

Logică computațională

Curs 8

Lector dr. Pop Andreea-Diana

Logica predicatelor de ordinul I

- "Afară plouă"
- $p \equiv P(a) \text{ (} a - \text{azi)}$
- "În fiecare zi plouă afară"
- $(\forall x) P(x) \text{ (} x - \text{ziua)}$
- "Mâine va ploua"
- $P(b) \text{ (} b - \text{mâine)}$
- "Acum o lună a plouat"
- $P(f(a)) \text{ (} f(x) := x - 30)$



Sistemul axiomatic al logicii predicatelor de ordinul I - Alfabetul

- $P = (\Sigma_{Pr}, F_{Pr}, A_{Pr}, R_{Pr})$
- $\Sigma_{Pr} = Var \cup Const \cup (\cup_{j=1}^n \mathcal{F}_j) \cup (\cup_{j=1}^n \mathcal{P}_j) \cup \mathcal{P}_0 \cup Conective \cup Cuantif$
 - $Var = \{ x, y, z, \dots \}$ – mulțimea *simbolurilor de variabile*
 - $Const = \{ a, b, c, \dots \}$ – mulțimea *constantelor*
 - $\mathcal{F}_j = \{ f \mid f: D^j \rightarrow D \}$ – mulțimea *simbolurilor de funcții* de aritate “j”
 - $\mathcal{P}_j = \{ P \mid P: D^j \rightarrow \{T, F\} \}$ – mulțimea *simbolurilor de predicate* de aritate “j”
 - $\mathcal{P}_0 = \{ p, q, r, \dots \} \cup \{T, F\}$ – mulțimea *variabilelor propoziționale* și a *valorilor de adevăr*
 - $Conective = \{ \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow \}$
 - $Cuantif = \{ \forall \text{ (cuantificatorul universal)}, \exists \text{ (cuantificatorul existențial)} \}$

TERM, ATOM, Literal

- **TERM** = mulțimea *termenilor*:
 - $Var \subset TERM$
 - $Const \subset TERM$
 - dacă $f \in \mathcal{F}_k$ și $t_1, \dots, t_k \in TERM$ atunci $f(t_1, \dots, t_k) \in TERM$
- **ATOM** = mulțimea *formulelor atomice (atomilor)*:
 - $T, F \in ATOM$
 - dacă $P \in \mathcal{P}_k$ și $t_1, \dots, t_k \in TERM$ atunci $P(t_1, \dots, t_k) \in ATOM$
- **Literal** = un atom sau negația sa

Formule corect construite

- $F_{Pr} =$ mulțimea formulelor predicative bine formate
 - $ATOM \subset F_{Pr}$
 - dacă $U \in F_{Pr}$ și $x \in Var$ astfel încât x nu se află deja sub incidența unui cuantificator (nu este legat), atunci:
 $(\forall x) U(x) \in F_{Pr}$ și $(\exists x) U(x) \in F_{Pr}$
 - dacă $U, V \in F_{Pr}$ astfel încât U și V nu conțin aceeași variabilă atât liberă cât și legată, atunci:
 $\neg U \in F_{Pr}, U \wedge V \in F_{Pr}, U \vee V \in F_{Pr}, U \rightarrow V \in F_{Pr}, U \leftrightarrow V \in F_{Pr}$

Axiome

- $A_{Pr} = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ scheme axiomatice
 - $A_1: U \rightarrow (V \rightarrow U)$
 - $A_2: (U \rightarrow (V \rightarrow Z)) \rightarrow ((U \rightarrow V) \rightarrow (U \rightarrow Z))$
 - $A_3: (U \rightarrow V) \rightarrow (\neg V \rightarrow \neg U)$
 - $A_4: (\forall x) U(x) \rightarrow U(t)$, unde t este un termen arbitrar
 - $A_5: (U \rightarrow V(y)) \rightarrow (U \rightarrow (\forall x) V(x))$, unde y este o variabilă liberă în V care nu apare în U , iar x nu este variabilă liberă nici în U , nici în V

