahora con tapa.

Ejercicio 14 Determine las dimensiones de un rectángulo de área 169 cm^2 que tengan la diagonal de menor longitud.

Ejercicio 15 Por el punto $(2; 1)$ pasan rectas que determinan triángulos al cortarse con los semiejes positivos. Entre estas rectas, halle la que genera un triángulo de área mínima.

Ejercicio 16 Pruebe que entre todos los números positivos x e y que satisfacen $x^2 + y^2 = 100$, la suma es máxima cuando $x = y$.

Ejercicio 17 Considere el recinto delimitado por el gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$, el eje de las x y la recta $x = 4$. Se inscribe allí un rectángulo de vértices $A = (x; 0)$, $B = (4; 0)$, $C = (4; f(x))$ y $D = (x; f(x))$. Halle el de área máxima. ¿Hay alguno de área mínima?

Ejercicio 18 Considere el gráfico de la función $f(x) = xe^{-x}$, $0 \leq x < +\infty$. De entre todos los triángulos de vértices $(0; 0)$, $(x; 0)$ y $(x; f(x))$ encuentre el de área máxima.

PROBLEMAS VARIOS

Ejercicio 1 Sea $f(x) = x^2 \ln x$.

a) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $f(x) = -\frac{1}{6}$?

b) ¿Para qué valores de k la ecuación $f(x) = k$ tiene una sola solución?

Ejercicio 2 Determine el mayor valor de k para que la desigualdad

$$x^2 \ln x \geq k,$$

sea verdadera para todo $x > 0$.

Ejercicio 3 Sean las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = \ln x$. Pruebe que existe un único $c > 0$ donde los gráficos de ambas funciones tienen rectas tangentes paralelas en el punto de abscisa $x = c$.

Ejercicio 4 Pruebe que $xe^{-8x^2+1} < \frac{9}{20}$ si $x > 0$.

Ejercicio 5 Sea $f(x) = e^{2x+1} \left(x^2 - 7x + \frac{1}{2} \right)$. Encuentre todos los puntos para los cuales la pendiente de la recta tangente al gráfico de f resulta mínima.

Ejercicio 6 Determine los valores de $c \in (0, +\infty)$ para los cuales la ecuación

$$e^{\frac{x^2}{x-1}} = c,$$

tiene una única solución.

Ejercicio 7 Para cada $x \in [0, 1]$, la recta tangente al gráfico de $f(x) = \sqrt{4-x}$ forma, con los ejes coordenados un triángulo rectángulo. Halle el de menor área. ¿Existe un triángulo de área máxima?

Ejercicio 8 La lata de una gaseosa tiene una capacidad de 354 cm^3 . Si el costo del material de la tapa es el doble que el del resto de la lata, ¿cómo deben ser las dimensiones de la lata para que el costo del material sea mínimo? (Suponga que la lata es un cilindro).

Ejercicio 9 Encuentre todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales la ecuación $\frac{e^{4x}}{x^2} = k$ tiene tres soluciones.

Ejercicio 10 Encuentre todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales la ecuación $\frac{e^{\frac{5}{3}x}}{x^5} = k$ no tiene solución.

Ejercicio 11 Sea $f(x) = (x+1)^3 e^{\frac{3}{4}x^2-5} - 3$. Demuestre que para todo $k \in \mathbb{R}$ la ecuación $f(x) = k$ tiene exactamente una solución.

Ejercicio 12 Determine la cantidad de soluciones de la ecuación

$$\sqrt{x-5} e^{-4(x-5)^2+1} = 1.$$

Ejercicio 13 Sea $f(x) = \frac{2e^{-x^2}}{x^2-4}$. Calcule la imagen de f .

Ejercicio 14 Sea $f(x) = x^3 - 3x + 5$. Pruebe que $f(x) \geq 3$ para todo $x \geq 0$.

Ejercicio 15 Determine la cantidad de soluciones de la ecuación

$$x^2 - \ln(1+9x^2) = -\frac{2}{3}$$

Ejercicio 16 Sea $f(x) = \frac{6e^{4x}}{2e^{4x} + 3x^2}$. Calcule la imagen de f .

Ejercicio 17 Determine la cantidad de soluciones que tiene la ecuación

$$\frac{2}{x^3} + 486x = 225$$

Ejercicio 18 Determine todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ tales que la desigualdad $\ln(4x+3) \leq 4x+a$ es verdadera para todo $x > -\frac{3}{4}$.

Ejercicio 19 Sea $f: [-1, 8] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{5}{2}x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}}$. Pruebe que f no es derivable en $x=0$ y halle todos los extremos absolutos y locales de f .

Ejercicio 20 Sea $f : [-4, 7] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \frac{x}{x^2 + 25}$. Halle los valores máximo y mínimo absolutos de f .

Ejercicio 21 Sea $f(x) = \frac{729}{4(x-2)} + (x-2)^2$ con $x \in [3, 11]$. Halle los puntos en los que f alcanza su máximo y su mínimo absolutos.

