Logică computațională
Curs 3

Lector dr. Mihiș Andreea-Diana

Logica propozițiilor

? Propoziție

Propoziţiile logice sunt modele ale afirmaţiilor propoziţionale care sunt fie *adevărate*, fie *false*.

Sintaxa

=" **SINTÁXĂ** *s. f.* 1. parte a gramaticii care studiază **regulile** privitoare la îmbinarea cuvintelor în propoziții și a propozițiilor în fraze." (*)

Semantica

= "**SEMÁNTICĂ** s. f. **I. 1.** Ramură a lingvisticii care se ocupă cu studierea **sensurilor** cuvintelor și a evoluției acestor sensuri" (*)

(*) = http://dexonline.ro

Sintaxa logicii propozițiilor

- alfabetul
  - Σ_P = *Var_propoz* $\cup$ *Conective* $\cup$ { (,) }
  - *Var_propoz* = { $p, q, r, p_1, p_2, \ldots$ }
  - *Conective* = { $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ }

prioritate

$\neg$ negația

$\wedge$ conjuncția

$\vee$ disjuncția

$\rightarrow$ implicația

$\leftrightarrow$ echivalența

- regulile de formare a Formulelor propoziționale
  - F_P = mulţimea formulelor propoziţionale corect construite

  = cea mai mică mulțime de formule ce se poate construi cu regulile:
    - \- *baza*: $p_i \in F_P$, i=1,2,…
    - \- *inducţia*: dacă U,V $\in F_P$ atunci:

      $\neg U \in F_P$, $U \wedge V \in F_P$, $U \vee V \in F_P$, $U \rightarrow V \in F_P$, $U \leftrightarrow V \in F_P$
    - \- *închiderea*: toate formulele din F_P se obţin doar prin aplicarea regulilor precedente de un număr finit de ori.

Exerciţiu de modelare

Clientul i-a spus dezvoltatorului:

Dacă furnizorul aduce marfă, atunci dacă este loc în magazin întreaga marfă se va pune pe raft, altfel întreaga marfă va ajunge în depozit.

$$p \rightarrow ((q \rightarrow r) \vee (\neg q \rightarrow d))$$

Semantica logicii propoziționale

- Propoziţiile logice sunt modele ale afirmaţiilor propoziţionale care sunt fie *adevărate*, fie *false*.

- **Scopul** definirii semanticii logicii propoziţionale este de a **atribui** un înţeles, **o valoare de adevăr**, formulelor propoziţionale.

- Domeniul semantic:

  {F(fals), T(true, adevărat)} a.î. $\neg$F=T, $\neg$T=F

Semantica conectivelor

p	$\neg p$
T	F
F	T

$\uparrow$ - nand $p \uparrow q := \neg (p \wedge q)$
$\downarrow$ - nor $p \downarrow q := \neg (p \vee q)$
$\oplus$ - xor $p \oplus q := \neg (p \leftrightarrow q)$

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	$p \uparrow q$	$p \downarrow q$	$p \oplus q$
T	T	T	T	T	T	F	F	F
T	F	F	T	F	F	T	F	T
F	T	F	T	T	F	T	F	T
F	F	F	F	T	T	T	T	F

Interpretarea (Def.)

- O ***interpretare*** a formulei $U(p_1,p_2,\ldots,p_n) \in F_P$ este o funcţie $i:\{p_1,p_2,\ldots,p_n\} \rightarrow \{T,F\}$ care asignează valori de adevăr variabilelor propoziţionale şi poate fi extinsă la o funcţie

  $i: F_P \rightarrow \{T,F\}$ folosind relaţiile:

  $i(\neg p) = \neg i(p)$ $\quad$ $i(p \wedge q) = i(p) \wedge i(q)$

  $i(p \vee q) = i(p) \vee i(q)$ $\quad$ $i(p \rightarrow q) = i(p) \rightarrow i(q)$ $\quad$ $i(p \leftrightarrow q) = i(p) \leftrightarrow i(q)$
- Interpretările evaluează formulele propoziţionale conform semanticii conectivelor componente, atribuindu-le valori de adevăr.
- Tabela de adevăr a unei formule propoziţionale $U(p_1,p_2,\ldots,p_n) \in F_P$ corespunde evaluărilor formulei în toate cele 2^n interpretări.