Reguli de inferență

- $R_{Pr} = \{mp, gen\}$

- *modus ponens*: $U, U \rightarrow V \vdash_{mp} V$

- *regula generalizării*: $U(x) \vdash_{gen} (\forall x) U(x)$

(x era o variabilă liberă în U)

Definiții

- Variabilele din formulele predicative care se află sub incidența unui cuantificator se numesc *variabile legate*, în caz contrar ele se numesc *variabile libere*.
- O *formulă* predicativă se numește *închisă*, dacă toate variabilele sale sunt legate, iar în caz contrar se numește *deschisă*.

Exemplu – Transformarea unor afirmații din limbaj natural în logica predicatelor

- Dacă x și y sunt întregi nenegativi și x este mai mare decât y , atunci x^2 este mai mare decât y^2 .

$D = \mathbf{N}$

Variabilele (din D): x, y

Constantele (din D): 2

Simboluri de Funcții (definite pe $D^n \rightarrow D$):

$f: \mathbf{N}^2 \rightarrow \mathbf{N}, f(x, y) = x^y$

Simboluri de Predicate (definite pe $D^n \rightarrow \{T, F\}$):

$P: \mathbf{N}^2 \rightarrow \{T, F\}, P(x, y) = "x > y"$

Formula Predicativă: $(\forall x) (\forall y) (P(x, y) \rightarrow P(f(x, 2), f(y, 2)))$

Definiția deducției

- Fie formulele U_1, U_2, \dots, U_n numite ipoteze și V formulă propozițională. Spunem că **V este deductibilă din U_1, U_2, \dots, U_n** și notăm $U_1, U_2, \dots, U_{n-1}, U_n \vdash V$, dacă există o secvență de formule (f_1, f_2, \dots, f_m) astfel încât $f_m = V$ și $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ avem:
 - $f_i \in A_{Pr}$;
 - $f_i \in \{U_1, U_2, \dots, U_n\}$;
 - $f_j, f_k \vdash_{mp} f_i, j < i$ și $k < i$
 - $f_j \vdash_{gen} f_i, j < i$
- Secvența (f_1, f_2, \dots, f_m) se numește *deducția* lui V din U_1, U_2, \dots, U_n .

Definiția teoremei

- O formulă $U \in F_{Pr}$, astfel încât $\emptyset \vdash U$ (sau $\vdash U$) se numește *teoremă*.

Exercițiu

$$A_1: U \rightarrow (V \rightarrow U)$$

$$A_2: (U \rightarrow (V \rightarrow Z)) \rightarrow ((U \rightarrow V) \rightarrow (U \rightarrow Z))$$

$$A_3: (U \rightarrow V) \rightarrow (\neg V \rightarrow \neg U)$$

$$A_4: (\forall x) U(x) \rightarrow U(t), \dots$$

$$A_5: (U \rightarrow V(y)) \rightarrow (U \rightarrow (\forall x) V(x)), \dots$$

$$\bullet (\forall y) P(y) \vdash (\forall x) (Q(x) \rightarrow P(x))$$

$$U, U \rightarrow V \vdash_{mp} V$$

$$f_1: (\forall y) P(y) \text{ (ip)}$$

$$U(x) \vdash_{gen} (\forall x) U(x)$$

$$f_2: (\forall y) P(y) \rightarrow P(x) \text{ (A}_4\text{)}$$

$$f_1, f_2 \vdash_{mp} f_3: P(x)$$

$$f_4: P(x) \rightarrow (Q(x) \rightarrow P(x)) \text{ (A}_1\text{)}$$

$$f_3, f_4 \vdash_{mp} f_5: Q(x) \rightarrow P(x)$$

$$f_5 \vdash_{gen} f_6: (\forall x) (Q(x) \rightarrow P(x))$$

(f_1, f_2, \dots, f_6) este deducția lui $(\forall x) (Q(x) \rightarrow P(x))$ din $(\forall y)$