Ejercicio 22 Sea $f : [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{4}{x} - \frac{6}{x^2} + 7$. Halle el máximo y el mínimo absolutos de f .

Ejercicio 23 Sea $f(x) = \frac{x+5}{x^2-9}$ con $x \in [-10, 0]$. Halle los valores de x en los que f alcanza su máximo y su mínimo absolutos.

Ejercicio 24 Sea $f(x) = (6-x)e^{\frac{x^2}{16}-3}$ con $x \in \left[0, \frac{18}{5}\right]$. Halle los valores de x en los que f alcanza su máximo y su mínimo absolutos.

Ejercicio 25 Sea $f(x) = 15x + \frac{80}{x^3}$ con $x \in [1, 3]$. Halle los puntos de ese intervalo en los que f alcanza su máximo y su mínimo absolutos.

Ejercicio 26 Sea $f : \left[2, \frac{13}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{\sqrt{2x-4}}{x}$. Halle los valores máximo y mínimo absolutos de f .

Ejercicio 27 Sea $f : [10, 18] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{x-5}{\sqrt{3x-27}}$. Halle los valores máximo y mínimo absolutos de f .

Práctica 8: Teorema de Taylor

Ejercicio 1 Sea $f(x) = \ln(x+1)$. Encuentre un polinomio $p(x)$ de grado 3 tal que $p(0) = f(0)$, $p'(0) = f'(0)$, $p''(0) = f''(0)$ y $p'''(0) = f'''(0)$.

Ejercicio 2 Calcule el polinomio de Taylor de las siguientes funciones hasta el orden indicado en el punto dado.

a) $f(x) = \frac{1}{1-x}$	orden	5	$x_0 = 0$
b) $f(x) = \sen x$	orden	4	$x_0 = 0$
c) $f(x) = \sen x$	orden	5	$x_0 = 0$
d) $f(x) = \cos x$	orden	5	$x_0 = 0$
e) $f(x) = \ln x$	orden	4	$x_0 = 1$
f) $f(x) = \sqrt{x}$	orden	3	$x_0 = 4$
g) $f(x) = e^x$	orden	5	$x_0 = 0$
h) $f(x) = (1+x)^6$	orden	6	$x_0 = 0$

Ejercicio 3 Compruebe que el polinomio de Taylor de orden n de la función $f(x) = e^x$ es $p(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$.

Ejercicio 4 Obtenga el polinomio de Taylor de orden n de las siguientes funciones en $x_0 = 0$.

a) $f(x) = \frac{1}{1-x}$	d) $f(x) = e^{2x}$
b) $f(x) = \cos x$	e) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$
c) $f(x) = \sen x$	f) $f(x) = \ln(1+x)$

Ejercicio 5 Sea $q(x) = x^4 - 8x^3 - 4x^2 + 3x - 2$.

a) Halle los polinomios de Taylor de q en $x_0 = 0$ de orden 1 a 6.

b) Haga lo mismo, sin hacer los cálculos, para

$$p(x) = x^{20} + x^{19} + x^3 + x^2 + x + 1.$$

Ejercicio 6 Si el polinomio de Taylor de f de orden 5 en $x = 2$ es

$$p(x) = (x - 2)^5 + 3(x - 2)^4 + 3(x - 2)^2 - 8$$

calcule $f^{(4)}(2)$ y $f'''(2)$. ¿Se puede conocer el valor de $f^{(6)}(2)$? ¿Cuánto vale $f^{(6)}(2)$ si el polinomio p es de orden 7?

Ejercicio 7 Los polinomios de Taylor de orden 4 en $x = 2$ de las funciones f y g son, respectivamente

$$p(x) = -2 + 3(x - 2) - 3(x - 2)^2 + (x - 2)^3 \text{ y } q(x) = 5 + 12(x - 2)^2 - 7(x - 2)^4$$

Halle el polinomio de Taylor de orden 2 de $t(x) = f(x)g(x)$ y $s(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ en $x = 2$.

Ejercicio 8 Sea $f(x) = \ln(1 + x)$ y sea $p(x)$ su polinomio de Taylor de orden 3 en $x_0 = 0$.

Demuestre (usando el Teorema generalizado del Valor Medio (teorema de Cauchy)) que $\frac{f(x) - p(x)}{x^4} = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}$ para algún valor de c entre 0 y x .

Ejercicio 9 Escriba la expresión del resto en cada caso:

$$a) e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + R_4(x)$$

$$b) \frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + R_5(x)$$

$$c) \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + R_5(x)$$

$$d) \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + R_6(x)$$

$$e) \ln x = (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3 + R_3(x)$$

Ejercicio 10 Para la función $f(x) = \cos x$

a) Obtenga el polinomio de Taylor de orden 4 $p_4(x)$.

b) Escriba la expresión de $R_4\left(\frac{1}{2}\right)$.

c) Pruebe que $\left| R_4 \left(\frac{1}{2} \right) \right| \leq \frac{1}{2^5 5!} < 0,0003$

Ejercicio 11 Se quiere aproximar $\sqrt[3]{e}$:

a) Pruebe que el polinomio de Taylor de orden 5 en $x = 0$ de $f(x) = e^x$ lo consigue con un error menor que $\frac{1}{174960}$.

b) ¿De qué orden hay que tomar al polinomio de Taylor de la misma función para que el error sea menor que 10^{-8} ? (use que $e < 3$).

