

7. Transformări de coordonate în plan

Def: Fie $M \subseteq \mathbb{R}^2$ o mulțime descrisă și $g = (g_1, g_2) : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ o funcție vectorială de variabilele u și v .

a) Corespondență

$$\begin{cases} x = g_1(u, v) \\ y = g_2(u, v) \end{cases}, \quad \forall (u, v) \in M \quad (1)$$

defineste o transformare de coordonate, de la coordonatele curvilinearii (u, v) la coordonatele carteziene (x, y) .

b) Dacă g_1, g_2 sunt funcții de clasă C^1 pe M atunci spunem că transformarea (1) este de clasă C^1 pe M .

c) Dacă funcția $g : M \rightarrow g(M)$ este bijectivă cu inversa $g^{-1} = h = (h_1, h_2)$, atunci spunem că transformarea (1) este bijunecă pe M . În acest caz

$$\begin{cases} u = h_1(x, y) \\ v = h_2(x, y) \end{cases}, \quad \forall (x, y) \in g(M) \quad (2)$$

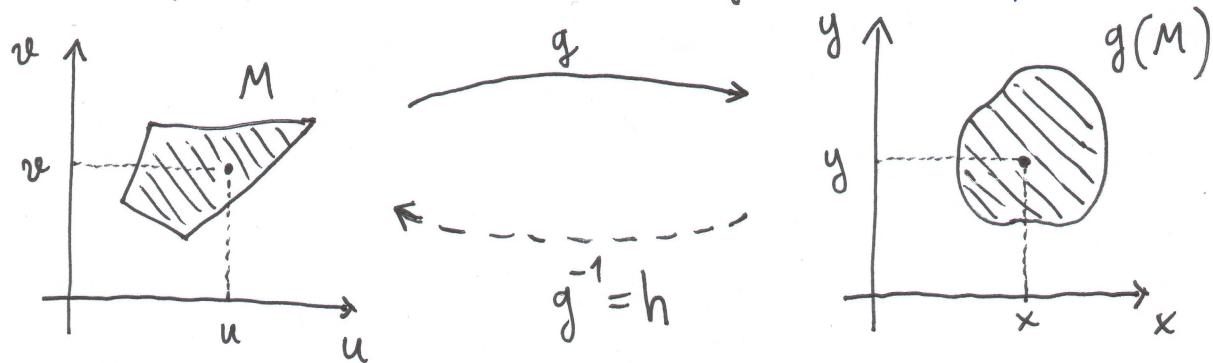
se numește transformare inversă.

d) Determinantul

$$\det J(g)(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial g_1}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial g_2}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial g_2}{\partial v}(u, v) \end{vmatrix}, \quad \forall (u, v) \in M$$

se numește jacobianul transformării (1).

e) Dacă $\det J(g)(u, u) \neq 0$, $\forall (u, u) \in M$ atunci spunem că transformarea (1) este nesingulară pe M .



$$(u, u) \in M \iff (x, y) \in g(M)$$

Prop: Cu notatiile din definitie anterioră, dacă transformarea (1) este de clasă C^1 , limivocă și nesingulară atunci și transformarea inversă (2) va avea aceleși proprietăți.

Ex: (transformarea în coordonate polare)

$$\text{Fie } \begin{cases} x = u \cdot \cos v \\ y = u \cdot \sin v \end{cases}, \quad \forall (u, v) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi] = M.$$

$g(u, v) = (u \cdot \cos v, u \cdot \sin v)$ este de clasă C^1 pe M .

$$\det J(g)(u, v) = \begin{vmatrix} \cos v & -u \cdot \sin v \\ \sin v & u \cdot \cos v \end{vmatrix} = u \cdot (\cos^2 v + \sin^2 v) = u$$

$\det J(g)(u, v) \neq 0$, $\forall (u, v) \in M \Rightarrow$ transformarea este nesingulară.

$$x^2 + y^2 = u^2 (\cos^2 v + \sin^2 v) \Rightarrow u = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{y}{x} = \tan v \Rightarrow v = \operatorname{Arctan} \frac{y}{x}, \quad \text{unde}$$

$$\operatorname{Arctg} \frac{y}{x} = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & x > 0, y \geq 0 \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & x < 0, y \in \mathbb{R} \\ 2\pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & x > 0, y < 0 \end{cases}$$