$P(y)$, deci $(\forall y) P(y) \vdash (\forall x) (Q(x) \rightarrow P(x))$

Semantica logicii predicatelor de ordinul I

- realizează legătura dintre

- constantele,
- simbolurile de funcții,
- simbolurile de predicate respectiv

constantele, funcțiile și predicatele din conceptualizarea universului modelat

- este furnizat un înțeles în termenii universului modelat pentru orice formulă din limbaj

Definiția interpretării

- O *interpretare* pentru un limbaj L al calculului predicatelor este o pereche $I = \langle D, m \rangle$, unde :
 - D este o mulțime nevidă numită *domeniu* al interpretării.
 - m este o funcție care asociază:
 - o valoare fixă $m(c)$ din domeniul D unei constante c .
 - o funcție $m(f): D^n \rightarrow D$ fiecărui simbol de funcție f de aritate n ;
 - un predicat $m(P): D^n \rightarrow \{T, F\}$ fiecărui simbol de predicat P de aritate n .

Notății

pentru interpretarea $I = \langle D, m \rangle$:

- $|I| = D$ este domeniul interpretării I
- $I|x| = m(x)$ unde x este constantă, simbol de funcție sau simbol de predicat.
- $As(I)$ mulțimea funcțiilor de asignare de variabile peste domeniul interpretării I .

O funcție $a \in As(I)$ este definită astfel $a: Var \rightarrow |I|$.

- $[a]_x = \{a' \mid a' \in As(I) \text{ și } a'(y) = a(x), \text{ pentru orice } y \neq x\}$.

Definiția funcției de evaluare

Fie o interpretare I și $a \in \text{As}(I)$. Se definește inductiv **funcția de evaluare** v_a^I :

- $v_a^I(x) = a(x)$, $x \in \text{Var}$;
- $v_a^I(c) = I|c|$, $c \in \text{Const}$;
- $v_a^I(f(t_1, \dots, t_n)) = I|f|(v_a^I(t_1), \dots, v_a^I(t_n))$, $f \in \mathcal{F}_k$, $n > 0$;
- $v_a^I(P(t_1, \dots, t_n)) = I|P|(v_a^I(t_1), \dots, v_a^I(t_n))$, $P \in \mathcal{P}_k$, $n > 0$;
- $v_a^I(\neg A) = \neg v_a^I(A)$; $v_a^I(A \wedge B) = v_a^I(A) \wedge v_a^I(B)$
- $v_a^I(A \vee B) = v_a^I(A) \vee v_a^I(B)$; $v_a^I(A \rightarrow B) = v_a^I(A) \rightarrow v_a^I(B)$
- $v_a^I((\exists x)A(x)) = T$ dacă și numai dacă $v_{a'}^I(A(x)) = T$ pentru o funcție $a' \in [a]_x$
- $v_a^I((\forall x)A(x)) = T$ dacă și numai dacă $v_{a'}^I(A(x)) = T$ pentru orice funcție $a' \in [a]_x$

Concepte semantice

- O formulă A este *realizabilă (consistentă)* dacă și numai dacă există o interpretare I și o funcție $a \in \text{As}(I)$ astfel încât $v_a^I(A)=T$. În caz contrar formula se numește *nerealizabilă (inconsistentă)*.
- Formula A este *adevărată în interpretarea I* dacă și numai dacă pentru orice funcție $a \in \text{As}(I)$ de asignare avem $v_a^I(A)=T$ și notăm $\models_I A$, iar I se numește *model* al lui A .
- Interpretarea I se numește *anti-model* al formulei predicative A dacă A este evaluată ca falsă în I , adică: $\forall a \in \text{As}(I)$ are loc $v_a^I(A)=F$.
- Formula A este *validă (tautologie)* dacă și numai dacă A este adevărată în orice interpretare și se notează: $\models A$.
- Două formule A și B sunt *logic echivalente* dacă $v_a^I(A)=v_a^I(B)$ pentru orice interpretare I și funcție a de asignare. Notăție $A \equiv B$.
- O mulțime S de formule *implică logic* o formulă A dacă toate modelele mulțimii (adică modelele conjuncției formulelor din S) sunt modele ale formulei. Spunem că A este o *consecință logică* a mulțimii de formule S și notăm $S \models A$.
- O mulțime de formule predicative este *consistentă* dacă formula obținută prin conjuncția elementelor sale este consistentă, adică are cel puțin un model.
- O mulțime de formule este *inconsistentă* dacă nu există nici un model pentru formula obținută prin conjuncția elementelor sale.