Ejercicio 12 Utilice el polinomio de Taylor de orden 4 en $x_0 = 0$ de $f(x) = \sin x$ para aproximar el valor de $\sin(0,25)$ y dé una cota para el error que se comete al tomar esta aproximación.

Ejercicio 13 Sea $f(x) = x \ln x$.

a) Halle el polinomio de Taylor p de orden 3 de f en $x = 1$. Escriba la expresión del resto.

b) Estime, acotando el resto, el error que se comete al calcular $f(1,5)$ por medio de $p(1,5)$.

Ejercicio 14 ¿Cuántos términos es suficiente tomar en el desarrollo de Taylor en $x = 0$ de $f(x) = e^x$ para obtener un polinomio que aproxime a dicha función en todo el intervalo $[-1, 1]$ con un error menor que 10^{-4} ? Use el polinomio hallado para encontrar las primeras tres cifras decimales del número e .

Ejercicio 15 Sea $f(x) = \ln(1+x)$. ¿De qué orden hay que tomar el polinomio de Taylor en $x = 0$ para poder calcular $\ln(1,15)$ con un error que no supere a $0,001$?

Ejercicio 16 Halle un intervalo que contenga a $x = 0$ tal que la diferencia entre

a) $\cos x$ y $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ sea menor que $5 \cdot 10^{-5}$.

b) $\sin x$ y x sea menor que 10^{-3} .

PROBLEMAS VARIOS

Ejercicio 1 Halle los valores de a y de b de modo que el polinomio de Taylor de orden 2 de $f(x) = a \ln(1 + bx)$ en $x = 0$ sea $p(x) = 2x + \frac{3}{2}x^2$.

Ejercicio 2 Sea $f(x) = 1 + 3x + \sin x$. Escriba $p(x)$, el polinomio de Taylor de f de orden 4 en $x = 0$ y calcule, estimando el resto, el error que se comete al calcular $f\left(\frac{1}{3}\right)$ con $p\left(\frac{1}{3}\right)$.

Ejercicio 4 Calcule el polinomio de Taylor de orden 2 en $x = 0$ de $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$. Estime el error que se comete al calcular los valores de la función por medio del polinomio hallado cuando $-\frac{1}{2} \leq x < 1$.

Ejercicio 5 Determine los valores de a y b para que el polinomio de Taylor de

$$f(x) = \ln(1+x) + ax^2 + bx$$

en $x = 0$ empiece con la potencia de x de exponente lo más grande posible.

Ejercicio 6 La función $f(x) = \sqrt[n]{ax+1}$ tiene como polinomio de Taylor de orden 2 en $x = 0$ a

$$p(x) = 1 + 5x - \frac{75}{2}x^2.$$

Halle los valores de a y de n .

Ejercicio 7 La función f satisface la ecuación $(5x+1)f'(x) + f(x) = 1$, $f(0) = 2$. Encuentre el polinomio de Taylor de orden 5 en $x = 0$.

Ejercicio 8 Sea $f(x) = \sqrt{ax+1}$ y $p(x) = 1 + 2x + bx^2$. Determine los valores de a y de b para que $p(x)$ sea el polinomio de Taylor de f de orden 2 en $x_0 = 0$.

Ejercicio 9 Se sabe que la función $f(x)$ cumple $f''(x) = \sqrt{3x^2 + 5x + a} + 7$ y que su polinomio de Taylor de orden 2 en $x_0 = 1$ es

$$p(x) = 2 - 7(x-1) + 4(x-1)^2.$$

Halle el valor de a y calcule el polinomio de Taylor de f de orden 3 en $x_0 = 1$.

Ejercicio 10 Sea $f(x) = 3 + (x + 2)e^{ax}$. Halle $a \in \mathbb{R}$ sabiendo que la recta tangente en $(0; f(0))$ tiene ecuación $y = 5 + 10x$. Calcule $p_2(x)$ el polinomio de Taylor de orden 2 en $x_0 = 0$ de f .

Ejercicio 11 Sea $g(x) = 1 - 3x + \sqrt{f(x)}$. Si el polinomio de Taylor de orden 2 en $x_0 = 0$ de g es $p(x) = 2 - x + 3x^2$, halle el polinomio de Taylor de orden 2 de f en $x_0 = 0$.