Concepte semantice (Def.)

Fie formula propoziţională $U(p_1,p_2,\ldots,p_n)\in F_P$.

- O interpretare $i:\{p_1,p_2,\ldots,p_n\}\rightarrow\{T,F\}$ care evaluează formula U ca <u>adevărată</u>, $i(U)$=T, se numeşte ***model*** al formulei.

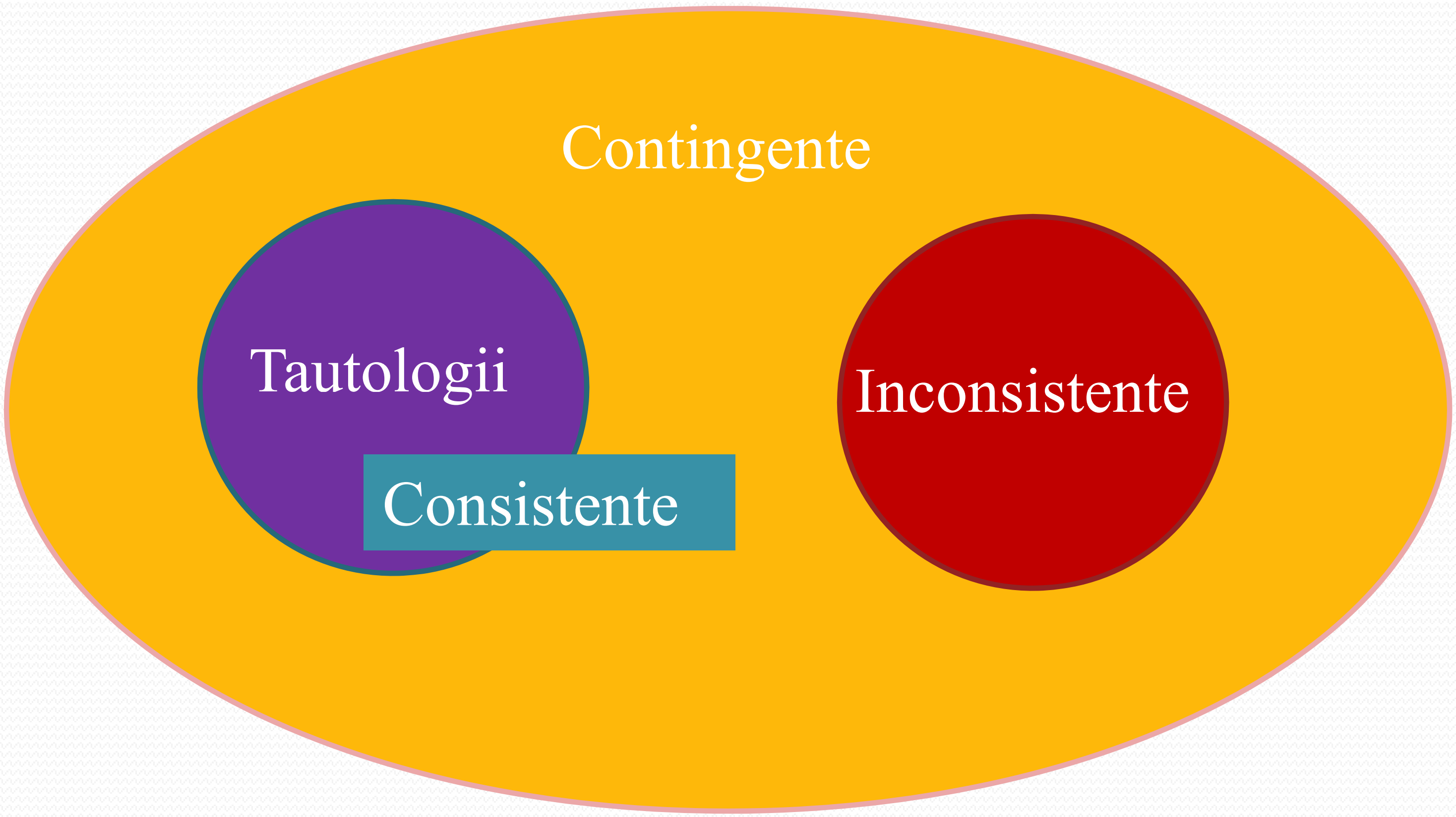
- O interpretare $i:\{p_1,p_2,\ldots,p_n\}\rightarrow\{T,F\}$ care evaluează formula U ca <u>falsă</u>, $i(U)$=F, se numeşte ***anti-model*** al formulei.