Observații

- Evaluarea unei formule A închise depinde doar de interpretarea în care se evaluează formula, notându-se $v^I(A)$.
- Dacă interpretarea are domeniu finit:
 - o formulă cuantificată *universal* este înlocuită cu *conjuncția* instanțelor acesteia folosind toate elementele domeniului de interpretare
 - o formulă cuantificată *existențial* este înlocuită cu *disjuncția* instanțelor acesteia folosind toate elementele domeniului de interpretare

Exercițiu:

Evaluați într-o interpretare cu domeniu finit și una cu domeniu infinit:

- $U = (\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$



Exercițiu (domeniu infinit):

$$U = (\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$$

$$I = \langle D, m \rangle$$

$$D = \mathbf{R}$$

Sunt constante (a,b,c)? Nu

Sunt simboluri de funcții? Nu

Sunt simboluri de Predicate? Da: P, Q – ambele au aritatea 1

$$m(P): \mathbf{R} \rightarrow \{T, F\}, m(P)(x) = "x < 0"$$

$$m(Q): \mathbf{R} \rightarrow \{T, F\}, m(Q)(x) = "x > 0"$$

$$\begin{aligned} v^I(U) &= v^I((\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)) = \\ &= v^I((\forall x)(P(x) \vee Q(x))) \rightarrow v^I((\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)) = \\ &= v^I((\forall x)(P(x) \vee Q(x))) \rightarrow v^I((\forall x)P(x)) \vee v^I((\forall x)Q(x)) = \\ &= " \forall x \in \mathbf{R}, x < 0 \text{ sau } x > 0 " \rightarrow " \forall x \in \mathbf{R}, x < 0 " \vee " \forall x \in \mathbf{R}, x > 0 " = \\ &= F \rightarrow F \vee F = F \rightarrow F = T, \text{ deci } I \text{ este un model} \end{aligned}$$

Exercițiu (domeniu finit):

$$U = (\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$$

$$I = \langle D, m \rangle$$

$$D = \{\text{România, Norvegia}\}$$

Sunt constante (a,b,c)? Nu

Sunt simboluri de funcții? Nu

Sunt simboluri de Predicate? Da: P, Q – ambele au aritatea 1

$m(P): \{\text{România, Norvegia}\} \rightarrow \{T, F\}$, $m(P)(x) = \text{“}x \text{ se califică la Mondială”}$

$m(Q): \{\text{România, Norvegia}\} \rightarrow \{T, F\}$, $m(Q)(\text{România}) = T$,

$m(Q)(\text{Norvegia}) = F$

$$v^I(U) = v^I((\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)) =$$

$$= v^I((\forall x)(P(x) \vee Q(x))) \rightarrow v^I((\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)) =$$

$$= v^I((\forall x)(P(x) \vee Q(x))) \rightarrow v^I((\forall x)P(x)) \vee v^I((\forall x)Q(x)) =$$

$$= (m(P)(\text{România}) \vee m(Q)(\text{România})) \wedge (m(P)(\text{Norvegia}) \vee$$

$$m(Q)(\text{Norvegia})) \rightarrow m(P)(\text{România}) \wedge m(P)(\text{Norvegia}) \vee m(Q)(\text{România}) \wedge$$

$$m(Q)(\text{Norvegia}) = (T \vee T) \wedge (T \vee F) \rightarrow (T \wedge T) \vee (T \wedge F) = T \wedge T \rightarrow T \vee F = T \rightarrow T = T$$