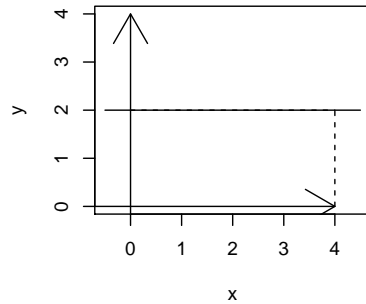
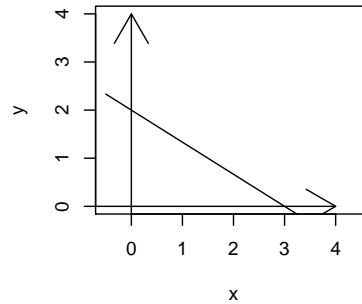
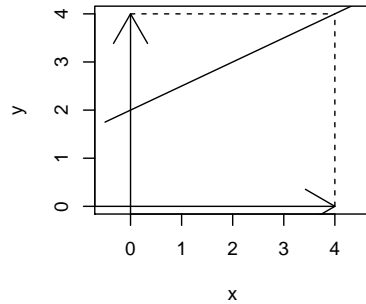
Ejercicio 12 Sea $g(x) = 3 + 2x + \cos(f(x))$. Sabiendo que

$$p(x) = 2x + 5x^2 - 3x^3$$

es el polinomio de Taylor de orden 3 en $x_0 = 0$ de g , halle el polinomio de Taylor de orden 2 de f en $x_0 = 0$.

Práctica 9: Integrales

Ejercicio 1 Halle, en cada caso, la función área bajo la curva entre 0 y x . Compruebe que $A'(x) = f(x)$.



Ejercicio 2 Se sabe que las funciones f y g son integrables y que

a) $\int_{-3}^4 (3f(x) - 4g(x)) dx = 23$, $\int_{-3}^4 g(x) dx = 7$. Calcule $\int_{-3}^4 f(x) dx$

b) $\int_1^2 2f(x) dx = 5$, $\int_1^2 g(x) dx = 7$. Calcule $\int_1^2 (f(x) + 2g(x)) dx$

Ejercicio 3 Calcule las derivadas de las siguientes funciones

a) $A(x) = \int_1^x e^{-t^2} dt$

d) $D(x) = \int_0^{\sin(x)} \frac{y}{2+y^3} dy$

b) $B(x) = \int_0^{2x} \frac{\sin u}{1+u} du$

e) $E(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \cos(t^2) dt$

c) $C(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \sqrt{1+t^2} dt$

Ejercicio 4 Considere las funciones

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ 3 & \text{si } 2 < t \leq 4 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ 2 & \text{si } 2 < t \leq 4 \end{cases}$$

a) La función f no es continua ¿lo es $F(x) = \int_0^x f(t) dt$?

b) La función g no es derivable ¿lo es $G(x) = \int_0^x g(t) dt$?

Ejercicio 5 Sabiendo que

a) la función continua f satisface $\int_0^x f(t) dt = x^2(1+x)$, calcule $f(2)$.

b) la función continua g satisface $\int_0^{x^2} g(t) dt = x^2(1+x)$, $x > 0$, calcule $g(2)$.

Ejercicio 6 Calcule las siguientes integrales usando la Regla de Barrow y las propiedades de linealidad de la integral.

a) $\int_0^3 3(x-2) dx$

c) $\int_{\pi}^{5\pi} (\sin x - \cos x) dx$

b) $\int_{-2}^2 (x^3 + 2x) dx$

d) $\int_0^{64} (2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) dx$

Ejercicio 7 Usando el Teorema Fundamental del Cálculo, compruebe las siguientes igualdades y calcule, en cada una de ellas, el valor de K .

a) $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{3t+5}} = \frac{2}{3}\sqrt{3x+5} + K$