Concepte semantice (Def.) – cont.

Fie formula propoziţională $U(p_1,p_2,\ldots,p_n)\in F_P$.

- U se numeşte ***consistentă (realizabilă)*** dacă şi numai dacă are cel puţin un model, deci poate fi evaluată ca adevărată: $\exists i:\{p_1,p_2,\ldots,p_n\}\rightarrow\{T,F\}$ astfel încât $i(U)$=T.
- U se numeşte ***validă (tautologie)***, notaţie: $\models U$, dacă şi numai dacă U este evaluată ca adevărată în orice interpretare, adică: $\forall i:\{p_1,p_2,\ldots,p_n\}\rightarrow\{T,F\}$, $i(U)$=T. Toate interpretările formulei U sunt modele ale formulei.
- Formula U se numeşte ***inconsistentă (nerealizabilă)*** dacă şi numai dacă U nu are niciun model, adică U este interpretată totdeauna ca falsă: $\forall i:\{p_1,p_2,\ldots,p_n\}\rightarrow\{T,F\}$, $i(U)$=F.
- Formula U se numeşte ***contingentă*** dacă şi numai dacă este consistentă, dar nu este validă.

Tipuri de formule



Metasimboluri – relații semantice între formule

- Formula V este ***consecinţă logică*** a formulei U,

  notaţie: $U \models V$, dacă şi numai dacă $\forall i{:}F_P \to \{T,F\}$ astfel încât $i(U)=T$, are loc $i(V)=T$.

- Formulele $U(p_1,p_2,\ldots,p_n)\in F_P$ şi $V(p_1,p_2,\ldots,p_n)\in F_P$ sunt ***logic echivalente***, notaţie: $U\equiv V$, dacă şi numai dacă tabelele lor de adevăr sunt identice, adică: $\forall i{:}F_P \to \{T,F\}$, $i(U) = i(V)$.

Exemplu

- $U(p,q,r) = (\neg p \vee q) \wedge (r \vee p)$,
- $V(p,q,r) = (\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge p)$
- $p \uparrow \neg p$
- $p \downarrow \neg p$

Tabela de adevăr

	p	q	r	$\neg p \vee q$	$r \vee p$	$U(p,q,r)$	$V(p,q,r)$	$p \uparrow \neg p$	$p \downarrow \neg p$
i_1	T	T	T	T	T	T	T	T	F
i_2	T	T	F	T	T	T	T	T	F
i_3	T	F	T	F	T	F	F	T	F
i_4	T	F	F	F	T	F	F	T	F
i_5	F	T	T	T	T	T	T	T	F
i_6	F	T	F	T	F	F	F	T	F
i_7	F	F	T	T	T	T	T	T	F
i_8	F	F	F	T	F	F	F	T	F