Deci și I este model

Echivalențe logice în calculul predicatelor

- Legile de expansiune

$(\forall x) A(x) \equiv (\forall x) A(x) \wedge A(t)$, t – termen oarecare $t \neq x$

$(\exists x) A(x) \equiv (\exists x) A(x) \vee A(t)$, t – termen oarecare $t \neq x$

- Legile infinite ale lui DeMorgan

$\neg (\exists x) A(x) \equiv (\forall x) \neg A(x)$

$\neg (\forall x) A(x) \equiv (\exists x) \neg A(x)$

- Legile de interschimbare a cuantificatorilor

$(\exists x) (\exists y) A(x, y) \equiv (\exists y) (\exists x) A(x, y)$

$(\forall x) (\forall y) A(x, y) \equiv (\forall y) (\forall x) A(x, y)$

Legi de extragere

- Legile de extragere a cuantificatorilor în fața formulei

$$A \vee (\exists x) B(x) \equiv (\exists x) (A \vee B(x))$$

$$A \vee (\forall x) B(x) \equiv (\forall x) (A \vee B(x))$$

$$A \wedge (\exists x) B(x) \equiv (\exists x) (A \wedge B(x))$$

$$A \wedge (\forall x) B(x) \equiv (\forall x) (A \wedge B(x))$$

unde formula A nu conține pe x ca variabilă liberă sau legată

$$(\exists x) A(x) \vee B \equiv (\exists x) (A(x) \vee B)$$

$$(\forall x) A(x) \vee B \equiv (\forall x) (A(x) \vee B)$$

$$(\exists x) A(x) \wedge B \equiv (\exists x) (A(x) \wedge B)$$

$$(\forall x) A(x) \wedge B \equiv (\forall x) (A(x) \wedge B)$$

unde formula B nu conține pe x ca variabilă liberă sau legată

Legile distributivității

- \exists față de \vee :

$$(\exists x) (A(x) \vee B(x)) \equiv (\exists x) A(x) \vee (\exists x) B(x)$$

- \forall față de \wedge :

$$(\forall x) (A(x) \wedge B(x)) \equiv (\forall x) A(x) \wedge (\forall x) B(x)$$

Semidistributivități

- \exists față de \wedge :

$$\models (\exists x) (A(x) \wedge B(x)) \rightarrow (\exists x) A(x) \wedge (\exists x) B(x)$$

- \forall față de \vee :

$$\models (\forall x) A(x) \vee (\forall x) B(x) \rightarrow (\forall x) (A(x) \vee B(x))$$

Forme normale ale formulelor predicative

- O formulă U predicativă este în *forma normală prenexă* dacă ea este de forma $(Q_1x_1)\dots(Q_nx_n) M$, unde $Q_i, i=1,\dots,n$ sunt cuantificatori logici, iar M nu conține cuantificatori. Secvența se numește *prefixul formulei U* , iar M este *matricea formulei U* .
- O formulă U predicativă este în *forma normală prenexă conjunctivă* dacă ea este în formă normală prenexă, iar matricea este în FNC.
- **Teoremă:**
Orice formulă din calculul predicatelor poate fi transformată într-o formă normală prenexă logic echivalentă cu ea.

Algoritmul de aducere la forma normală prenexă

- Pas 1:** Se înlocuiesc conectivele \rightarrow și \leftrightarrow folosind \neg , \wedge , \vee .
- Pas 2:** Se aplică legile finite și infinite ale lui DeMorgan astfel încât cuantificatorii să nu fie precedați de negație.
- Pas 3:** Se redenumesc variabilele legate astfel încât ele să fie distincte.
- Pas 4:** Se utilizează echivalențele logice care reprezintă *legile de extragere a cuantificatorilor în fața formulei*.
!!! Ordinea de extragere a cuantificatorilor este arbitrară.