b) $\int_0^x \frac{\cos t}{2\sin t + 3} dt = \frac{1}{2} \ln |3 + 2\sin x| + K$

Ejercicio 8 Halle en cada caso, una función $f(x)$ que satisfaga

a) $f'(x) = 2$

e) $f'(x) = e^x$

b) $f'(x) = x$

f) $f'(x) = x^5$

c) $f'(x) = \sin(x)$

g) $f'(x) = x + x^3$

d) $f'(x) = \cos(x)$

h) $f'(x) = 3x + \frac{4}{x}$

Ejercicio 9 Encuentre en cada caso, una función $G(x)$ que satisfaga

a) $G'(x) = 6x + 1, G(1) = 3$

b) $G''(x) = 6x, G'(1) = 3, G(0) = 1$

c) $G'''(x) = x + \operatorname{sen}(x), G''(0) = G'(0) = G(0) = 5$

Ejercicio 10 Calcule las siguientes integrales

a) $\int 4x^6 dx$

c) $\int_0^1 \sqrt{x} (3x + \sqrt{x}) dx$

b) $\int \operatorname{sen}(x - 1) dx$

d) $\int \frac{7dx}{\cos^2 x}$

Ejercicio 11 Usando el método de sustitución, calcule las siguientes integrales

a) $\int (3x + 1)^2 dx$

k) $\int \frac{e^x}{1 + e^x} dx$

b) $\int \frac{dx}{2x + 5}$

l) $\int a^{5x} dx$

c) $\int \frac{3x^2}{\sqrt{5x^3 + 2}} dx$

m) $\int \operatorname{sen}(\cos(x)) \operatorname{sen}(x) dx$

d) $\int \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\cos(2x)} dx$

n) $\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} dx$

e) $\int e^{-3x} dx$

o) $\int_0^1 \frac{4x}{\sqrt[4]{5 - 2x^2}} dx$

f) $\int_0^1 x e^{2x^2} dx$

p) $\int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt$

g) $\int \operatorname{sen}(x) \cos^2(x) dx$

q) $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx$

h) $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$

r) $\int \frac{x dx}{\sqrt{1 - x^4}} dx$

i) $\int_1^e \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}^4(x)} dx$

s) $\int \frac{(1 + \ln x)^2}{x} dx$

j) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1 - e^{2x}}} dx$

t) $\int \sqrt{(3x + 5)^7} dx$

$$u) \int (x-1) \sqrt{x^2-2x} \, dx$$

$$x) \int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^3+3x+1}} \, dx$$

$$v) \int \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \, dx$$

$$y) \int x^3 e^{x^4+1} \, dx$$

$$w) \int_2^3 \frac{(x+1)}{\sqrt{x^2+2x+3}} \, dx$$

$$z) \int_0^\pi \sqrt{(1+\cos x)^3} \operatorname{sen} x \, dx$$

Ejercicio 12 Marque con una cruz la única respuesta correcta. Dada la función continua f , ponemos $A = \int_2^3 f(x) dx$ y $B = \int_8^{11} f\left(\frac{t-2}{3}\right) dt$, entonces es cierto que

☐ $A = 3B$

☐ $3A = B$

☐ $A = B$

☐ Ninguna de las anteriores

Ejercicio 13 Aplique el método de integración por partes para calcular las siguientes integrales

$$a) \int x \ln x \, dx$$

$$e) \int \frac{x}{e^x} dx$$

$$b) \int_1^e \ln x dx$$

$$f) \int_0^\pi x^3 \cos x dx$$

$$c) \int x \operatorname{sen} x dx$$

$$g) \int x^3 e^{2x} dx$$

$$d) \int x e^x dx$$

$$h) \int e^x \operatorname{sen} x dx$$

Ejercicio 14 Si llamamos $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$ pruebe la fórmula de reducción

$$I_n = e - nI_{n-1}$$

Ejercicio 15 La función f tiene derivada continua y cumple

$$\int_{-\pi}^{\pi/2} f(x) \operatorname{sen}(x) \, dx = 4 \text{ y } f(-\pi) = 3.$$

Calcule $\int_{-\pi}^{\pi/2} f'(x) \cos(x) \, dx$

Ejercicio 16 Calcule las siguientes integrales usando el método de fracciones simples

$$a) \int \frac{4}{(x-1)(x-2)} dx$$

$$c) \int \frac{x^3 + 2x}{x^2 - 1} dx$$

$$b) \int \frac{2x + 1}{x^2 - 4} dx$$

PROBLEMAS VARIOS

Ejercicio 1 La función f satisface $f(x) = 5xf'(x)$. Si $\int_0^2 f(t) dt = 12$, calcule $f(2)$.

Ejercicio 2 Encuentre el polinomio de Taylor de orden 3 en $x = 0$ de

$$f(x) = \int_0^x (1+t)^3 \ln(1+t) dt.$$

Ejercicio 3 Sea $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ derivable tal que para cada $x \in (0, +\infty)$ se verifica que

$$(2x^2 + 3x)f(x) = e^{-x+1} + \int_1^{2x^2-x} f(t) dt$$

Calcule el polinomio de Taylor de orden 2 de f en $x_0 = 1$.

Ejercicio 4 Encuentre una primitiva F de la función $f(x) = \frac{e^{3x}}{4 + e^{3x}}$ que satisfaga $F(0) = -3 \ln(4)$

Ejercicio 5 Halle una función $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ derivable que satisfaga la ecuación integral

$$(x+3)f(x) = x^3 + 1 + \int_1^x f(t) dt, \quad f(1) = \frac{1}{2}$$

Ejercicio 6 Halle una función $f : \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ con derivada continua que satisfaga la ecuación integral

$$f(x) = 3\sin^2(x) + \int_{\frac{\pi}{4}}^x f'(t) \cos^2(t) dt$$

Ejercicio 7 Halle una función continua g tal que

$$1 + \int_0^{\ln x} g(e^t) dt = x^2 + \ln(x), \quad x > 0.$$

Ejercicio 8 Considere la función $f(x) = \begin{cases} \frac{2 \ln x}{3x} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) Calcule $\int_{e^{-3}}^1 f(x) dx$

b) Determine el valor de $k > 0$ para el cual $\int_{e^{-3}}^k f(x) dx = 35$.