$U(p,q,r) = (\neg p \vee q) \wedge (r \vee p)$,

$V(p,q,r) = (\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge p)$

Observații

- modele pt. U: i_1, i_2, i_5 şi i_7

  $i_1 : \{p,q,r\} \to \{T,F\}$, $i_1(p)=T$, $i_1(q)=T$, $i_1(r)=T$ şi $i_1(U)=T$
- anti-modele pt. U: i_3, i_4, i_6 şi i_8
- $p \uparrow \neg p$ - tautologie
- $p \downarrow \neg p$ – inconsistentă
- $U \equiv V$
- $U \models \neg p \vee q$

Concepte semantice pentru mulțimi de formule

- O ***mulţime*** $\{U_1,U_2,\ldots,U_n\}$ de formule se numeşte ***consistentă (realizabilă)*** dacă şi numai dacă formula $U_1\wedge U_2\wedge\ldots\wedge U_n$ este consistentă, adică: $\exists i{:}F_P\rightarrow\{T,F\}$ astfel încât $i(U_1\wedge U_2\wedge\ldots\wedge U_n)$=T, ***i*** se numeşte ***model*** al mulţimii $\{U_1,U_2,\ldots,U_n\}$.
- O ***mulţime*** $\{U_1,U_2,\ldots,U_n\}$ de formule se numeşte ***inconsistentă (nerealizabilă, contradictorie)*** dacă şi numai dacă formula $U_1\wedge U_2\wedge\ldots\wedge U_n$ este inconsistentă, adică , $\forall i{:}F_P\rightarrow\{T,F\}$ astfel încât $i(U_1\wedge U_2\wedge\ldots\wedge U_n)$= F, ***i*** se numeşte ***anti-model*** al mulţimii $\{U_1,U_2,\ldots,U_n\}$.
- Formula V este ***consecinţă logică*** a mulţimii de formule $\{U_1,U_2,\ldots,U_n\}$ şi se notează $U_1,U_2,\ldots,U_n \models V$, dacă şi numai $\forall i{:}F_P\rightarrow\{T,F\}$ astfel încât $i(U_1\wedge U_2\wedge\ldots\wedge U_n)$= T, are loc $i(V)$=T. Formulele $U_1,U_2,\ldots,U_n$ se numesc *premize, ipoteze, fapte*, iar V se numeşte *concluzie*.

Teoremă

- *Fie* $S=\{U_1,U_2,\ldots,U_n\}$ *o mulţime de formule propoziţionale.*

1. *Dacă S este o mulţime consistentă, atunci* $\forall j,\ 1\le j\le n$, $S-\{U_j\}$ *este o mulţime consistentă.*
2. *Dacă S este o mulţime consistentă şi V este o formulă validă, atunci mulţimea* $S\cup\{V\}$ *este consistentă.*
3. *Dacă S este o mulţime inconsistentă, atunci* $\forall V\in F_p$ *mulţimea* $S\cup\{V\}$ *este inconsistentă.*
4. *Dacă S este o mulţime inconsistentă şi* U_j *este o formulă validă, unde* $1\le j\le n$, *atunci mulţimea* $S-\{U_j\}$ *este inconsistentă.*

Teoremă

- *Fie* $U_1, U_2, \ldots, U_n, U, V$ *formule propoziţionale.*
- $\models U$ ***dacă şi numai dacă*** $\neg U$ *este inconsistentă (O formulă este tautologie* ***dacă şi numai dacă*** *negaţia sa este o formulă inconsistentă).*
- $U \models V$ ***dacă şi numai dacă*** $\models U \rightarrow V$ ***dacă şi numai dacă*** *mulţimea* $\{U, \neg V\}$ *este inconsistentă.*
- $U \equiv V$ ***dacă şi numai dacă*** $\models U \leftrightarrow V$.
- $U_1, U_2, \ldots, U_n \models V$ ***dacă şi numai dacă*** $\models U_1 \wedge U_2 \wedge \ldots \wedge U_n \rightarrow V$ ***dacă şi numai dacă*** *mulţimea* $\{U_1, U_2, \ldots, U_n, \neg V\}$ *este inconsistentă.*