Forma normală Skolem (Pas 5)

- Fie U o formulă predicativă, iar $U^P = (Q_1x_1) \dots (Q_nx_n) M$ una dintre formele sale normale prenexe.
- Formulei U îi corespunde o formulă în *forma normală Skolem* notată U^S care se obține astfel: pentru fiecare cuantificator existențial Q_r din prefix se aplică următoarea transformare:
 - dacă înaintea simbolului Q_r nu apare niciun cuantificator universal, atunci se alege o constantă notată \mathbf{a} , diferită de toate constantele care apar în M și se înlocuiesc toate aparițiile variabilei x_r în M cu \mathbf{a} . Se șterge (Q_rx_r) din prefixul formulei.
 - dacă înaintea simbolului Q_r apar cuantificatorii universali Q_{s_1}, \dots, Q_{s_m} , unde $1 \leq s_1 < \dots < s_m < r$, atunci alegem un simbol f de funcție de m variabile, diferit de celelalte simboluri de funcții și se înlocuiește fiecare apariție a variabilei în M cu $f(x_{s_1}, \dots, x_{s_m})$. Se șterge (Q_rx_r) din prefixul formulei.
- Constantele și funcțiile folosite pentru a înlocui variabilele existențiale se numesc *constante Skolem* și *funcții Skolem*.

Exemplu

$$(\exists x) (\exists y) (\forall z) (\exists t) (\forall s) (\exists u) (\forall w) P(x, y, z, t, s, u, w)$$

$$x \leftarrow a$$

$$y \leftarrow b$$

$$t \leftarrow f(z)$$

$$u \leftarrow g(z, s)$$

$$\text{Forma Skolem: } (\forall z) (\forall s) (\forall w) P(a, b, z, f(z), s, g(z, s), w)$$

Forma normală clauzală

- Formulei U îi corespunde o formulă în *forma normală Skolem fără cuantificatori* notată U^{Sq} care se obține prin eliminarea cuantificatorilor universali din U^S . (**Pas 6**)
- Formulei U îi corespunde o formulă în *forma normală clauzală* notată U^C care se obține din U^{Sq} prin aducerea la FNC. (**Pas 7**)
- Obs.: Transformările utilizate în procesul de Skolemizare nu păstrează echivalența logică, dar păstrează inconsistența

Teoremă

Fie U_1, U_2, \dots, U_n, V formule predicative.

- V inconsistentă **ddacă** V^P inconsistentă **ddacă** V^S inconsistentă **ddacă** V^{Sq} inconsistentă **ddacă** V^C inconsistentă.
- $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ inconsistentă **ddacă** $\{U_1^C, U_2^C, \dots, U_n^C\}$ inconsistentă.

Exercițiu: Aduceți la Forma normală Clauzală

- $U = (\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$

Pas 1: Se înlocuiesc conectivele \rightarrow și \leftrightarrow folosind \neg , \wedge , \vee .

$$U \equiv \neg (\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \vee (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$$

Pas 2: Se aplică legile finite și infinite ale lui DeMorgan astfel încât cuantificatorii să nu fie precedați de negație.

$$U \equiv (\exists x) (\neg P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$$

Pas 3: Se redenumesc variabilele legate astfel încât ele să fie distincte

$$U \equiv (\exists x) (\neg P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee (\forall y)P(y) \vee (\forall z)Q(z)$$

Pas 4: Se utilizează echivalențele logice care reprezintă *legile de extragere a cuantificatorilor în fața formulei*. (Forma Normală Prenexă)

Exercițiu: Aduceți la Forma normală Clauzală

- $U = (\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$

$$U \equiv (\exists x) (\neg P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee (\forall y)P(y) \vee (\forall z)Q(z)$$