Práctica 10: Aplicaciones de la Integral

Ejercicio 1 Calcule el área de la región comprendida entre los gráficos de las siguientes curvas:

a) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x - 2$, $x = 0$

b) $f(x) = x$, $g(x) = x^2 + 1$, $x = 0$, $x = 3$

c) $f(x) = x^3 - 12x$, $g(x) = x^2$

d) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$, eje x

e) $f(x) = -x$, $g(x) = x - x^2$

f) $f(x) = (1 - \sqrt{x})^2$, eje x , eje y

g) $f(x) = \sin x$, eje x , $x = 0$, $x = 2\pi$

h) $f(x) = x^2 - 4$, eje x

i) $f(x) = x^3$, eje y , $y = 27$

j) $f(x) = e^x$, $y = \ln 5$, eje y

k) $f(x) = \ln x$, eje x , $x = \frac{1}{e}$, $x = e$

Ejercicio 2 Determine $c > 1$ de modo que el área de la región limitada por el gráfico de $f(x) = e^{2(x-5)}$ y $g(x) = e^{-2(x-5)}$ y la recta de ecuación $y = c$ sea igual a 1.

Ejercicio 3 El área de la región limitada por las rectas $y = ax$, $y = a^2$ y el gráfico de $f(x) = x^2$ es igual a $\frac{7}{48}$. Calcule el valor de a .

Ejercicio 4 Determine el área de la región limitada por el gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$ y las dos rectas que unen el origen de coordenadas con los puntos del gráfico $\left(2; \frac{1}{2}\right)$ y $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$, respectivamente.

Ejercicio 5 Marque la única respuesta correcta: el área de la región del plano limitada por $y = x - 2$, $x = 4$, el eje x y el eje y se obtiene calculando:

☐ $\int_0^4 (x - 2) dx$

☐ $\int_0^4 (2 - x) dx$

☐ $\int_0^2 (x - 2) dx + \int_2^4 (2 - x) dx$

☐ $\int_0^2 (2 - x) dx + \int_2^4 (x - 2) dx$

Ejercicio 6 Halle f que satisfaga $f'(x) + 2xf(x) = 0$ y $f(0) = 3$.

Ejercicio 7 Encuentre las funciones que satisfacen las siguientes ecuaciones diferenciales

a) $(3 + \sqrt{x})(f(x) + 2)^2 f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $f(4) = 1$

b) $f'(x) + 2xf(x) = 0$, $f(0) = 3$

c) $f'(x) = (x^2 e^x - \sen x)f^2(x)$, $f(0) = 4$

d) $(1 + x^2)f'(x) = 8xf(x)$, $f(0) = 3$

e) $f'(x) = 7x^5(3 + f(x))$, $f(1) = -2$

f) $\frac{f'(x)}{f(x)} = xe^x$, $f(0) = 4$

Ejercicio 8 La temperatura de un cuerpo que se enfría, cambia a una tasa que es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la temperatura ambiente. Así, si $C(t)$ es la temperatura del cuerpo en el tiempo t y a es la temperatura ambiente (a la que supondremos constante) se tiene

$$C'(t) = -k(C(t) - a)$$

en donde $k > 0$ es la constante de proporcionalidad.

a) Halle todas las soluciones de la ecuación en términos de k , a y la temperatura inicial $C(0) = C_0$.

b) Pruebe que $C(t) \rightarrow a$ cuando $t \rightarrow +\infty$.

c) Si un cuerpo inicialmente está a 26° y una hora después está a 24° , ¿cuál es la constante de proporcionalidad si la temperatura ambiente es de 22° ?

Formulas útiles:

$$\text{Volumen del sólido de revolución} = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

$$\text{Longitud de arco} = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Ejercicio 9 Halle el volumen del sólido de revolución obtenido al rotar alrededor del eje x la parábola $y = 3x^2$, con $0 \leq x \leq 3$.

Ejercicio 10 Halle el volumen del sólido de revolución obtenido al rotar alrededor del eje x el gráfico de la función $f(x) = \frac{1}{x}$, con $1 \leq x \leq 4$.

Ejercicio 11 Calcule la longitud del arco de las siguientes curvas:

$$a) y = 2x^{\frac{3}{2}}, \quad 0 \leq x \leq 11$$

$$b) y = \frac{x^2 - \ln x}{2}, \quad 1 \leq x \leq 2$$

PROBLEMAS VARIOS

Ejercicio 1 Calcule el área de la región comprendida entre el eje x y el gráfico de $f(x) = \ln(\frac{1}{2}x - 5)$ para $11 \leq x \leq 16$.

Ejercicio 2 Calcule el área de la región limitada por el eje de las x y por los gráficos de $f(x) = 1 - x^2$, $g(x) = 1 - 4x^2$.

Ejercicio 3 Halle el área de la región comprendida entre los gráficos de $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ y $g(x) = \frac{x}{x + 7}$.

Ejercicio 4 Calcule el área de la región encerrada entre el gráfico de $f(x) = x(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 4)$ y el eje x .

Ejercicio 5 Calcule el área de la región comprendida entre los gráficos de $f(x) = 4x + 5 - e^{3x}$ y de $g(x) = 4x - 3$ para $0 \leq x \leq \ln 6$.