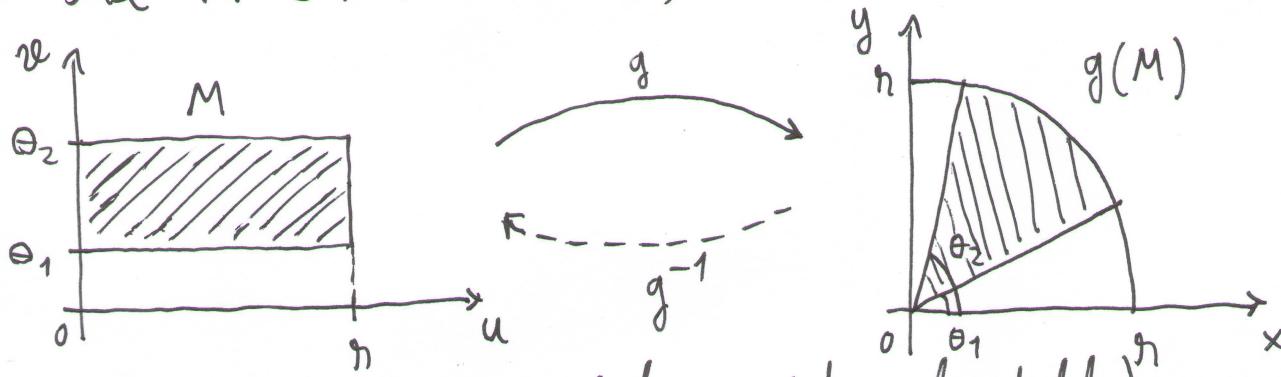
$\operatorname{arctg}: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$\operatorname{Arctg}: \mathbb{R}^2 \setminus \{0_2\} \rightarrow [0, 2\pi)$

$\Rightarrow g$ este biunivocă pe M și $g^{-1}(x, y) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \operatorname{Arctg} \frac{y}{x})$

Obs: Transformarea în coordonate polare este de doră C^1 , biunivocă și nesingulară pe $(0, +\infty) \times (0, 2\pi)$.

Fie $M = [0, r] \times [\theta_1, \theta_2]$, $r > 0$, $0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq 2\pi$



I (schimbarea de variabile în integrals dublu)

Fie $M \subseteq \mathbb{R}^2$ o mulțime compactă și

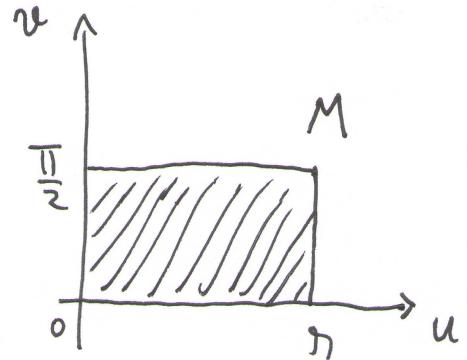
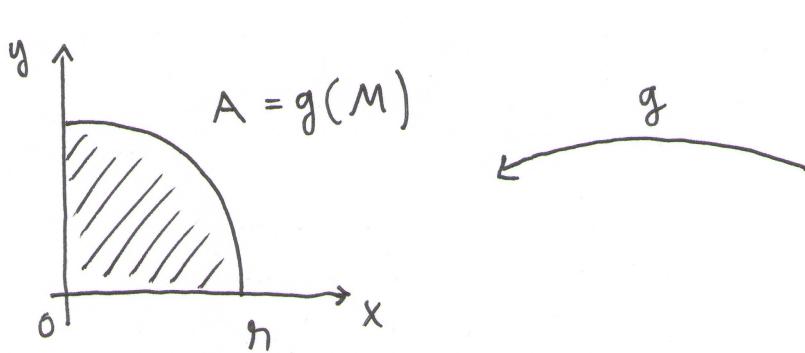
$$\begin{cases} x = g_1(u, v) \\ y = g_2(u, v) \end{cases}, \quad \forall (u, v) \in M, \quad g = (g_1, g_2)$$

o transformare de doră C^1 , biunivocă și nesingulară pe $\text{int } M$. Dacă $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă pe M , atunci are loc formula

$$\iint_{g(M)} f(x,y) dx dy = \iint_M f(g_1(u,v), g_2(u,v)) \cdot |\det J(g)(u,v)| du dv$$