Pas 4: Se utilizează echivalențele logice care reprezintă *legile de extragere a cuantificatorilor în fața formulei*. (Forma Normală Prenexă)

$$U \equiv U^{P_1} = (\exists x) (\forall y) (\forall z) ((\neg P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee P(y) \vee Q(z))$$

$$U \equiv U^{P_2} = (\exists x) (\forall z) (\forall y) ((\neg P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee P(y) \vee Q(z))$$

$$U \equiv U^{P_3} = (\forall y) (\exists x) (\forall z) ((\neg P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee P(y) \vee Q(z))$$

$$U \equiv U^{P_4} = (\forall z) (\exists x) (\forall y) ((\neg P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee P(y) \vee Q(z))$$

$$U \equiv U^{P_5} = (\forall y) (\forall z) (\exists x) ((\neg P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee P(y) \vee Q(z))$$

$$U \equiv U^{P_6} = (\forall z) (\forall y) (\exists x) ((\neg P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee P(y) \vee Q(z))$$

Exercițiu: Aduceți la Forma normală Clauzală

- $U = (\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$

$$U \equiv U^{P_3} \equiv (\forall y) (\exists x) (\forall z) ((\neg P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee P(y) \vee Q(z))$$

Pas 5: Eliminarea cuantificatorilor \exists (Forma normală Skolem)
(se păstrează doar inconsistența)

$$x \leftarrow f(y)$$

$$U \not\equiv U^{S_3} \equiv (\forall y) (\forall z) ((\neg P(f(y)) \wedge \neg Q(f(y))) \vee P(y) \vee Q(z))$$

Pas 6: Eliminarea cuantificatorilor \forall (Forma normală Skolem
fără cuantificatori)

$$U \not\equiv U^{Sq_3} \equiv (\neg P(f(y)) \wedge \neg Q(f(y))) \vee P(y) \vee Q(z)$$

Pas 7: Aducerea la Forma Normală Clauzală (distributivitatea \vee
față de \wedge)

$$U \not\equiv U^{C_3} \equiv (\neg P(f(y)) \vee P(y) \vee Q(z)) \wedge (\neg Q(f(y)) \vee P(y) \vee Q(z))$$

Sumar

- Pas 1:** Se înlocuiesc conectivele \rightarrow și \leftrightarrow folosind \neg , \wedge , \vee .
- Pas 2:** Se aplică legile finite și infinite ale lui DeMorgan astfel încât cuantificatorii să nu fie precedați de negație.
- Pas 3:** Se redenumesc variabilele legate astfel încât ele să fie distincte.
- Pas 4:** Se utilizează echivalențele logice care reprezintă *legile de extragere a cuantificatorilor în fața formulei*.
- Pas 5:** Eliminarea cuantificatorilor \exists (Forma normală Skolem)
- Pas 6:** Eliminarea cuantificatorilor \forall (Forma normală Skolem fără cuantificatori)
- Pas 7:** Aducerea la Forma Normală Clauzală (distributivitatea \vee față de \wedge)

Proprietățile logicii predicatelor de ordinul I

- **Teorema de completitudine și corectitudine**

Fie S o mulțime de formule predicative, iar A o formulă predicativă.

- **completitudinea:** dacă $S \models A$ atunci $S \vdash A$.
- **corectitudinea:** dacă $S \vdash A$ atunci $S \models A$.

- **Teorema respingerii**

Fie S o mulțime de formule predicative, iar A o formulă predicativă. Dacă $S \cup \{\neg A\}$ este inconsistentă atunci $S \vdash A$.

- **Teorema de deducție**

Fie S o mulțime de formule predicative, iar A o formulă predicativă. Dacă $S \cup \{A\} \vdash B$ atunci $S \vdash A \rightarrow B$.

Teorema lui Church 1936

- Problema validității unei formule în calculul predicatelor de ordinul I este *nedecidabilă*. Mulțimea formulelor valide din acest sistem logic este recursiv numărabilă, adică există o procedură P care, având ca intrare o formulă A din limbaj, are următorul comportament:
 - dacă formula A este validă, P se termină și furnizează răspunsul corespunzător;
 - dacă formula A nu este validă, P se termină cu răspunsul corespunzător *sau* execuția procedurii nu se încheie niciodată.
- Calculul predicatelor este **semi-decidabil**.