Ejercicio 6 Calcule el área de la región comprendida entre los gráficos de $f(x) = xe^{2x}$ y $g(x) = xe^{x+3}$.

Ejercicio 7 Calcule el área de la región comprendida entre el eje x y el gráfico de $f(x) = (x^2 - 5) \ln x$ para $e^{-1} \leq x \leq e$.

Ejercicio 8 Halle el área de la región comprendida entre el gráfico de $f(x) = \frac{9}{x} + \frac{9}{10 - x}$ y la recta $y = 10$.

Ejercicio 9 Calcule el área de la región encerrada entre los gráficos de $f(x) = 3x \ln x$ y $g(x) = (x + 8) \ln x$.

Ejercicio 10 Halle f derivable que satisfice

$$(3 + f'(x))e^{2-x} = (x - 6)(3x + f(x))^2 \text{ con } f(2) = 0.$$

Ejercicio 11 Sea f una función positiva con derivada continua que satisface

$$(x^3 + x^2)f(x) = 2 \int_0^x t f(t) dt, \quad f(0) = 5$$

Halle $f(x)$ para $x > 0$.

Ejercicio 12 Halle la función f derivable tal que para $x > 0$ vale

$$f'(x)\sqrt{x} = \left(3x + e^{(2\sqrt{x}-6)}\right) f(x) \text{ y } f(9) = 1.$$

Ejercicio 13 Halle f verificando:

$$f''(x) = 9\sqrt{x} + \cos(\pi x) \text{ y } f(1) = f'(1) = 0.$$

Ejercicio 14 Halle $f \neq 0$ que satisfaga $f^2(x) = \int_0^x f(t) \frac{\sin(t)}{4 + \cos(t)} dt$.

Ejercicio 15 Encuentre una función continua f tal que

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt.$$

Ejercicio 16 Para cada n natural se define $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(nx) dx$.
Calcule a_n .

Práctica 11: Series

Ejercicio 1 Escriba el término general de las siguientes series

$$\begin{array}{ll} a) 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots & c) 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \dots \\ b) 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{1}{31} + \dots & d) \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \dots \end{array}$$

En los casos que la serie sea geométrica o telescópica, escriba la expresión de las sumas parciales y calcule la suma de la serie.

Ejercicio 2 Calcule la suma de las siguientes series, en caso de que sean convergentes.

$$\begin{array}{ll} a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} & d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} \\ b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 4^{n+1}}{5^n} & e) \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} \\ c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n} - 1}{4^{n+1}} & f) \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \end{array}$$

Ejercicio 3 Calcule el valor de $a > 0$ para que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+2^n}{a^n} = \frac{35}{12}$.

Ejercicio 4 A partir de la identidad $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, $|x| < 1$, deduzca las siguientes fórmulas:

$$\begin{array}{l} a) 1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n} + \dots = \frac{1}{1-x^2}, \quad |x| < 1 \\ b) x + x^3 + x^5 + \dots + x^{2n+1} + \dots = \frac{x}{1-x^2}, \quad |x| < 1 \\ c) 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots + (-1)^n x^n + \dots = \frac{1}{1+x}, \quad |x| < 1 \\ d) 1 + 2x + 4x^2 + \dots + 2^n x^n + \dots = \frac{1}{1-2x}, \quad |x| < \frac{1}{2} \end{array}$$

Ejercicio 5 Decida si cada una de las siguientes series es convergente o divergente:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 1}$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n - 1}$$

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 1}{4n^4 + 5n - 1}$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$$

$$e) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + (-1)^n}{2^{n+1}}$$

$$g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$$

$$h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + \sin^3(n)}{2^n + n^2}$$

$$i) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!}$$

$$j) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} + \sqrt{n}}{n^2 + n + 1}$$

Ejercicio 6 Use el criterio integral de Cauchy para estudiar la convergencia de las siguientes series:

$$a) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$$

$$b) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln n}$$

$$c) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$$

$$e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{n^2}}$$

Ejercicio 7 Use el criterio de la raíz o del cociente, según convenga, para determinar la convergencia o divergencia de las siguientes series:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

$$c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$$

$$e) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1000)^n}{n!}$$

$$f) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n} - \frac{1}{2}\right)^n$$

$$g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\ln^n 2}$$

$$h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$$

Ejercicio 8 Determine la convergencia o divergencia de las series que siguen. En caso de convergencia, decida si ésta es absoluta o condicional.

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n+1)}{n^3+1}$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1} \right)^n$$

$$b) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n}}{n+100}$$

$$e) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$$

$$c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n+5n}$$

$$f) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n$$

Ejercicio 9 Sea $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^3} & \text{si } n \text{ es impar} \\ \frac{1}{n^2} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$. Pruebe que la serie alternada

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ es absolutamente convergente.

Ejercicio 10 Encuentre todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales cada una de las siguientes series es convergente. Indique para qué valores la convergencia es absoluta y para qué valores la convergencia es condicional.