Echivalențe logice în logica propozițională

- Legile lui DeMorgan

  $\neg(U \wedge V) \equiv \neg U \vee \neg V$ și $\neg(U \vee V) \equiv \neg U \wedge \neg V$
- Legile de absorbţie

  $U \wedge (U \vee V) \equiv U$ și $U \vee (U \wedge V) \equiv U$
- Legile de comutativitate

  $U \wedge V \equiv V \wedge U$ și $U \vee V \equiv V \vee U$
- Legile de asociativitate

  $U \wedge (V \wedge Z) \equiv (U \wedge \mathrm{V}) \wedge Z$ și $U \vee (V \vee Z) \equiv (U \vee \mathrm{V}) \vee Z$
- Legile de distributivității

  $U \wedge (V \vee Z) \equiv (U \wedge \mathrm{V}) \vee (U \wedge Z)$ și $U \vee (V \wedge Z) \equiv (U \vee \mathrm{V}) \wedge (U \vee Z)$
- Legile de idempotenţă

  $U \wedge U \equiv U$ și $U \vee U \equiv U$

Alte echivalențe logice

- Legile de simplificare

$\neg\neg U \equiv U$ $\quad$ $U \rightarrow U \equiv T$

$U \wedge \neg U \equiv F$ $\quad$ $U \vee \neg U \equiv T$

$T \wedge U \equiv U$ $\quad$ $F \vee U \equiv U$

$U \rightarrow T \equiv T$ $\quad$ $U \rightarrow F \equiv \neg U$

$T \rightarrow U \equiv U$ $\quad$ $F \rightarrow U \equiv T$

$U \leftrightarrow T \equiv U$ $\quad$ $U \leftrightarrow F \equiv \neg U$

$U \oplus T \equiv \neg U$ $\quad$ $U \oplus F \equiv U$

$U \leftrightarrow U \equiv T$ $\quad$ $U \oplus U \equiv F$

- Definirea conectivelor

$U \rightarrow V \equiv \neg U \vee V$ $\quad$ $U \rightarrow V \equiv \neg(U \wedge \neg V)$

$U \rightarrow V \equiv U \leftrightarrow (U \wedge V)$ $\quad$ $U \rightarrow V \equiv V \leftrightarrow (U \vee V)$

$U \leftrightarrow V \equiv (U \rightarrow V) \wedge (V \rightarrow U)$

$U \oplus V \equiv \neg(U \rightarrow V) \vee \neg(V \rightarrow U)$

$U \leftrightarrow V \equiv (U \vee V) \rightarrow (U \wedge V)$

$U \vee V \equiv \neg(\neg U \wedge \neg V)$ $\quad$ $U \wedge V \equiv \neg(\neg U \vee \neg V)$

$U \vee V \equiv \neg U \rightarrow V$ $\quad$ $U \wedge V \equiv \neg(U \rightarrow \neg V)$

$\neg U \equiv U \uparrow U \equiv U \downarrow U$

$U \vee V \equiv (U \uparrow U) \uparrow (V \uparrow V) \equiv (U \downarrow V) \downarrow (U \downarrow V)$

$U \wedge V \equiv (U \downarrow U) \downarrow (V \downarrow V) \equiv (U \uparrow V) \uparrow (U \uparrow V)$

Principiul dualității

- Pentru orice echivalenţă logică $U \equiv V$ care conţine doar conectivele $\neg, \wedge, \vee, \uparrow, \downarrow$ există o altă echivalenţă logică, $U' \equiv V'$, unde U', V' sunt formule obţinute din U, V prin interschimbarea conectivelor logice duale: $(\wedge, \vee)$, $(\uparrow, \downarrow)$ şi a valorilor de adevăr: T, F.