Ex: Calculati $\iint_A e^{-x^2-y^2} dx dy$, unde

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq r^2\}, \quad r > 0.$$



$$\begin{cases} x = u \cdot \cos v \\ y = u \cdot \sin v \end{cases}, \quad (u,v) \in (0,+\infty) \times (0,2\pi)$$

$$M = [0, r] \times [0, \frac{\pi}{2}], \quad f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \iint_A e^{-x^2-y^2} dx dy &= \iint_M e^{-u^2} \cdot u \cdot du dv = \int_0^r \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-u^2} \cdot u \cdot du dv = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^r e^{-u^2} \cdot u \cdot du \right) dv = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{e^{-u^2}}{2} \Big|_{u=0}^{u=r} dv = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (1 - e^{-r^2}) dv = \frac{1}{2} (1 - e^{-r^2}) \int_0^{\frac{\pi}{2}} dv = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-r^2}). \end{aligned}$$

Aplikatie: Integrala probabilităților și funcția Γ a lui Euler.

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \quad \text{integrala probabilităților}$$

42

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \cdot e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{2x \cdot e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0$$

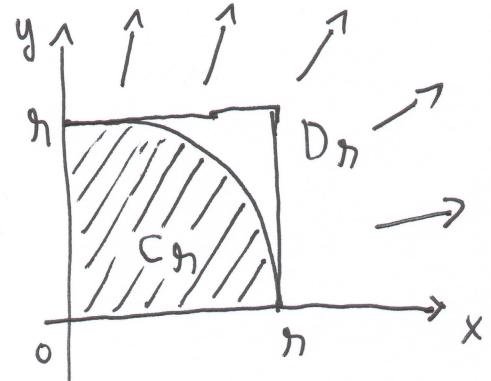
$\left. \begin{array}{l} p=2 > 1 \\ \lambda=0 < +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow I$ integrală improprie convergentă.

$$\text{Notăm } I(n) = \int_0^n e^{-x^2} dx, \quad D_n = [0, n]^2 \text{ și}$$

$$C_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq n^2\}, \quad n > 0 \text{ fixat.}$$

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} I(n)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_n = [0, +\infty)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n$$



$$\begin{aligned} I^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} I(n) \cdot I(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n e^{-x^2} dx \cdot \int_0^n e^{-y^2} dy = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n e^{-x^2} \left(\int_0^n e^{-y^2} dy \right) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(\int_0^n e^{-x^2-y^2} dy \right) dx = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} e^{-x^2-y^2} dx dy = \iint_{[0, +\infty)^2} e^{-x^2-y^2} dx dy = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{C_n} e^{-x^2-y^2} dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{4} (1 - e^{-n^2}) = \frac{\pi}{4} // \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{2}$$

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx, \forall t > 0$$

se numește funcție Γ a lui Euler.

$\Gamma(t)$ este convergentă, $\forall t > 0$

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\text{seminar 8})$$

Se poate arăta că $\Gamma: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ este funcție continuă.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t^2} \cdot 2t dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt =$$

$x = t^2, t > 0$
 $dx = 2t dt$

$$= 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}.$$

Cap.I. Siruri și serii de numere reale

1. Numere reale
2. Siruri de numere reale
3. Serii de numere reale
4. S.t.p.
5. Serii alternante

Cap. II. Funcții reale de variabilă reală

1. Limită și continuitate
2. Derivabilitate
3. Derivate de ordin superior
4. Serii Taylor și serii de puteri
5. Operații cu serii de puteri
6. Integrala Riemann
7. Integrale improprii

Cap III. Funcții vectoriale de variabilă vectorială

1. Topologie spațiului \mathbb{R}^m
2. Siruri în \mathbb{R}^P
3. Limită și continuitate
4. Derivate partiiale și diferențială
5. Extreme locale
6. Integrale duble
7. Transformări de coordonate în plan