

Laborator 6: Puncte de echilibru. Stabilitate

Exercițiul 1 Să se determine soluțiile echilibru pentru fiecare din ecuațiile autonome date. Studiați stabilitatea acestora prin metoda grafică reprezentând graficul soluțiilor reprezentative și prin metoda stabilității în primă aproximație:

(a) $x'(t) = x^2(t) - 2x(t)$

(b) $x'(t) = x(t) \cdot (x(t) - 1) \cdot (x(t) - 2)$

(c) $x'(t) = \sin(x(t))$ (Indicație: pentru determinarea tuturor soluțiilor ecuației $\sin(x) = 0$ inițializați `_EnvAllSolutions := true;`)

Exercițiul 2 Reprezentați portretul fazic corespunzător următoarelor sisteme liniare omogene și studiați stabilitatea și tipul punctului de echilibru $(0; 0)$

(a)
$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) \\ y'(t) = x(t) + 2y(t) \end{cases} \quad (e) \quad \begin{cases} x'(t) = x(t) + 4y(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} x'(t) = -3x(t) + 4y(t) \\ y'(t) = -2x(t) + 3y(t) \end{cases} \quad (f) \quad \begin{cases} x'(t) = 2x(t) - y(t) \\ y'(t) = x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} x'(t) = -x(t) - y(t) \\ y'(t) = x(t) - 3y(t) \end{cases} \quad (g) \quad \begin{cases} x'(t) = -y(t) \\ y'(t) = x(t) \end{cases}$$

(d)
$$\begin{cases} x'(t) = -2x(t) \\ y'(t) = -4x(t) - 2y(t) \end{cases} \quad (h) \quad \begin{cases} x'(t) = x(t) - 4y(t) \\ y'(t) = 5x(t) - 3y(t) \end{cases}$$

Exercițiul 3 Determinați punctele de echilibru, studiați stabilitatea și tipul acestora, reprezentați portretul fazic pentru următoarele sisteme neliniare:

(a)
$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = x(t) \cdot (1 - x^2(t)) + y(t) \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} x'(t) = -2x(t) + y(t) + 2 \\ y'(t) = x(t) \cdot y(t) \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} x'(t) = y^2(t) \\ y'(t) = x(t) \end{cases}$$

(d)
$$\begin{cases} x'(t) = x^2(t) - y^2(t) \\ y'(t) = x(t) \cdot y(t) - 1 \end{cases}$$

Exercițiul 4 Se consideră modelul de tip pradă-prădător:

$$\begin{cases} x'(t) = 2 \cdot x(t) - 1.2 \cdot x(t)y(t) \\ y'(t) = -y(t) + 0.9 \cdot x(t)y(t) \\ x(0) = 0.5 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

- (a) Reprezentați graficul soluției problemei Cauchy;
- (b) Determinați punctele de echilibru și studiați stabilitatea acestora,
- (c) Reprezentați portretul fazic.

Exercițiul 5 Se consideră modelul de tip pradă-prădător în care se face o recoltare proporțională cu mărimile populațiilor respective de forma

$$\begin{cases} x'(t) &= x(t) - x(t)y(t) - H \cdot x(t) \\ y'(t) &= -y(t) + x(t)y(t) - H \cdot y(t) \\ x(0) &= 1 \\ y(0) &= 0.5 \end{cases}$$

Reprezentați grafic soluțiile și portretul fazic pentru următoarele valori ale parametrului H :

$$\begin{aligned} H &= 0 \\ H &= 0.25 \\ H &= 0.5 \\ H &= 0.75 \\ H &= 1 \\ H &= 3 \end{aligned}$$