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}$$

$$e) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{x^{2n}}$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$$

$$f) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n}$$

$$c) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n!}$$

$$g) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+2} x^{2n+1}$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$$

$$h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^{3n+1}}{n^5}$$

Ejercicio 11 Halle el radio de convergencia de las series

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n} x^n$$

$$b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^{2n+3}$$

Ejercicio 12 En cada una de las siguientes series, encuentre todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales es convergente. Indique para qué valores la convergencia es absoluta y para qué valores la convergencia es condicional.

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$$

$$b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n (x-2)^n}{2n+1}$$

$$c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^{2n}}{2^n}$$

$$d) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+3)^n}{3^n}$$

$$e) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^n}{n} + \frac{3^n}{n^2} \right) x^n$$

$$f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+3}{n^2+1} x^{2n}$$

$$g) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right) x^{2n+1}$$

$$h) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} (x-2)^n$$

$$i) \sum_{n=0}^{\infty} \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) x^n$$

$$j) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{n^2 \ln n}$$

$$k) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n + 3^n}$$

PROBLEMAS VARIOS

Ejercicio 1 ¿Para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+a)^n}{n} (x-2)^n$ tiene radio de convergencia igual a 2?

Ejercicio 2 Encuentre todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 4^n (3x-1)^n$ es convergente. Para los valores hallados, encuentre la suma de la serie.

Ejercicio 3 Halle los valores de $p > 0$ tales que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{\sqrt{n^7+1}}$ es convergente.

Ejercicio 4 Encuentre todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales las siguientes series son convergentes.

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)^2}{8^n} (x-3)^{3n+1}$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(2n)^n} x^{3n}$$

$$\begin{array}{ll} c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{(3n+4)(5^n+1)} (3x-6)^n & g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+1)}{\sqrt{9n+1}} (x-7)^n \\ d) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{n}{n+1} \right)^n x^n & h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{2^n \sqrt{n^2+3}} \\ e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n}(x-5)^n}{(n+1)(n+4)} & i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(x-5)^n}{3^n \sqrt{n}} \\ f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{7^n} (x-3)^{n+1} & j) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(x+2)^{n+1}}{3^n} \end{array}$$

Ejercicio 5 Halle el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4}{n}\right)^{n^2} (x-7)^n$.

Ejercicio 6 Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(x-4)^n}{a^n \sqrt{2n+1}}$ hallar $a > 0$ para que el radio de convergencia sea igual a 2. Para el valor de a hallado, encuentre todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales la serie es convergente.

Programa

Análisis Matemático Ciencias Exactas e Ingeniería (66)

Unidad I: Números reales. Funciones

Números reales. Propiedades básicas. Representación sobre la recta. Supremo e ínfimo. Funciones. Definición. Funciones reales. Dominio e imagen. Gráfico. Funciones elementales, algebraicas y trascendentes. Composición. Función inversa. Representación de curvas en forma paramétrica.

Unidad II: Sucesiones

Sucesiones. Noción de límite. Propiedades. Sucesiones monótonas. El número e . Otros límites especiales. Introducción a las series numéricas.

Unidad III: Límite y continuidad

Noción de límite funcional. Cálculo de límites. Álgebra de límites. Límites laterales. Límites infinitos y en infinito. Asíntotas.

Continuidad. Propiedades. Funciones continuas en intervalos cerrados. Aplicaciones al cálculo de ceros de funciones. Ejemplos de métodos numéricos elementales.

Unidad IV: Derivadas

Noción de recta tangente a una curva. Velocidad. Definición de derivada. Derivada de funciones elementales. Reglas de derivación. Regla de la cadena. El Teorema del Valor Medio y sus aplicaciones. Regla de L'Hospital. Aproximación lineal. Diferencial.

Estudio de funciones: crecimiento, decrecimiento, extremos, concavidad, convexidad, puntos de inflexión. Trazado de curvas. Problemas de máximos y mínimos.

Polinomio de Taylor y de Mac Laurin. Aproximación de funciones. Estudio del error.

Aplicaciones al cálculo de ceros de funciones: método de Newton-Raphson.

Unidad V: Integrales

Particiones. Integral superior e inferior. Integral definida. Propiedades. Cálculo aproximado de integrales.

El Teorema Fundamental del Cálculo. Regla de Barrow. Cálculo de primitivas. Los métodos de sustitución y de integración por partes.

Aplicaciones al cálculo de áreas, volúmenes de revolución y longitud de curvas.

Bibliografía

- Análisis Matemático. Exactas - Ingeniería. Fascículos 1 a 4. Varios. CCC - Educando. 2015.
- Cálculo Diferencial e Integral. F. Ayres y E. Mendelson. Schaum. 1991.
- Cálculo Diferencial e Integral. N. Piskunov. UTEHA. 1991.
- Cálculo Superior. M. Spiegel. Schaum. 1996.
- Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático. Vol I. Courant. Limusa. 1994.
- Matemáticas I. Miguel de Guzmán y José Colera. ANAYA. 1989.