Seminar 1

Ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi

În acest seminar vom studia ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi în formă normală rezolvabile efectiv.

$$y'(x) = f(x, y(x)) \tag{1.1}$$

1.1 Ecuaţii cu variabile separabile

Ecuaţiile diferenţiale de ordinul întâi în formă normală cu variabile separabile au următoarea formă:

$$y'(x) = f(x) \cdot g(y\,(x)), \tag{1.2}$$

unde $f \in C(I)$, $g \in C(J, \mathbb{R}^*)$, $J \subset \mathbb{R}$, sunt continue.

Fie y o soluţie a ecuaţiei (1.2) şi $f :]x_1; x_2[\to \mathbb{R}$, $g :]y_1; y_2[\to \mathbb{R}^*$. Din (1.2) obţinem:

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x).$$

Ştiind că $y' = \frac{dy}{dx}$ deducem:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx.$$

Fie $x_0 \in]x_1; x_2[$ şi notăm cu $y_0 = y(x_0)$. Integrăm relaţia de mai sus:

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dt}{g(t)} = \int_{x_0}^{x} f(s)ds. \tag{1.3}$$

Considerăm funcţia:

$$G(\xi) = \int_{y_0}^{\xi} \frac{dt}{g(t)},$$

funcţie ce este derivabilă şi strict monotonă datorită semnului funcţiei g, fapt ce asigură existenţa inversei G^{-1}. Astfel din relaţia (1.3) obţinem:

$$G(y) = \int_{x_0}^{x} f(s)ds \Longrightarrow$$

$$y(x) = G^{-1}\left(\int_{x_0}^{x} f(s)ds.\right) \tag{1.4}$$

Reciproc se poate arăta că orice funcţie de forma (1.4) este soluţie a ecuaţiei (1.2).

Observaţia 1.1.1 *Dacă există $y_0 \in]y_1; y_2[$ astfel încât $g(y_0) = 0$ atunci funcţia constantă $y(x) \equiv y_0$ este soluţie a ecuaţiei (1.2). Astfel de soluţii se numesc* ***soluţii singulare****.*

Exerciţiul 1.1.1 *Să se rezolve ecuaţiile diferenţiale:*

1. $y' = 2x(1 + y^2)$;
2. $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0$;
3. $xy' = y^3 + y$;
4. $xy + (2x - 1)y' = 0$;
5. $y' = k \cdot \dfrac{y}{x}, \quad k \in \mathbb{R}^*$;
6. $y - xy' = a(1 + x^2y')$, $a \in \mathbb{R}^*$.

Rezolvare.

1. $f(x) = 2x$, $g(y) = 1 + y^2 > 0$

$$\frac{y'}{1+y^2} = 2x \Longrightarrow \int \frac{dt}{1+t^2} = \int 2sds \Longrightarrow arctg(y) = x^2+c \Longrightarrow y = tg(x^2+c), \;\; c \in \mathbb{R}.$$

Observaţia 1.1.2 *Orice funcţie de forma de mai sus definită pe un interval este soluţie a ecuaţiei.*

2. $y' = -\dfrac{2x}{x^2-1} \cdot y^2$

   $f(x) = -\dfrac{2x}{x^2-1}, \quad f : \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\} \to \mathbb{R}$

   $g(y) = y^2, \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$

   Se observă că pentru $y_0 = 0 \Longrightarrow g(y_0) = 0$. Astfel $y \equiv 0$ este soluţie singulară.

   Pentru cazul în care $y \neq 0$ avem:

$$-\frac{dy}{y^2} = \frac{2x}{x^2-1}dx \Longrightarrow y^{-1} = \ln\left|x^2 - 1\right| + c \Longrightarrow y(x) = \frac{1}{\ln|x^2-1| + c}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Conform teoriei generale ar trebui să considerăm 5 cazuri distincte corespunzătoare intervalelor, dar cum expresiile primitivelor sunt aceleaşi se pot rezolva simultan toate cazurile.

De exemplu, dacă $c < 0$ atunci soluţiile sunt definite pe intervalele:
$\left]-\infty; -(1+e^{-c})^{\frac{1}{2}}\right[$; $\left]-(1+e^{-c})^{\frac{1}{2}}; -1\right[$; $]-1;1[$; $\left]1; (1+e^{-c})^{\frac{1}{2}}\right[$; $\left](1+e^{-c})^{\frac{1}{2}}; +\infty\right[$.

Observaţia 1.1.3 *În ecuaţia iniţială nu apar discontinuităţile $x = -1$ şi $x = 1$. De aceea suntem tentaţi să extindem prin continuitate soluţia atribuindu-i valoarea 0 în $x = -1$ şi $x = 1$. Acest lucru nu este posibil deoarece extensiile obţinute nu sunt funcţii derivabile (nici măcar lateral) în $x = -1$ şi $x = 1$.*

3. Soluţia în formă implicită este: $\ln y - \frac{1}{2}\ln(y^2+1) = \ln x + c$ sau dacă înlocuim c cu $\ln c$ obţinem soluţia în formă explicită

   $y(x) = \pm\sqrt{\dfrac{c^2x^2}{1-c^2x^2}}$, $c \in \mathbb{R}$.