- *Conective duale*: $(\wedge, \vee)$, $(\uparrow, \downarrow)$, $(\leftrightarrow, \oplus)$.
- *Valori de adevăr duale*: T şi F.
- *Concepte duale*: tautologie şi formulă inconsistentă.

Forme normale în logica propoziţiilor

1. Un ***literal*** este o variabilă propoziţională sau negaţia sa.
2. O ***clauză*** este disjuncţia unui număr finit de literali.
3. Un ***cub*** este conjuncţia unui număr finit de literali.
4. ***Clauza vidă***, simbolizată prin □, este clauza fără literali, fiind singura clauză inconsistentă.
5. O formulă este în ***formă normală disjunctivă* (*FND*)**, dacă aceasta este scrisă ca o disjuncţie de cuburi $\vee_{i=1}^{p} (\wedge_{j=1}^{q_i} l_{ij})$ unde l_{ij} sunt literali.
6. O formulă este în ***formă normală conjunctivă* (*FNC*)**, dacă aceasta este scrisă ca o conjuncţie de clauze: $\wedge_{i=1}^{n} (\vee_{j=1}^{m_i} l_{ij})$ unde l_{ij} sunt literali.

Proprietate

Fie mulţimea de literali $\{l_1, l_2, ..., l_n\}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

- clauza $\vee_{i=1}^{n} l_i$ este o validă;
- cubul $\wedge_{i=1}^{n} l_i$ este inconsistent;
- în mulţimea $\{l_1, l_2, ..., l_n\}$ există cel puţin o pereche de literali opuşi, adică: $\exists i, j \in \{1, ..., n\}$ astfel încât $l_i = \neg l_j$.

Teoremă

- *Orice formulă admite o formă normală conjunctivă şi o formă normală disjunctivă logic echivalente cu ea.*

Algoritmul de normalizare

Pas1:

Înlocuirea formulelor de tip $\boldsymbol{U \to V}$ cu forma echivalentă: $\neg U \vee V$

Înlocuirea formulelor de tip $\boldsymbol{U \leftrightarrow V}$ cu forma echivalentă:

$(\neg U \vee V) \wedge (\neg V \vee U)$.

Pas2:

Aplicarea legilor lui **DeMorgan** (se recomandă aplicarea dinspre exterior spre interior)==> negaţia va preceda doar variabilele propoziţionale.

Eliminarea negaţiilor multiple folosind echivalenţa logică: $\neg\neg\, U \equiv U$.

Pas3: Aplicarea legilor **distributivităţii**.

Pentru FND FNC

$U \wedge (V \vee Z) \equiv (U \wedge \mathrm{V}) \vee (U \wedge Z)$ respectiv $U \vee (V \wedge Z) \equiv (U \vee \mathrm{V}) \wedge (U \vee Z)$

Pas4: Simplificarea formei obţinute folosind alte echivalenţe logice: legile de simplificare, legile absorbţiei, legile de idempotenţă.

Teoremă

- *O formulă în forma normală conjunctivă (FNC) este <u>tautologie</u> dacă şi numai dacă <u>toate clauzele</u> sale sunt valide.*
- *O formulă în forma normală disjunctivă (FND) este <u>inconsistentă</u> dacă şi numai dacă <u>toate cuburile</u> sale sunt inconsistente.*

Observații

- Prima parte a teoremei furnizează o ***metodă directă*** de rezolvare a problemei decizionale (verificarea dacă o formulă este tautologie) în logica propoziţiilor.
- FND a unei formule propoziţionale furnizează toate <u>modelele</u> formulei iniţiale, prin găsirea interpretărilor care evaluează cuburile componente ca adevărate.
- FNC a unei formule propoziţionale furnizează toate <u>anti-modelele</u> formulei iniţiale prin găsirea interpretărilor care evaluează clauzele componente ca false.
- Cele două formulări din teorema precedentă sunt afirmaţii duale.