4. Soluţii singulare: $y(x) = 0$;

   soluţia generală în formă implicită: $\ln|y| = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\ln|2x-1| + c$

   sau dacă înlocuim c cu $\ln c$ obţinem soluţia în formă explicită

   $y(x) = c \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \cdot |2x-1|^{-\frac{1}{4}}$, $c \in \mathbb{R}$.

5. Soluţii singulare: $y(x) = 0$;

   soluţia generală în formă explicită: $y(x) = cx^k$, $c \in \mathbb{R}$.

6. Ecuaţia devine $y' = \dfrac{y-a}{x(ax+1)}$

   Soluţii singulare: $y(x) = 0$;

   Soluţia generală în formă explicită: $y(x) = a + \dfrac{cx}{1+ax}$, $c \in \mathbb{R}$.

1.2 Ecuaţii omogene în sens Euler

Ecuaţiile diferenţiale omogene în sens Euler au următoarea formă:

$$y'(x) = g(x,y), \tag{1.5}$$

unde funcţia g este omogenă de grad 0.

Definiţia 1.2.1 *Funcţia $g(x,y)$ este omogenă de grad k dacă:*

$$g(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k g(x,y).$$

Pentru $k = 0$ avem $g(\lambda x, \lambda y) = g(x,y)$, lucru ce ne permite scrierea ecuaţiei (1.5) în forma:

$$y'(x) = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{1.6}$$

Rezolvarea acestei ecuaţii se face prin substituţia:

$$z(x) = \frac{y(x)}{x}.$$

Înlocuind în (1.6) obţinem ecuaţia cu variabile separabile:

$$z'(x) = \frac{1}{x} \cdot [f(z) - z]$$

Exerciţiul 1.2.1 *Să se rezolve:*

1. $2x^2y' = x^2 + y^2$;
2. $y' = -\dfrac{x+y}{y}$;
3. $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$;
4. $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$;
5. $y' = \dfrac{y}{x} + \operatorname{tg} \dfrac{y}{x}$
6. $x - y\cos\left(\dfrac{y}{x}\right) + x\cos\left(\dfrac{y}{x}\right) y' = 0$

Soluţii:

1. Soluţia generală: $y(x) = x - \dfrac{2}{\ln|x| + c}$

   soluţie singulară $y(x) = x$;

2. Soluţia generală: $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{y^2+xy+x^2}{x^2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{2y-x}{x}\right)\right) = -\ln|x| + c$

3. Soluţia generală: $y(x) = x\ln|\ln|x| + c|$

4. Soluţia generală: $y(x) = x\sin(\ln|x| + c)$

   Soluţii singulare: $y(x) = \pm x$

5. Soluţia generală: $y(x) = x\arcsin(cx)$;

6. Soluţia generală: $y(x) = x\arcsin(\ln|x| + c)$

   Soluţii singulare: $y(x) = k\pi x$, $k \in \mathbb{Z}$.

1.3 Ecuaţii liniare

Forma generală a ecuaţiilor diferenţiale liniare este:

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{1.7}$$

unde P şi Q sunt funcţii continue. Rezolvarea ecuaţiilor liniare se face astfel:

1. Se rezolvă ecuaţia liniară omogenă:

   $$y' + P(x)y = 0, \tag{1.8}$$

   ecuaţia omogenă fiind o ecuaţie cu variabile separabile, soluţia generală o notăm cu y_0;

2. Se caută o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene y_p prin metoda variaţiilor constantelor;

3. Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniare neomogene este:

   $$y = y_0 + y_p \tag{1.9}$$

Exerciţiul 1.3.1 *Să se rezolve:*

1. $y' + y \cdot \operatorname{tg}(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$;

2. $y' + \dfrac{2}{x} \cdot y = x^3$;

3. $y' + 2x \cdot y = 2xe^{-x^2}$;

4. $xy' - y + x = 0$;

5. $y' - y = \sin(x)$

6. $y' + \dfrac{x}{1-x^2}y = x + \arcsin(x)$

Soluţii:

1. $y(x) = c \cdot \cos(x) + \sin(x)$;

2. $y(x) = \dfrac{x^4}{6} + \dfrac{c}{x^2}$;

3. $y(x) = (c + x^2)e^{-x^2}$;

4. $y(x) = cx - x \ln|x|$;

5. $y(x) = xe^x - \frac{1}{2}(\cos(x) + \sin(x))$;

6. $y(x) = c\sqrt{1-x^2} - 1 + x^2 + \dfrac{1}{2}\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin^2(x)$.

Bibliografie

[1] Gh. Micula, P. Pavel, *Ecuaţii diferenţiale şi integrale prin probleme şi exerciţii*, Ed. Dacia, 1989.

[2] G. Moroşanu, *Ecuaţii diferenţiale. Aplicaţii*, Ed. Acad. RSR, 1989.

[3] M.A. Şerban, *Ecuaţii şi sisteme de ecuaţii diferenţiale*, Ed. Presa Univ. Clujană, Cluj-Napoca, 2009.